1　行列と行列式

1.1　行列式の定義

正方行列 $A(n\times n$行列$)=(a_{ij})$ について行列式の定義は以下.

$$\det A=\sum_{\sigma\in\&_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$$

ここで $\&_n$ は n 個の置換，$\mathrm{sgn}(\sigma)=(-1)^{交差数}$

1.2　行列式の定義からわかること

$A=[a_1,a_2,\cdots a_n]$ 列ベクトルで見ることにする．a_i は i 次元縦ベクトル

1 $\det I_n=1$

2 $\det(a_1,a_2,\cdots\lambda a_k\cdots a_n)=\lambda\det A$

3 $\det(a_1,a_2,\cdots a_k+b\cdots a_n)=\det A+\det(a_1,a_2,\cdots b\cdots a_n)$

4 $\det(a_1,a_2,\cdots a_k\cdots a_l\cdots a_n)=-\det(a_1,a_2,\cdots a_l\cdots a_k\cdots a_n)(k<l)$交差が1回変わるので

5 $\det(a_1,a_2,\cdots 0\cdots a_n)=0(\because 2)$

6 $\det(a_1,a_1,\cdots a_n)=0(\because 4)$

7 $\det(a_1,a_2,\cdots a_k+\lambda a_l\cdots a_n)=\det A(\because 3,6)$列基本変形について不変

8 $\det(AB)=\det A\det B$

9 $\det\begin{pmatrix}A&0\\B&C\end{pmatrix}=\det A\det C$

10 $\det\begin{pmatrix}A&0\\I&B\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}I&A\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-AB&0\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\B&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&I\\I&0\end{pmatrix}\det(AB)=\det(-AB)(-1)^n$

1.3　Cramer の公式

正方行列 $A(n\times n)$ について $Ax=b$ の公式.

$$\det A\neq 0のとき\quad x_j=\frac{\det(a_1a_2\cdots b\ a_n)}{\det A}$$

$$\because (a_1 a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & x & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix} = (a_1 \cdots b \cdots a_n)\ I\text{の}j\text{列に}x\text{を置く}$$

1.4 余因子

Aのp行とq列をのぞいた行列をMとすると 余因子 $\Delta_{pq} = (-1)^{p+q}\det M$

行列の余因子展開 (Laplace 展開) は以下のようになる.

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\Delta_{pj}(p\text{行について}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{iq}\Delta_{iq}(q\text{列について}) \end{aligned}$$

余因子行列の定義は以下

$$\begin{aligned} &\widehat{A} = (\widehat{a_{ij}}) \\ &\widehat{a_{ij}} = \Delta_{ji} \\ &\widehat{A}A = \sum_{i=1}^{n} \widehat{a_{pi}} a_{iq} \end{aligned}$$

$\det A$の第q列の展開配下のようになる

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{a_{pi}} a_{iq} = (\widehat{A}A\text{の}(q,q)\text{成分}) \\ p \neq q \quad & \sum_{i=1}^{n} \widehat{a_{pi}} a_{iq} = (\widehat{A}A\text{の}(p,q)\text{成分}) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} &\widehat{A}A = \det A \\ &A^{-1} = (\det A)^{-1}\widehat{A} \end{aligned}$$