$\lambda = \rho(A)$ なる固有値は他にどれくらいあるのか．例えば $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は 1 と-1 である．

0.0.1　周期

行列 A をグラフ G に，既約を強連結に対応させる．

定義 1　周期 σ はすべての閉路の長さの最大公約数であり，σ=1 のとき原始的という．

例えば $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合閉路の長さは $1 \to 2 \to 1$ で 2 であり $\sigma = 2$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の場合は閉路が $1 \to 2 \to 1$と$2 \to 2$ で $\sigma = 1$

$I_k = \{i \in V | \text{点}1\text{から}i\text{は長さ}l(\equiv k \mod \sigma)\text{で到達可能}\}$

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{array}{c|ccc} & \underset{\Leftrightarrow}{I_0} & \underset{\Leftrightarrow}{I_1} & \underset{\Leftrightarrow}{I_2} \\ \hline I_0 \updownarrow & & & \\ I_1 \updownarrow & & & \\ I_2 \updownarrow & & & \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.0.1}$$

以下では $\sigma = 3$ とする．

$$Ax = \rho(A)x$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \rho(x) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_1x_2 = \rho(A)x_1 \\ A_2x_3 = \rho(A)x_2 \\ A_3x_1 = \rho(A)x_3 \end{cases}$$

$\zeta = e^{\frac{2}{3}\pi i}$ として

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \zeta x_2 \\ \zeta^2 x_3 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \zeta^2 x_2 \\ \zeta^4 x_3 \end{pmatrix} \text{とおくと}$$

$$Ax^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \\ A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \zeta x_2 \\ \zeta^2 x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\zeta x_2 \\ A_2\zeta^2 x_3 \\ A_3x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta\rho(A)x_1 \\ \zeta^2\rho(A)x_2 \\ \zeta^3\rho(A)x_3 \end{pmatrix} = \zeta\rho(A)x^{(1)} \tag{0.0.2}$$

$$Ax^{(2)} = \cdots \zeta^2\rho(A)x^{(2)} \tag{0.0.3}$$

したがって $\zeta^k\rho(A)$ $(k = 0, 1, \cdots n-1)$ は A の固有値である．

$\lambda : A$ の固有値とすると

$$(A_1A_2A_3)x_1 = A_1A_2(\lambda x_3) = \cdots \lambda^3 x_1$$

より周期は 1 で実はスペクトル半径円上の固有値は $\rho(A_1A_2A_3)$ のみである．

伊理「一般線形代数」p.271 によると

$$A \geq 0,\ \text{既約なら}a_{ii} > 0\ ({}^{\forall}i)$$
$$\lambda \neq \rho(A)\text{が}A\text{の固有値} \Leftrightarrow |\lambda| < \rho(A)(\text{スペクトル円上の}A\text{の固有値は}\rho(A)\text{のみ})$$

$Au = \rho(A)u \quad u > 0$ とすると

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & & & \\ & u_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_n \end{pmatrix} \quad \hat{A} = U^{-1}AU \text{とする}$$

1 λ は $\hat{A}$ の固有値

2 $\sum_{j=1} \hat{a_{ij}} = \rho(A) \quad \hat{a_{ij}} = \dfrac{a_{ij}u_j}{u_i}$

だから $\sum_{j=1}^{n} \hat{a_{ij}} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j}{u_i} = \dfrac{(Au)_i}{u_i} = \dfrac{(\rho(A)u)_i}{u_i} = \rho(A)$

$\hat{A}$ について Gershgorin の定理を使うと $r_i = \sum_{j \neq i} \hat{a_{ij}} = \rho(A) - \hat{a_{ii}}$
円板 $|\lambda - \hat{A_{ii}}| \leq r_i$ とスペクトル円の交わりは $\lambda = \rho(A)$ のみである.

系 1 $A > 0$(正行列のみ)$\Rightarrow$ スペクトル同士の固有値は $\rho(A)$ のみ

系 2 $a = 1 \Rightarrow$ スペクトル同士の固有値は $\rho(A)$ のみ

系 2 の証明は以下のとおりである.
$a = 1 \Rightarrow$ 十分に大きなすべての m について $A^m > 0$
λ が A の固有値で $|\lambda| = \rho(A)$ ならば λ^m は A の固有値で $|\lambda^m| = \rho(A)^m = \rho(A^m)$
系 1 を A^m に適用すると $\lambda^m = \rho(A^m) = \rho(A)^m$ であり m は十分大きなすべての数を動くので $\lambda = \rho(A)$

1 整数行列

1.1 単摸 (ユニモジュラー行列)

$A = (a_{ij}) \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}$ 　いま $Ax = b$ を解くことを考える.

$$^{\exists}x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathrm{rank}([A|b]) = \mathrm{rank}(A)$$
$$^{\exists}x \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow ?$$

定義 2 　$Q : n \times n$ 整数行列が単摸 $\Leftrightarrow \det Q \in 1, -1$

定義 3 　$Q : n \times n$ 整数行列が完全単摸 $\Rightarrow Q$ は任意の正方部分行列 C について $\det C \in 0, 1, -1$

Q : 整数行列の時以下はすべて同値.

(1) Q が単摸行列

(2) Q^{-1} が整数行列

(3) x が整数ベクトル $\Leftarrow Qx$ が整数行列

(4) Q が整数行列に対する列基本変形を表す行列の積

(5) Q が整数行列に対する行基本変形を表す行列の積

(1)→(2) $Q^{-1} = \dfrac{\text{余因子行列}}{\det Q}$

(2)→(1) $QQ^{-1} = I$ の行列式を考えて $\det Q \det Q^{-1} = 1$　いま Q^{-1} が整数行列なので $\det Q^{-1} \in \mathbb{Z}$ から $\det Q = 1, -1$

(2)→(3) $Qx \in \mathbb{Z}^n$ について $y = Qx$ とおくと $x = Q^{-1}y \in \mathbb{Z}^n$

$\mathbb{R}$ の場合の列基本変形は

- ある列を α 倍
- 2 つの列を入れ替える
- ある列 $\times\alpha$ を他の列に加える

$\mathbb{Z}$ の場合は

- ある列を-1 倍
- 2 つの列を入れ替える
- ある列の整数倍を他の列に加える

1.2　エルミート標準形

$m \times n$ 行列 A のフルランク．整数行列．$\mathrm{rank}(A) = m$ ${}^{\exists}Q$ を単摸行列として

$$AQ = \left(\begin{array}{ccc|c} \beta_{11} & & 0 & \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \beta_{m1} & & \beta_{mn} & \end{array}\right)$$

下三角 $\beta_{ij} = 0 (i < j)$ で非負 $\beta_{ij} \leq 0, \beta_{ii} > 0$ 行方向に見たときに対角項が最大 $\beta_{ii} > \beta_{ij} (i > j)$

定理 1　任意の単摸行列は列基本変形の積

単位行列 I に列基本変形を施して A になるならば A は単摸行列 (列基本変形は det を符号以外変えない)．また実は単摸行列に列基本変形を施せばエルミート標準形になることを示す．

一つの行に着目する: $\boxed{a_1 a_2 \cdots a_n}$

1 いくつかの列を-1 倍して $a_1 \cdots a_n \geq 0$ とする．

2 列を入れ替えて $a_1 \geq a_2 \geq \cdots a_n \geq 0$ とする．

　このとき $a_1 > 0$ である，なぜなら $a_1 = 0$ だとすべての行が 0 で行フルランクに反してしまうから．

3 列を互いに引き算する．$a_i = a_j q_i + r_i (a_i \geq a_j \text{であり} q_i \in \mathbb{Z} > 0 \text{で} r_i \text{は余り})$ を計算し $a_i = r_i$ にして 2

に戻ることを繰り返す．

もし $a_2 \neq 0$ ならば $a_1 - a_2$ が可能でありいつかは $a_2 = 0$ になる．それを他の行でも同じことをする．