0.1　標準固有値問題

$$
\begin{aligned}
&\text{標準固有値問題} \qquad Ax = \lambda x \quad (x \neq 0) \\
&\text{一般化固有値問題} \quad Ax = \lambda G x \quad (x \neq 0)
\end{aligned}
$$

ただし一般化固有値問題において G は正定値対称行列である．

0.2　線形空間と双対空間

線形空間 V 上の線形写像 f とは，$f : V \to \mathbb{R}$ であって以下を満たすものである．

$$
\begin{cases}
f(x+y) = f(x) + f(y) & \forall x, y \in V \\
f(\alpha x) = \alpha f(x) & \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V
\end{cases}
$$

定義 1　V の双対空間 V^* とは以下のように V 上の線形写像全体のなす集合である．

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{R}^| f\text{は線形写像}\}$$

双対性を表す内積として以下のように $<,>$ をもちいる．

$$x \in V, \quad f \in V^*\text{のとき} \quad f(x) = \langle f, x \rangle$$

各 $x \in V$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\phi_x : V^* \to \mathbb{R} \quad (f \in V^*, \langle f, x \rangle \in \mathbb{R}) \\
&\phi_x(f) = \langle f, x \rangle \\
&\phi_x \in V^{**} \quad ((V^*)^* = V^{**}\text{とかく})
\end{aligned}
$$

このとき $V \to V^{**}(x \in V, \phi_x \in V^{**})$ を考えると $V \subseteq V^{**}$ で一般には $V \neq V^{**}$

$$
\begin{aligned}
&V\text{が有限次元空間のとき}
\begin{cases}
V \simeq \mathbb{R}^n \\
V^* \simeq \mathbb{R}^n \\
V^{**} \simeq \mathbb{R}^n
\end{cases} \\
&V\text{がノルム空間のとき}
\begin{cases}
V^*\text{はBanach空間} \\
V^{**}\text{もBanach空間} \\
\text{でも}V^{**} \simeq V\text{とは限らない}
\end{cases} \\
&V\text{がHilbert空間} \Rightarrow V \simeq V^* \simeq V^{**}
\end{aligned}
$$

ここでノルム空間はノルムが定義されたベクトル空間，Banach 空間は完備なノルム空間,Hilbert 空間はユークリッド空間の拡張である．

0.3　pairing と内積

$$
\begin{aligned}
\langle f, x \rangle \quad & \langle , \rangle : V \times V^* \to \mathbb{R} \\
(x, y)_G \quad & (,) : V \times V \to \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

ここで正定値対称行列 $G : V \to V^*$ を用いると

$$
\begin{aligned}
(x,y)_G &= \langle x, Gx \rangle \\
\|x\|_G &= \sqrt{\langle x, Gx \rangle}
\end{aligned}
$$

1　行列の標準形

1.1　対角化

A が実対称行列 $A^{\mathrm{T}} = A$(エルミート行列 $A^H = A$, 共役転置) のとき固有値は実数で n 個存在し，固有ベクトルは直交化できる.

$$
\exists\text{直交行列またはユニタリ行列}Q\text{について}\quad Q^*AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} (Q^* = Q^{\mathrm{T}}\text{or } Q^H)
$$

このように対角化できる行列はどんな行列か？

定義 2

$$
\begin{aligned}
A\text{が正規行列} &\Leftrightarrow A^*A = AA^* \\
A\text{がユニタリ(直交)行列} &\Leftrightarrow A^*A = I
\end{aligned}
$$

定理 1

$$
A\text{が正規行列} \Leftrightarrow \exists Q(\text{ユニタリ行列})\text{を用いて対角化可能} : Q^*AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}
$$

$\Leftarrow$ を示す. 対角行列を D とすると $DD^* = D^*D$ であり $A = QDQ^*$ だから $A^* = (QDQ^*)^* = Q^{**}D^*Q^* = QD^*Q^*$ なので計算すれば $AA^* = A^*A$ が示せる.

$\Rightarrow$ は A の Schur 分解すると対角行列となることを示せば十分.

定理 2　(正規とは限らない)A に対して $\exists Q$(ユニタリ) : Q^*AQ(Schur 分解) したものは上三角行列で対角要素は A の固有値になる.

証明は帰納法による.$Ax_1 = \lambda_1 x_1 \quad \|x_1\| = 1$ ととる. このとき $Q = (x_1|U)$ とする. $U^*x_1 = 0(U\text{の各列は}x_1\text{と直交しているので})$

$$
AQ = \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda x_1 & AU \\ \hline\end{array}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
Q^*AQ = \begin{pmatrix} {x_1}^* \\ U^* \end{pmatrix} A(x_1|U) &= \begin{pmatrix} {x_1}^* \\ U^* \end{pmatrix} (\lambda_1 x_1|AU) \\
&= \begin{pmatrix} {x_1}^*\lambda x_1 & {x_1}^*AU \\ U^*\lambda_1 x_1 & U^*AU \end{pmatrix} \\
&= \begin{array}{|c|c|}\hline \lambda_1 & {x_1}^*AU \\ \hline 0 & U^*AU \\ \hline\end{array}
\end{aligned}
$$

最後に $\|x\| = 1$および$U^* x_1 = 0$ を用いた．これより左下の成分は 0 であり繰り返せば上三角行列になることが示される．

A が正規行列 ($A^*A = AA^*$) ならば Schur 分解した $Q^*AQ = R$ の R も正規である ($R^*R = RR^*$)(計算すると $RR^* = R^*R = Q^*AA^*Q$ になるので)．したがって $RR^* = R^*R$ を書き下すと

$$\boxed{\begin{matrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & & \\ 0 & & r_{nn} \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} \overline{r_{11}} & & 0 \\ \vdots & & \\ \overline{r_{1n}} & & \overline{r_{nn}} \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} \overline{r_{11}} & & 0 \\ \vdots & & \\ \overline{r_{1n}} & & \overline{r_{nn}} \end{matrix}} \boxed{\begin{matrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & & \\ 0 & & r_{nn} \end{matrix}}$$

上の式で (1,1) 成分を取り出すと $\|r_{11}\|^2 + \cdots + \|r_{1n}\|^2 = \|r_{11}\|^2$ になるので $\|r_{12}\|^2 + \cdots + \|r_{1n}\|^2 = 0$ である．したがって R は対角行列である．

1.2 いろいろな分解

$$A\text{が}n \times n\text{行列} \Leftrightarrow \exists Q(\text{ユニタリ行列})\text{について}Q^*AQ = \text{上三角行列(Schur分解)}$$

$$A\text{が正規行列} \Leftrightarrow \exists Q(\text{ユニタリ行列})\text{について}Q^*AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} (\text{固有値分解})$$

$$A\text{の}n\text{個の固有ベクトルが独立} \Leftrightarrow \exists X(\text{正則})\text{について}X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A\text{がエルミート行列(実対称)} \Leftrightarrow \exists Q(\text{ユニタリ行列})\text{について}Q^*AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} (\text{固有値は実数})$$

1.3 Sylvester 標準形

1.3.1 定義

正則行列 S を用いて Sylvester 標準形は以下のように定義される．

$$A : \text{エルミート行列に対して}\exists S(\text{正則行列})\text{を用いて}S^*AS = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & 0 & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & 0 \\ & & & & -1 & & \\ 0 & & & & & -1 & \\ \hline & & & 0 & & & 0 \end{array}\right]$$

1 の個数を s,-1 の個数を t とすると $s + t = \mathrm{rank}A$ である．

定理 3 $(s, t, n - s - t)$ を Sylvester の符号指数と定義すると，以下の Sylvester の慣性則が成り立つ．
Sylvester の慣性則:S^*AS(Sは正則) の形の変換で符号指数が変わらない．

1.3.2　作り方

固有値分解して $U^*AU =$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
\lambda_1 & & & & & 0 & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & \lambda_s & & & & 0 \\
 & & & \lambda_{s+1} & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
0 & & & & & \lambda_n & \\
\hline
 & & & 0 & & & 0
\end{array}\right)$$

となったとき $(\lambda_1 \cdots \lambda_s \quad > 0 \quad \lambda_{s+1} \cdots \lambda_n < 0)$ 以下のように S を定めると S^*AS は Sylvester 標準形になる.

$$S = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
1/\sqrt{\lambda_1} & & & & & \\
 & \ddots & & & 0 & \\
 & & 1/\sqrt{\lambda_n} & & & \\
\hline
 & & & 1 & & \\
 & 0 & & & \ddots & \\
 & & & & & 1
\end{array}\right)$$