Methode de résolution pour les équations de récurrence linéaires

A) Equation linéaires d'ordre 1

$u_n = a(n)u_{n-1} + b(n)$ avec a et b des fonctions de n et u_0 donné

Méthode des facteurs sommants

$a(n)$ $a(n)a(n-1)$ … $\Pi(i = 2 \text{ à } n)\ a(i)$	$u_n = a(n)u_{n-1} + b(n)$ $u_{n-1} = a(n)u_{n-2} + b(n)$ $u_{n-2} = a(n)u_{n-3} + b(n)$ … $u_1 = a(1)u_0 + b(1)$

$$un = u_0(\prod_{i=1}^{n} a(i)) + b(n) + \sum_{i=1}^{n-1}[b(i) \prod_{j=i+1}^{n} a(j)]$$

<u>Cas particulier :</u>

➔ a fonction constante
pout tout n, a(n) = a donné

$$u_n = a^n u_0 + b(n) + \sum_{i=1}^{n-1} a^{n-i} b(i)$$

$$u_n = a^n u_0 + \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} b(i)$$

➔ Quand en plus, b est une fonction constante

$$u_n = a^n u_0 + \sum_{i=1}^{n} a^{n-i} = a^n u_0 + b \sum_{j=0}^{n} a^j$$

$$\begin{cases} a \neq 1 => u_n = a^n u_0 + b\,\dfrac{1-a^n}{1-a} \\ a = 1 => u_n = a^n u_0 + bn \end{cases}$$

<u>Exemple :</u> Tour de Hanoï

N disques de taille strictement déscroissante

3 piquets : A,B,C

➔ Problème : faire passer les n disques du piquet A au piquet B en se servant de C comme piquet intermédiaire sans jamais poser une disque sur un disque de plus petit rayon.
  - Hanoi(A,B,C,n)
  - Algorithme :

Hanoi (A,C,B,n-1) ;
Dep(A,B) ; { déplacement du + grand disque }
Hanoï(C,B,A,n-1) ;

Opération fondamentale = déplacement d'un disque

Soit T(n) le nombre de déplacement de disques pour résoudre le problème de Hanoï de taille n.

$$T(n) = 2T(n-1) + 1$$

$$T(1) = 1$$

$$T(0) = 0$$

Pour tout n, a(n) = 2, b(n) = 1

$$T(n) = \frac{1 - 2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

B) Equations linéaires d'ordre k>=1 à coefficients constants

$u_n = a_1 u_{n-1+} a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n)$ pour n >= k
Avec f fonction de n , a_i constante et $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ donnés

Récurrence homogène

$$(E_0): u_n = a_1 u_{n-1+} a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}$$

➔ Chercher des solutions de la forme x^n

$$u_n = x^n \;=>\; x^n \;=\; a_1 x^{n-1} \;+\; a_2 x^{n-2} \;+ \cdots +\; a_k x^{n-k}$$

$$=> \; x^{n-k} \left(\; x^k \;-\; a_1 x^{k-1} \;+\; \dots + \; a_k \right) = 0$$

- x=0 -> ne nous intéresse pâs
- x solution de $x^k \;-\; a_1 x^{k-1} \;+\; \dots + \; a_k = 0$ => Equation caratéristique de E_0

<u>Exemple 1 :</u>

$u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}$ pour n >= 2

$u_0 = 0, u_1 = 1$

<u>Eq caractéristique :</u>

$$x^2 \;-\; 3x + 4 = 0$$

$$delta = 9 + 16 = 25 > 0$$

$$=> 2 \; racines \; disctinctes : 4 \; ou - 1$$

$$u_n = a4^n \; + b(-1)^n$$

<u>Calcul de a et de b :</u>

U0 = 0 = a + b ⇔ b = -a

U1 = 1 = 4a – b

A = 1/5 et b = -1/5

<u>Exemple 2 :</u>

$u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3}$ pour n >= 3

$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2$

<u>Eq caractéristique :</u>

$$x^3 + 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$(x-1)(x-2)^2 = 0$$

$$1\ racine\ simple\ et\ 2\ racine\ double$$

$$=>\ u_n = a1^n + (bn + c)2^n$$

$$=>\ u_n = a + (bn + c)2^n$$

<u>Calcul de a,b,c :</u>

$u_0 = 0 = \mathrm{a + c}$ U1 = 1 = a + 2(b+c) U2 = 2 = a + 4(2b+c)	A = -c 2b+c = 1 8b + 3c = 2 ⇨ 2b = -1 => b = -1/2 ⇨ C = 1 -2b = 2 => a = -2

Récurrence linéaires non homogène

$u_n = a_1 u_{n-1+} a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k} + f(n)$ pour n>=k

<u>Principe général :</u>

Chercher la solution générale de l'équation homogène associée

$$(E_0): u_n = a_1 u_{n-1+} a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}$$

Ajouter à cette solution de E_0 , une solution particulière de E

- Recherche d'une solution particulière est souvent sauf pour certaines formes de f(n)
- Forme générale simple : $f(n) = b^n\ P(n)$
  - Avec b appartenant a grand R et P(n) polynôme en n de degré
- Equation caractéristique :

$$(E_C): u_n = x^k - \ a_1 x^{k-1} - \cdots - a_k)(x-b)^{d+1} = 0$$

Autrement dit la solution particulière est de la forme

- $b^n\ Q(n)$ avec Q polynôme en n de degré <= d si b non racine de EC_0 (éq caractéristique de E_0)
- $b^n i^n\ Q(n)$ si b racine d'odre i de EC_0

➔ 2nd membre : somme des termes de la forme $b^n\ P(n)$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{p} b_i{}^n P_i(n)$$

$$avec\ bi\ apptient\ R\ et\ P_i(n) poly\hat{o}meen\ n\ de\ degré\ d_i$$

Equation caractéristique :

(Ec) $\left(x^k - a_1x^{k-1} \dots - a_k\right)(x - b_1)^{d_i+1} \dots \left(x - b_p\right)^{d_p+1}$

C'est-à-dire que solution particulière de E de la forme $\sum_{i=1}^{p} b_i{}^n Q_i(n)$ avec $Q_i$polynôme en n de degré <= d_i ou bien de la forme $\sum_{i=1}^{p} b_i{}^n XXXQ_i(n)$ si b_i racine d'ordre $P_i$de EC_0

Exemple :

$u_n = 2u_{n-1} - n + \ 2^n$ pour n >= 1

$u_0 = 0$

$f(n) = n + \ 2^n$ -> de la forme $b_1{}^n P_1(n) + \ b_2{}^n P_2(n)$ avec

$b_1 = 1$ et $P_1(n) = n$ -> $d_1 = 1$

$b_2 = 2$ et $P_2(n) = 1$ -> $d_2 = 0$

Equation caratéristique :

$$(x-2)(x-1)^2(x-2) = 0 -> \ 1\ et\ 2\ racines\ doubles$$

⇨ $u_n = (an+b)2^n + (an+b)1^n = b2^n + an2^n + cn + d$

Calcul de a,c et d en exprimant que (An2^n + cn + d) est une solution particulière de E

$$an2^n + \ cn + d = 2(a(n-1)2^{n-1} + c(n-1) + d) + \ n + 2^n$$
$$= a(n-1)2^n + 2c(n-1)d + n + 2^n$$

$$a2^n - cn + 2c - d = n + \ 2^n$$

⇨ a=1 , c=-1 et 2c-d = 0 => d = -2
⇨ $u_n = \ b2^n + n2^n - n - 2$

Calcul de b à partir des conditions initiales

$$u_0\ =\ 0\ =\ b - 2 \rightarrow\ b = 2$$

$$u_n =\ 2^{n+1} - n2^n - n - 2$$