

ИСТОРИЯ и МЕТОДОЛОГИЯ МАТЕМАТИКИ и ИНФОРМАТИКИ

- 1 семестр
- 2 часа/нед
- экзамен



Рейтинговые баллы

- Доклад 20 баллов
- Реферат 10 баллов
- 2 контрольных работы по 15 баллов
- 40 баллов за экзамен

Литература

- История математики с древнейших времен до начала 19 столетия (под ред. А.П.Юшкевича), том 1
- Д.Я.Стройк, Краткий очерк истории математики

Литература

- О.Нейгебауэр, Точные науки в древности
- Б.Л.ван-дер-Варден, Пробуждающаяся наука
- Э.И.Березкина, Математика Древнего Китая

ЗАРОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ



Врожденные «математические» инстинкты у животных

- Постройка сот пчелами в виде правильных шестиугольников
- «Оптимизированное» скручивание листа трубновертом
- Колесовидные сети пауков
- Узоры из концентрических окружностей пугают птиц

Развитие «математических» инстинктов с помощью опыта

- Свойственно всем высшим представителям животного мира
- Находится в зависимости от общего уровня нервной деятельности

Улучшаемые «математические» способности

- Постройка шалашника Мак-Грегора в виде правильного кольца: взрослые птицы строят правильное кольцо, у молодых наблюдается искажение формы
- «Вербовочные танцы» пчел, с указанием угла направления полета: «старые» пчелы точнее считывают информацию, чем молодые

Постройка шалашника Мак-Грегора



Элементы математических абстракций у животных

- Количество предметов (птицы)
- Гладкая экстраполяция (птицы)
- Форма предметов (перепончатокрылые)

Возникновение математических знаний

- Практические потребности
- Теоретические построения

Первые математические знания

- Арифметические (счет)
- Геометрические фигуры

Источники информации

- Археологические
- Лингвистические
- Антропологические

Археологические источники

- Кость с зарубками по 5 штук (Чехословакия, возраст — ок.30 тыс.лет)
- Вавилонские глиняные таблички (2000—600 гг. до н.э.)
- Надписи в пещере Назик (5—6 вв. до н.э.)
- Новгородские берестяные грамоты (10—12 вв. н.э.)

Антропологические источники

Исследования первобытных племен Америки, Африки, Австралии

- Счет папуасов (Н.Н.Миклухо-Маклай)
- Счет у народов Восточной Африки (названия десятков от 20 заимствованы у арабов, не ранее 6-7 вв. н.э.)

Антропологические источники

Индейцы пираха

- Отсутствует точное понятие числа в языке
- Категории: один, два (несколько), много
- Не способны различать количества превосходящие 2 (по другим источникам — от 5 до 8)
- У детей обучаемость математике имеется

Лингвистические источники

Грамматическая категория числа

- Единственное
- Двойственное (тройственное, ...)
- Множественное

Специальные названия для двух (трех, ...) предметов

Лингвистические источники

- Скорость расхождения языков примерно постоянна
- Из 200 наиболее употребительных слов языка примерно 20% в течение 1000 лет заменяются новыми

Лингвистические источники

Названия чисел (индоевропейские)

Рус	Англ	Фр	Ит	Гр	Санс
один	one	un	uno	ενα	эка
два	two	deux	due	δυο	д्वи
три	three	troi	tre	τρια	три
десять	ten	dix	dieci	δεκα	дашан

Отдельное название для 1/2

половина	half	moitié	mezzo	μισο	ардха
----------	------	--------	-------	------	-------

Лингвистические источники

Названия чисел (индоевропейские и семитские)

Рус	Араб	Аккад
один	ахад	иштен
два	иснан	шина
три	салас	шалашу

Русские названия чисел

- ноль < nulla (ничто, лат.)
- один < *ed+*in < *e(этот)+*in < *oinos
- два, три — общеиндоевропейские названия
- четыре < *cetyre < *kuetuor
- пять < *pet < *penktos
- шесть < *sest < *suek's

Русские названия чисел

- семь < седмь < *sedm < *septemos
- восемь < *osm < *osta < *oktou < *okto
- девять < *deve < *neve < *neun
- десять < *deset < *dek'm
- сто < *s'to < *k'mtom < *dek'mtom
- тысяча < *tysetja < *tus(ту́ча)+*k'mtom

Названия чисел

Системы счисления

- Двоичные
- Троичные
- Пятеричные
- Десятеричные
- Двадцатеричные
- Комбинированные (двоично-троичные, пятерично-десятичные и т.д.)

Индоевропейский счет

Предполагается четверичная система

- восемь < *oktou — двойственное число от *okto
- девять < *neun — *neuos (новый)
- использование в русском языке двойственного числа для количеств 2, 3, 4
- латинский: bimus, trimus, quadrimus (два, три, четыре года), quinguennis (пять лет)

Названия чисел

Аддитивные

- один-на-дцать
- four-teen
- dix-sept
- 1 — [eneə], 2 — [petcheval], 3 — [petcheval-eneə] (племя Муррея)

Названия чисел

Субстративные

- девяносто (от десять-до-ста)
- Финск. kah-deksan 8, üh-deksan 9
- Санс. экауна-двимсати 19

Названия чисел

Мультипликативные

- пять-десять
- fif-ty
- quatre-vingt

Аддитивно-мультипликативные названия чисел

- пять-десять шесть
- quatre-vingt-dix

Геометрические знания

- Земледелие
- Строительство
- Астрономия
- Декоративные элементы

Названия геометрических фигур

- Дуга (радуга), круг (площадка) — и.-е. корни
- Угол — общеиндоевропейское
- Точка — калька лат. Punctum
- Куб — от «κυβος» (гр., игральная кость)
- Сфера — от «σφαῖρα» (гр., мяч)
- Линия — от «linum» (лат., лён)
- Овал — от «ovum» (лат., яйцо)

Другие потребности

- Календарь
 - Лунный
 - Солнечный
- Навигация
- Торговля



Начало развития математики

- Математика не как инструмент, а как язык
- Результат обобщений и абстракций

МАТЕМАТИКА В СТРАНАХ ДРЕВНЕГО ВОСТОКА

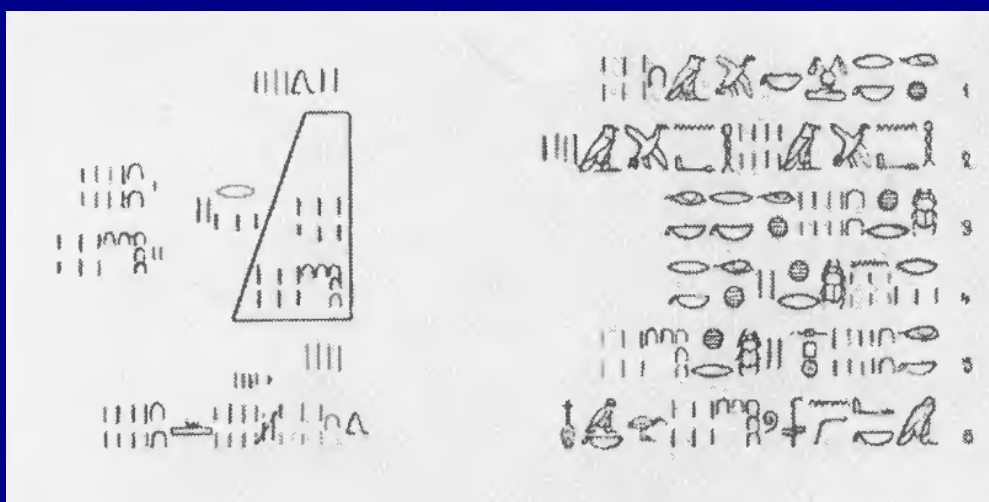
ДРЕВНИЙ ЕГИПЕТ (ок. 3000–332 гг. до н.э.)



Источники знаний

- Папирус Райнда (Ахмеса): 19–17 в до н.э., Лондон, Нью-Йорк, 84 задачи, 525×33 см
- Московский папирус: ок. 1900г. до н.э., музей им.Пушкина, 25 задач, 544×8 см
- Другие источники малозначительны

Фрагмент Московского папируса



Папирусы

- Предполагается, что папирусы служили «учебниками» в школах писцов
- «[Данный папирус содержит] совершенное и основательное исследование всех вещей, понимание их сущности, познание их тайн»

Гипотезы и легенды

- Предположение (древнегреческие авторы): существовали и другие знания более высокого уровня
- По легенде Пифагор и Фалес подчерпнули часть знаний в Египте

Основные черты наших познаний

- Трудность датировки (оба главных источника относятся к одному времени)
- Невозможно проследить развитие
- Предполагается, что после Среднего царства (16 в. до н.э.) математические знания мало менялись (несколько мелких папирусов эпохи Рима мало отличаются)

Общая характеристика

- Примитивность записанных знаний
- Отсутствие потребности в их развитии
- Непрерывность традиции
- Незначительная роль математики в обществе

Общая характеристика

- Незначительное влияние на последующее развитие науки
- Отсутствует математическая классификация (задачи классифицированы по темам)

«Зодчий цивилизации»

- Имхотеп — советник Джосера
- Ступенчатая пирамида — самое древнее сохранившееся сооружение (XXVII в. до н.э.)

Пирамида Джосера



Представление чисел

- Десятичная непозиционная система (имелись знаки для $1-10^7$), количество единиц в разряде указывалось повторением знака разряда
- Основные (аликвотные) дроби вида $\frac{1}{n}$ и дробь $\frac{2}{3}$. Дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ имели специальное обозначение, более мелкие получались модификацией записи натурального числа

Базовые арифметические действия

- Сложение натуральных чисел
- Удвоение натуральных чисел и основных дробей
- Дополнение основных дробей до единицы

Другие арифметические действия

- Умножение — через удвоение и сложение (с использованием принципа двоичной системы), отдельно — на 5 и 10
- Разложение дробей типа $\frac{2}{n}$ в сумму аликвотных при помощи таблиц
- Деление — подсчет количества кратных слагаемых, иногда — умножение на обратное (связь деления и умножения)

Решение задач

- Алгоритмическое описание решение: «умножь 10 на 2, прибавь 5, раздели на 8»
- Отсутствует обоснование правильности метода

Алгебраические задачи

- Линейные уравнения с одним неизвестным: «Количество и его четвертая часть дают вместе 15» ($x + \frac{x}{4} = 15$)
- Неполные квадратные уравнения: « $\frac{3}{4}$ длины являются шириной, а площадь равна 12» ($x \times \frac{3}{4}x = 12$).

Прогрессии

- Геометрическая прогрессия: 7 домов, в каждом 7 кошек, каждая съедает 7 мышей, каждая может съесть 7 колосьев и т.д. $(7 + 7^2 + 7^3 + \dots)$
- Арифметические прогрессии: раздели 10 мер хлеба на 10 человек, если разность между каждым человеком и следующим за ним составляет $\frac{1}{8}$ меры
 $(nx + \frac{n(n-1)}{2 \times 8} = 10, n = 10)$

Геометрические задачи

- Земледельческое происхождение задач
- Площади прямоугольников, треугольников, трапеций
- Приближенное правило для произвольных четырехугольников ($S = \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$)
- Использование теоремы Пифагора (в середине 1 тыс. до н.э., свидетельство греков)

Геометрические задачи

- Площадь круга $S = \left(\frac{8d}{9}\right)^2$, $\pi = 4 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3.16$
- Объем разных видов призм и цилиндров
- Усеченная пирамида $V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$
- Фактическое использование котангенса (для расчетов наклона грани пирамиды к основанию)

Геометрические задачи

Десятая задача Московского папируса: тебе назовут корзину с отверстием $4\frac{1}{2}$ в цельности. О, дай мне узнать ее поверхность.

- Сферическая поверхность
- Цилиндрическая поверхность

Календарь

- Деление года на 12 месяцев
- Деление суток на 24 часа (изначально на 12 часов делились отдельно день и ночь)



ДРЕВНЕЕ МЕЖДУРЕЧЬЕ *(4000–336 гг. до н.э.)*



Общие сведения

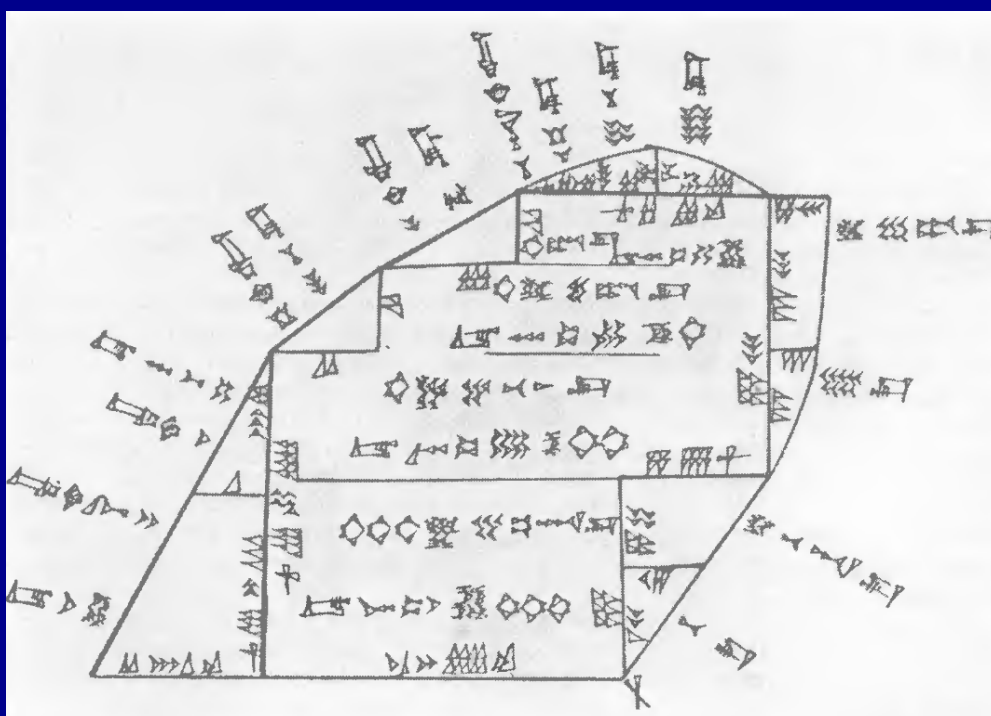
- Самая древняя по современным данным цивилизация
- Шумерская цивилизация — северное побережье Персидского залива
- 4 тыс. до н.э.

Основные источники

Клинописные глиняные таблички (известно более полумиллиона). Из них:

- около 150 с текстами задач
- около 200 с математическими таблицами

Пример



Распределение табличек во времени

- Шумерский период (3000–2100 гг. до н.э., единичные экземпляры)
- Период династии Хамураппи (1897–1595 г. до н.э.)
- Эпоха Селевкидов (600–336 г. до н.э., персидская эпоха)

Шумерские названия чисел

И.-е.	Сем	Шумер
один	ахад	диш
два	иснан	мин
три	салас	эш

Основные черты познаний

- Большое число источников
- Неравномерность распределения источников по времени
- Значительная часть знаний возникла уже в шумерский период
- Возможность проследить дальнейшее развитие

Общая характеристика

- Вычислительная направленность
- Хорошо развитая алгебраическая техника
- Непрерывность традиции

Влияние

- Большое влияние на эллинистическую математику (особенно позднего периода)
- Использование шестидесятеричной системы — до Позднего Средневековья
- Прослеживается до нашего времени

Предпосылки развития

- Сложность земледелия
- Города и строительство
- Развитие торговли (пересечение торговых путей)
- Навигация

Представление чисел

- Шестидесятеричная система
- Следы десятичной системы, сознательная смена основания
- Непозиционная система (шумеры): для записи бóльших чисел применялись бóльшие по размеру знаки

Позиционная система

- Вавилон: позиционная система
- Знак для нуля (в персидскую эпоху), до этого оставляли увеличенный промежуток
- Шестидесятеричные дроби, отсутствие десятичной точки

Элементы математических текстов

- Математические таблицы
- Математические обозначения

Арифметические действия

- Сложение/вычитание — поразрядные
- Умножение — с использованием специальных таблиц

Деление

- Деление — при помощи таблиц обратных величин
- Наиболее ранняя таблица дает только точные значения (нет обратных для 7, 11, 13 и т.д.)
- Получены периодические дроби

Деление

- Точность вычислений — до 17-го десятичного знака, погрешность — $< 10^{-30}$
- Имеются интервальные оценки обратной величины

Другие типы математических таблиц

- Логарифмические (по основанию 2)
- Таблицы степеней (до десятой)
- Специальные таблицы типа $n^2 + n^3$

Абстрактное понятие действительного числа

Алгебраические задачи

- Прогрессии
- «Проценты» (шестидесятеричные)
- Квадратные уравнения и системы второй степени
- Численное решение уравнений третьей степени
- Приближенное извлечение корней

Полные квадратные уравнения

- Площадь A , состоящая из суммы двух квадратов, составляет 1000. Сторона одного из квадратов составляет $\frac{2}{3}$ стороны другого квадрата, уменьшенные на 10. Каковы стороны квадратов?
- $x^2 + y^2 = 1000; \quad y = \frac{2}{3}x - 10$

Неоднородные алгебраические уравнения

- Вычту сторону квадрата из его площади и получу 14.30.
- $x^2 - x = 14.3$

Показательное уравнение

- За какое время удвоится сумма денег, ссуженная под 20 процентов.
- $(1\frac{1}{5})^x = 2$

Алгебраические и численные методы

- Исключение неизвестных
- Вспомогательные переменные
- Приближенное правило $\sqrt{x^2 + \Delta} \approx x + \frac{\Delta}{2x}$
- Итерационный метод нахождения \sqrt{x} :
$$a_{i+1} = \frac{a_i + \frac{x}{a_i}}{2}$$

Геометрические фигуры

- Треугольники, четырехугольники, круг
- Разные виды призм, цилиндров и пирамид
- Правильные многоугольники
- Сегменты круга
- Конусы

Основные черты геометрии

- Вспомогательный характер
- Теорема Пифагора
- $\pi \approx 3$ (иногда $\pi \approx 3\frac{1}{8}$)
- Связь длины окружности и площади круга: $S = \frac{lr}{2}$
- Подобие фигур

Теория чисел

- Нахождение пифагоровых троек: целых a , b и c , для которых $a^2 + b^2 = c^2$
- Аналогичная задача $a^2 + b^2 = 2c^2$

ДРЕВНИЙ КИТАЙ



Основные источники

- «Книга перемен»: 7 в до н.э., отдельные элементы (магические квадраты)
- Математическое «Десятикнижие» (6 в. н.э.): сборник более ранних текстов с комментариями.

Математическое «Десятикнижие»

- «Девять книг»: 2 в. до н.э. (в редакции Лю Хуэя, 263г. н.э.)
- «Трактат о гномоне» («Трактат об измерительном шесте»): 2 в. до н.э. (ссылки ок. 1200 г. до н.э.)

Основные черты познаний

- Отсутствие ранних источников (Цинь Ши-Хуан-ди, 213 г. до н.э.)
- Трудность датировки
- Непрерывность развития вплоть до последнего времени

Общая характеристика

- Вычислительная направленность
- Большая общественная роль
- Непрерывность развития (вплоть до 20 в.)
- Развитая система образования
- Догматизм

Представление чисел

- Десятичная полупозиционная система (после цифры ставится указатель разряда)
- Десятичные дроби
- Использование позиционной системы на счетной доске (аналог русских счет)

Дроби

- Использование рациональных дробей $\frac{n}{m}$
- Специальные названия: $\frac{1}{2}$ — половина, $\frac{1}{3}$ — малая половина, $\frac{2}{3}$ — большая половина,

Арифметические действия

- Сложение/вычитание — поразрядные
- Умножение/деление — способ, эквивалентный «столбику»

Умножение и деление возникли независимо друг от друга.

Арифметические действия

- Действия с дробями аналогичны современным
- Деление дробей — приведение к общему знаменателю
- Сокращение дробей
- Алгоритм Евклида

Системы линейных уравнений

- Решение методом Гаусса (метод фан-чен)
- Появление отрицательных чисел
- Действия с отрицательными числами

Алгебраические задачи

- Решение квадратных уравнений (в том числе с отрицательными коэффициентами)
- Задача «Разделить $6\frac{1}{3}$ цяня между $3\frac{1}{3}$ людьми».

Приближенное решение алгебраических уравнений (тянь-юань)

- Нахождение разрядности решения k
- Нахождение первой цифры x_0
- Замена $y = x - x_0 10^k$
- Нахождение следующей цифры и т.д.

Геометрия

- Теорема Пифагора (с современным доказательством)
- Вписанные окружности
- Касательные к окружностям
- Площадь круга и длина окружности, $\pi = \sqrt{10} \approx 3.16$
- Начало н.э. $\pi \approx 3.155; 3.14; 3.1415926$

Теория чисел

- Китайская теорема об остатках
- Решение сравнений (3 в. н.э.): найти число, которое при делении на 3, 5, 7 дает 2, 3, 2 соответственно
- Диофантовы уравнения (5 в. н.э.): нужно на 100 монет купить 100 птиц, если петух стоит 15, курица — 4, 4 цыпленка — 1.
- Пифагоровы тройки

ДРЕВНЯЯ ИНДИЯ



Основные источники

- Комментарии к «Ведам»: разное время, начиная с 1 тыс. до н.э., квадратные уравнения
- «Шулва сутра» («Правила веревки»): частично — 6 в. до н.э., некоторые приближения иррациональностей π , $\sqrt{2}$

Основные черты познаний

- Специальные математические тексты раннего периода отсутствуют
- Математические сочинения — «Сиддханта» — относятся к постэллинистическому периоду
- Трудность датировки

Общая характеристика

- Нет непрерывности
- Тесная связь с математикой Китая
- Связь с математикой Вавилона
- Вычислительная направленность

Представление чисел

- Десятичная непозиционная система
- Названия чисел до 10^{50}
- Появление дробей относят к 2 тыс. до н.э.
- Цифры «Карошти»: комбинация палочек — 1, крестов — 4
- «Брахми» — предки современных начертаний цифр (6 в. до н.э. — надпись в пещере Назик)

Элементы древнеиндийской математики

- Действия с рациональными дробями
- Рациональные приближения
- Извлечение квадратных и кубических корней
- Нахождение пифагоровых троек

Геометрия

- Малое, в основном прикладное, значение
- Теорема Пифагора
- Построение прямых углов
- Квадратов, прямоугольников с заданной площадью
- Прямоугольных треугольников