

# 1 固有値

## 1.1 正定値性

$n \times m$  行列  $A$  について  $Ax = \lambda x$ , ( $x \neq 0$ ) とすると  $\det(A - \lambda I) = 0$  であり実行列の固有値は実数とは限らない.

正定値性について述べる. 実行列  $A$  について定義より  $A$  が対称行列なら  $A^T = A$  であり,  $A$  の二次形式は  $x^T Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$  である.

定義 1

$$A(\text{対称行列}) \text{が正定値} \Leftrightarrow \forall x \neq 0 \quad x^T Ax > 0$$

$$A(\text{対称行列}) \text{が半正定値} \Leftrightarrow \forall x \neq 0 \quad x^T Ax \geq 0$$

固有値については

$$A(\text{対称行列}) \text{が正定値} \Leftrightarrow \text{すべての固有値} > 0$$

$$A(\text{対称行列}) \text{が半正定値} \Leftrightarrow \text{すべての固有値} \geq 0$$

行列式については半正定値の場合同値関係が成り立たないことに注意. 例えば  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  は半正定値でないが首座小行列式  $\geq 0$

$$A(\text{対称行列}) \text{が正定値} \Leftrightarrow \text{すべての首座小行列式} > 0$$

$$A(\text{対称行列}) \text{が半正定値} \Rightarrow \text{すべての首座小行列式} \geq 0$$

$$A(\text{対称行列}) \text{が半正定値} \Leftrightarrow \text{すべての主小行列式} \geq 0$$

ここで小行列式  $[A]_{ij}$  とは  $n \times n$  行列において  $i$  行,  $j$  列を除いた行列の行列式のことで, 首座小行列式は  $[A]_{kk}$  のことである.

## 1.2 Gershgorin の定理

固有値の範囲を知りたいときに使う定理.

定理 1  $n \times n$  正方行列  $A = (a_{ij}) (a_{ij} \in \mathbb{C})$  の各  $i$  について非対角成分の絶対値の和を  $R_i$  と書く. つまり  $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ .  $a_{ii}$  を中心とし半径  $R_i$  の円板をゲルシュゴリン円板とすると  $A$  のすべての固有値は少なくとも一つのゲルシュゴリン円板に含まれる.

証明は以下.

$$Ax = \lambda x \quad x \neq 0 \text{ のとき } \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = \lambda x_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

このとき  $|x_i| = \max_k |x_k|$  となる  $i$  を選ぶ.  $k = i$  をみると  $\sum_{j \neq i}^n a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i$  したがって絶対値をとれば  $\sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| |x_j| = (|\lambda - a_{ii}|) |x_i|$

### 1.3 Gershgorin の定理の応用例

$A$  が狭義に優対角ならば正則,  $A$  のスペクトラム半径など

### 1.4 Rayleigh 商の公式

定理 2 Rayleigh 商の公式.

$$\lambda_{\max} = \max \frac{x^T A x}{x^T x}$$
$$\lambda_{\min} = \min \frac{x^T A x}{x^T x}$$

以下に証明を述べる. 3 ステップで構成される.

$A$  の固有値を  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ , それぞれの正規直行固有ベクトルを  $z_1, z_2, \cdots, z_n$  部分空間  $U_r = \text{span}\{z_1, z_2, \cdots, z_r\}$ ,  $V_r = \text{span}\{z_r, z_{r+1}, \cdots, z_n\}$

ステップ 1.  $S = U_r$  として  $x \in U_r$  をとる.  $x = \sum_{i=1}^r c_i z_i$  であり

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{x^T \lambda x}{x^T x} = \frac{\sum \lambda_i c_i^2}{\sum c_i^2}$$

左辺の最小値は右辺の最小値でありこれは  $c_r = 1$  で他はすべて 0 の時最小値  $\lambda_r$  をとる.

ステップ 2.

$$\lambda_r = \min_{x \in U_r} \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \max_X \min_{x \in S} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

ステップ 3. 任意の  $S$  ( $\dim S = r$ ) について  $\dim(S \cap V_r) \geq 1$  なので  $\exists x \neq 0 \quad x \in S \cap V_r$

$x \in S \cap V_r$  ととる.  $x = \sum_{i=r}^n c_i z_i$  であり

$$\frac{x^T A x}{x^T x} = \frac{\sum_{i=r}^n \lambda_i c_i^2}{\sum_{i=r}^n c_i^2} \leq \lambda_r$$

最後はステップ 1 の時と同様. したがって

$$\lambda_r \geq \frac{x^T A x}{x^T x} \geq \min_{y \in S} \frac{y^T A y}{y^T y}$$

いま  $S$  は任意の  $\dim S = r$  を選んだので  $\lambda_r \geq \max$