Gröbner 基底

単項式順序

K を体，$R = K[X_1, ..., X_n]$ を K-上 n 変数多項式環とする． R の単項式全体の集合を $\mathcal{M}_R$ とおく． $\mathcal{M}_R$ は乗法に関して可換モノイドをなす．

定義 1 単項式順序

多項式環 R の **単項式順序** (*monomial order*) とは，$\mathcal{M}_R$ 上の全順序 $\preccurlyeq$ であって，任意の $\mu, \mu', \nu \in \mathcal{M}_R$ に対して以下を満たすもののことである：

1. $1 \preccurlyeq \mu$;
2. $\mu \preccurlyeq \mu' \Longrightarrow \mu \cdot \nu \preccurlyeq \mu' \cdot \nu$.

命題 1

任意の単項式順序は整礎である．

証明

略．

先頭イデアル

以下，多項式環 R の単項式順序 $\preccurlyeq$ を固定する．

定義 2

多項式 $f \in R$ を

$$f = \sum_{\mu \in \mathcal{M}_R} c_\mu \cdot \mu$$

と表すとき，$c_\mu \neq 0$ となる $\mu \in \mathcal{M}_R$ 全体の集合を

$$\operatorname{supp}_R f := \{\mu \in \mathcal{M}_R \mid c_\mu \neq 0\}$$

と書き，f の **台** (*support*) と呼ぶ． 多項式の台は有限集合であることに注意する． f の台の，$\preccurlyeq$ に関する最大元 μ を $\preccurlyeq$ に関する f の **先頭単項式** (*initial monomial*) と呼び，$\operatorname{in}_\preccurlyeq f$ と書く． c_μ を $\preccurlyeq$ に関する f の **先頭項係数** (*initial coefficient*)，$c_\mu \cdot \mu$ を $\preccurlyeq$ に関する f の **先頭項** (*initial term*) と呼び，それぞれ $\operatorname{inic}_\preccurlyeq f$，$\operatorname{init}_\preccurlyeq f$ と書く．

定義 3

多項式環 R のイデアル I に対し，イデアル

$$\operatorname{in}_\preccurlyeq I := \langle \operatorname{in}_\preccurlyeq f \mid f \in I \rangle$$

を I の **先頭イデアル** (*initial ideal*) と呼ぶ．

注意

$f_1, ..., f_n \in I$ が I を生成するとき，$\operatorname{in}_\preccurlyeq f_1, ..., \operatorname{in}_\preccurlyeq f_n \in \operatorname{in}_\preccurlyeq I$ は $\operatorname{in}_\preccurlyeq I$ を生成するとは限らない．

定義 4

R のイデアル I の生成元 $f_1, \dots, f_n \in I$ が I の **Gröbner 基底** であるとは，先頭単項式 $\mathrm{in}_{\preccurlyeq} f_1, \dots, \mathrm{in}_{\preccurlyeq} f_n \in \mathrm{in}_{\preccurlyeq} I$ が先頭イデアル $\mathrm{in}_{\preccurlyeq} I$ を生成することをいう．