## Exercice 1

1. si a alors b — $a \Rightarrow b$
2. a est une condition suffisante de b — $a \Rightarrow b$
3. a seulement si b — $a \Rightarrow b$
4. b est condition nécessaire pour que a — $a \Rightarrow b$
5. lorsque a nécessairement b — $a \Rightarrow b$

## Exercice 2

1) $((\neg a) \wedge r) \vee (n \wedge (\neg c))$

ou

$((\neg a) \Rightarrow r) \vee (n \Rightarrow (\neg c))$ $H_1$

$((\neg c) \vee (\neg r)) \Leftrightarrow \neg c \vee \neg n$ $H_2$

$(l \Rightarrow ((\neg c) \Rightarrow ((\neg n) \wedge a)))$ $H_3$

$\Leftrightarrow l \Rightarrow (\neg c \Leftrightarrow \neg n \wedge a)$

## Exercice 3

1) (1) : $r \wedge g \Rightarrow \neg q$

(2) : $\neg b \Rightarrow q \vee g$

(3) : $c \wedge \neg e \Rightarrow \neg(g \wedge q)$

(4) : $(g \vee q) \wedge \neg c \Rightarrow r \vee b$

2) $b \vee r \vee e$

## Exercice 4

1)

v — a commis un vol

p — bien préparé

c — complice

b — butin important

$P_1$ $\quad v \Rightarrow p \vee c$

$P_2$ $\quad p \Rightarrow (c \Rightarrow b)$

$P_3$ $\quad \neg b$

donc $P_4$ $\quad \neg v$

2) On ne sait dire pour l'instant si cette argumentation est convaincante.

Par contre, elle sera convaincante ou non indépendemment de la signification des propositions.

– elle est syntaxiquement convaincante ou non.

Exercice 5

$A = \neg a \vee (b \Rightarrow ((a \wedge b) \Rightarrow \neg b))$

| $v(a)$ | $v(b)$ | $v(\neg a)$ | $v(\neg b)$ | $v(a \wedge b)$ | $v((a \wedge b) \Rightarrow \neg b)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| $v(b \Rightarrow ((a \wedge b) \Rightarrow \neg b))$ | $v(A)$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 1 |
| 1 | 1 |
| 0 | 0 |

## Exercice 6

$$A = (\neg a \vee b) \wedge (c \Rightarrow (a \Rightarrow b))$$

| $v(c)$ | $v(a)$ | $v(\neg a)$ | $v(b)$ | $v(\neg a \vee b)$ | $v(a \Rightarrow b)$ | $v(c \Rightarrow (a \Rightarrow b))$ | $v(A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Évaluations

## Exercice 7

Montrer que $P = r \Rightarrow (s \Rightarrow r)$ est une tautologie

* 2 démarches possibles :

1 - on établit la table de vérité de P

- on constate que des 1 en colonne principale
  i.e. $\forall v, v(P) = 1$
- on conclut en rappelant la définition de tautologie

2 - on procède par réécriture (en utilisant les équivalences remarquables) et en espérant aboutir à la proposition vrai.

$(\forall v, v(\text{vrai}) = 1)$

! très méticuleuse (approche syntaxique)

- $P = r \Rightarrow (s \Rightarrow r) \approx \neg r \vee (\neg s \vee r)$ (18) 2 fois
  $\approx \neg r \vee (r \vee \neg s)$ (4) commutativité
  $\approx (\neg r \vee r) \vee \neg s$ (5) associativité
  $\approx \text{vrai} \vee \neg s$ (16)
  $\approx \neg s \vee \text{vrai}$ (4) commutativité
  $\approx \text{vrai}$ (14)

On conclut

$\forall v,\ v(\text{vrai}) = 1$

donc, d'après la déf. de tautologie

Comme $v(P) = 1 \quad \forall P$

P est une tautologie

- Est-ce que $P = (r \Rightarrow s) \Rightarrow ((r \wedge t) \Rightarrow (s \vee t))$ est une tautologie ?

① démarche sûre mais fastidieuse

① on passe par la t. de v de P

② on regarde la colonne principale

③ on conclut

② par équivalence remarquable (en espérant aboutir à vrai)

↳ ne pas aboutir à vrai n'est pas une preuve que P n'est pas une tautologie (peut-être ne sait-on pas choisir la bonne séquence de réécriture)

$$P = (r \Rightarrow s) \Rightarrow ((r \wedge t) \Rightarrow (s \vee t))$$

| | |
|---|---|
| $\neg(\neg r \vee s) \vee (\neg(r \wedge t) \vee (s \vee t))$ | (18) 3 fois |
| $\neg(\neg r \vee s) \vee (\neg r \vee \neg t \vee (s \vee t))$ | (12) |
| $\neg(\neg r \vee s) \vee (\neg r \vee \neg t \vee (t \vee s))$ | (4) |
| $\neg(\neg r \vee s) \vee (\neg r \vee (\neg t \vee t) \vee s)$ | (6) |
| $\neg(\neg r \vee s) \vee (\neg r \vee (t \vee \neg t) \vee s)$ | (4) |
| $\neg(\neg r \vee s) \vee (\neg r \vee \text{vrai} \vee s)$ | (16) |
| $\neg(\neg r \vee s) \vee (\neg r \vee \underline{s \vee \text{vrai}})$ | (4) |
| $\neg(\neg r \vee s) \vee (\neg r \vee \text{vrai})$ | (16) |
| $\underline{\neg(\neg r \vee s)} \vee \text{vrai}$ | (16) |
| vrai | (16) |

$P \vee \text{vrai} \cong \text{vrai}$ (16)

## Exercice 8

| | C | p1 | p2 | p3 | p4 | A | ¬p4 | p3 ∧ ¬p4 | (p3 ∧ ¬p4) ⇒ A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0/1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0/1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0/1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0/1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

① $(p3 \wedge \neg p4) \Rightarrow A$ est une tautologie

Conclusion :

$$\forall v,\ v\big((p3 \wedge \neg p4) \Rightarrow A\big) = 1$$

⇒ c'est une tautologie d'après la définition

② $A = \boxed{C \Rightarrow p3 \wedge \neg p4}$, C ne contient que $p_1$ et $p_2$

| $p_1 \wedge$ | $\neg p_2$ | C |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

③ trouver $A_1 \approx A$

$A = C \Rightarrow (p_3 \wedge \neg p_4)$

$C = \neg(p_1 \wedge p_2)$

$$A_1 = \neg(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow (p_3 \wedge \neg p_4) \approx A$$

## Exercice 9

$\mathcal{H} = \{a \Rightarrow (b \vee c), b \Rightarrow (c \Rightarrow d), \neg d\}$

$A = \neg a$

A t'on $\mathcal{H} \models \neg a$ ?

(l'argumentation est-elle convaincante ?)

* 2 façons de répondre

① on est convaincu que la réponse est négative

On peut exhiber une valuation qui soit réfutation de $\underset{A}{\neg a}$ et réalisation de $\mathcal{H}$

$$v \left| \begin{array}{l} a \to 1 \\ b \to 0 \\ c \to 1 \\ d \to 0 \end{array} \right.$$

Cette valuation est :

réalisation de $\mathcal{H}$

réfutation de $A = \neg a$

donc $\mathcal{H} \not\models \neg a$

$v(a) = 1$ impose $v(b \vee c) = 1$

$v(b \Rightarrow (c \Rightarrow d)) = 1$ vrai si $v(b) = 0$ d'après t. de v. $\Rightarrow$

donc $v(c) = 1$ d'après t. de v. de $\vee$

② aucune intuition

On établit la grande table de vérité

On trouve une ligne (au moins) où toutes les valeurs de $H \in \mathcal{H}$ sont 1 où la valeur de A est 0.

On conclut en rappelant la déf de c.v.

## Exercice 10

$H_1 = (\neg a \wedge r) \vee (m \wedge \neg c)$

$H_2 = \neg c \vee \neg r$

$H_3 = l \Rightarrow (\neg c \Rightarrow (\neg m \wedge a))$

1. $\{H_1, H_2\} \models \neg x \quad x\,?$

$\{H_1, H_2, H_3\}$ 5 prop. atom

| $a$ | $r$ | $m$ | $c$ | $H_1$ | $H_2$ | $\{H_1, H_2\}$ | $\neg c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

$\{H_1, H_2\} \rightarrow H_1 \wedge H_2$

chaque fois que $v(\{H_1, H_2\}) = 1$

on a $v(\neg c) = 1$

donc $\{H_1, H_2\} \models \neg c$

②

| a | r | m | c | l | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $\{H_1, H_2, H_3\}$ | $\neg l$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

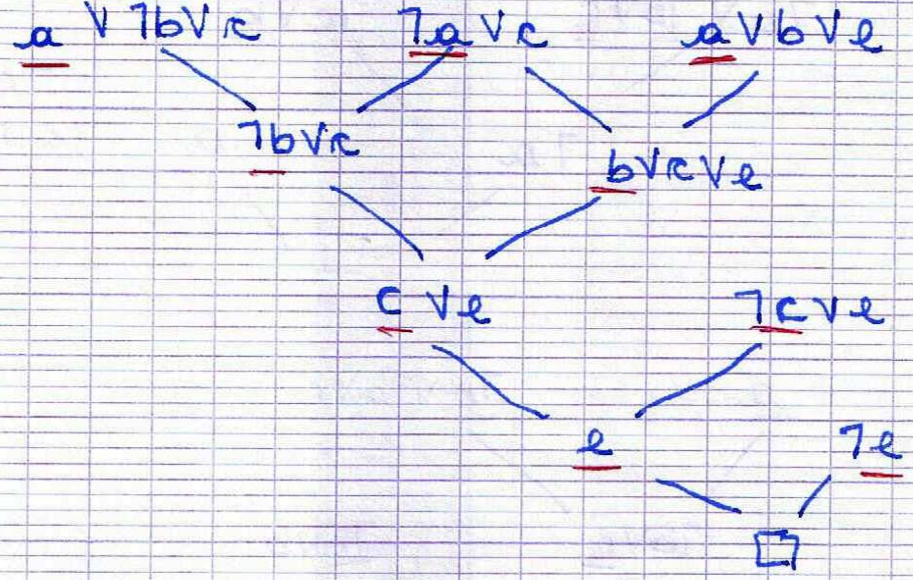
## Exercice 13

Soit $C = \{a \vee \neg b \vee c, \neg a \vee c, a \vee b \vee e, \neg c \vee e, \neg e\}$

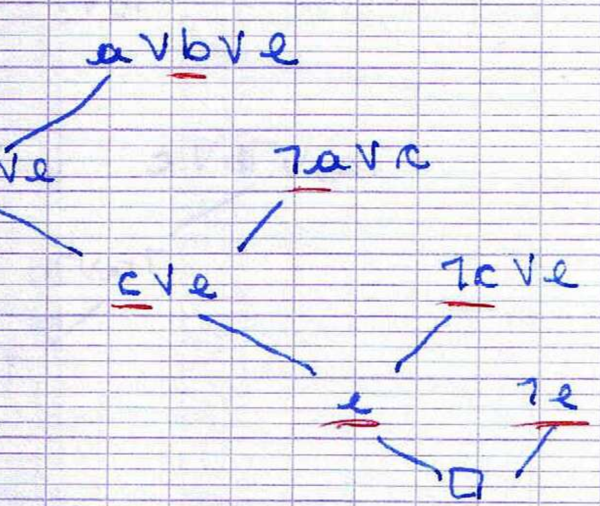
Montrer, grâce à $SF_R$ que C est contradictoire.

**Rappel**: construire un arbre avec $\square$ comme dernière résolvante.

$\boxed{C \text{ contradictoire ssi } C \vdash_{SF_R} \square}$




autre solution :




Il reste la combinatoire du choix des 2 clauses alimentant la résolution

## Exercice 14

Soit $C = \{a \vee b \vee c, a \vee \neg b \vee c \vee d, \neg a \vee b \vee d, a \vee \neg b \vee \neg c \vee d\}$

C est-il contradictoire ? Justifier la réponse

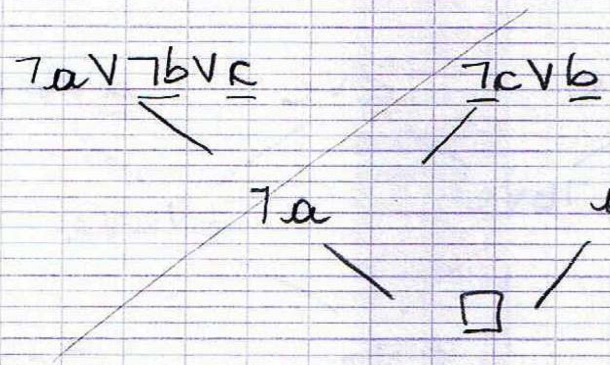
1) Non. Aucune clause ne contient $\neg d$ et toute résolvante contiendra $d$

2) 2ème réponse - on utilise l'algo jusqu'à stabilité, et on constate qu'au moment de la stabilité on n'a pas $\square$.

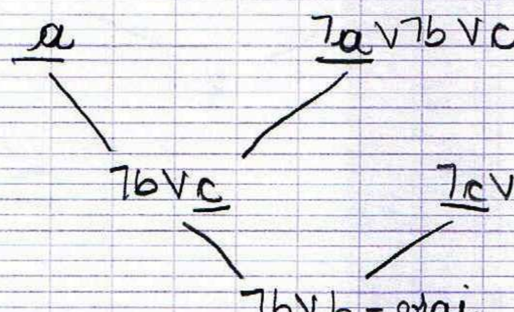
## Exercice 15

Soit $C = \{a, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg a \vee \neg c, \neg c \vee b, b\}$

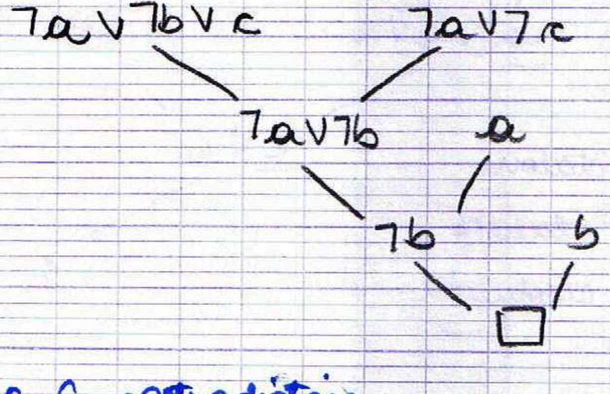
Montrer que $C$ est contradictoire.




- c'est faux !!! (à éviter !)




ce n'est pas une raison pour conclure : C'est satisfaisable




Donc $C$ contradictoire

## Exercice 16

(i) $\{(l \wedge t) \Rightarrow (m \vee w),\ w \Rightarrow ((m \wedge \neg t) \vee \neg l),\ m \wedge t \Rightarrow w\} \models l \Rightarrow \neg t$

en utilisant l'approche syntaxique ($SF_R$)

1. mettre la négation de la conclusion avec les hypothèses
2. transformer en clauses
3. inférer $\square$

(i) soit

(1) $\{\underbrace{l \wedge t \Rightarrow m \vee w}_{P_1},\ \underbrace{w \Rightarrow ((m \wedge \neg t) \vee \neg l)}_{P_2},\ \underbrace{m \wedge t \Rightarrow w}_{P_3},\ \underbrace{\neg(l \Rightarrow \neg t)}_{P_4}\}$ est contradictoire

(2) soit

$\{\underbrace{\neg l \vee \neg t \vee m \vee w}_{C_1},\ \underbrace{\neg w \vee m \vee \neg l}_{C_{21}},\ \underbrace{\neg w \vee \neg t \vee \neg l}_{C_{22}},\ \underbrace{\neg m \vee \neg t \vee w}_{C_3},\ \underbrace{l}_{C_{41}},\ \underbrace{t}_{C_{42}}\}$

$P_2$ : $w \Rightarrow ((m \wedge \neg t) \vee \neg l)$

$\neg w \vee (m \wedge \neg t) \vee \neg l$

$(\neg w \vee m \vee \neg l) \wedge (\neg w \vee \neg t \vee \neg l)$

$\{\underbrace{\neg w \vee m \vee \neg l}_{C_{21}},\ \underbrace{\neg w \vee \neg t \vee \neg l}_{C_{22}}\}$

(3)

$\neg l \vee \neg t \vee \underline{m} \vee w$ , $\underline{\neg m} \vee \neg t \vee w$

$\neg l \vee \neg t \vee \underline{w}$ , $\underline{\neg w} \vee \neg t \vee \neg l$

$\underline{\neg l} \vee \neg t$ , $\underline{l}$

$\underline{\neg t}$ , $\underline{t}$

$\square$

$C_{21}$ n'a pas servi !

## Exercice 17

$G = \exists x ( P(a,x) \wedge \forall y \exists z ( Q(x, f(y,z)) \Rightarrow$
$( Q(y,a) \vee Q(y,x))))$ $\in \mathcal{L}$

on pourrait construire l'arbre syntaxique de racine <fbf>

2) soit $I = \begin{cases} D = \mathbb{N} \\ Q : \text{relation} = \ \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \{0,1\} \\ P : \text{relation} < : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \{0,1\} \\ a : 1 \\ f : \text{la fonction } * : \mathbb{N} * \mathbb{N} \to \mathbb{N} \end{cases}$

Il existe $x > 1$ tel que pour tout $y$ il existe un $z$ de sorte que ~~si~~ $x$ s'écrit $y \times z$.

Cela impose que $y$ soit égal à 1 ou à $x$

Il existe $x > 1$ qui n'a pour diviseur que $x$ et 1

Il existe $x > 1$, $x$ premier

$\mapsto 1$

## Exercice 18

Soient :

$A_1 = \forall x \forall y \forall z ( P(x,y) \wedge P(y,z) \Rightarrow P(x,z))$

$A_2 = \forall x ( P(a,x) \vee P(x,b))$

$A_3 : \forall x ( P(x, f(x)))$

2) Trouver un modèle pour $\{A_1, A_2, A_3\}$ à domaine infini

$I \begin{cases} D = \mathbb{N} \\ P \to \leq \\ f \to x \to x^2 \\ a = 10 \\ b = 10 \end{cases}$

b) $\{A_1, A_2, A_3\} \models \exists x\, P(x, a)$ pas vrai

D'après déf il suffit de trouver une interprétation (de $\models$)

modèle de $\{A_1, A_2, A_3\}$ et non modèle de $\exists x ( P(x,a))$

$$I : \begin{cases} D = \mathbb{N} \\ P \to < \\ f \to x \to x+1 \\ a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

Cette interprétation est modèle de $\{A_1, A_2, A_3\}$ non modèle de $\exists x (P(x,a))$

$\{A_1, A_2, A_3\} \not\models \exists x (P(x,a))$

## Exercice 19

Mettre sous forme prenexe :

$F = \forall x (P(x) \wedge Q(x,a) \Rightarrow (R(x,b) \wedge \forall y \forall z (R(y,z) \Rightarrow T(x,z))))$

$\Rightarrow$
$\vee$ +
$\wedge$ *
$\neg$ - unaire

$F_1 = \forall x (\neg(P(x) \wedge Q(x,a)) \vee (R(x,b) \wedge \forall y \forall z (\neg R(y,z) \vee T(x,z))))$

$F_2 = \forall x (\neg P(x) \vee \neg Q(x,a) \vee (R(x,b) \wedge \forall y \forall z (\neg R(y,z) \vee T(x,z))))$

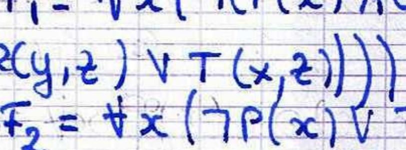
$F_3 = \forall x \forall y \forall z (\neg P(x) \vee \neg Q(x,a) \vee (R(x,b) \wedge (\neg R(y,z) \vee T(x,z))))$

## Exercice 20

$F = P(f(x,y))$

$G = P(f(a,y), h(g(y)))$

Trouver un unificateur de F et G.




$U = \{ \langle x, g(y) \rangle, \langle y, b \rangle \}$

$U = \{ \langle x, g(b) \rangle, \langle y, b \rangle \}$

$F_U = P(f(g(b), b))$

$G_U = P(f(g(b), b))$

## Exercice 21

$F = P(f(x,b), h(x))$

$G = P(f(a,y), h(g(y)))$

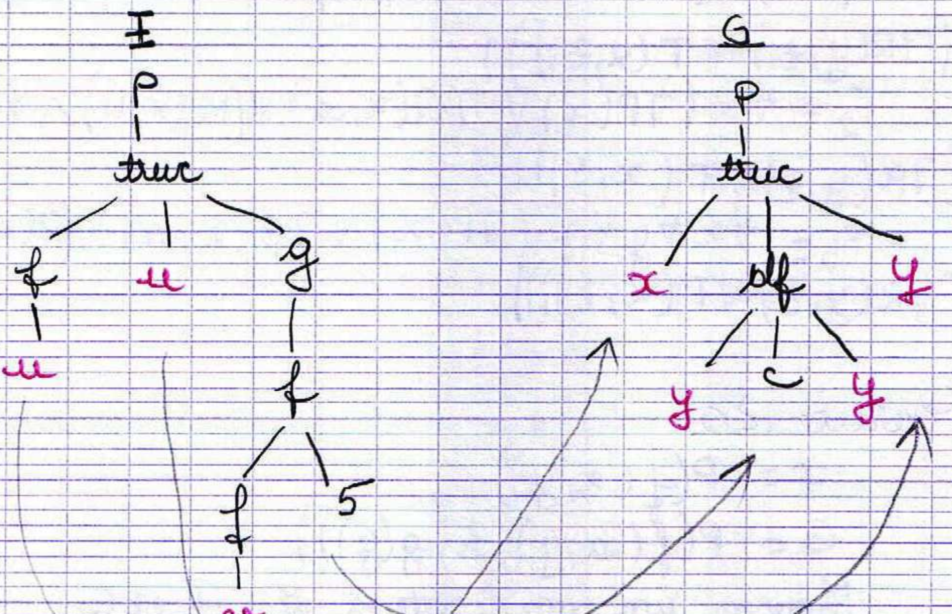
$F = G$ n'a pas de solution

$$!\begin{cases} x \to a \\ y \to b \\ x \to g(b) \end{cases}$$

## Exercice 22

$F = P(truc(f(u), u, g(f(f(v), 5))))$

$G = P(truc(x, df(y, c, y), y))$




$$\begin{cases} x = f(u) \\ df(y, c, y) = u \\ y = g(f(f(v),5)) \end{cases}$$

$U = \{ <u, df(g(f(f(v),5)), c, g(f(f(v),5)))>$

$<x, f(df(g(f(f(v),5)), c, g(f(f(v),5))))>$

$<y, g(f(f(v),5))> \}$

# LOGIQUE TD

**Remarque :**

L'unification U est un PGU (plus général unificateur). C'est un unificateur qui contraint le moins possible les variables. $F_U$ et $G_U$ ont encore 1 degré de liberté (c'est $v$).

D'autres unificateurs sont possibles en figeant la valeur de $v$.

$$\begin{cases} v \mapsto d \\ v \mapsto f(h(w)) \\ \vdots \end{cases}$$

L'algorithme de Prolog trouve toujours un PGU !

**Exercice 23**

$\mathcal{H} = \{ P(a), \forall x (P(x) \Rightarrow Q(t(x))), \forall x (Q(x) \Rightarrow P(t(x)) \}$

1) $P(t(t(t(t(a)))))$

**Remarque** : du côté sémantique il faudrait montrer que toute interprétation, modèle de $\mathcal{H}$ est aussi modèle de $P(t(t(t(t(a)))))$

- essayer avec $SF_R$.

**démarche :**

1) mettre la négation de la conclusion avec $\mathcal{H}$ — $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \cup \{\neg c\}$ ($c$ : conclusion)
2) forme prénexe
3) forme clausale

On obtient un ensemble de clauses de $\mathcal{L}$ (contradictoire ssi $\mathcal{H}'$ contradictoire)

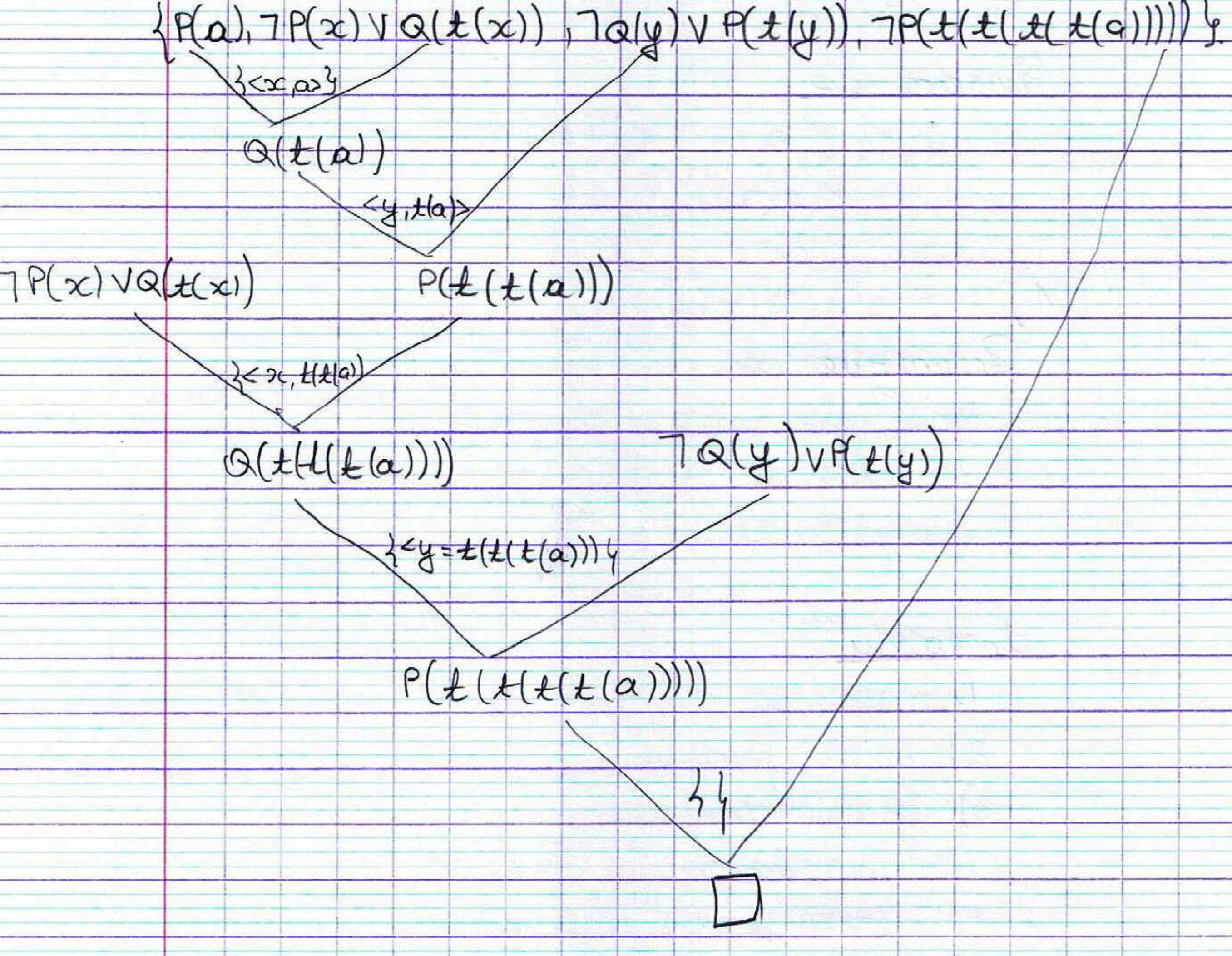
4) essayer d'inférer $\square$

1) $\mathcal{H}' = \{P(a), \forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(t(x))), \forall x\,(Q(x) \Rightarrow P(t(x))), \neg P(t(t(t(t(a)))))\}$

2) $\{P(a), \forall x\,(\neg P(x) \vee Q(t(x))), \forall x\,(\neg Q(x) \vee P(t(x))), \neg P(t(t(t(t(a)))))\}$

3) $\{P(a), \neg P(x) \vee Q(t(x)), \neg Q(x) \vee P(t(x)), \neg P(t(t(t(t(a)))))\}$

$\{P(a), \neg P(x) \vee Q(t(x)), \neg Q(y) \vee P(t(y)), \neg P(t(t(t(t(a)))))\}$



2) $\mathcal{H} = \{P(a), \forall x(P(x) \Rightarrow Q(t(x))), \forall x(Q(x) \Rightarrow P(t(x)))\}$

Il suffit de contredire la définition de conséquence logique.

Trouver une interprétation I, modèle de $\mathcal{H}$, non modèle de $\forall x P(x)$

| I = | $D = \mathbb{N}$<br>P = être pair<br>I = être impair<br>t = successeur<br>a = 0 |
|---|---|

modèle de $\mathcal{H}$

non modèle de $\forall x P(x)$

Exercice 24

$\mathcal{H} = \{\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(R(x) \wedge Q(x,y))), \exists x P(x)\}$.

$\vdash \exists x \exists y\, Q(x,y)$

1) $\mathcal{H} = \{\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(R(x) \wedge Q(x,y))), \exists x P(x), \forall x \forall y \neg Q(x,y)\}$.

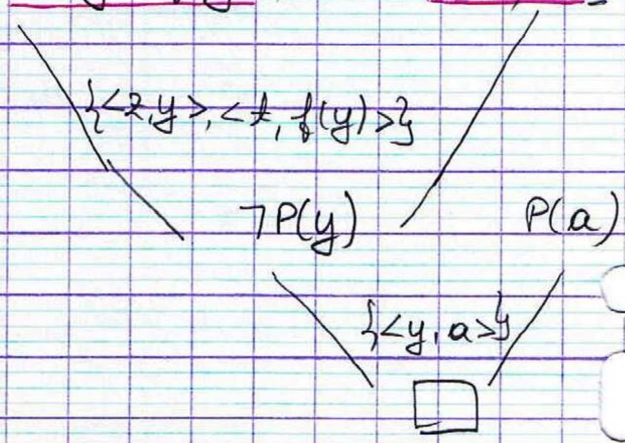
2) $\{\forall x(\neg P(x) \vee (\exists y(R(x) \wedge Q(x,y)))), \exists x P(x), \forall x \forall y \neg Q(x,y)\}$.

$\{\forall x \exists y(\neg P(x) \vee (R(x) \wedge Q(x,y))), \exists x P(x), \forall x \forall y \neg Q(x,y)\}$

3) $\{\forall x(\neg P(x) \vee (R(x) \wedge Q(x,f(x)))), P(a), \forall x \forall y \neg Q(x,y)\}$

$\{\neg P(x) \vee R(x), \neg P(x) \vee Q(x, f(x)), P(a),$
$\neg Q(x,y)\}$

$\{\neg P(x) \vee R(x), \neg P(y) \vee Q(y, f(y)), P(a), \neg Q(z,t)\}$




## Exercice 25

$\mathcal{H} = \{\forall x\, P(x) \Rightarrow R(f(x)), \forall x R(x) \Rightarrow P(f(x))\}$

$\vdash \forall x\, (P(x) \Rightarrow P(f(f(x))))$

1) $\mathcal{H} = \{\forall x\, P(x) \Rightarrow R(f(x)), \forall x\, R(x) \rightarrow P(f(x))$