加群の Gröbner 基底

- (TODO: 加群項順序の説明)
- (TODO: 加群の Gröbner 基底の説明)
- (TODO: 消去定理の説明)

Koszul 複体

定義 1

多項式環 $R = k[X_1, ..., X_n]$, その上の自由加群 $E = \bigoplus_{i=1}^{l} Re_i$ と R-加群準同型写像 $\varphi : E \to R$ に対し,

$$K_j(\varphi) := \bigwedge^j E = \bigoplus_{i_1<...<i_j} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_j} R,$$

$$d_j : K_{j+1}(\varphi) \to K_j(\varphi) : \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j+1}} \mapsto \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} \varphi(\boldsymbol{e}_k) \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k-1}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k+1}} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j+1}}$$

と定めて得られる複体 $K_\bullet(\varphi)$ を φ の **Koszul 複体** という.

これは確かに複体になる. 実際,

$$\begin{aligned}
& d_j\left(d_{j+1}\left(\boldsymbol{e}_{i_1,...,i_{j+2}}\right)\right) \\
&= d_j\left(\sum_{k=1}^{j+2} (-1)^{k+1} \varphi(\boldsymbol{e}_k) \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k-1}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k+1}} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j+2}}\right) \\
&= \sum_{k<k'} (-1)^{k+k'+1} \varphi(\boldsymbol{e}_k)\varphi(\boldsymbol{e}_{k'}) \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k-1}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k+1}} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k'-1}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k'+1}} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j+2}} \\
&+ \sum_{k>k'} (-1)^{k+k'} \varphi(\boldsymbol{e}_k)\varphi(\boldsymbol{e}_{k'}) \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k-1}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k+1}} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k'-1}} \wedge \boldsymbol{e}_{i_{k'+1}} \wedge ... \wedge \boldsymbol{e}_{i_{j+2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

である.

以下, 空の外積を $\mathbb{1} := \bigwedge \emptyset \in K_0(\varphi)$ と書く.

例 1

$n = 2, \varphi : E \to R : \boldsymbol{e}_1 \mapsto X_1^2, \boldsymbol{e}_2 \mapsto X_1 X_2$ のとき,

$$\begin{gathered}
K_0(\varphi) = \mathbb{1}R, \\
K_1(\varphi) = E = \boldsymbol{e}_1 R \oplus \boldsymbol{e}_2 R, \\
K_2(\varphi) = E \wedge E = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 R, \\
d_0 : K_1(\varphi) \to K_0(\varphi) : \boldsymbol{e}_1 \mapsto X_1^2 \mathbb{1},\ \boldsymbol{e}_2 \mapsto X_1 X_2 \mathbb{1}, \\
d_1 : K_2(\varphi) \to K_1(\varphi) : \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \mapsto X_1^2 \boldsymbol{e}_2 - X_1 X_2 \boldsymbol{e}_1
\end{gathered}$$

より, Koszul 複体は以下のようになる：