А. Г. Курош, Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр, *Матем. сб.*, 1947, том 20(62), номер 2, 239–262

1947 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 20 (62), N. 2
RECUEIL MATHÉMATIQUE

Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр

А. Г. Курош (Москва)

Введение

Для свободных ассоциативных колец не имеет места теорема, которая была бы аналогична теореме Нильсена-Шрейера о подгруппах свободной группы: уже в свободном кольце с одним образующим x, т. е. в кольце целочисленных полиномов от x без свободных членов, подкольцо, порожденное элементами $2x$ и x^2, не будет свободным. Так же обстоит дело и с вопросом о подалгебрах свободных ассоциативных алгебр над некоторым коммутативным полем P: в свободной алгебре с одним образующим x не будет свободной подалгебра, порожденная элементами x^2 и x^3.

При переходе к более общему неассоциативному случаю положение не меняется, если говорить о свободных *кольцах*. В настоящей работе будет показано, однако, что всякая подалгебра неассоциативной свободной *алгебры* сама будет свободной (теоремы 1 и 3). Это утверждение нетривиально уже в случае неассоциативной свободной алгебры с одним образующим, так как эта алгебра содержит, как оказывается, свободные подалгебры с любым конечным и даже со счетным множеством свободных образующих.

Вполне естественным путем определяется, далее, понятие неассоциативного свободного произведения алгебр, призванное играть в теории алгебр ту же роль, какую в теории групп играет понятие свободного произведения групп. Теоремы 2 и 4 настоящей работы показывают, что для этого понятия справедлива теория, параллельная теории свободных произведений групп (Курош [4]; см. также Baer und Levi [1] и Курош [5]) и теории свободных произведений проективных плоскостей (Копейкина [3]). Вопрос об истинных причинах параллелизма указанных трех теорий — параллелизма в смысле формулировок, так как методы, используемые при построении этих теорий, совершенно различны — остается пока открытым и представляет несомненный научный интерес.

Из вопросов о свободных произведениях алгебр, решение которых еще не получено, отметим вопрос о неассоциативных свободных разложениях алгебр с конечным числом образующих, т. е. вопрос о справедливости теоремы, аналогичной теореме Грушко [2] в теории групп (см. также B. Neumann [7] и Курош [6]).

Все алгебры рассматриваются в работе над произвольным основным полем P. Свободные алгебры и свободные произведения алгебр определяются так, что они оказываются алгебрами без единицы. Можно было бы так изменить определения, чтобы получались алгебры с единицей. Вопрос о подалгебрах для этого случая без труда сводится, однако, на случай, рассматриваемый в работе, если речь идет о подалгебрах, содержащих единицу самой алгебры.

§ 1. Свободные алгебры

Пусть дано множество символов a_α, где α пробегает некоторое непустое множество индексов M. Рассмотрим конечную упорядоченную систему этих символов

$$a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}\ldots a_{\alpha_n}, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

причем один и тот же символ a_α может встречаться в этой системе несколько раз. Число n будет называться *длиной* системы (1). В этой системе можно задать, вообще говоря, многими разными способами, *некоторое распределение скобок*: если $n=1$, то система скобок будет пустой, если же $n>1$ и если для систем меньшей длины это понятие уже определено, то заключаем символы системы (1) в *две* пары скобок, из которых первая содержит первые k символов системы (1), $1 \leqslant k \leqslant n-1$, а вторая — все остальные символы этой системы; задавая в системах меньшей длины, содержащихся в этих скобках, некоторые распределения скобок, мы получим распределение скобок в системе (1).

Всякая упорядоченная система вида (1) с заданным в ней определенным распределением скобок называется *словом* относительно символов a_α. Сама исходная упорядоченная система называется *носителем* этого слова. Два слова будут считаться тождественными тогда и только тогда, если они обладают одним и тем же носителем, в котором задано одно и то же распределение скобок. *Длиной слова* называется длина его носителя.

Если даны два слова v_1 и v_2, то, заключая каждое из этих слов в скобки и записывая после скобки (v_1) скобку (v_2), мы получим, очевидно, новое слово, длина которого равна сумме длин заданных слов. Полученное слово будет называться *произведением* слова v_1 на слово v_2.

Неассоциативной свободной алгеброй (или, короче, *свободной алгеброй*) *над основным полем* P *с системой свободных образующих* a_α, $\alpha \subset M$, называется алгебра над P, базой которой служит множество всевозможных слов относительно символов a_α, причем произведение слов понимается в указанном выше смысле. Всякий элемент свободной алгебры, отличный от нуля, однозначно представим, следовательно, в виде суммы конечного числа различных слов (называемых *членами* этого элемента), взятых с отличными от нуля коэффициентами из поля P; умножение этого элемента свободной алгебры на некоторый элемент π поля P сводится к умножению на π коэффициентов всех членов нашего элемента.

Всякая свободная алгебра будет алгеброй бесконечного ранга, неассоциативной и некоммутативной. Значение этого класса алгебр состоит в том очевидном утверждении, что *всякая алгебра над полем P* (в том числе всякая ассоциативная алгебра, всякая алгебра Ли и т. д.) *изоморфна фактор-алгебре некоторой свободной алгебры*. Понятие неассоциативной свободной алгебры уже встречалось в литературе (см. Thrall [8] для случая конечного числа образующих).

Свободная алгебра с точностью до изоморфизма определяется, очевидно, числом свободных образующих a_α (мощностью их множества). *Это число (мощность) является, вместе с тем, инвариантом данной свободной алгебры*. Действительно, рассмотрим к в а д р а т этой алгебры, т. е. двусторонний идеал, порожденный произведениями всевозможных пар элементов алгебры. Легко видеть, что он совпадает с подалгеброй, порожденной множеством всех тех слов, длина которых больше единицы, а потому аддитивная группа фактор-алгебры нашей свободной алгебры по ее квадрату изоморфна векторному пространству над полем P, базу которого составляют символы a_α, $\alpha \subset M$. Наше утверждение вытекает теперь из известного факта, что число элементов базы векторного пространства (мощность их множества) не зависит от выбора этой базы.

§ 2. Подалгебры свободных алгебр

Т е о р е м а 1. *Всякая подалгебра неассоциативной свободной алгебры с одним образующим, отличная от нуля, является свободной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматриваем свободную алгебру A с одним свободным образующим a. Если мы возьмем произвольный элемент этой алгебры, то его члены, имеющие наибольшую длину (таких членов будет один или больше), будут называться его с т а р ш и м и ч л е н а м и, а их длина — с т е п е н ь ю этого элемента. Заметим, что старшие члены произведения двух элементов и только они будут произведениями старших членов сомножителей: легко видеть, что произведение данных старших членов перемножаемых элементов не может появиться еще раз при перемножении каких-либо других старших членов и поэтому не может сократиться.

Сделаем еще одно замечание, необходимое для дальнейшего. Если мы будем помнить, что произведение нескольких слов есть упорядоченная система этих слов с заданным в этой системе распределением скобок, и если даны два произведения слов, которые равны между собою как элементы алгебры A, то можно, очевидно, утверждать следующее: любое слово, входящее множителем в одно из этих произведений, например, в первое, или само будет произведением нескольких слов из второго произведения, или же в произведении с несколькими другими словами первого произведения будет составлять некоторое слово из второго произведения.

Пусть теперь в алгебре A дана подалгебра B, отличная от нуля. Определим следующим образом последовательность натуральных чисел

$l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n \ldots$, конечную или бесконечную, и последовательность подалгебр $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ алгебры B. Положим $l_0 = 0$, $B_0 = 0$. Пусть числа l_k и подалгебры B_k уже определены для всех k, не превосходящих $n-1$, и пусть подалгебра B_{n-1} еще отлична от B. Тогда через l_n обозначим минимальную степень элементов алгебры B, лежащих вне B_{n-1}, а через B_n — подалгебру, порожденную всеми элементами из B, степень которых не превосходит l_n. Ясно, что подалгебры B_n, $n=1, 2, \ldots$, составляют возрастающую последовательность, объединение которой совпадает с B.

Покажем, что в подалгебре B можно выбрать множество элементов $\mathfrak{N}$, конечное или счетное, со следующими свойствами:

1) Множество $\mathfrak{N}$ есть объединение подмножеств $\mathfrak{N}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, причем степень всякого элемента из $\mathfrak{N}_n$ равна l_n.

2) Всякая подалгебра B_n, $n = 1, 2, \ldots$, порождается объединением подмножеств $\mathfrak{N}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а поэтому подалгебра B порождается множеством $\mathfrak{N}$.

3) В каждом элементе b из множества $\mathfrak{N}$ отмечен один из его старших членов, обозначаемый через $x(b)$, причем никакой старший член ни одного элемента из $\mathfrak{N}$ не равен никакому члену, отмеченному в каком-либо другом элементе, и, вообще, не может быть представлен как произведение отмеченных членов из некоторых других элементов множества $\mathfrak{N}$.

Пусть множества $\mathfrak{N}_k$ с требуемыми свойствами уже выбраны для $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Берем в подалгебре B_n, но вне B_{n-1}, элемент c_1 степени l_n. Среди его старших членов могут встречаться такие, которые представимы как произведение членов, отмеченных в некоторых элементах из уже выбранных множеств $\mathfrak{N}_k$, $k \leqslant n-1$. Пусть один из них будет $x_1x_2 \ldots x_s$, где $x_i = x(b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s$ (мы не указываем распределения скобок в этом произведении, которое, конечно, задано). Этот член можно уничтожить, вычитая из c_1 произведение $b_1b_2 \ldots b_s$ с таким же распределением скобок и с соответственно подобранным коэффициентом. После этого могут появиться, правда, новые старшие члены, представимые в виде произведения отмеченных членов, но тогда *непременно в виде произведения меньшего числа этих отмеченных членов*. В самом деле, пусть произведение $b_1 b_2 \ldots b_s$ содержит еще старший член $y_1y_2 \ldots y_s$, где распределение скобок такое же, как в произведении $x_1x_2 \ldots x_s$, а всякое y_i, $i=1, 2, \ldots, s$, является одним из членов, притом непременно одним из старших членов, в соответствующем элементе b_i и, хотя бы для одного i, член y_i отличен от x_i, т. е. не является отмеченным. Пусть, тем не менее, рассматриваемый член представим в виде некоторого произведения отмеченных членов:

$$y_1y_2 \ldots y_s = x_1'x_2' \ldots x_t', \tag{2}$$

причем справа указано некоторое свое распределение скобок и $x_j' = x(b_j')$, $j = 1, 2, \ldots, t$. Так как, по условию, никакое y_i, не являющееся отмеченным, не может быть представлено в виде произведения нескольких отмеченных членов, а все множители в правой части равенства (2) — отмеченные, хотя бы одно из x'_j должно быть произведением двух или большего числа множителей y_i, т. е. $t < s$, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что после конечного числа таких вычитаний в элементе c_1 будут уничтожены все старшие члены, представимые в виде произведения членов, отмеченных в некоторых элементах из множеств $\mathfrak{N}_k$, $k \leqslant n-1$, причем, очевидно, эти вычитания не выводят нас за пределы подалгебры B_n и, так как элемент c_1 был выбран вне B_{n-1}, не могут изменить степень этого элемента. После этого один из старших членов элемента c_1 (мы сохраняем для измененного элемента старое обозначение!) отмечаем в качестве $x(c_1)$.

Если подалгебра $\{B_{n-1}, c_1\}$ еще отлична от B_n, то берем в качестве c_2 один из лежащих вне этой подалгебры элементов степени l_n. В нем таким же методом, как выше, уничтожаем все старшие члены, представимые в виде произведения отмеченных членов из элементов, входящих в множества $\mathfrak{N}_k$, $k \leqslant n-1$. Если в c_2 содержится член $x(c_1)$, то уничтожаем и его, вычитая из c_2 элемент c_1 с соответственно подобранным коэффициентом — ввиду выбора элемента c_2 это преобразование, как и предыдущие, не может изменить степень этого элемента. После этого один из старших членов элемента c_2 отмечаем в качестве $x(c_2)$. Если этот член случайно содержится и в c_1, то его придется уничтожить, вычитая из c_1 элемент c_2 с некоторым коэффициентом.

Если подалгебра $\{B_{n-1}, c_1, c_2\}$ еще отлична от B_n, то вне этой подалгебры берем элемент c_3 степени l_n, преобразуем его так же, как выше, отмечаем затем член $x(c_3)$ и, если нужно, изменяем еще раз элементы c_1 и c_2, уничтожая в них член $x(c_3)$. Этот процесс выбора элементов $c_1, c_2, c_3, \ldots$ не может продолжаться до бесконечности, так как в каждом из этих элементов отмечается свой собственный старший член, а различных слов длины l_n относительно образующего элемента a существует лишь конечное число. Мы получим, следовательно, конечную систему элементов $c_1, c_2, \ldots, c_s$, порождающую вместе с B_{n-1} всю подалгебру B_n; эта система и будет, очевидно, искомым множеством $\mathfrak{N}_n$.

Всякое множество $\mathfrak{N}$, порождающее всю подалгебру B и обладающее свойством 3), *служит для B системой свободных образующих.*

Пусть, в самом деле, элементы множества $\mathfrak{N}$ связаны некоторым соотношением, т. е. пусть дана сумма (с отличными от нуля коэффициентами) конечного числа различных слов относительно элементов из $\mathfrak{N}$, причем эта сумма, как элемент алгебры A, равна нулю. Среди членов этого соотношения, имеющих, как элементы алгебры A, наибольшую степень, отберем один из тех, длина которых относительно элементов множества $\mathfrak{N}$ максимальна. Пусть это будет член $b_1b_2 \ldots b_n$ с некоторым распределением скобок, $b_i \subset \mathfrak{N}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Заменяя множители b_i их выражениями и производя перемножение, мы получим, в частности, член $x_1x_2 \ldots x_n$, где $x_i = x(b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, с тем же распределением скобок, что и в члене $b_1b_2 \ldots b_n$, и с отличным от нуля коэффициентом. Мы утверждаем, что *этот член $x_1x_2 \ldots x_n$ появляется* (при замене в левой части заданного соотношения элементов из $\mathfrak{N}$ их выражениями через a и перемножении) *лишь один этот раз* и поэтому ни с чем не может сократиться, т. е. левая часть заданного соотношения не может в действительности равняться нулю.

В самом деле, член $x, x_2 \ldots x_n$ получается, очевидно, при развертывании произведения $b_1 b_2 \ldots b_n$ лишь один раз. Пусть, однако, он появляется еще раз из какого-то члена $b_1' b_2' \ldots b_s'$ (с некоторым распределением скобок) заданного соотношения, отличного от члена $b_1 b_2 \ldots b_n$. Член $x_1 x_2 \ldots x_n$ будет тогда непременно произведением некоторых *старших* членов из множителей b_j', так как иначе произведение $b_1' b_2' \ldots b_s'$ имело бы бо̀льшую степень, чем $b_1 b_2 \ldots b_n$. Таким образом,

$$x_1 x_2 \ldots x_n = y_1' y_2' \ldots y_s', \tag{3}$$

где справа — такое же распределение скобок, как в произведении $b_1' b_2' \ldots b_s'$, и y_j' есть один из старших членов элемента b_j', $j = 1, 2, \ldots, s$. Отметим также, что степень члена $b_1' b_2' \ldots b_s'$ *равна* степени члена $b_1 b_2 \ldots b_n$. Как мы знаем, ни один из членов y_j' не может быть произведением двух или большего числа отмеченных членов x_i. Если бы, с другой стороны, хотя бы один из членов x_i был произведением двух или большего числа множителей y_j', то мы имели бы $n < s$, что противоречит выбору члена $b_1 b_2 \ldots b_n$. Таким образом, всякое y_j' должно совпадать с некоторым x_i. Из равенства (3) вытекает теперь, что $s = n$, что $y_i' = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и что в обеих частях этого равенства должно быть одно и то же распределение скобок. Так как, наконец, из того, что элемент b_i' содержит среди своих старших членов отмеченный член $y_i' = x_i = x(b_i)$, следует равенство $b_i' = b_i$, то мы получаем, что член $b_1' b_2' \ldots b_s'$ тождественен члену $b_1 b_2 \ldots b_n$ вопреки предположению.

Теорема 1 доказана.

Неассоциативная свободная алгебра A с одним образующим a содержит свободные подалгебры с любым конечным и со счетным множеством свободных образующих.

Действительно, элементы $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ алгебры A, определяемые следующим образом:

$$b_1 = aa, \quad b_n = b_{n-1} a \quad \text{для } n = 2, 3, \ldots,$$

(поэтому $b_2 = (aa)a$, $b_3 = [(aa)a]a$ и т. д.), обладают, очевидно, свойством 3), а поэтому, как доказано выше, они служат свободными образующими для порождаемой ими подалгебры.

Отсюда и из теоремы 1 вытекает такое следствие:

Всякая подалгебра неассоциативной свободной алгебры с любым конечным или со счетным множеством свободных образующих, отличная от нуля, является свободной.

Соответствующая теорема для свободных алгебр с любым множеством свободных образующих может быть доказана по существу тем же методом, как и теорема 1. Мы получим, однако, эту теорему в § 5, как следствие из теоремы 1 и доказываемой ниже теоремы 2.

§ 3. Свободные произведения алгебр

Пусть дано множество алгебр A_α (не обязательно ассоциативных) над полем P, причем α пробегает некоторое непустое множество индексов M. Выбираем в каждой алгебре A_α некоторую базу над P и обозначаем через L теоретико-множественное объединение всех этих баз. Рассмотрим всевозможные слова (в смысле § 1) относительно элементов из L, удовлетворяющие следующему дополнительному условию: никакая скобка длины 2, содержащаяся в нашем слове (а такие скобки, одну или больше, можно указать в каждом слове, длина которого больше 1), не содержит двух элементов из базы одной и той же алгебры A_α. Лишь к словам, удовлетворяющим этому условию, будет применяться дальше термин слово.

Неассоциативным свободным произведением (или, короче, свободным произведением) алгебр A_α, $\alpha \subset M$, над полем P будет называться алгебра G:

$$G=\prod_{\alpha\subset M}^{*} A_\alpha \tag{4}$$

(или, если число алгебр A_α конечно,

$$G=A_1 * A_2 * \cdots * A_n),$$

определяемая следующим образом: базой этой алгебры над P служит множество всевозможных слов относительно элементов из L, понимаемых в указанном выше смысле. Перемножаются эти слова по правилу, указанному в § 1, если длина хотя бы одного из перемножаемых двух слов больше единицы или если длина обоих слов равна единице, но они являются элементами из баз разных алгебр A_α; если же длины обоих перемножаемых слов равны единице и они принадлежат к базе одной и той же алгебры A_α, то их нужно перемножить по правилам умножения в этой алгебре.

Легко видеть, что все элементы базы алгебры G, которые являются словами длины 1, входящими в базу данной алгебры A_α, порождают в G подалгебру, изоморфную алгебре A_α. Эта подалгебра будет идентифицироваться с самой алгеброй A_α и поэтому об алгебре G из (4) можно говорить как о свободном произведении ее подалгебр A_α. Алгебра, не являющаяся свободным произведением своих истинных подалгебр, будет называться неразложимой.

Всякий элемент g алгебры $G=\prod\limits_{\alpha}^{*} A_\alpha$ однозначно представим в виде суммы конечного числа различных слов, называемых членами этого элемента, с отличными от нуля коэффициентами. Те из членов элемента g, которые имеют наибольшую длину, будут называться его старшими членами, а их длина—степенью элемента g.

Без труда проверяется следующее свойство свободных произведений, выясняющее их роль в теории алгебр: *если алгебра G является свобод-*

ным произведением своих подалгебр A_α, $\alpha \subset M$, если $\overline{G}$—произвольная алгебра над полем P и если для каждого α указано гомоморфное отображение φ_α подалгебры A_α в алгебру $\overline{G}$, то существует гомоморфное отображение алгебры G в алгебру $\overline{G}$, совпадающее на каждой подалгебре A_α с отображением φ_α.

Отсюда следует *независимость свободного произведения* (4) *от выбора баз в алгебрах A_α*. В самом деле, пусть при некотором другом выборе баз свободным произведением алгебр A_α, $\alpha \subset M$, оказывается алгебра G'. Тогда существует гомоморфное отображение f алгебры G в алгебру G', совпадающее на каждой подалгебре A_α с тождественным отображением A_α на себя. Существует, с другой стороны, гомоморфное отображение f' алгебры G' в алгебру G, обладающее этим же свойством. Отображение ff' будет гомоморфным отображением алгебры G в себя, тождественным на каждом A_α. Так как, однако, всякое слово в алгебре G является произведением входящих в него элементов из L в смысле умножения, определенного в G, то отображение ff' будет в действительности тождественным отображением G на себя, а поэтому каждое из отображений f и f' должно быть изоморфным отображением на всю соответствующую алгебру.

Используя, где будет нужно, эту независимость от выбора баз, можно без труда проверить следующие свойства свободного произведения:

I. *Если $G = \prod\limits_{\alpha}^{*} A_\alpha$ и если в каждой алгебре A_α выбрана подалгебра B_α, то подалгебра B, порожденная в G всеми B_α, будет их свободным произведением:*

$$B = \prod_{\alpha}{}^{*} B_\alpha.$$

Действительно, достаточно выбрать базу в каждом A_α так, чтобы элементы этой базы, лежащие в подалгебре B_α, составляли ее базу.

II. *Если $G = \prod\limits_{\alpha}^{*} A_\alpha$ и если некоторые множители A_α сами разложены в свободное произведение: $A_\alpha = \prod\limits_{\beta}^{*} A_{\alpha\beta}$, то*

$$G = \prod_{\alpha, \beta}{}^{*} A_{\alpha\beta}.$$

Действительно, достаточно взять в каждом A_α ту базу, которая получается при построении этого A_α в качестве свободного произведения подалгебр $A_{\alpha\beta}$. Новое разложение называется п р о д о л ж е н и е м исходного разложения.

III. *Если $G = \prod\limits_{\alpha \subset M}^{*} A_\alpha$, если множество индексов M является объединением непересекающихся подмножеств M_β и если $B_\beta = \prod\limits_{\alpha \subset M_\beta}^{*} A_\alpha$, то*

$$G = \prod_{\beta}{}^{*} B_\beta.$$

IV. *Если $G=A*B$ и если $\bar{A}$—двусторонний идеал, порожденный в G подалгеброй A, то*

$$G/\bar{A} \simeq B.$$

V. *Всякая свободная алгебра F с системой свободных образующих a_α, $\alpha \subset M$, будет свободным произведением подалгебр, порожденных каждым из образующих a_α.*

VI. *Свободная алгебра A с одним образующим a неразложима.*

Пусть, в самом деле,

$$A = B * C. \tag{5}$$

Если $\bar{a}$—произвольный элемент алгебры A, то его запись в разложении (5) мы получим, беря его выражение через a, заменяя в нем элемент a его выражением в разложении (5) и выполняя все умножения и приведения подобных членов. Выражение элемента a в разложении (5) содержит элементы как из B, так и из C, так как a не может содержаться ни в одной из этих подалгебр. Если мы покажем, что выражение элемента $\bar{a}$, как бы он ни был выбран, обладает этим же свойством, то, очевидно придем к противоречию, доказывающему наше утверждение. Пусть $v=aa\ldots a$ (с некоторым распределением скобок) будет один из старших членов выражения $\bar{a}$ через a, причем можно считать, конечно, что длина этого члена больше единицы. Если степень элемента a в разложении (5) больше единицы, то отметим в нем один из его старших членов относительно этого разложения; пусть это будет x. Тогда из члена v получается, в частности, член $xx\ldots x$ (с тем же распределением скобок, что и у v), который, как легко видеть, не может появиться еще раз ни из какого другого члена выражения $\bar{a}$ через a, т. е. не может сократиться. Если же степень a в разложении (5) равна 1, то отметим в нем один член b_0, принадлежащий к B, и один член c_0, принадлежащий к C. Тогда из члена v получится, в частности, член с таким же распределением скобок, как в v, в котором, однако, на всех местах стоит элемент b_0, кроме вторых мест всех скобок длины 2, на которых стоит c_0. Легко видеть, что этот член ни с чем не сокращается. Таким образом, во всех случаях выражение элемента $\bar{a}$ в разложении (5) содержит хотя бы один член, не принадлежащий ни к B, ни к C, что и требовалось доказать.

В дальнейшем нам встретится свободное произведение некоторых алгебр A_α и, кроме того, некоторой свободной алгебры F с системой свободных образующих b_β. Понятие слова, определенное в начале настоящего параграфа, приобретает в этом случае такой вид: это будет конечная упорядоченная система (с некоторым распределением скобок) элементов баз алгебр A_α и элементов b_β, причем никакая скобка длины 2 не содержит двух элементов из базы одной и той же алгебры A_α, хотя оба элемента такой скобки вполне могут быть одним и тем же b_β.

§ 4. Подалгебры свободных произведений

Теорема 2. *Всякая подалгебра неассоциативного свободного произведения алгебр A_α (α пробегает произвольное множество индексов), отличная от нуля, является свободным произведением своих пересечений с множителями A_α и, быть может, еще некоторой свободной алгебры.*

Доказательство. Легко видеть, что *достаточно доказать эту теорему для случая свободного произведения двух алгебр*. Пусть, в самом деле, это уже доказано и пусть в алгебре $G=\prod\limits_{\alpha}^{*} A_\alpha$ дана подалгебра H. Будем считать, что множество индексов α вполне упорядочено, т. е. что эти индексы—порядковые числа; примем, далее, что множество всех подмножеств алгебры G также вполне упорядочено. Пусть

$$B_\alpha = \prod_{\alpha'<\alpha}^{*} A_{\alpha'},$$

и пусть $H_\alpha = H \cap B_\alpha$. Предположим, что дан индекс β и что для каждого индекса α, меньшего β, доказано существование свободного разложения

$$H_\alpha = \prod_{\alpha'<\alpha}{}^{*}(H \cap A_{\alpha'}) * F_\alpha, \tag{6}$$

где F_α—свободная алгебра с некоторой зафиксированной системой свободных образующих, причем если $\alpha < \bar{\alpha} < \beta$, то система свободных образующих для F_α является частью системы свободных образующих для $F_{\bar{\alpha}}$. Покажем, что для подалгебры H_β можно указать вполне определенное разложение вида (6), связанное с разложениями (6) для $\alpha < \beta$ так же, как они связаны между собой. Если индекс $\beta - 1$ существует, то $B_\beta = B_{\beta-1} * A_{\beta-1}$, а поэтому, по предположению,

$$H_\beta = H_{\beta-1} * (H \cap A_{\beta-1}) * F' = \prod_{\alpha<\beta}{}^{*}(H \cap A_\alpha) * (F_{\beta-1} * F');$$

при этом полученное разложение для H_β будет вполне определенным, если в качестве F' будет взята та из подалгебр алгебры G, могущих играть эту роль, которая является первой в заданном полном упорядочении множества всех подмножеств этой алгебры. Если же индекс β—предельный, то B_β будет объединением возрастающей последовательности подалгебр B_α, $\alpha < \beta$, а поэтому H_β будет объединением всех H_α, $\alpha < \beta$. Отсюда следует существование свободного разложения

$$H_\beta = \prod_{\alpha<\beta}{}^{*}(H \cap A_\alpha) * F_\beta,$$

где F_β—свободная алгебра, имеющая системой свободных образующих объединение возрастающей последовательности систем свободных образующих алгебр F_α, $\alpha < \beta$. На основании принципа построений методом трансфинитной индукции теперь можно утверждать существование свободных разложений вида (6) для всех H_α, в том числе и для самой подалгебры H.

Переходим к основной части доказательства, а именно, *к случаю свободного произведения двух алгебр*. Пусть

$$G = A * B \tag{7}$$

и пусть в G дана подалгебра H, отличная от нуля. Введем обозначения:

$$A' = H \cap A, \quad B' = H \cap B.$$

Базы алгебр A и B, используемые при построении свободного произведения (7), определим, учитывая доказанную выше независимость свободного произведения от выбора баз, следующим образом: в подалгебрах A' и B' выбираем некоторые базы, элементы которых будут обозначаться соответственно через α и β с теми или иными индексами, а затем дополняем эти базы до баз алгебр A и B; присоединяемые для этой цели элементы будут обозначаться соответственно через a и b с некоторыми индексами.

Если подалгебра $H' = A' * B'$ уже совпадает с H, то теорема доказана. Если же H' еще отлично от H, то будем последовательно выбирать в H, но вне H', некоторые элементы, причем процесс выбора будет, возможно, трансфинитным. Способ выбора будет указан ниже, но, во всяком случае, каждый из этих элементов будет выбираться вне подалгебры, порожденной подалгеброй H' и всеми элементами, выбранными ранее. Кроме того, — и это дальше не будет обычно особо оговариваться — выбираемый элемент не будет содержать ни одного члена, являющегося произведением одних лишь элементов вида α и β, так как всякий такой член можно уничтожить вычитанием, не выходя за пределы подалгебры H.

Мы будем считать дальше, что в H, но вне H' имеются элементы первой степени, а также, что H' и все эти элементы еще не порождают всю подалгебру H. Если бы одно из этих предположений не имело места, то проводимое дальше доказательство соответственно упростилось бы.

Если x—один из элементов первой степени из H, лежащих вне H', то он должен обладать как членами вида a (с некоторыми коэффициентами), так и членами вида b. Все эти члены будут старшими членами в смысле § 3. Однако, если мы зафиксируем некоторую полную упорядоченность множества всех элементов вида a, то один из членов вида a в элементе x будет в смысле этой упорядоченности самым последним; будем называть его г л а в н ы м ч л е н о м элемента x.

Возьмем в качестве элемента x_1 один из тех элементов первой степени из H, лежащих вне H', главный член которых является самым младшим в смысле заданной полной упорядоченности элементов a.

Обозначим этот главный член через a_1, причем можно считать, очевидно, что он входит в x_1 с коэффициентом 1.

Пусть для всех порядковых чисел σ, меньших некоторого τ, в H уже выбраны элементы первой степени x_σ с главными членами a_σ, причем выполняются следующие условия:

1) Всякий элемент x_σ содержится вне подалгебры $\{H'; x_{\sigma'}, \sigma' < \sigma\}$.

2) Никакое a_σ не входит членом ни в один из элементов $x_{\sigma'}$ при $\sigma' \neq \sigma$.

3) Для всякого σ подалгебра $\{H'; x_{\sigma'}, \sigma' \leqslant \sigma\}$ содержит всякий элемент первой степени из H, главный член которого предшествует или равен члену a_σ.

4) Член a_σ входит в x_σ с коэффициентом 1.

Если в H, но вне подалгебры $\{H'; x_\sigma, \sigma < \tau\}$, еще остаются элементы первой степени, то возьмем один из тех, главный член которых является самым младшим из возможных; обозначим этот элемент через x'_τ, а его главный член — через a_τ. Из 3) следует, что член a_τ должен быть старше каждого из a_σ, $\sigma < \tau$, и поэтому не может входить членом ни в один из элементов x_σ. С другой стороны, элемент x'_τ еще может содержать конечное число членов, равных некоторым a_σ, $\sigma < \tau$. Вычитая из x'_τ соответствующие x_σ (с некоторыми коэффициентами), мы уничтожим все эти члены, причем a_τ останется главным членом. Умножением на некоторый элемент из поля P коэффициент при этом главном члене можно сделать равным единице.

Обозначим окончательно полученный элемент через x_τ. Условия 1), 2) и 4) не нарушаются. Легко видеть, что это же относится и к условию 3): вне подалгебры $\{H'; x_\sigma, \sigma \leqslant \tau\}$ не могут остаться элементы первой степени из H, главный член которых ниже члена a_τ, как следует из выбора элемента x'_τ; если же вне этой подалгберы остается некоторый элемент первой степени x', главный член которого равен a_τ, то разность $x' - x_\tau$ будет иметь меньший, чем a_τ, главный член, т. е. принадлежит к $\{H'; x_\sigma, \sigma < \tau\}$, а тогда элемент x' принадлежит к $\{H'; x_\sigma, \sigma \leqslant \tau\}$.

Выбор элементов x_σ станет невозможным тогда, когда в H, но вне подалгебры, порожденной подалгеброй H' и всеми этими x_σ, уже не останется элементов первой степени. Пусть порядковое число ω таково, что выбор элементов x_σ остановится после того, как они будут выбраны для всех σ, меньших ω.

В дальнейшем будет использовано следующее свойство элементов x_σ. Мы знаем, что каждый из этих элементов должен содержать некоторые члены вида b. Обозначим сумму всех таких членов, входящих в x_σ, через x_σ^b и докажем, что *любая конечная система элементов* $x_{\sigma_1}^b, x_{\sigma_2}^b, \ldots, x_{\sigma_n}^b$, *где* $\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n$, *рассматриваемых как линейные формы от входящих в них членов вида* b, *линейно независима над полем* P. Это ясно при $n = 1$. Если же линейная независимость элементов $x_{\sigma_1}^b, \ldots, x_{\sigma_{n-1}}^b$ уже доказана и если элемент $x_{\sigma_n}^b$ через них линейно выражается, то, вычитая из x_{σ_n} соответствующую линейную комбинацию элементов x_{σ_1},

$x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_{n-1}}$, мы получим элемент из A, принадлежащий, следовательно, к A', т. е. к H', но тогда

$$x_{\sigma_n} \subset \{H', x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_{n-1}}\},$$

что противоречит, однако, свойству 1) элементов x_σ.

Если подалгебра $\{H'; x_\sigma, \sigma < \omega\}$ еще отлична от H, то продолжаем выбор элементов. В качестве y_1 берем один из элементов минимальной степени из H, лежащих вне указанной подалгебры; эта степень будет, конечно, больше единицы. Пусть элементы y_τ уже выбраны в H для всех порядковых чисел τ, меньших некоторого ν, причем для всякого τ элемент y_τ есть один из элементов минимальной степени, лежащих вне подалгебры $\{H'; x_\sigma, \sigma < \omega; y_{\tau'}, \tau' < \tau\}$. Тогда в качестве y_ν выбираем в H один из элементов минимальной степени, лежащих вне $\{H'; x_\sigma, \sigma < \omega; y_\tau, \tau < \nu\}$. Пусть выбор элементов y остановится на некотором порядковом числе ω', т. е.

$$\{H'; x_\sigma, \sigma < \omega; y_\tau, \tau < \omega'\} = H.$$

Наша теорема будет доказана, если мы докажем следующее утверждение: *Система элементов x_σ, y_τ, где $\sigma < \omega$, $\tau < \omega'$, является системой свободных образующих для порождаемой ею подалгебры F и, сверх того, имеет место свободное разложение*

$$H = H' * F = A' * B' * F.$$

Для доказательства этого утверждения нужно показать, что элементы вида α, β, x_σ и y_τ не связаны никаким нетривиальным соотношением, т. е. соотношением, левая часть которого есть сумма конечного числа различных слов с отличными от нуля коэффициентами, причем в каждом слове участвуют (с некоторым распределением скобок) некоторые элементы указанного вида и ни одна из скобок длины 2 в этом слове не может состоять из двух элементов вида α или двух элементов вида β. Пусть такое соотношение существует:

$$f(\alpha, \beta, x_\sigma, y_\tau) = 0. \tag{8}$$

Оно не может содержать лишь одни элементы вида α и β, так как подалгебры A' и B' составляют свободное произведение. Пусть в это соотношение входят также элементы

$$x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \ldots. x_{\sigma_n} \quad \text{и} \quad y_{\tau_1}, y_{\tau_2}, \ldots, y_{\tau_t}, \tag{9}$$

причем

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n, \quad \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_t. \tag{10}$$

Помня о свойствах элементов (9), вытекающих из (10) ввиду определения элементов x_σ и y_τ, условимся обозначать в дальнейшем элементы (9) следующим более простым способом:

$$x_1, x_2 \ldots, x_n \quad \text{и} \quad y_1, y_2, \ldots, y_t.$$

Мы будем считать дальше, что обе эти системы элементов непустые. Доказательство сохраняет, однако, силу и в том случае, если одна из этих систем пуста, т. е. если $n=0$ или $t=0$; нужно лишь опускать соответствующие части рассуждений.

Как доказано выше, элементы $x_1^b, x_2^b, \ldots, x_n^b$ линейно независимы над P. Можно указать, следовательно, такие n элементов вида b, которые мы зафиксируем и будем обозначать через $b_1, b_2, \ldots, b_n$, что если k_{ij}—коэффициент, с каким член b_j входит в элемент x_i, то детерминант d, составленный из этих коэффициентов, отличен от нуля:

$$d=\begin{vmatrix} k_{11} \ldots k_{1n} \\ \ldots\ldots \\ k_{n1} \ldots k_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим теперь элемент y_1 из (9). Пусть $\mathfrak{a}$ будет одним из его старших членов. Назовем этот член **недопустимым**, если он является словом, в записи которого участвуют лишь элементы вида α, β, a_i, $i=1, 2, \ldots, n$ (где a_i—главный член элемента x_i) и b_j $j=1, 2, \ldots, n$, причем элементы вида b_j могут входить лишь внутрь скобок длины 2 и притом лишь одним из следующих двух способов:

1) элемент b_j стоит на любом из двух мест рассматриваемой скобки длины 2, а на другом месте стоит один из элементов вида α;

2) элемент b_j стоит в рассматриваемой скобке длины 2 на *втором* месте, а на первом месте—один из элементов a_i.

Пусть в записи недопустимого члена $\mathfrak{a}$ элементы вида b_j встречаются s раз, $s \geqslant 0$, а именно, если читать слово $\mathfrak{a}$ слева направо, это будут элементы $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_s}$. Обозначим тогда коэффициент при члене $\mathfrak{a}$ в элементе y_1 через $l_{j_1,j_2,\ldots,j_s}$. Рассмотрим, далее, члены, которые будут называться **эквивалентными** члену $\mathfrak{a}$ и получаются из $\mathfrak{a}$ следующим образом: в члене $\mathfrak{a}$ сохраняется его распределение скобок и остаются на своих местах все α, β и a_i, а всякое b_j может быть заменено любым другим $b_{j'}$. Для того чтобы отличить эти члены друг от друга (хотя вовсе не от других старших членов элемента y_1!), условимся обозначать член $\mathfrak{a}$ через $\mathfrak{a}_{j_1,j_2,\ldots,j_s}$, а эквивалентный ему член, полученный заменой каждого множителя b_{j_m}, $m=1, 2, \ldots, s$, на $b_{j'_m}$,—через $\mathfrak{a}_{j'_1,j'_2,\ldots,j'_s}$; коэффициент при этом последнем члене в выражении для y_1 обозначим через $l_{j'_1,j'_2,\ldots,j'_s}$. Некоторые из этих членов могут, конечно, на самом деле не входить в y_1, т. е. соответствующий коэффициент будет равен нулю; если же данный член, эквивалентный члену $\mathfrak{a}$, входит в y_1, то будет в нем также недопустимым.

Покажем, что недопустимый член $\mathfrak{a}$ и все члены, ему эквивалентные, можно в элементе y_1 уничтожить. Для этой цели построим следующее выражение: возьмем член $\mathfrak{a}$, сохраним в нем его распределение скобок и сохраним на своих местах все входящие в него множители вида α и β, но всякий множитель a_i заменим соответствующим элементом x_i, в то время как всякий множитель b_{j_m}, $m=1, 2, \ldots, s$, заменим любым из элементов x_i, а именно, x_{i_m}. Полученное выражение зависит, конечно, от выбора индексов i_m, $m=1, 2, \ldots, s$, и будет обозначаться через $\mathfrak{g}_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$. Рассмотрим сумму всех таких выражений с некоторыми коэффициентами:

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_s=1}^{n} A_{i_1,i_2,\ldots,i_s}\, \mathfrak{g}_{i_1,i_2,\ldots,i_s}. \tag{11}$$

Заменим в каждом $\mathfrak{g}$ из этой суммы входящие в него x_i их выражениями через элементы вида a и b и произведем перемножение. Мы получим, что член $a_{j_1,j_2,\ldots,j_s}$ входит в сумму (11) с коэффициентом

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_s=1}^{n} A_{i_1,i_2,\ldots,i_s}\, k_{i_1j_1}k_{i_2j_2}\ldots k_{i_sj_s}$$

и это же верно для всех членов, ему эквивалентных. Если мы выберем теперь коэффициенты A так, чтобы они удовлетворяли системе n^s линейных уравнений:

$$\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_s=1}^{n} A_{i_1,i_2,\ldots,i_s}\, k_{i_1j_1}k_{i_2j_2}\ldots k_{i_sj_s}=l_{j_1,j_2,\ldots,j_s}, \quad j_1, j_2, \ldots, j_s=1, 2, \ldots, n,$$

—к этой системе применимо правило Крамера, так как матрица из ее коэффициентов является s-й степенью матрицы n-го порядка (k_{ij}) в смысле кронекеровского произведения матриц и поэтому детерминант, равный, как известно, $d^{sn^{s-1}}$, отличен от нуля,—и вычтем затем из y_1 сумму (11), то уничтожим в элементе y_1 недопустимый член a и все члены, ему эквивалентные. Легко проверить, что после этого вычитания в элементе y_1 не появляются новые недопустимые старшие члены. Таким образом, после конечного числа таких вычитаний в элементе y_1 будут уничтожены все недопустимые старшие члены. Полученный этим путем элемент обозначим через $\overline{y}_1$; его степень равна степени элемента y_1, так как если бы она была ниже, то мы пришли бы в противоречие с выбором элемента y_1. Выбираем затем один из старших членов элемента $\overline{y}_1$ и называем его о т м е ч е н н ы м ч л е н о м; коэффициент при этом отмеченном члене считаем равным единице: этого можно достигнуть умножением элемента $\overline{y}_1$ на соответствующий множитель из поля P.

Пусть теперь дано натуральное число m, $m\leqslant t$, и пусть для всех l, где $l=1, 2, \ldots, m-1$, элемент y_l уже заменен на элемент $\overline{y}_l$, причем выполняются следующие условия:

(i) элемент $\overline{y}_l$ имеет ту же степень, что и y_l и получен вычитанием из y_l элемента, принадлежащего к подалгебре $\{H'; x_1, x_2, \ldots, x_n; \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{l-1}\}$, и, возможно, последующим умножением на отличный от нуля элемент из поля P;

(ii) в каждом $\overline{y}_l$ выбран один из его старших членов, называемый **отмеченным**, причем он входит в $\overline{y}_l$ с коэффициентом 1;

(iii) элемент $\overline{y}_l$ не содержит недопустимых старших членов; при этом старший член элемента y_l (или $\overline{y}_l$) будет называться **недопустимым**, если его запись, как слова, распадается в произведение некоторых членов, отмеченных в элементах $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{l-1}$, и некоторых «изолированных» множителей вида α, β, a_i, $i=1, 2, \ldots, n$, и b_j, $j=1, 2, \ldots, n$, причем всякий изолированный множитель вида b_j должен входить внутрь некоторой скобки длины 2, притом одним из тех способов (1) и (2), которые были указаны выше в случае $l=1$.

Рассмотрим элемент y_m. Пусть в нем содержится недопустимый старший член $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_{j_1,j_2,\ldots,j_s}$, причем обозначение имеет в точности тот же смысл, что и выше в случае $m=1$. Как и раньше, этот член и все члены, ему эквивалентные, можно уничтожить, вычитая из y_m соответственно подобранную комбинацию выражений $\mathfrak{g}_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$; эти выражения получаются из члена $\mathfrak{a}$ так же, как и выше, с тем добавлением, что вместо всего отмеченного члена из некоторого элемента $\overline{y}_l$, $l<m$, входящего в рассматриваемое разложение члена $\mathfrak{a}$, следует ставить сам элемент $\overline{y}_l$, сохраняя в дальнейшем такое же распределение скобок, как в самом члене $\mathfrak{a}$.

Теперь нельзя утверждать, однако, что после этого вычитания элемент y_m не приобретает новых недопустимых старших членов, каких он раньше не содержал. Рассмотрим этот случай подробнее. Пусть при развертывании выражения $\mathfrak{g}_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$ мы получаем некоторый старший член $\mathfrak{b}$, отличный от всех членов, эквивалентных члену $\mathfrak{a}$. В этом члене уже указано разложение на множители, соответствующее тому, которое рассматривалось в члене $\mathfrak{a}$, однако следует помнить, что при получении члена $\mathfrak{b}$ из выражения $\mathfrak{g}_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$ хотя бы один раз должна реализоваться хотя бы одна из следующих трех возможностей:

(a) в одном из множителей x_i из $\mathfrak{g}_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$, заменившем при построении этого выражения некоторое a_i, входившее в член $\mathfrak{a}$, вместо этого a_i берется некоторый другой член;

(b) в одном из множителей x_i, заменившем некоторое b_j, вместо этого b_j берется некоторый член вида b, отличный от каждого из членов $b_1, b_2, \ldots, b_n$;

(c) в одном из множителей $\overline{y}_l$, входящем в $\mathfrak{g}_{i_1,i_2,\ldots,i_s}$, вместо отмеченного члена берется некоторый другой старший член.

Предположим, что член $\mathfrak{b}$ снова оказывается недопустимым для элемента y_m, быть может при каком-либо другом распадении на множители. Рассмотрим эти два распадения члена $\mathfrak{b}$ на множители, причем будем называть их «старым» и «новым».

Как мы знаем, всякий данный множитель одного разложения может или оставаться множителем во втором разложении, или быть произведением нескольких множителей этого второго разложения, или же вместе с некоторыми другими множителями первого разложения давать в произведении некоторый множитель второго разложения. Однако никакой множитель из старого разложения не может быть произведением двух или большего числа множителей из нового разложения, так как он был бы тогда одним из старших членов в одном из $\overline{y}_l$ и был бы, вместе с тем, недопустимым. Если, с другой стороны, хотя бы один из множителей нового разложения является произведением двух или большего числа множителей старого разложения, *то новое разложение состоит из меньшего числа множителей, чем старое*. Если же, наконец, всякий множитель старого разложения члена $\mathfrak{b}$ является множителем и в новом разложении, то при построении члена $\mathfrak{b}$ указанные выше возможности (a) и (b) не могли иметь места, т. е. хотя бы один раз реализовалась возможность (c). Это значит, что в старое разложение входил множителем некоторый старший член одного из элементов $\overline{y}_l$, не являвшийся в нем отмеченным; однако, как показывает новое разложение, этот член будет отмеченным в некотором элементе $\overline{y}_{l'}$, причем, как следует из определения элементов $\overline{y}$, *должно быть непременно* $l' > l$, иначе этот член был бы в $\overline{y}_l$ недопустимым.

Таким образом, если после уничтожения в элементе y_m недопустимого старшего члена $\mathfrak{a}$ появляется новый недопустимый старший член $\mathfrak{b}$, то или в его распадении на множители (в смысле определения недопустимого члена) содержится меньше множителей, чем их было в соответствующем распределении члена $\mathfrak{a}$, или же множителей столько же, но некоторые множители из $\mathfrak{a}$, являвшиеся отмеченными членами в некоторых $\overline{y}_l$, заменяются отмеченными членами из некоторых $\overline{y}_{l'}$ с бо̀льшими номерами. Эти изменения могут повторяться, однако, лишь конечное число раз. Отсюда следует, что после конечного числа вычитаний все недопустимые члены в y_m могут быть уничтожены. Обозначим полученный элемент через $\overline{y}_m$. Его степень равна степени элемента y_m; она не может быть больше, так как из y_m вычитались суммы элементов той же степени, что и само y_m, но не может быть и меньше, так как это противоречило бы выбору элемента y_m. Отметим, наконец, в $\overline{y}_m$ один из его старших членов, причем обычным преобразованием коэффициент при этом отмеченном члене делаем равным единице.

Мы можем теперь считать, что все элементы y_l, $l=1, 2, \ldots, t$, заменены элементами $\overline{y}_l$, причем выполняются условия (i)—(iii). По предположению, существует нетривиальное соотношение (8), связывающее элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_t$ и некоторые α и β. Отсюда следует, что *должно существовать нетривиальное соотношение, связывающее некоторые из элементов* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_t$ *и некоторые элементы вида* α *и* β.

В самом деле, выделим в соотношении (8) один из его членов $\mathfrak{g}$ со следующим свойством: он должен содержать наибольшее возможное число множителей y_t, а при этом условии — наибольшее возможное число множителей y_{t-1}, и т. д. до элемента y_1. Заменим теперь во всех членах соотношения (8) всякий входящий в них элемент y_l через соответствующее $\bar{y}_l$ и дополнительное слагаемое, принадлежащее к подалгебре $\{H'; x_1, x_2, \ldots, x_n; \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{l-1}\}$, а затем произведем перемножение. Из выделенного члена $\mathfrak{g}$ получится, в частности, член $\bar{\mathfrak{g}}$ с таким же распределением скобок и с отличным от нуля коэффициентом, но все y_l заменяются соответствующими $\bar{y}_l$. Легко видеть, что ввиду условий, наложенных на выбор члена $\mathfrak{g}$, член $\bar{\mathfrak{g}}$ не может появиться еще раз из какого-либо другого члена соотношения (8) и поэтому не может уничтожиться.

В действительности, однако, *не существует нетривиального соотношения, связывающего некоторые из элементов* $x_1, x_2, \ldots x_n, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_t$ *и некоторые элементы вида* α *и* β. Пусть

$$\varphi(\alpha, \beta, x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_t) = 0 \tag{12}$$

—такое соотношение. Назовем **весом** его члена число входящих в него множителей, причем всякий множитель вида $\bar{y}_l$ считается столько раз, какова его степень. Среди членов максимального веса в соотношении (12) возьмем те, которые содержат наибольшее число множителей первой степени, т. е. множителей вида α, β и x_i, среди них—те, которые содержат наибольшее число множителей $\bar{y}_1$, среди этих—содержащие наибольшее число множителей $\bar{y}_2$, и т. д. Пусть $\mathfrak{g}$ будет один из членов соотношения (12), полученных этим путем.

Назовем **нерегулярными** те из входящих в член $\mathfrak{g}$ множителей вида x_i, которые содержатся внутри некоторой скобки длины 2, причем или на любом из ее двух мест, если другой множитель, входящий в эту скобку, есть одно из α, или же на втором месте, если на первом месте этой скобки стоит также одно из $x_{i'}$; все другие множители вида x_i из члена $\mathfrak{g}$ назовем **регулярными**. Пусть, нерегулярные множители вида x_i в члене $\mathfrak{g}$, читаемом слева направо, будут $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}$, где $s \geqslant 0$. Тогда введем обозначение:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{i_1, i_2, \ldots, i_s},$$

а коэффициент при этом члене в соотношении (12), заведомо отличный от нуля, обозначим через $A_{i_1, i_2, \ldots, i_s}$. Пусть, далее, $\mathfrak{g}_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_s}$ будет член, получающийся из члена $\mathfrak{g}$ заменой каждого нерегулярного множителя x_{i_m} на некоторое $x_{i'_m}$; коэффициент при этом члене в соотношении (12), быть может равный нулю, обозначим через $A_{i'_1, i'_2, \ldots, i'_s}$, а сам член будем называть **эквивалентным** члену $\mathfrak{g}$.

Если мы заменим в члене $\mathfrak{g}$ все входящие в него множители вида x_i и $\bar{y}_l$ их выражениями и произведем перемножение, то получим, в частности, следующий член $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{j_1, j_2, \ldots, j_s}$: в каждом из множителей y_l члена $\mathfrak{g}$ нужно взять его отмеченный член, в каждом регулярном множителе x_i—его главный член a_i, в каждом нерегулярном множителе x_{i_m}, $m=1, 2, \ldots, s$, — любой член b_{j_m}, $1 \leqslant j_m \leqslant n$, в то время как множители вида α и β из $\mathfrak{g}$ остаются, конечно, и в $\mathfrak{a}$. При различном выборе индексов j_m мы будем получать различные члены, эквивалентные члену $\mathfrak{a}$. Следует заметить, что степень члена $\mathfrak{a}$ равна весу члена $\mathfrak{g}$, т. е. является максимальной среди степеней членов, появляющихся при развертывании соотношения (12).

Член $\mathfrak{a}$ может получиться при развертывании любого из членов соотношения (12), эквивалентных члену $\mathfrak{g}$, причем легко проверить, что его коэффициент в сумме всех этих членов будет равен

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_s=1}^{h} A_{i_1, i_2, \ldots, i_s} k_{i_1 j_1} k_{i_2 j_2} \ldots k_{i_s j_s}.$$

Покажем, что *член $\mathfrak{a}$ (как и любой член, ему эквивалентный) не может появиться при развертывании какого-либо члена соотношения* (12), *отличного от членов, эквивалентных* $\mathfrak{g}$.

Пусть это не так, т. е. в соотношение (12) входит с отличным от нуля коэффициентом некоторый член $\bar{\mathfrak{g}}$, при развертывании которого также возникает член $\mathfrak{a}$. Отсюда следует, что для члена $\mathfrak{a}$, помимо его «старого» разложения на множители, возникшего при его получении из члена $\mathfrak{g}$, появилось еще одно, «новое», разложение на множители, связанное с членом $\bar{\mathfrak{g}}$. Входящие в это новое разложение члены из некоторых множителей вида $\bar{y}_l$ из $\bar{\mathfrak{g}}$ будут непременно старшими членами в своих $\bar{y}_l$, как следует из сказанного выше о степени члена $\mathfrak{a}$. Поэтому ни один из этих множителей нового разложения члена $\mathfrak{a}$ не будет произведением двух или большего числа множителей старого разложения, так как иначе он оказался бы недопустимым старшим членом для своего $\bar{y}_l$. С другой стороны, ни один множитель старого разложения не может быть произведением двух или большего числа множителей нового разложения. Действительно, в противном случае вместо некоторого множителя $\bar{y}_l$ из члена $\mathfrak{g}$ в члене $\bar{\mathfrak{g}}$ будет стоять произведение нескольких множителей, которые могут иметь вид α, β, x_i и $\bar{y}_{l'}$, причем в последнем случае непременно будет $l' < l$. Это приводит, однако, к противоречию с выбором члена $\mathfrak{g}$.

Таким образом, всякий множитель из старого разложения члена $\mathfrak{a}$ будет множителем и в новом разложении. Всякому множителю $\bar{y}_l$ из члена $\mathfrak{g}$ соответствует, следовательно, некоторый множитель той же степени $\bar{y}_{l'}$ из члена $\bar{\mathfrak{g}}$; при этом на самом деле $l'=l$, так как при $l' > l$ элемент $\bar{y}_{l'}$ обладал бы недопустимым старшим членом, а именно членом, отмеченным в $\bar{y}_l$, а предположение $l' < l$ противоречило бы выбору члена $\mathfrak{g}$. Далее, все множители вида α и β будут в обоих членах $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ совпадать. Это же верно и для регулярных множителей x_i, так как главный член a_i некоторого x_i не входит, как мы знаем, ни в какое $x_{i'}$ при $i' \neq i$. Члены $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ могут отличаться друг от друга, следовательно, лишь нерегулярными множителями x_i, а поэтому член $\bar{\mathfrak{g}}$ эквивалентен члену $\mathfrak{g}$.

Для того чтобы соотношение (12) было справедливым, все члены, получающиеся при его развертывании относительно свободного разложения (7), должны иметь равные нулю коэффициенты. Это относится, в частности, к члену $\mathfrak{a}$ и всем членам, ему эквивалентным. Таким образом, коэффициенты A должны удовлетворять следующей системе n^s линейных однородных уравнений:

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_s=1}^{n} A_{i_1, i_2, \ldots, i_s} k_{i_1 j_1} k_{i_2 j_2} \ldots k_{i_s j_s} = 0, \quad j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n.$$

Детерминат этой системы отличен от нуля, а поэтому все A должны быть равными нулю, что противоречит, однако, исходному предположению, согласно которому коэффициент при члене $\mathfrak{g}$ в соотношении (12) отличен от нуля.

Доказательство теоремы 2 закончено.

§ 5. Следствия

Из теоремы 2, теоремы 1 и свойства V (§ 3) вытекает следующая

Теорема 3. *Всякая подалгебра неассоциативной свободной алгебры с любым множеством свободных образующих, отличная от нуля, является свободной.*

Теорема 2 позволяет также решить вопрос об изоморфизме свободных разложений некоторой алгебры. Назовем два свободных разложения алгебры G изоморфными, если всякий свободный множитель одного из этих разложений, не являющийся свободной алгеброй с одним образующим, служит свободным множителем и в другом разложении, и обратно. Эти два разложения могут, следовательно, отличаться друг от друга лишь множителями, являющимися свободными алгебрами с одним образующим, причем из свойства IV (§ 3) и доказанной в § 1 инвариантности числа свободных образующих свободной алгебры без труда следует, что *число таких множителей в обоих разложениях — одно и то же.*

Теорема 4. *Два любых неассоциативных свободных разложения произвольной алгебры G обладают изоморфными продолжениями. В частности, если алгебра G допускает свободные разложения с неразложимыми множителями, то все такие разложения изоморфны между собой.*

Пусть, в самом деле, даны два разложения алгебры G:

$$G = \prod_{\alpha}^{*} A_\alpha = \prod_{\beta}^{*} B_\beta. \tag{13}$$

Если мы заменим, используя теорему 2, каждый множитель A_α свободным произведением его пересечений со всеми B_β и некоторой свободной алгебры, то получим продолжение первого из разложений (13), являющееся свободным произведением всех пересечений $A_\alpha \cap B_\beta$, отличных от нуля, и, кроме того, некоторой свободной алгебры. Такое же продолжение можно получить и для второго из разложений (13). Полученные продолжения будут, очевидно, изоморфными.

В связи с формулировкой теоремы 4 возникает вопрос о существовании разложимых алгебр, которые не допускали бы свободных разложений с неразложимыми множителями. Соответствующий пример строится ниже. Докажем сперва следующую лемму:

Лемма. *Если $G = A * B$ и если произведение двух элементов g_1 и g_2 из алгебры G равно отличному от нуля элементу a из A, $g_1 g_2 = a$, то оба элемента g_1 и g_2 принадлежат к A.*

Пусть хотя бы один из элементов g_1, g_2 лежит вне A. Если степень хотя бы одного из этих элементов, например g_1, больше единицы, то, умножая любой из его старших членов на любой старший член элемента g_2, мы получим член произведения $g_1 g_2$, который не может сократиться ни с каким другим членом этого произведения, и, вместе с тем, содержит множители, принадлежащие как к A, так и к B. Если же оба элемента g_1, g_2 — первой степени, то при наших предположениях в одном из них можно указать член, принадлежащий к A, в другом — член, принадлежащий к B. Произведение этих членов не будет сокращаться ни с каким другим членом произведения $g_1 g_2$ и, вместе с тем, будет лежать вне подалгебры A.

Пример разложимой алгебры, которая не может быть разложена в свободное произведение неразложимых алгебр

Искомая алгебра A будет объединением возрастающей последовательности алгебр

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \ldots,$$

где A_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — свободная алгебра над полем P с n свободными образующими $a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}$. Вложение алгебры A_n внутрь алгебры A_{n+1}, $n = 1, 2, \ldots$, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{ni} &= a_{n+1, i} \text{ для } i = 1, 2, \ldots, n-1; \\ a_{nn} &= a_{n+1, n} \cdot a_{n+1, n+1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Для любого n можно указать свободное разложение алгебры A с n свободными множителями — это будет, как легко видеть, разложение

$$A = \{a_{n1}\} * \{a_{n2}\} * \cdots * \{a_{n, n-1}\} * A^{(n)},$$

где

$$A^{(n)} = \{a_{mk}, \ m \geqslant n, \ k \geqslant n\}.$$

Отсюда следует, ввиду теоремы 4, что алгебра A не может быть разложена в свободное произведение конечного числа неразложимых множителей. С другой стороны, алгебра A вообще не может быть разложена в свободное произведение бесконечного множества множителей: если бы такое разложение существовало, то элемент a_{11} — образующий элемент алгебры A_1 — содержался бы уже в произведении конечного числа свободных множителей. Обозначив произведение этих множителей через B, а произведение всех остальных свободных множителей рассматриваемого разложения через C, мы получили бы для A свободное разложение

$$A = B * C,$$

где B есть истинная подалгебра алгебры A. Так как, однако, подалгебра B содержит образующий элемент алгебры A_1, то, ввиду леммы и равенств (14), к B будут принадлежать оба свободных образующих элемента алгебры A_2, а поэтому, снова ввиду леммы, и все три образующие алгебры A_3, и т. д., т. е. подалгебра B должна была бы совпадать с A.

(Поступило в редакцию 8/VII 1946 г.)

Литература

1. R. Baer und F. Levi, Freie Produkte und ihre Untergruppen, Comp. Math., **3** (1936), 391—398.
2. И. А. Грушко, О базисах свободного произведения групп, Мат. сб., **8** (1940), 169—182.
3. Л. И. Копейкина, Свободные разложения проективных плоскостей, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., **9** (1945), 495—526.
4. A. Kurosch, Die Untergruppen der freien Produkte von beliebigen Gruppen, Math. Ann., **109** (1934), 647—660.
5. A. Kurosch, Zum Zerlegungsproblem der Theorie der freien Produkte, Мат. сб., **2** (1937), 995—1001.
6. А. Г. Курош, Теория групп, М. — Л., 1944.
7. B. H. Neumann, On the number of generators of a free product, J. Lond. Math. Soc., **18** (1943), 12—20.
8. R. M. Thrall, On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring, Amer. J. Math., **64** (1942), 371—388.

Non-associative free algebras and free products of algebras

A. Kurosh (Moscow)

(Résumé)

For free associative rings as well as for free associative algebras over a certain field P there is no theorem similar to the Nielsen-Schreier theorem on the subgroups of a free group. A corresponding theorem holds, however, for non-associative free algebras. It is possible, moreover, to define a notion of the non-associative free product of algebras so that for it holds a theory running parallely to the theory of free

products of groups and to the theory of free products of projective planes. The question concerning the real causes of the parallelism of these three theories remains as yet open, since the methods used in the construction of these theories are totally different.

§ 1. Free algebras

The notion of a non-associative free algebra occurred already in the literature (cf. Thrall [8]), but only in the case of a finite number of generators. Every algebra over the principal field P (the range of the algebra not being supposed finite) is evidently isomorphic to the factor-algebra of a certain free algebra. The number of free generators of a non-associative free algebra (the power of their set) is the invariant of this algebra.

§ 2. Sub-algebras of free algebras

Theorem 1. *Every sub-algebra of a non-associative free algebra with one generator, which is different from zero, is free.*

The method of proof of this theorem enables us to assert that a non-associative free algebra A with one generator a contains free sub-algebras with any finite number or a denumerable set of free generators.

Thus the elements $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ of the algebra A, where

$$b_1 = aa, \; b_n = b_{n-1} \cdot a \qquad \text{for } n = 2, 3, \ldots,$$

will be free generators of the sub-algebra generated by them.

§ 3. Free products of algebras

Suppose that we are given a set of algebras A_α, $\alpha \subset M$, over a field P, and that in every of these algebras is chosen a certain basis over P. Denote by L the set-theoretical sum of these bases. We consider all possible non-void words (with a certain distribution of brackets) in the elements from L with the restriction that no bracket of length 2 contained in this word should contain two elements from the basis of one and the same algebra A_α. By a non-associative free product of the algebras A_α, $\alpha \subset M$, over the field P, we mean the algebra

$$G = \prod_{\alpha \subset M}{}^{*} A_\alpha,$$

whose basis is the set of all possible words in the elements from L; the product of two words is obtained by enclosing these words in brackets and writing out the second word after the first, unless the given words are words of length 1 belonging to the basis of one and the same algebra A_α, in which case they must be multiplied according to the rules of multiplication in this algebra. We may therefore assume that all A_α are sub-algebras in G.

It is easily seen that the free product of algebras A_α, $\alpha \subset M$, is independent of the choice of the bases in these algebras.

In this paragraph we also establish the simplest properties of free products (properties I — VI).

§ 4. Sub-algebras of free products

Theorem 2. *Every sub-algebra of the non-associative free product of the algebras A_α (α running through an arbitrary set of indices), which is different from zero, is a free product of its intersections with the factors A_α and, may be, of some free algebra.*

§ 5. Corollaries

From Theorems 2 und 1 follows

Theorem 3. *Every sub-algebra of a non-associative free algebra with any set of free generators which is different from zero, is free.*

Two free decompositions of an algebra G are said to be isomorphic, if they differ only by factors, which are free algebras with one generator. It is easily seen that the number of factors of this kind will be one and the same in both decompositions.

Theorem 4. *Two arbitrary non-associative free dicompositions of any algebra G possess isomorphic extensions. In particular, if the algebra G admits of a free decomposition with non-decomposible factors, then all such decompositions are isomorphic.*

We state also *an example of a decomposible algebra, which can not be decomposed into a free product of non-decomposible algebras.*

Free algebras and free products of algebras are defined in the present paper in such a way that they turn out to be algebras without unity. We could have changed the definitions, but this case would be immediately reducible to the case considered in the paper, if only such sub-algebras are to be considered, which contain the unity of the algebra itself.