0.1 Hall-Ore の定理

$\Gamma(X) = \{j \in V | {}^{\exists}i \in X : (i,j) \in E\} (\Gamma : 2^U \to 2^V)$

$$\max |M| = \min_{X \subseteq U} (|\Gamma(X)| - |X|) + |U|$$

Hall-Ore の定理を証明する．U のなかで X 以外の残りを $A, \Gamma(X) = B$ と表記する．

$$\begin{aligned} |A| + |X| &= |U| \\ |B| &= |\Gamma(X)| \\ |A| + |B| &= |\Gamma(X)| - |X| + |U| \end{aligned}$$

ここで左辺はカバーであり Koning の定理より $\max |M| = \min(|A| + |B|)$ なので示された．

また系 $|U| = |V|$ のとき以下も成り立つ．

$$\text{完全マッチングが存在する} \Leftrightarrow {}^{\exists}X \subseteq U \text{に対して} |\Gamma(X)| \geq |X|$$

以下証明を記す．$|M| = |U|$ ならば完全マッチングであり

$$0 \geq \max |M| - |U| = \min(|\Gamma(X)| - |X|)$$

したがって $|\Gamma(X)| - |X| \geq 0 ({}^{\forall}X \in U)$ ならば $|\Gamma(X)| - |X| = 0$

1 非負行列

定義 1 A が非負行列 $\Leftrightarrow$ 要素ごとに $a_{ij} \geq 0$であり, このとき$A \geq 0$ とかく

定義 2 A が正行列 $\Leftrightarrow a_{ij} > 0$

たとえばマルコフ連鎖を考えると推移行列は非負である．

$$\begin{aligned} p_{ij} &\geq 0 ({}^{\forall}i, j) \\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij} &= 1 ({}^{\forall}i) \end{aligned}$$

定義 3 A が確率行列 $\Leftrightarrow A \geq 0$かる$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 ({}^{\forall}i)$

定義 4 A が二重確率行列 $\Leftrightarrow A$もA^{T}も確率行列

1.1 Birkhoff-von Neumann の定理

定理 1 任意の二重確率行列は置換行列の凸結合 (重み ≥ 0, 重みの和=1) で表せる．

置換行列とは各行各列にちょうど一個だけ 1 を持ち残りはすべて 0 の行列であり，完全マッチングに対応している．

証明は A の非ゼロ要素数についての帰納法で行う．グラフの枝の数を v とする．

$v=n$ のとき A 自身が置換行列である．

一般に $|\Gamma(X)| \geq |X|(^\forall x \subseteq U)$ のとき完全マッチングが存在する．

$$
\begin{aligned}
|\Gamma(X)| = \sum_{j\in\Gamma(X)} 1 &= \sum_{j\in\Gamma(X)} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij})(\text{列和が1なので}) \\
&\geq \sum_{j\in\Gamma(X)} (\sum_{i\in X} a_{ij}) \\
&= \sum_{i\in X} \sum_{j\in\Gamma(X)} a_{ij} \\
&= \sum_{i\in X} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \\
&= \sum_{i\in X} 1(\text{行和が1なので}) \\
&= |X|
\end{aligned}
$$

M : 完全マッチングを選ぶと置換行列 P_M が対応する．$\mu : \min_{i,j\in M} a_{ij}(a_{ij} \neq 0)$ とする．

$\tilde{A} = A - \mu P_M$とおくと$\tilde{A}$の行和列和 $= 1-\mu$ である．($\tilde{A}$の非ゼロ数) $\leq$ (Aの非ゼロ数) -1 であり以下のように $\tilde{A}$ が凸結合で表せると仮定する．すると A も凸結合で表せる．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-\mu}\tilde{A} &= \sum_i \alpha_i P_i(\text{凸結合}) \\
A &= \tilde{A} + \mu P_M \\
&= \sum_i (1-\mu)\alpha_i P_i + \mu P_M
\end{aligned}
$$

1.2 既約な行列の定理

定理 2 $A \geq 0$ で A が既約なら $(I+A)^{n-1} > 0$(正方行列)

$(I+A)^{n-1}x > 0 \ ^\forall x \geq 0 (x \neq 0)$を示せばよい．

$x_{k+1} = (I+A)x_k (x_0 = x)$ とすると $x_k \to x_{k+1}$でゼロ要素数が減ることを示す．

$$
x_k = \begin{array}{|c|}\hline \alpha \\ \hline 0 \\ \hline\end{array} (\alpha > 0) \quad A = \begin{array}{|c|c|}\hline A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ \hline\end{array}
$$
$$
x_{k+1} = \begin{array}{|c|}\hline \beta \\ \hline \gamma \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline A_{11}\alpha \\ \hline A_{21}\alpha \\ \hline\end{array}
$$

$A_{11} \geq 0, \alpha > 0$より$\beta > 0$

A は既約なので $A_{21} \neq 0, \alpha > 0$より$A_{21}\alpha \neq 0$ なので (x_{k+1} のゼロの数)<(x_k のゼロの数)

1.3 Perron-Frobenius の定理

$A \geq 0$ で既約としスペクトル半径は $\rho(A) = \max|\lambda|(\lambda : \text{固有値})$ である．

定理 3

- $\rho(A)$ は固有値

- $\rho(A)$ は単純固有値 (重複度=1)
- $Ax = \lambda x$ の $x > 0$