1　線形計画法

1.1　双対問題

以下の問題を考える．

$$\begin{aligned}&\text{maximize} C^{\mathrm{T}} x\\&\text{subjectto} Ax \leq b,\ x \geq 0\end{aligned}$$

今制約条件に $y^{\mathrm{T}} > 0$ をかけることで $y^{\mathrm{T}}Ax \leq y^{\mathrm{T}}b$ なのでもし $y^{\mathrm{T}}Ax \geq C^{\mathrm{T}}x$ ならば $C^{\mathrm{T}}x \leq y^{\mathrm{T}}b$ なので $C^{\mathrm{T}}x \leq y^{\mathrm{T}}b$ である．

$$\begin{array}{cccccc}\text{主問題} & & & \text{双対問題} & \\ \max & C^{\mathrm{T}}x & & \min & y^{\mathrm{T}}b \\ \text{s.t.} & Ax \leq b & \leq & \text{s.t.} & y^{\mathrm{T}}A \geq c^{\mathrm{T}} \\ & x \geq 0 & & & y \geq 0\end{array}$$

実は符号が成り立つと強双対性で不等号の場合は弱双対性

1.2　Farkas の補題

定理 1　A, b が given のとき

$$\boxed{{}^{\exists}x \geq 0,\ Ax = b} \Leftrightarrow \boxed{{}^{\forall}y \geq 0,\ y^{\mathrm{T}}A \geq 0 \Rightarrow y^{\mathrm{T}}b \geq 0} \Leftrightarrow \begin{cases} y^{\mathrm{T}}b < 0 \\ y^{\mathrm{T}}A \geq 0 \end{cases} \text{が解を持たない．}$$

$\Rightarrow$ は容易である．左の項を満たす $\hat{x}$ を用いて $y^{\mathrm{T}}b = y^{\mathrm{T}}(A\hat{x}) = (y^{\mathrm{T}}A)\hat{x} \geq 0({}^{\forall}y : y^{\mathrm{T}}A \geq 0)$

$\Leftarrow$ について．

$$\begin{aligned}(\text{左の項}) &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j a_j = b \quad x_j \geq 0\\&\Leftrightarrow b \in \mathrm{cone}(a_1, a_2, \cdots a_n)\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{cone}(a_1, a_2)$ とは $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}$ のあいだに $\boldsymbol{b}$ が存在することを表す．

一方 $y^{\mathrm{T}}a_j \geq 0 (j = 1, 2, \cdots n) \Rightarrow y^{\mathrm{T}}b \geq 0$

定理 2　Farkas の補題

$$\begin{aligned}\boxed{{}^{\exists}x \geq 0 \quad Ax \leq b} &\Leftrightarrow y \geq 0,\ y^{\mathrm{T}}A \geq 0\\&\Leftrightarrow \begin{cases} {}^{\exists}x \geq 0 \\ {}^{\exists}s \geq 0 \end{cases} \qquad Ax + s = b\ (s\text{はスラック変数})\\&\Leftrightarrow {}^{\exists}\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} \geq 0 \quad \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b \quad \text{等号なので上の定理のパターン}\\&\Leftrightarrow y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow y^{\mathrm{T}}b \geq 0\end{aligned}$$

1.3　強双対性

主問題と双対問題に実行可能解が存在するならば，両者に最適解 x^*, y^* が存在し $C^{\mathrm{T}}x^* = {y^*}^{\mathrm{T}}b$ である．

証明は弱双対性が成り立つので $C^{\mathrm{T}}x^* \leq {y^*}^{\mathrm{T}}b$ が成り立つから以下を示せばいい.

$$\boxed{\begin{matrix} {}^\exists x(x \geq 0,\ Ax \leq b) \\ {}^\exists y(y \geq 0,\ y^{\mathrm{T}}A \geq c) \end{matrix} \quad C^{\mathrm{T}}x \geq y^{\mathrm{T}}b}$$

$$\square \Leftrightarrow {}^\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0,\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -c^{\mathrm{T}} & b^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{Farkasの補題} \boxed{\begin{matrix} a:\begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \geq 0 \ \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 & -c \\ 0 & -A & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \geq 0 \\ \Downarrow \\ b:\ \begin{pmatrix} b^{\mathrm{T}} & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix} \geq 0 \end{matrix}} \text{を示せばいい.}$$

$$\begin{cases} a:\ u,\ v,\ \theta \geq 0,\ A^{\mathrm{T}}u \geq c\theta,\ Av \leq b\theta \\ b:\ b^{\mathrm{T}}u \geq c^{\mathrm{T}}v \end{cases}$$

$\theta = 0$ と $\theta > 0$ で場合分けする.

$\theta > 0$ のときは

$$b^{\mathrm{T}}u \geq \left(\frac{1}{\theta}Av\right)^{\mathrm{T}} u = \frac{1}{\theta}v^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}u \geq \frac{1}{\theta}v^{\mathrm{T}}(c\theta) = v^{\mathrm{T}}c$$

$\theta = 0$ のとき示すべきは $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ である.

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} u^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} u^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \geq 0 \\ \Leftrightarrow &{}^\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

最後の変形は Farkas の補題を用いた.