1　線形システム

1.1　初期値問題

$\dot{x}(t) = ax(t),\ x(0) = x^0$ の解は $x(t) = e^{at}x^0 (t \geq 0)$ である．複数の変数に対して同様に以下の線形微分方程式系を考えると解は $x(t) = e^{tA}x^0 (t \geq 0)$ となる．

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ x(0) = x^0 (A \in \mathbb{R}^{n \times n})$$

定義 1　行列の指数関数 $e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$

定理 1　$\lim_{r\to\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} A^k$ は収束する

なぜなら $S_r = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} A^k$ とすると

$$\|e^A - S_r\| = \|\sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\| \leq \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = e^{\|A\|} - \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} \|A\|^k \to 0\ (\|PQ\| \leq \|P\|\|Q\|)$$

定理 2　$e^{tA} = \displaystyle\int_0^t Ae^{\tau A} \mathrm{d}\tau + I$ (したがって $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{At} = Ae^{tA} = e^{tA}A$)

証明は以下．

$$\begin{aligned}
\int_0^t Ae^{\tau A} \mathrm{d}\tau &= \int_0^t A \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\tau A)^k \right) \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \tau^k \frac{1}{k!} A^{k+1} \mathrm{d}\tau \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1} \frac{A^{k+1}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} (tA)^{k+1} \\
&= \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{k'!} (tA)^{k'} - I \left(\frac{1}{0!} (tA)^0 \right)
\end{aligned}$$

1.2　A の Jordan 標準形

正則行列 S を用いて $J = S^{-1}AS$ を考えると

$$\begin{aligned}
&S^{-1}e^{tA}S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^{-1} (tA)^k S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (S^{-1}AS)^k = e^{tJ} \\
&e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}
\end{aligned}$$

$A = \lambda I + J_4(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ を考えてみる．

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{t\lambda I} e^{tJ_4(0)} \\ &= (e^{t\lambda} I) e^{tJ_4(0)} \\ e^{tJ_4(0)} &= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} t^k J_4(0)^k \\ &= I + tJ_4(0) + \frac{1}{2} t^2 J_4(0)^2 + \frac{1}{6} t^3 J_4(0)^3 \end{aligned}$$

1.3 安定性

$^\forall x^0 \in \mathbb{R}$ に対して $e^{tA} x^0 \to 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\lambda < 0$ が A のすべての固有値について成り立つとき A は安定であるという．

定理 3 $A(n \times n$実行列$)$ が安定 (すべての固有値について $\mathrm{Re}\lambda < 0$)
$\Leftrightarrow Y(n \times n)$ について

$$\begin{aligned} Y = Y^{\mathrm{T}} > 0 \ (\text{正定値}) \\ YA + A^{\mathrm{T}} Y < 0 \ (\text{負定値}) \end{aligned}$$

負定値の場合の不等式を Lyaponov 不等式という．

$\Leftarrow$ は容易で λ を A の固有値とすると

$$\begin{aligned} Av = \lambda v (v \neq 0) \\ v^* A^{\mathrm{T}} = \overline{\lambda} v^* \ (\text{共役転置}) \end{aligned}$$

$YA + A^{\mathrm{T}} Y < 0$ なので

$$\begin{aligned} v^*(YA + A^{\mathrm{T}} Y) v < 0 \\ v^* Y \underbrace{Av}_{\lambda v} + \underbrace{v^* A^{\mathrm{T}}}_{\overline{\lambda} v^*} Y v < 0 \\ (\lambda + \overline{\lambda}) v^* Y v < 0 \\ \text{よって} 2\mathrm{Re}\lambda = \lambda + \overline{\lambda} < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ について $\mathrm{Re}\lambda < 0$ なので $e^{tA} \to 0 (t \to \infty)$ である．

正定値実対称行列 $Q > 0$ を用いて以下のように置けばよい．

$$Y = \int_0^\infty e^{tA^{\mathrm{T}}} Q e^{tA} \mathrm{d}t > 0$$

というのも

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA^{\mathrm{T}}}Qe^{tA}) = e^{tA^{\mathrm{T}}}Qe^{tA}A + A^{\mathrm{T}}e^{eA^{\mathrm{T}}}Qe^{tA}$$

$$\text{積分して}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA^{\mathrm{T}}}Qe^{tA}) = YA + A^{\mathrm{T}}Y$$

$$\text{左辺は}\left[e^{tA^{\mathrm{T}}}Qe^{tA}\right]_0^\infty = 0 - Q < 0$$

任意の $Q > 0$ を与えて Lyaponov 方程式 $YA + A^{\mathrm{T}}Y + Q = 0$ を解いて (Y : 実対称行列が未知数) 解 Y が正定値なら A は安定である.

1.4 Lyaponov 方程式の可解性

以下の方程式を Sylvester 方程式と呼ぶ.

$$AX - XB = C \quad (\text{行列}X\ m\times n\text{が未知数})$$

ただし $A : m\times m,\ B : n\times n,\ C : m\times n$

$$X = [x_1|x_2|\cdots x_n] \to \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ ($mn \times 1$行列) とおく. Sylvester 方程式は以下のように書ける.

$$AX - XB = C$$

$$\left(\begin{bmatrix} A & & & 0 \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}I & b_{21}I & & 0 \\ b_{12}I & b_{22}I & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_{nn}I \end{bmatrix}\right)\tilde{x} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \tilde{c}$$

つまり $(T_n \otimes A - B^{\mathrm{T}} \otimes I_m)\tilde{x} = \tilde{c}$ である. $\otimes$ は Kronecker 積を表し

$$P : m\times n\text{行列},\quad Q : k\times l\text{行列}$$

$$P\otimes Q = \begin{pmatrix} P_{11}Q & P_{12}Q & & P_{1n}Q \\ P_{21}Q & P_{22}Q & & \\ & & \ddots & \\ P_{m1}Q & & & P_{mn}Q \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & AX - XB = C\text{が任意の}C\text{に対して解を持つ} \\ \Leftrightarrow & (I_n\otimes A - B^{\mathrm{T}}\otimes I_m)\text{が正則} \\ \Leftrightarrow & (I_n\otimes A - B^{\mathrm{T}}\otimes I_m)\text{が0を固有値に持たない} \\ \Leftrightarrow & (\text{実は})A\text{と}B^{\mathrm{T}}\text{が同じ固有値を持たない} \end{aligned}$$

(実は) の証明は以下.

$$\begin{cases} Au = \alpha u \\ B^{\mathrm{T}}v = \beta v \end{cases} \qquad \text{とすると}v\otimes u = \begin{bmatrix} v_1u \\ v_2u \\ \vdots \\ v_nu \end{bmatrix}$$

$$(I_n \otimes A)(v \otimes u) = v \otimes (Au) = \alpha(v \otimes u)$$
$$(B^{\mathrm{T}} \otimes I_m)(v \otimes u) = (B^{\mathrm{T}} v) \otimes u = \beta(v \otimes u)$$
$$\text{したがって}(I_n \otimes A - B^{\mathrm{T}} \otimes I_m) = \left\{ \alpha - \beta \,\middle|\, \begin{array}{c} \alpha\text{は}A\text{の固有値} \\ \beta\text{は}B^{\mathrm{T}}\text{の固有値} \end{array} \right\}$$

Lyaponov 方程式に戻ると $YA + A^{\mathrm{T}}Y + Q = 0$ で Sylvester 方程式との対応は $A \leftarrow A^{\mathrm{T}},\ B \leftarrow -A$ なので A^{T}と $-A$ が同じ固有値を持たない $\Rightarrow {}^{\forall}Q$:Lyaponov 方程式は可解

Sylvester 方程式 $AX - XB = C$ について A が安定なら $\mathrm{Re}\lambda < 0 \rightarrow A^{\mathrm{T}}$と $-A$ は同じ固有値を持たない.