1　階数 (ランク)

1.1　ランクの定義

$A(m\times n$行列$)$ について

1 部分行列が正則であるような最大のサイズ

2 1 次独立な行，列ベクトルの最大の数

3 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ として像空間の次元 $\dim(\mathrm{Im}A)$

4 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ として核の余次元

ランクはトラス構造の安定性やグラフの剛性の解析に使う.

1.2　ランクの性質

1 $r(AB)\leq\min\{r(A),r(B)\}$

2 S,T が正則行列だとすると $r(A)=r(SAT)$

3 $r([A:B])\leq r(A)+r(B)$ 転置をとって縦に連結しても同様.

4 $r(\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix})\geq r(B)+r(C)$

5 $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

6 $r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$

1.3　ランクの性質の証明

1 の証明について.
Binet-Cauchy の定理 $\det(AB)=\displaystyle\sum_J\det A[J]\det B[J]$
2 の証明について.
$r(SAT)\leq r(A)$ かつ $r(A)=r(S^{-1}(SAT)T^{-1})\leq r(SAT)$ より
3 の証明について.
$r([A:B])$ について A,B のなかに従属している縦ベクトルがあるかもしれないので.
4 の証明について.
4 の証明について.

$$\begin{pmatrix} A & I \\ B & -I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1行に加える}]{\text{第2行を}} \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ B & -I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{1列に加える}]{\text{第2列を}B\text{倍して}} \begin{pmatrix} A+B & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} A & I \\ B & -I \end{pmatrix}$ の rank$\leq r(A+B)+m \leq r(A)+r(B)+m$

6 の証明について．

$\begin{pmatrix} B & BC \\ 0 & ABC \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{列}-1\text{列}\times C} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{pmatrix}$ であり右辺のランクは $r(B)+r(ABC)$

一方で $\begin{pmatrix} B & BC \\ 0 & ABC \end{pmatrix} \xrightarrow{2\text{行}-1\text{行}\times A} \begin{pmatrix} B & BC \\ -AB & 0 \end{pmatrix} \geq r(AB)+r(BC)$(4の性質より)