Complexité

Danielle Quichaud

13 avril 2011

Table des matières

1 TD1

Exercice 1.1. *Fibonacci*

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \\ u_1 = 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Équation caractéristique

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$$

$$\textit{2 racines distincts } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$u_n = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Calcul de a et b

$$u_0 = 0 = a + b$$
$$u_1 = 1 = a\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$\Rightarrow$$
$$a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$$
$$\sqrt(5)(b-a) = 2$$
$$\Leftrightarrow$$
$$b = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Exercice 1.2.

$$\begin{cases} u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} + 2n \\ u_1 = 1 \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

On a bien $f(n)$ de la forme $b^n P(n)$ avec $b = 1$ et $P(n) = 2n$, $d^o P = 1$.
Équation caractéristique

$$(x^2 - 4x + 4)(x-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (x-2)^2(x-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \text{ 2 et 1 racines doubles}$$
$$\Rightarrow u_n = (an+b)2^n + (cn+d)$$
$$\text{(sol gen + sol part)}$$

Calcul de c et d en écrivant que $u_n = cn + d$ est une solution particulière de t.

$$cn + d = 4[c(n-1) + d] - 4[c(n-2) + d] + 2n$$
$$cn + d + 4c - 4d - 8c + 4d = 2n$$
$$cn + d - 4c = 2n$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ d - 4c = 0 \Rightarrow d = 8 \end{cases}$$
$$\Rightarrow u_n = (an+b)2^n + 2n + 8$$

Calcul de a et b

$$\begin{cases} u_0 = 0 = b + 8 \Rightarrow b = -8 \\ u_1 = 1 = 2(a+b) + 10 \Rightarrow 2a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow u_n = (\frac{7}{2}n - 2)2^n + 2n + 8$$

Exercice 1.3.

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + u_{n-3} - u_{n-4} \ pour\ n \geq 4 \\ u_n = n \ pour\ 0 \leq n \leq 5 \end{cases}$$

Équation caractéristique

$$x^4 - x^3 - x + 1 = 0$$

$$solution\ \acute{e}vidente : 1$$

$$(x-1)(x^3-1) = 0$$

$$(x-1)(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2+x+1) = 0$$

$$x^2 + x + 1 \ n'a\ pas\ de\ solution\ r\acute{e}elles$$

$$2\ racines\ complexes\ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \pm e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$ce\ sont\ les\ racines\ cubiques\ de\ l'unit\acute{e} : j\ et\ j^2$$

$$u_n = (an+b) + cj^n + dj^{2n}$$

Calcul de a, b, c et d à partir des conditions initiales

$$\begin{cases} u_0 = 0 = b + c + d \\ u_1 = 1 = a + b + cj + dj^2 \\ u_2 = 2 = 2a + b + cj^2 + dj \\ u_3 = 3 = 3a + b + c + d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b + c + d = 0 \\ b + cj + dj^2 = 0 \\ b + cj^2 + dj = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -c - d \\ c(j-1) + d(j^2-1) = 0 \\ c(j^2-1) + d(j-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = c = d = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.4.

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1}^2 \ pour\ n \geq 1 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Il faut se ramener à une équation de récurrence linéaire qu'on résoud par la méthode des l'équation caractéristique. On passe donc par les logarithmes.

$$\log u_n = n \log 3 + 2 \log u_{n-1}$$

On change de varible : $v_n = \log u_n$.

$$\begin{cases} v_n = 2v_{n-1} + n \log 3 \\ v_0 = \log u_0 = 0 \end{cases}$$

Le second membre est bien de la forme $b^n P(n)$ *avec* $b = 1$ *et* $P(n) = n \log 3$ $(d^o P = 1)$*, on utilise donc la méthode de l'équation caractéristique.*

$$(x-2)(x-2)^2 = 0$$
$$v_n = a2^n + bn + c$$

Calcul de b et de c

$$bn + c = 2[b(n-1) + c] + n\log 3$$
$$-bn - c - 2b = n\log 3$$
$$\begin{cases} b = -\log 3 \\ c + 2b = 0 \Rightarrow c = -2b = 2\log 3 \end{cases}$$

Calcul de a à partir de v_0

$$v_0 = 0 = a + c \Rightarrow a = -2\log 3$$
$$v_n = -2^{n+1}\log 3 - n\log 3 + 2\log 3$$
$$v_n = [-2^{n+1} - n + 2]\log 3$$
$$\Rightarrow u_n = e^{v_n} = e^{[-2^{n+1}-n+2]\log 3}$$
$$u_n = 3^{-2^{n+1}-n+2}$$

Exercice 1.5.

$$\begin{cases} T(n) = aT(\frac{n}{n}) + g(n) \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

On obtient ce genre d'équations avec des algos du type diviser pour régner. Problème décomposé en sous problèmes de taille $\frac{n}{b}$*.* $g(n)$ *est le cout de la décomposition, et de la recomposition.*

Hypothèse : n puissance de b : $n = b$

$$\begin{cases} T(b^k) = aT(b^{k-1}) + g(b^k) \\ T(b^0) = 1 \end{cases}$$

On fait ler changement de variable : $u_k = T(b^k)$

$$\begin{cases} u_k = au_{k-1} + g(b^k) \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

Par la méthode des facteurs sommants

$$\begin{cases} u_k = au_{k-1} + g(b^k) \\ u_{k-1} = au_{k-2} + g(b^{k-1}) \\ ... \\ u_k = au_1 + g(b) \end{cases}$$

$$u_k = a^k u_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^i g(b^{k-1})$$

$$\Rightarrow u_k = a^k + \sum_{i=0}^{k-1} a^i g(b^{k-1})$$

2 TD2

2.1 Series génératrices pour résoudre des équations de récurrence

Exercice 2.1.

$$\begin{cases} u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} \ pour \ n \geq 2 \\ u_0 = 0, u_1 = 1 \end{cases}$$

Faire apparaitre la génératrice $u(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$

$\rightarrow$ ***Multiplier par :*** x^n
$u_n x^n = 5u_{n-1}x^n - 6u_{n-2}x^n$ *pour* $n \geq 2$

$\rightarrow$ ***Sommer ces équations pour faire apparaitre la série génératrice :***
$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = 5u_{n-1}x^{n-1} - 6x^2 \sum_{n\geq 2} u_{n-2}x^{n-2}$

$$u(x) = \sum_{n>=2} u_n x^n$$

On obtient après sommage

$$\sum_{n>=2} u_n x^n = 5 \sum_{n>=2} u_{n-1}x^{n-1} - 6 \sum_{n>=2} u_{n-2}x^{n-2}$$

$$\begin{aligned} u(x) - u_0 - u_1 x &= 5x \sum_{n>=2} u_{n-1}x^{n-1} - 6x^2 \sum_{n>=2} u_{n-2}x^{n-2} \\ &= 5x \sum_{n>=1} u_n x^n - 6x^2 \sum_{n>=0} u_n x^n \end{aligned}$$

$$u(x) - u_0 - u_1 x = 5x[u(x) - u_0] - 6x^2 u(x)$$

$\rightarrow$ *avec* $u_0 = 0, u_1 = 1$

$$\Rightarrow u(x) - x = 5xu(x) - 6x^2 u(x)$$

$$u(x)[6x^2 - 5x + 1] = x$$

$$u(x) = \frac{x}{6x^2 - 5x + 1}$$

$\rightarrow$ *racines de* $6x^2 - 5x + 1$

$$\delta = 25 - 24 = 1 > 0 \rightarrow 2$$

racines distinctes $\frac{5\pm 1}{12}$ *donne* $\frac{1}{2}$ *ou* $\frac{1}{3}$

$$u(x) = \frac{x}{6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3})} = \frac{a}{x - \frac{1}{2}} + \frac{b}{x - \frac{1}{3}}$$

$\rightarrow X(x - \frac{1}{2})$ *puis* $x = \frac{1}{2} => a = \frac{\frac{1}{2}}{6(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})} = \frac{1}{2})$

$\rightarrow X(x - \frac{1}{3})$ *puis* $x = \frac{1}{3} => b = \frac{\frac{1}{3}}{6(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})} = \frac{1}{3})$

$u(x) = \frac{1}{2(x-\frac{1}{2})} - \frac{1}{3(x-\frac{1}{3})} = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{1-2x}$

$\Rightarrow$ *utiliser* $\frac{1}{1-cz} = \sum_{n\geq 0} c^n z^n \Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{1}{1-3x} = \sum_{n\geq 0} 3^n x^n \\ \frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(x) = \sum_{n>=0} u_n x^n = \sum_{n>=0} 3^n x^n - \sum_{n>=0} 2^n x^n$$

$$\sum_{n>=0} (3^n - 2^n) x^n$$

$\Rightarrow u_n = 3^n - 2^n$ *pour* $n >= 0$

Exercice 2.2. *Même travail sur le système suivant :*

$$\begin{cases} u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} - 2u_{n-3} pour n >= 3 \\ u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n>=3} u_n x^n = 2 \sum_{n>=3} u_{n-1} x^n + \sum_{n>=3} u_{n-2} x^n - 2 \sum_{n>=3} u_{n-3} x^n$$

$$u(x) - u_0 - u_1 x - u_2 x^2 = 2x \sum_{n>=2} u_n x^n + x^2 \sum_{n>=2} u_n x^n - 2x^3 \sum_{n>=2} u_n x^n$$

$u(x) - u_0 - u_1 x - u_2 x^2 = 2x[u(x) - u_0 - u_2 x] + x^2[u(x) - u_0] - 2x^3 u(x)$
avec $u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1$

$\Rightarrow u(x) - x - x^2 = 2xu(x) - 2x^2 + x^2 u(x) - 2x^3 u(x)$

$u(x)[2x^3 - x^2 - 2x + 1] = x - x^2$

$\Rightarrow u(x) = \frac{x(1-X)}{2x^3 - x^2 - 2x + 1}$

racines de $2x^3 - x^2 - 2x + 1$ *:*
Une racine évidente :
$2x^3 - x^2 - 2x + 1 = (x-1)(2x^2 + x - 1)$
$= (x-1)(x+1)(2x-1)$ *car -1 racine de* $2x^2 + x - 1$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)(2x-1)} = \frac{x}{(x+1)(2x-1)} = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{1-2x}$$

$\rightarrow x(1+x)$ *puis* $x = -1$ *donne* $a = \frac{-1}{1+2} = \frac{-1}{3}$
$x(1-2x)$ *puis* $x = \frac{1}{2}$ *donne* $b = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

$$u(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+x}\right]$$

utiliser

$$\frac{1}{1-cz} = \sum_{n>=0} c^n z^n$$

donne

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n>=0} 2^n x^n$$

et

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n>=0} (-1)^n x^n$$

$$u(x) = \frac{1}{3}\left[\sum_{n>=0} 2^n x^n - \sum_{n>=0} (-1)^n x^n\right] = \sum_{n>=0} \frac{1}{3}\left[2^n - (-1)^n\right] x^n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{3}\left[2^n - (-1)^n\right]$$

pour $n \geq$ *0*

Exercice 2.3.

$$\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \ \textit{pour}\ n \geq 2 \\ u_0 = u_1 = 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n\geq 2} u_n x^n = 3\sum_{n\geq 2} u_{n-1}x^n - 2\sum_{n\geq 2} u_{n-2}x^n + 4\sum_{n\geq 2}(n-2)x^n$$

Posons $u(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$

$$\begin{aligned} u(x) - u_0 - u_1 x &= 3x\sum_{n\geq 2} u_{n-1}x^{n-1} - 2x^2\sum_{n\geq 2} u_{n-2}x^{n-2} + 4x^2\sum_{n\geq 2}(n-2)x^{n-2} \\ &= 3x\sum_{n\geq 1} u_n x^n - 2x^2\sum_{n\geq 0} u_n x^n + 4x^2\sum_{n\geq 0} nx^n \\ &= 3x[u(x) - u_0] - 2x^2 u(x) + 4x^2\sum_{n\geq 0} nx^n \end{aligned}$$

avec $u_0 = u_1 = 0$ *et* $\sum_{n\geq 0} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$

$$u(x) = 3xu(x) - 2x^2u(x) + \frac{4x^3}{(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow u(x)[2x^2 - 3x + 1] = \frac{4x^3}{(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{4x^3}{(1-x^2)^2(2x^2-3x+1)}$$

or

$$2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(2x-1)$$

$$u(x) = \frac{4x^3}{(1-x^2)^3(2x^2-3x+1)} = \frac{a}{1-2x} + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{(1-2x)^2} + \frac{d}{(1-2x)^3}$$

$x(1-2x)$ *puis* $x=\frac{1}{2}$ *donne* $a=\frac{4(\frac{1}{2})^3}{(1-\frac{1}{2})^3}=4$

$x(1-x)^3$ *puis* $x=1$ *donne* $d=\frac{4}{1-2}=-4$

$$u(x)=\frac{4}{1-2x}-\frac{4}{(1-x)^3}+\frac{b}{1-x}+\frac{c}{(1-x)^2}=\frac{4x^3}{(1-x)^3(1-2x)}$$

$\Rightarrow 4x^2=4(1-x)^3-4(1-2x)+b(1-2x)(1-x)^2+c(1-2x(1-x)=4(1-x)(x^2-2x+1)-4(1-2x)+b(1-x)(2x^2-3x+1)+$

$$u(x)=4\left[\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{(1-x)^3}\right]$$

$$\frac{1}{1-cx}=\sum_{n>=0}c^nx^n$$

donne

$$\frac{1}{1-2x}=\sum_{n>=0}2^nx^n$$

et

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n>=0}x^n$$

puis

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}}=\sum_{n>=0}\begin{matrix}n+m\\n\end{matrix}z^n$$

ce qui donne pour m=1 :

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n>=0}\binom{n+1}{n}x^n=\sum_{n>=0}C_{n+1}^nx^n=\sum_{n>=0}(n+1)x^n$$

et pour m=2 :

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\sum_{n>=0}\binom{n+2}{n}x^n=\sum_{n>=0}C_{n+2}^nx^n=\sum_{n>=0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow u(x) &= \sum_{n\geq 0}u_nx^n\\ &= 4[\sum_{n\geq 0}2^nx^n-\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n-\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}]\\ &= \sum_{n\geq 0}(2^{n+2}-4+4(n+1-2(n+1)(n+2))x^n\\ &= \sum_{n\geq 0}(2^{n+2}-4-2n(n+1)\end{aligned}$$

$\Rightarrow u_n=2^{n+2}-2n^2-2n-4$ *pour* $n\geq 0$

3 TD3

Exercice 3.1. *Complexité en moyenne du tri rapide en nombre de comparaisons*

Complexité en moyenne du tri rapide en nombre de comparaisons.

C_n *: nombre de comparaisons pour trier n éléments*

$$\begin{cases} C_n = (n+1) + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(C_{j-1} + C_{n-j}) \textit{ pour } n \ \geq 1 \\ C_0 = 0 \end{cases}$$

$$C_n = (n+1) + \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} C_{j-1} + \sum_{j=1}^{n} C_{n-j}\right)$$

$$C_n = (n+1) + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n} C_k \textit{ pour } n \geq 1$$

→ *Faire apparaître la série génératrice des* C_n *:* $C(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$

→ *Multiplier par* nx^n

$$nC_n x^n = n(n+1)x^n + 2(\sum_{k=0}^{n-1} C_k)x^n$$

→ *En sommant*

$$\sum_{n\geq 1} nC_n x^n = \sum_{n\geq} n(n+1)x^n + 2(\sum_{k=0}^{n-1} C_k)x^n$$

→ *Différentiation (dérivée)*

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} nC_n x^n &= x\sum_{n\geq 1} nC_n x^{n-1} \\ &= x\sum_{n\geq 0}(n+1)C_{n-1}x^n \\ &= xC'(x) \end{aligned}$$

→ *Ce qui donne au final*

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} n(n+1)x^n &= \bar{x}\sum_{n\geq 1} n(n+1)x^{n-1} \\ &= x\sum_{n\geq 0} n(n+1)(n+2)x^n \\ &= 2x\sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k\right)x^n = x\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k\right)x^{n-1} = x\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} C_k\right)x^n = x\frac{C(x)}{1-x} \textit{ (somme partielle)}$$

$$\Rightarrow xC'(x) = \frac{2x}{(1-3x)^3} + \frac{xC(x)}{1-x}$$

$$\Rightarrow \boxed{C'(x) = \frac{2}{(1-3x)^3} + 2\frac{C(x)}{1-x}}$$

(équation différentielle d'ordre 1)

Équation sans second membre :

$$C'(x) = 2\frac{C(x)}{1-x} \Leftrightarrow \frac{C'(x)}{C(x)} = \frac{2}{1-x}$$

$$\log \frac{C(x)}{\lambda} = -2\log|1-x| = \log \frac{1}{|1-x|^2} \Rightarrow \boxed{C(x) = \frac{\lambda}{(1-x)^2}}$$

Équation générale → méthode de variation de la constante :

$$\begin{aligned} C'(x) &= 2\frac{\lambda(x)}{(1-x)^2} \Rightarrow C'(x) \\ &= \frac{\lambda''(x)(1-x)^2 + 2\lambda(x)(1-x)}{(1-x)^4} \\ &= \frac{\lambda''(x)}{(1-x)^2} + \frac{2\lambda(x)}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda'(x)}{(1-x)^2} + \frac{2\lambda(x)}{(1-x)^3} = \frac{2}{(1-x)^3} + 2\frac{\lambda(x)}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \lambda'(x) = \frac{2}{1-x}$$

$$\Rightarrow \lambda(x) = log\frac{1}{(1-x)^2} + K$$

Calcul à partir de C(0)

$$\begin{aligned} C(0) = C_0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lambda(0) = 0 = K + log1 = K \\ &\Rightarrow \quad \boxed{K = 0} \\ &\Rightarrow \quad \lambda(x) = log\frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{C(x) = \frac{1}{(1-x)^2} log\frac{1}{(1-x)^2}} \Rightarrow C(x) = \frac{2}{(1-x)^2} log\frac{1}{1-x}$$

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{2}{x}\left[\frac{x}{(1-x)^2 log\frac{1}{1-x}}\right] \\ &= \frac{2}{x} n(H_n - 1)x^n \\ &= 2\sum_{n\geq 0}(n+1)(H_{n+1} - 1) \end{aligned}$$

En utilisant le décalage vers la gauche avec $a_n = n(H_n - 1)$ *et avec* $a_0 = 0$

Exercice 3.2. *Calculer le nombre b_n d'arbres binaires ayant $n+1$ feuilles*

$(n+1)$ feuilles $\Leftrightarrow$ n nœud internes $\Leftrightarrow$ $(2n+1)$ nœuds

$b_0 = 1 \rightarrow \cdot$

$b_1 = 1 \rightarrow$ *2 feuilles*

$b_2 = 2 \rightarrow$ *3 feuilles*

Pour $n \geq 1$, on à deux sous arbres :

– *un arbre binaire gauche avec k feuilles (avec $1 \leq k \leq n$)*

– *un arbre binaire droit avec $(n+1-k)$ feuilles*

$$\boxed{b_n = \sum_{k=1}^{n} b_{k-1} b_{n-k}} \text{ pour } n \geq 1$$

$\rightarrow$ *faire apparaître la série génératrice des $(b_n)_{n>0}$*

$$b(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$$

<u>Multiplier par x^n puis sommer</u>

$$\sum_{n\geq 1} b_n x^n = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k-1} b_{n-k} x^n\right)$$

$$\begin{aligned}
b(x) - b(0) &= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k\geq 0}^{n-1} b_{k-1} b_{n-k}\right) x^n \\
&= x\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k\geq 0}^{n-1} b_k b_{n-1-k}\right) x^{n-1} \\
&= x\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq 0}^{n-1} b_k b_{n-k}\right) x^n \\
&= xb(x)b(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b(x-1) = x[b(x)]^2 \Leftrightarrow \boxed{x[b(x)]^2 - b(x) + 1 = 0}$$

$\rightarrow$ *équation quadratique*

$$\Delta = 1 - 4x \rightarrow b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{(}1-4x)}{2x} \Rightarrow xb(x) = \frac{1 \pm \sqrt{(}1-4x)}{2}$$

Pour que cette égalité soit vrai pour $x = 0$, il faut prendre $b(x) = \frac{1\pm\sqrt{(}1-4x)}{2}$ $\rightarrow$ utiliser le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$.

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{(1-4x)^{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sum_{n\geq} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n}$$

$$\Rightarrow b(x) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n \right) \Rightarrow \boxed{b(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n}$$

$$\begin{aligned} b(x) &= x \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^{n-1} \\ &= x \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n+1)!(n)!} x^n \\ &= x \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{(n)!(n)!} x^n \\ &= x \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right) x^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{n+1} \left(\begin{array}{c} 2n \\ n \end{array} \right)}$$

pour $n \geq 0 \Rightarrow$ *nombre de Catalan*

4 TD4

Exercice 4.1. *Complexité du tri par fusion (p10)*

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\frac{n}{2}) - c.n \\ 2T(\frac{n}{2}) &= 2^2T(\frac{n}{2^2}) - 2c.\frac{n}{2} \\ 2^2T(\frac{n}{2^2}) &= 2^3T(\frac{n}{2^3}) - 2^2c.\frac{n}{2^2} \\ 2^{k-1}T(\frac{n}{2^{k-1}}) &= 2^kT(\frac{n}{2^k}) - 2^{k-1}.c.\frac{n}{2^{k-1}} \\ => T(n) &= 2^kT(1) + \sum_{i=0}^{k-1} c.n \\ &= n.T(1) + k.c.n \\ &= n.T(1) + log_2(n).c.n \end{aligned}$$

Exercice 4.2. *tri fusion (p18)*

En appliquant directement le théorème on a :

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$$

Donc a = b = 2

$$T(n) \simeq n.log(n)$$

Exercice 4.3. *Approche Diviser pour Résoudre (p21)*

Le produit de X et Y s'écrit donc :

$$X.Y = A.C.2^n + (A.D + B.C).2^{n/2} + B.D$$

On a :

– *4 multiplications à $n/2$ chiffres*
– *3 additions avec au maximum 2n chiffres*
– *2 décalages (multiplication par 2^n et $2^{n/2}$)*

Ces deux dernieres opérations sont en O(n), d'ou :

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 4.T(\frac{n}{2}) + c.n \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème avec $a = 4$ et $b = 2$
On obtient $T(n) = O(n^{log(4)} = O(n^2)$: pas d'amélioration

Amélioration :

On peut reformuler l'équation de manière à diminuer le nombre de sous-problèmes, c'est à dire le nombre de multiplications entre entiers à n/2 chiffres :

$$X.Y = A.C.2^n + [(A - B).(D - C) + A.C + B.D].2^{n/2} + B.D$$

Il n'y a plus que trois sous-problèmes a effectuer. On a donc :

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 3.T(\frac{n}{2}) + c'.n \end{aligned}$$

d'ou : $T(n) = O(n^{log(3)} = O(n^{1.59})$
En pratique : cette solution est plus efficace que l'algorithme naif que si n > 25 , du fait de la valeur élevée des constantes

Exercice 4.4. *Multiplication des polynomes (p23)*

$$\begin{aligned} P(X) &= X^4 + 3.X^3 + X^2 - X + 1 \\ &= X^2(X^2 + 3X + 1) - X + 1 \end{aligned}$$

On Pose : $P_1(X) = X^2 + 3X + 1$ et $P_2(X) = X + 1$

$$P(X) = X^{n/2}.P_1(X) + P_2(X)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} P(X) &= P_g(X) + X^{n/2}.P_d(X) \\ Q(X) &= Q_g(X) + X^{n/2}.Q_d(X) \end{aligned}$$

On reformule ensuite le produit de manière à ce qu'il n'y ait que 3 multiplications de polynomes de taille $n/2$

$$P.Q = P_g.Q_g + [(P_g + P_d).(Q_g + Q_d) - P_g.Q_g - P_d.Q_d].X^{n/2} + P_d.Q_d.X^n$$

d'ou une complexité : $T(n) = O(n^{log_2(3)}) = O(n^{1.59})$

Exercice 4.5. *Algorithme de l'enveloppe rapide (p40)*

```
procedure Enveloppe(E){
Calculer P et Q;
Calculer E' et E":
Renvoyer Concatenation(Env(E',P,Q), sansQP(Env(E", Q, P)));
}
```

avec :

```
procedure Env(E, P, Q){
S := le point de E le plus eloigne de PQ:
si S est sur PQ alors
réessayer (P,Q):
sinon
E1 := points de E delimites par PS ne contenant pas Q
E1 := points de E delimites par QS ne contenant pas P
Renvoyer Concat(Env(E1, P, S), sansS(Env(E2, S, Q)));
}
```

Soient n_1 et n_2 les nombres respectifs de points de E_1 et E_2. Les temps mis à déterminer le point S et à trier les points entre E_1 et E_2 est linéaire :

On a donc :
$T(n) = c.n + T(n_1) + T(n_2)$ *avec* $n_1 + n_2 \leq n - 1$

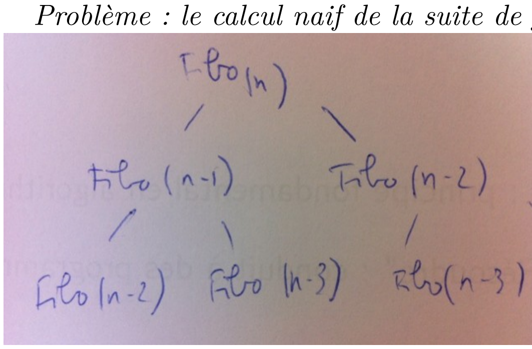
Cette formule ressemble à celle de la complexité du tri rapide pour laquelle on avait $n_1 + n_2 = n - 1$. On reconnait donc un algorithme en $O(n.log(n))$ en moyenne.

Exercice : déterminer la configuration qui constitue le cas le pire de cet algo

5 TD5

Exercice 5.1. *Exemple : suite de Fibonacci*

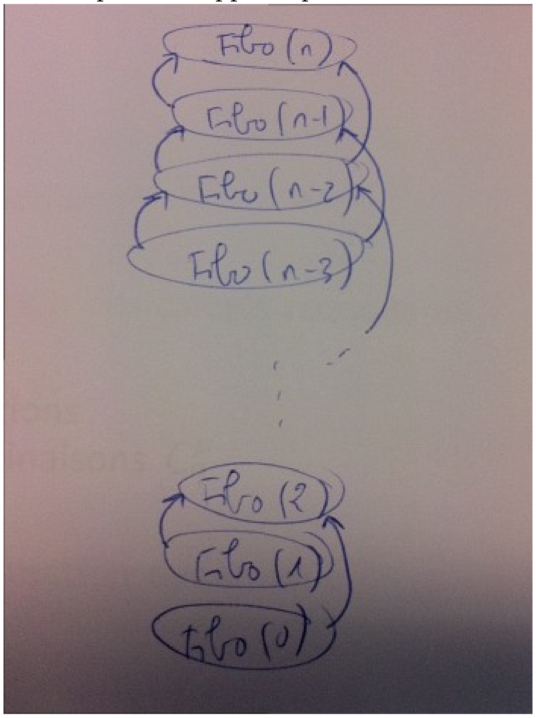
Problème : le calcul naif de la suite de fibonacci est exponentielle, voir l'arbre des appels :



Réponse : on peut utiliser les techniques de marquage. Au premier passage par chaque noeud, on le marque. On évite ainsi de refaire le calcul ultérieurement.

Attention : marquer ne suffit pas, il faut également stocker le résultat. Comme la procédure Fibonnacci ne renvoie que des valeurs positives, cela peut etre fait dans le meme tableau.

Graphe des appels optimisé :



Version récursive avec mémorisation des nombres de fibo pour éviter la complexité exponentielle :

```
int TabFib[NMAX];
for(i=0; i < NMAX; i++)
  TabFib[i] = -1;

TabFib[0] = 0;
TabFib[1] = 1;
int Fibo(int n){
  if(TabFib[n] >= 0)
    return TabFib[n];
  else
  {
    TabFib[n] = Fibo(n-1) + Fibo(n-2);
    return TabFib[n];
  }
}
```

Version itérative qui ne nécessite que 3 variables :

```
int Fibo(int n){
  int a,b,aux;
  if(n==0 || n==1)
    return n;
  else{
    a = 0;
    b = 1;
    for(i=2; i <= n; i++){
      aux = b;
      b = a+b;
      a = aux;
    }
    return b;
  }
}
```

Exercice 5.2. *Combinaisons* C_n^p

```
int Comb(int n, int p){
  if(p==0 || p==n)
    return 1;
  else
    return (Comb(n-1,p) + Comb(n-1,p-1));
}
```

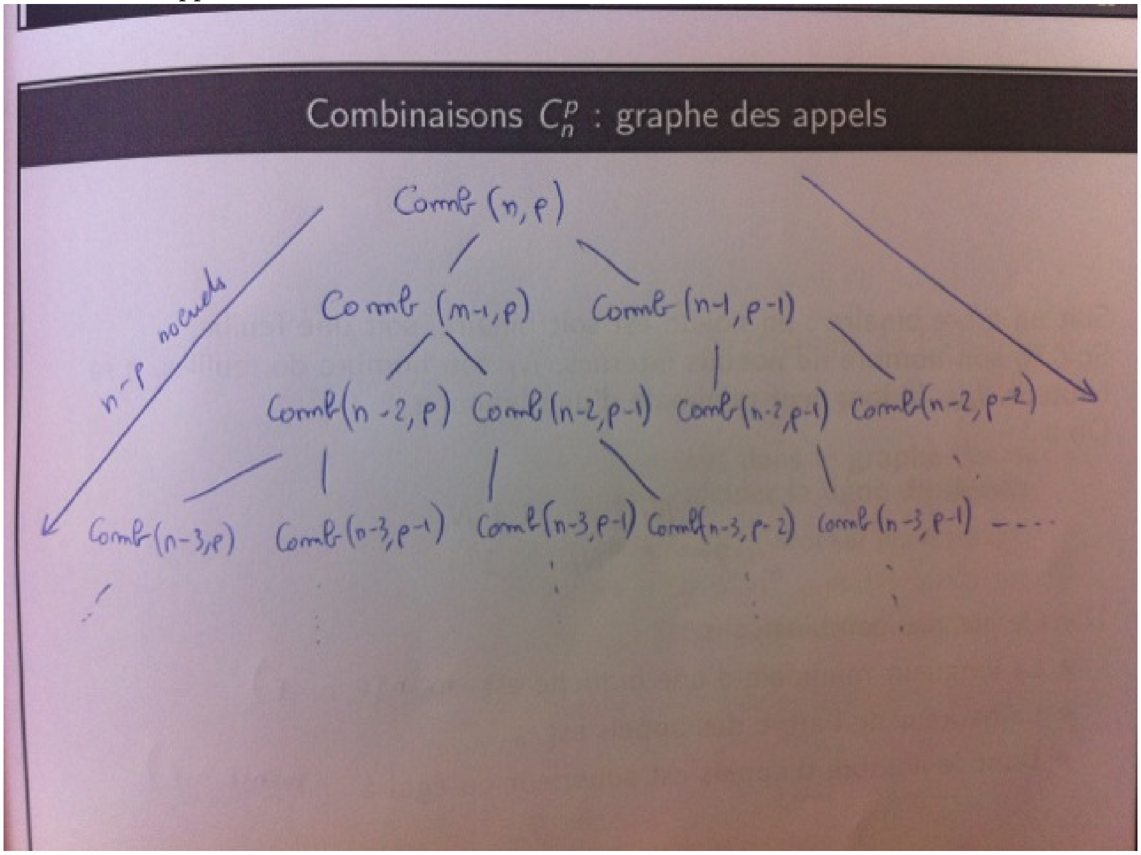
Soit A(n,p) le nombre d'appels à C, y compris le principal, lors de l'évaluation de C(n,p). En étudiant l'algorithme naif, on a :

$$\begin{aligned} A(n,0) &= A(n,n) = 1 \\ 0 \leq p < n : A(n,p) &= 1 + A(n-1,p) + A(n-1,p-1) \end{aligned}$$

On a donc : $A(n,p) \geq C(n,p)$

$$C(2k,k) = \frac{2k*(2k-1)*...*(k+1)}{k*(k-1)*...*1}$$

Arbre des appels



Dans le cas des combinaisons :

- *La longueur minimale d'une branche est* $min(p, n-p)$
- *La hauteur de l'arbre des appels est* n
- *Donc le nombre d'appels est supérieur ou égal à* $2^{min(p,n-p)}$

Matrice n x p ou tableau (n-p) x p
Initialisation à -1

```
 int Comb(int n, int p){
  if(p==0 || p==n)
    return 1;
  else{
    if(tab[n][p] == -1){
      tab[n][p] = Comb(n-1, p-1) + Comb(n-1,p);
    }
    return tab[n][p];
  }
}
```

Cout en $O(np)$ *opérations*
Place mémoire : $(np - p^2)$: $O(np)$

Algorithme itératif

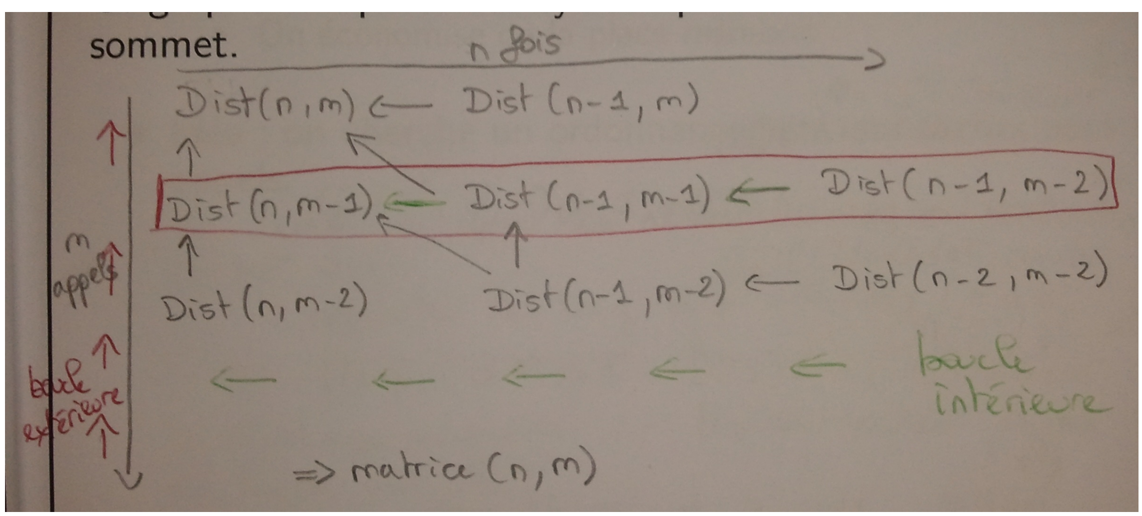
```
 // Initialisation tab(i) = C(i,i) = 1
pour i dans 1..p faire tab(i) := 1

pour k dans 1..n-p faire
  pour i dans 1..p faire
    tab(i) := tab(i) + tab(i-1);

return tab(p);
```

6 TD6

Solution récursive naïve

```
Appel initial :

int Dist(char *A, char *B, int i, int j){
   if(j==0){
      if(i==0)
         return 0;
      else{
         return(D(A[i])+Dist(A,B,i-A,j));
      }
   }else if (i==n)
      return(T(B[j] + Dist(A,B,i,j-1))
   else
      return Min(S(A[i],B[j])+Dist(A,B,i-1,j-1),
         D(A[i]) + Dist(A,B,i-1,j),
         I(B[j])+Dist(A,B,i,j-1));
}
```

Graphe des appels



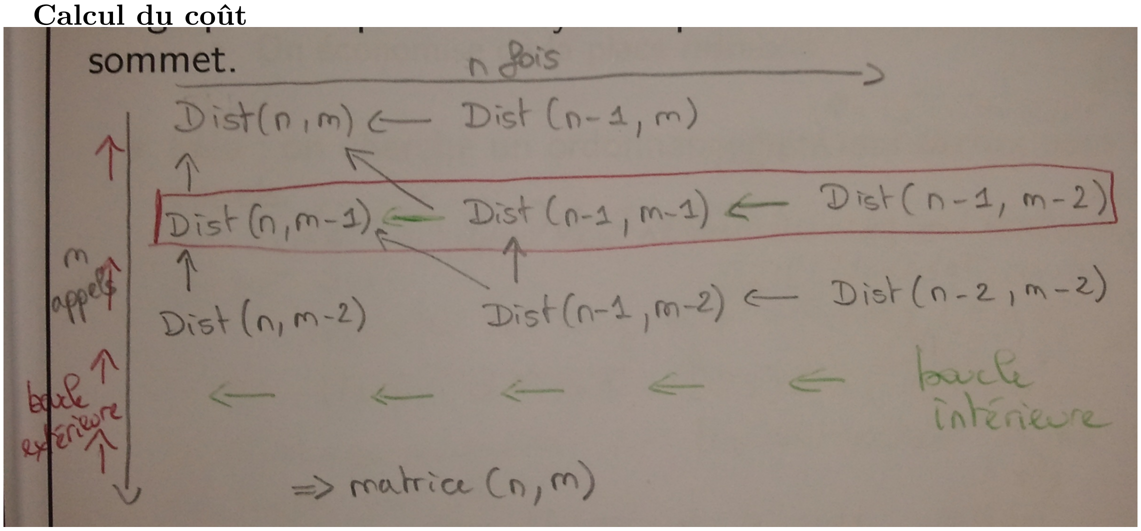
Elimination des redondances

- On élimine les calculs redondants à l'aide d'une technique de marquage.
- On utilise un tableau auxilliaire TabDist de taille n x m (la taille est égale au nombre de sommets du graphe des appels).
- On prend comme convention de l'initialiser à -1 pour indiquer qu'un sommet n'est pas marqué.

Algorithme sans les redondances

```
int Dist(char *A, char *B, int i, int j){
   if(TabDist[i][j] != -1)
      return TabDist[i][j];
   else{
      if(j==0){
         if(i==0){
            TabDist[i][j] = 0;
            return TabDist[i][j];
         }
         else{
            TabDist[i][j] = D(A[i])+Dist(A,B,i-A,j);
            return TabDist[i][j];
         }
      }else if (i==n){
         TabDist[i][j] = T(B[j] + Dist(A,B,i,j-1)
         return TabDist[i][j];
      }else{
         TabDist[i][j] = Min(S(A[i],B[j])+Dist(A,B,i-1,j-1),
            D(A[i]) + Dist(A,B,i-1,j),
            I(B[j])+Dist(A,B,i,j-1));
         return TabDist[i][j];
      }
   }
}
```

Calcul du coût



voir les traits rouges et verts.

Solution itérative On remarque que les rôles de n et m sont symétriques. On peut donc :

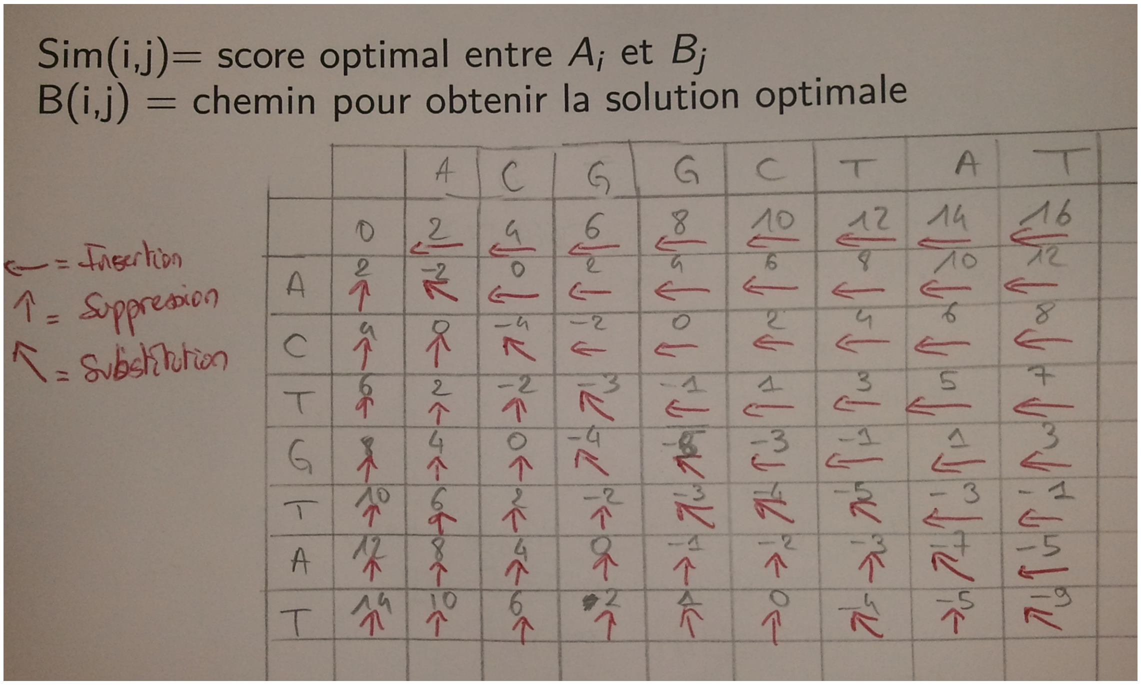
- Remonter le long des colonnes(n=< m)
- Remonter le long des lignes (n>m)

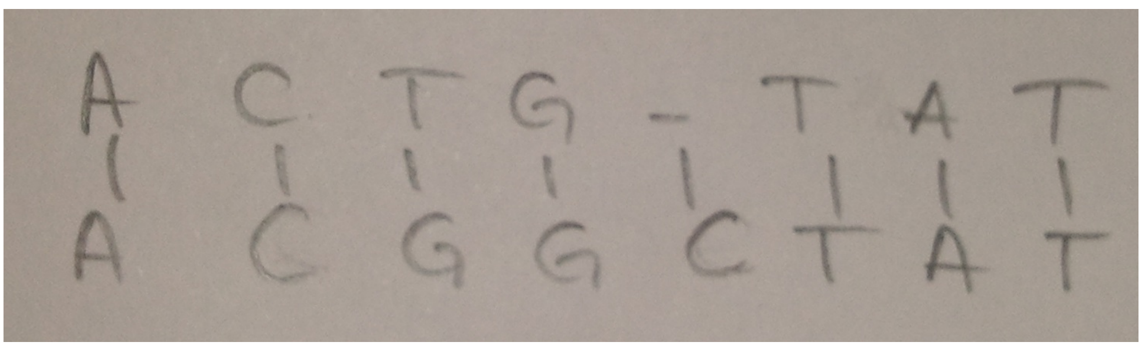
Le stockage mémoire est limité à min(n,m) (dernière colonne ou ligne calculée

Algorithme itératif

```
On suppose (n=<m)

int Dist(char *A, char *B, int i, int j){
   int TabDist[n+1];
   int aux,tmp;
   TabDist[0]=0;
   for(i=1 ; i<=n ; i++){
      TabDist[i] = TabDist[i-1] + D(A[i]);
      //calcul de la 1ère colonne
   }
   for(j=1 ; j<=m ; j++){
      aux = TabDist[0];
      for(i=1 ; i<=n ; i++){
         tmp = TabDist[i];
         TabDist[i][j] = Min(S(A[i],B[j])+aux,
            D(A[i]) + TabDist[i-1],
            I(B[j])+tmp);
         aux = tmp;
      }
   }
   return TabDist[n];
}
```

Reconnaissance de chaines de caractères bruités : exemple





On prend le chemin depuis (n,m) en utilisant S.

Un premier exemple 1) ((M1 M2) M3) M4
100x1x50 + 100x50x20 + 100x20x1 = 17 000

2) (M1 (M2 M3)) M4
5 000

3) (M1 M2)(M3 M4)
11 000

4) M1 (M2 (M3 M4))
1150

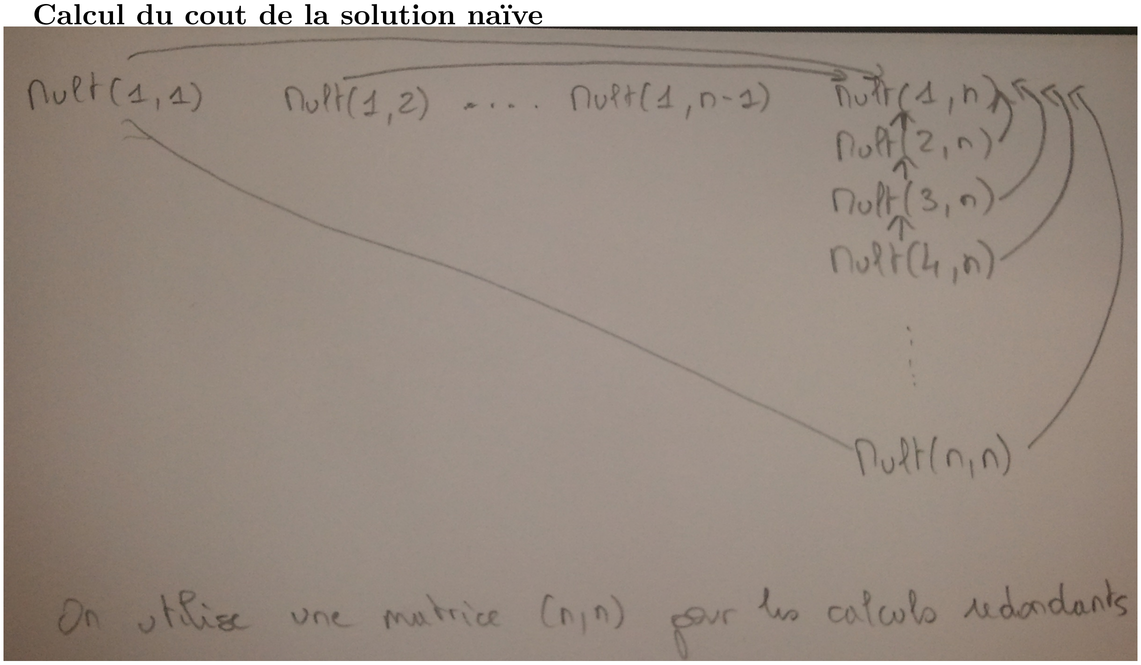
5) M1 ((M2 M3) M4)
1120

Cout minimum : 5) avec 1120

Solution récursive naïve

```
Appel initial : Mult(1,n).

int Mult(int i, int j){
   int min, tmp;
   if(i==j)
      return 0;
   else{
      min = Mult(i,j) + Mult(i+1,j + d[i] d[i+1] d[j+1];
      for(k=i+1 ; k<j ; k++){
         tmp = Mult(i,k)+Mult(k+1,j) + d[i] d[k+1] d[j+1];
         if(tmp<min) min = tmp;
      }
      return min;
   }
}
```

Calcul du cout de la solution naïve



On utilise une matrice (n,n) pour les calculs redondants.

Elimination des calculs redondants

```
Appel initial : Mult(1,n).

int Mult(int i, int j){
   int min, tmp;
   if(TabMult[i][j] == -1)
      if(i==j){
         TabMult[i][j]=0
         return 0;
      }
      else{
         min = Mult(i,j) + Mult(i+1,j + d[i] d[i+1] d[j+1];
         for(k=i+1 ; k<j ; k++){
            tmp = Mult(i,k)+Mult(k+1,j) + d[i] d[k+1] d[j+1];
            if(tmp<min) min = tmp;
         }
         TabMult[i][j] = min;
   }
   return TabMult[i][j];
}
```

Calcul du cout
Cout mémoire : $O(n^2)$
Cout (temps d'execution) : $O(n^3)$

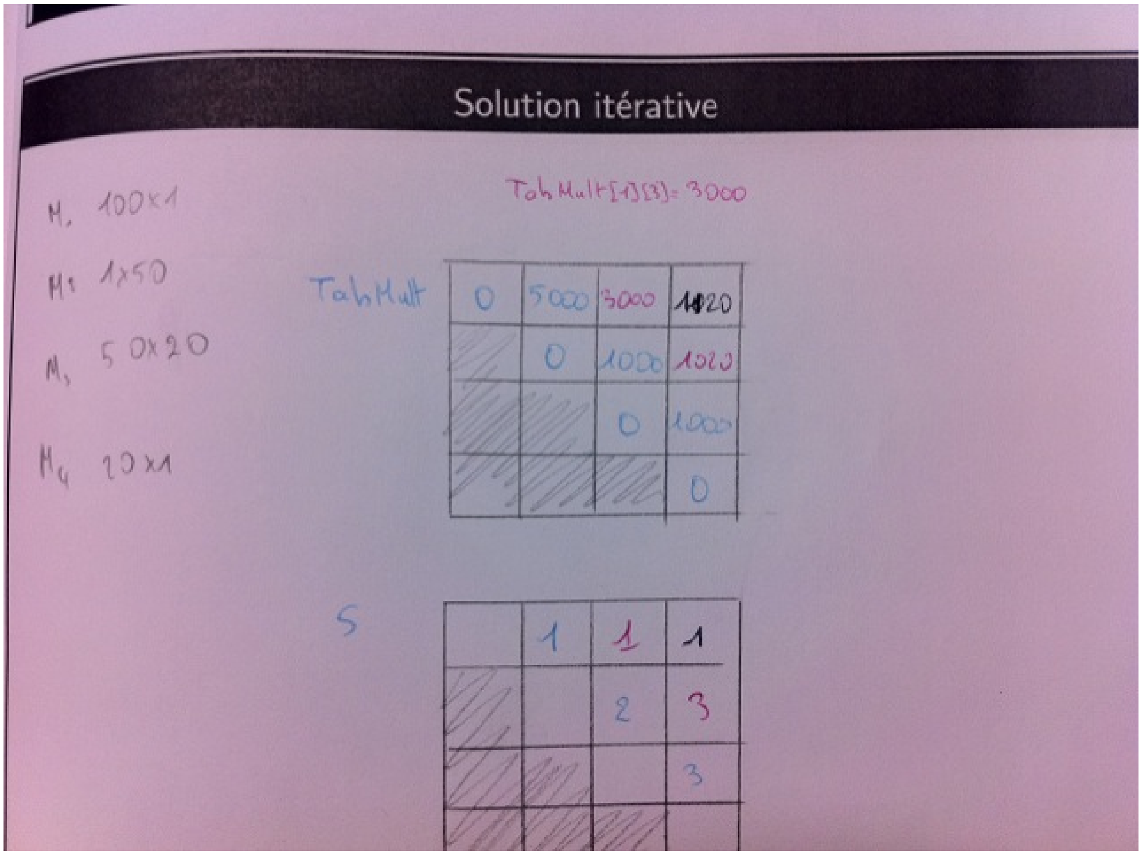
Réflexion sur la procédure itérative On considère l'ensemble des valeurs $C(i,j)$ nécessaires pour évaluer $C(1,n)$ en utilisant la formule de récurrence.

Questions :

- Définir un ordre de calcul de ces valeurs ne nécessitant pas l'utilisation d'une pile
- Ecire la procédure itérative correspondante de calcul de $C(1,n)$

Réponse : On introduit un tableau $S[i][j]$ qui stocke les valeurs de k qui réalisent le cout minimal pour $M_i x ... x M_j$.

```
procedure MultOpt( D[1..n], S[1..n][1..n], TabMult[1..n][1..n]){
  pour i = 1 à n faire
    TabMult[i][i] = 0;
  pour l = 1 à n-1 faire
    pour i = 1 à n-l faire
      j = i + l;
      TabMult[i][j] = inf;
      pour k = i à j-1 faire
        tmp = TabMult[i][k] + TabMult[k+1][j] + D[i]D[k+1]D[j+1];
        si (tmp < TabMult[i][j]) alors
          TabMult[i][j] = tmp;
          S[i][j] = k;
}
```




```
* l = 1
  -----

    -> i=1 (-> 3) j=2 TabMult[1][2] = infini
         k=1 (-> 1) TabMult[1][2] = TabMult[1][1] + tabMult[2][2] + D[1]D[2]D[3]
                                         0                 0         100 x 1 x 50
                                  = 5000
                    S[1][2] = 1

    -> i=2 j=3
         k=2 (-> 2) TabMult[2][3] = TabMult[2][2] + tabMult[3][3] + D[2]D[3]D[4]
                                         0                 0         1 x 50 x 20
                                  = 1000
                    S[2][3] = 2

    -> i=3 j=4
         k=3   TabMult[3][4] = 0 + 0 + 50 x 20 x 1 = 1000

* l = 2
  -----
```

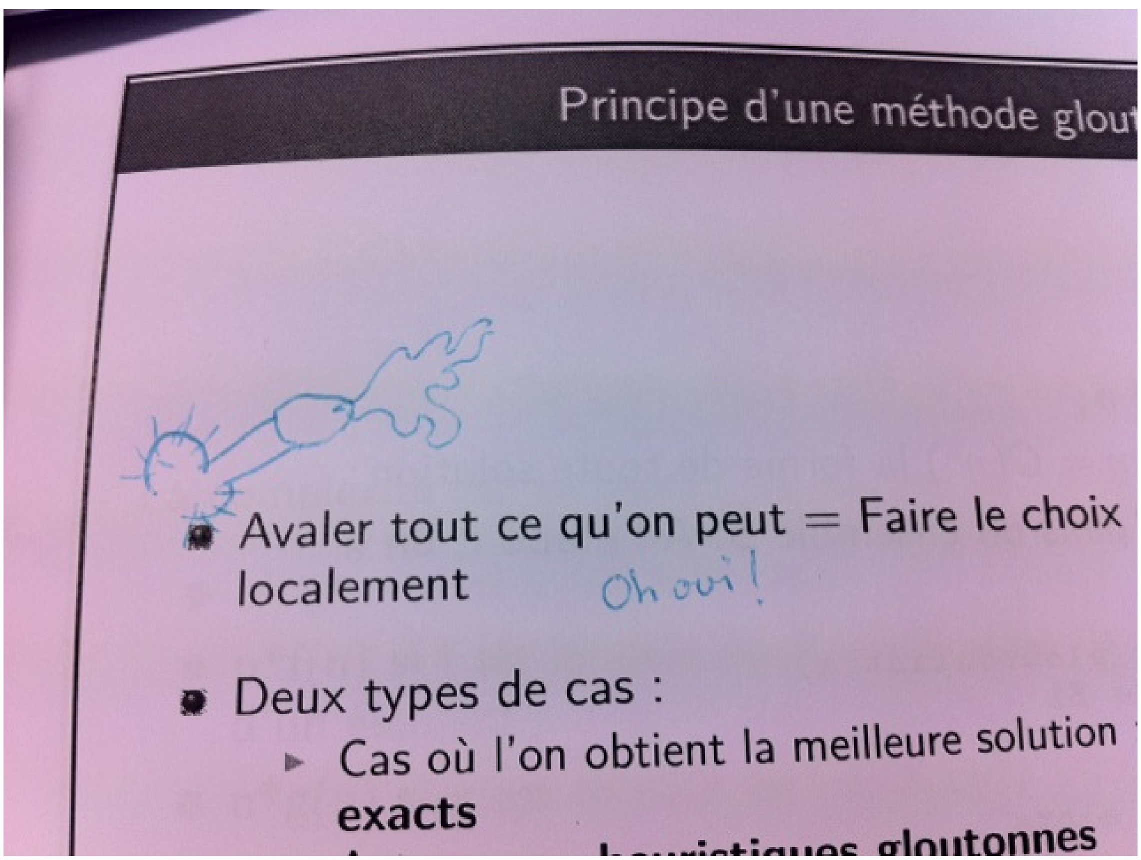
```
-> i=1 (-> 2) j=3
     k=1 (-> 2) TabMult[1][3] = TabMult[1][1] + TabMult[2][3] + D[1]D[2]D[4]
                                      0               1000         100 x 1 x 20
                                = 3000

     k=2        tmp = 105000

-> i=2 j=4 ....
```

Calcul de $M_i..M_j$ selon le découpage mémorisé dans S

```
procedure MultMat( S[1..n][1..n], entier i, entier j, Matrice Res){
  si (i<j) alors
    MultMat(S, i, S[i][j], X);
    MultMat(S, S[i][j]+1, j, Y);
    M := Multiplier(X,Y);
}
```

7 TD 7

7.1 Petite introduction imagée sur les algorithmes gloutons



Pour ceux qui n'ont pas pu récupérer le poly de TD 7, vous pouvez vous en procurer au tarif de 2 euros au DB415.

7.2 Premier exemple : traversée de la matrice

Réponses aux question (p.16) :

- Algorithme glouton : a chaque étape, on choisit parmi les 2 cases possibles, celle de cout minimal :
- Solution : (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3, 4), (4,4), cout : 61 (la meilleure solution a un cout de 47)
- On obtient toujours une solution (si on tombe sur la ligne 4 ou la colonne 4 il n'y a plus de choix mais il y a une solution).