quasi-coherent algebra の relative spectrum

荒井勇人 *

2019.04.01

環に対する affine scheme を一般化した概念として，quasi-coherent algebra に対応する relative spectrum というものを紹介する．大雑把にいうと，scheme S 上のある種の環の sheaf $\mathcal{A}$ から，$\mathcal{A}$（に近い sheaf）を structure sheaf に持つような scheme Spec$\mathcal{A}$ を構成する．さらにこれがいくつかの普遍性を満たすことを示す．

1 導入

環 A に対し affine scheme Spec$A$ が定義され，A は structure sheaf という形で Spec$A$ 上の関数と思えるのであった（[1] など）．そして Spec$A$ は adjoint

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, \mathrm{Spec}A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

によって特徴付けられる（[2] Prop.3.4）．この記事では [3] および [4] に従い，scheme S 上の quasi-coherent $\mathcal{O}_S$-algebra という種類の sheaf $\mathcal{A}$ についてその S 上の relative spectrum Spec$\mathcal{A}$ を定義し，類似の adjoint を示すことで affine scheme の一般化になっていることをみる．また応用として，米田埋め込みと組み合わせて fiber product の計算に利用する．

環は可換で 1 をもち，環準同型は 1 を保つとする．

2 $\mathcal{O}_X$-module

環上の加群に対応する概念として，scheme X 上の $\mathcal{O}_X$-module を定義する．

Def. 1 ($\mathcal{O}_X$-module)**.** scheme $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して，$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ とは X 上の Abel 群の sheaf $\mathcal{F}$ と sheaf の射 $\mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ の組であって，各開集合 $U \subset X$ について $\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{F}(U)$ に $\mathcal{O}_X(U)$ 加群の構造を与えるようなもののことである．

* 東大数学科 B3．twitter:@alskdjfhg9.

また，$\mathcal{O}_X$-module の射とは sheaf の射 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ であって下図を可換にするもの，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X \times \mathcal{F} & \to & \mathcal{O}_X \times \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} \end{array}$$

つまり各開集合 $U \subset X$ について $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ 加群の射となるようなもののことである．

Thm. 2. $\mathcal{O}_X$-module の圏 $\mathcal{O}_X$-Mod は Abel 圏である．

Proof. X 上の Abel 群の sheaf のなす Abel 圏における Ker,Coker, 直和などが $\mathcal{O}_X$-Mod における Ker,Coker, 直和になっている．

□

$\mathcal{O}_X$-module の基本的な例として，$X = \mathrm{Spec}A$ のとき A 加群 M から作られる $\mathcal{O}_X$-module $\tilde{M}$ がある．

Def. 3 (associated module). A を環とし，$X = \mathrm{Spec}A$ とする．このとき A 加群 M に対し $\mathcal{O}_X$-module $\tilde{M}$ を，$f \in A$ に対して

$$D(f) \longmapsto M_f = M \otimes_A A_f$$

を満たすものとして定める（これは affine scheme の構成と同様の証明により well-defined となる）．これを M に付随する $\mathcal{O}_X$-module ($\mathcal{O}_X$-module associated to M) という[*1]．

また，A 加群の射 $\varphi : M \to N$ に対し，$\mathcal{O}_X$-module の射 $\tilde{\varphi} : \tilde{M} \to \tilde{N}$ を，局所化による射

$$\tilde{\varphi}(D(f)) = \varphi_f : M_f \to N_f$$

によって定める．これにより関手 $A\text{-}Mod \to \mathcal{O}_X\text{-}Mod$ が定まる．

Prop. 4. A を環，$X = \mathrm{Spec}A$ とする．A 加群 M と $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ について，自然同型

$$\mathrm{Hom}_A(M, \mathcal{F}(X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F}), \qquad \varphi \longmapsto \tilde{\varphi}$$

がある．特に関手 $M \mapsto \tilde{M}$ は大域切断の left adjoint である．

Proof. inverse が大域切断 $\psi \longmapsto \psi(X)$ で与えられることを示す．$\psi : \tilde{M} \to \mathcal{F}$ を任意に取っ

[*1] 特に $M = A$ のとき，$\tilde{A} = \mathcal{O}_X$ である．

たとき $f \in A$ に対して可換図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi(X)} & \mathcal{F}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_f & \xrightarrow[\psi(D(f))]{} & \mathcal{F}(D(f)) \end{array}$$

を考える．$\mathcal{F}(D(f))$ は A_f 加群だから，局所化の普遍性により $\psi(D(f))$ は $\psi(X)$ のみによって復元できる．よって大域切断が inverse である．自然性は明らか． □

Def. 5 (quasi-coherent module)**.** X を scheme とし, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$-module とする．全ての affine open subscheme $U \subset X$ に対して，$\mathcal{F}|_U$ がある $\mathcal{O}_X(U)$ 加群 M_U に付随する $\mathcal{O}_X|_U$-module であるとき，$\mathcal{F}$ は quasi-coherent であるという．以下 q-coh. と略す．

Rem. 6. 実は，q-coh. の定義において「全ての affine open subscheme に対して」とする代わりに「X のある affine open covering $(U_i)_i$ が存在して」としても同値である[*2]．特に affine scheme 上では q-coh. と associated module の概念が一致する．

Rem. 7. $\mathcal{F}$ が q-coh. $\mathcal{O}_X$-module で，$U = \mathrm{Spec}A \subset X$ が affine open subscheme なら，$f \in A$ に対し

$$\mathcal{F}(D(f)) = \mathcal{F}(U)_f$$

が成り立つ．

3 $\mathcal{O}_X$*-module* の順像，逆像

位相空間の間の連続写像によって，sheaf の順像，逆像という演算が定義され adjoint になっているのであった[*3]．ここでは $\mathcal{O}_X$-module の順像，逆像を構成する．

Def. 8. R を環，X,Y を位相空間とし，$f : X \longrightarrow Y$ を連続写像，$\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ をそれぞれ X,Y 上の R 加群の sheaf とする．このとき Y 上の R 加群の sheaf

$$V \longmapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V)), \qquad V \subset Y : open$$

を $f_*\mathcal{F}$ と書き，$\mathcal{F}$ の f による順像 (direct image) という．これにより自然に関手

$$f_* : Sh(X, R\text{-}Mod) \longrightarrow Sh(Y, R\text{-}Mod)$$

*2 [3], §6.8, Thm.10.

*3 [2], §2.8 など．

が定まる．

また，f_* の left adjoint を

$$f^{-1} : Sh(Y, R\text{-}Mod) \longrightarrow Sh(X, R\text{-}Mod)$$

と書き，$f^{-1}\mathcal{G}$ を $\mathcal{G}$ の f による逆像 (inverse image) という．

Def. 9 ($\mathcal{O}_X$-module のテンソル積)**.** X を scheme とし，$\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ を $\mathcal{O}_X$-module とする．presheaf

$$U \longmapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U), \qquad U \subset X : open$$

の sheafification を $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ と書き，$\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ の $\mathcal{O}_X$ 上のテンソル積という．これは自然に $\mathcal{O}_X$-module になる．

詳細は省略するが，このテンソル積は普通のテンソル積に関係した普遍性（係数拡大など）に似た形の普遍性を満たすことがわかる．これを用いて $\mathcal{O}_X$-module の逆像を構成する．

Prop. 10. X,Y を scheme とし，$f : X \longrightarrow Y$ を scheme の射，$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ をそれぞれ $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$-module とする．$f^{-1}\mathcal{G}$ は自然に $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-module になり，また f による $f^{-1}\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X$ により $\mathcal{O}_X$ を $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-module とみて

$$f^*\mathcal{G} = f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

とおく．このとき自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

がある．

Proof. Abel 群の sheaf としての adjoint による自然同型

$$\mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

は，自然同型

$$\mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

を誘導する．また，テンソル積による係数拡大の普遍性と sheafification の普遍性を使うと，自然同型

$$\mathrm{Hom}_{f^{-1}\mathcal{O}_Y}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X, \mathcal{F})$$

がある．これらよりわかる． □

Def. 11 ($\mathcal{O}_X$-module の順像，逆像)**.** X,Y を scheme とし，$f : X \longrightarrow Y$ を scheme の射，$\mathcal{F}$,$\mathcal{G}$ をそれぞれ $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y$-module とする．$\mathcal{F}$ の f による順像 (direct image) とは，Abel 群の sheaf としての順像 $f_*\mathcal{F}$ のことである．また，$\mathcal{G}$ の f による逆像 (inverse image) とは Prop.10 で構成した $f^*\mathcal{G}$ のことと定める．

次の命題より，affine な場合順像，逆像は係数制限，係数拡大によってかけることがわかる．特に q-coh. が逆像で保たれることに注意する．

Prop. 12. $X = \mathrm{Spec}A, Y = \mathrm{Spec}B$ を affine scheme，$f : X \to Y$ を $\sigma : B \to A$ に対応する射とする．また，F を A 加群，G を B 加群とする．このとき

$$f_*(\tilde{F}) = \widetilde{F_{/B}}, \qquad f^*(\tilde{G}) = \widetilde{G \otimes_B A}$$

である．ここで $F_{/B}$ は $\sigma : B \to A$ による係数制限である．

Proof. $g \in B$ とする．

$$f_*(\tilde{F})(D(g)) = \tilde{F}(D(\sigma(g))) = F \otimes_A A_{\sigma(g)}$$

だが，$A_{\sigma(g)} = A \otimes_B B_g$ だから

$$F \otimes_A A_{\sigma(g)} = F \otimes_A (A \otimes_B B_g) = F_{/B} \otimes_B B_g$$

である．よって $f_*(\tilde{F}) = \widetilde{F_{/B}}$ である．

また任意の $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$ について，$F = \mathcal{F}(X)$ とおくと

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\tilde{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\tilde{G}, f_*\mathcal{F})$$

で，係数拡大および sheaf の大域切断に伴う adjoint より

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\tilde{G}, f_*\mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_B(G, F_{/B}) \cong \mathrm{Hom}_A(G \otimes_B A, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{G \otimes_B A}, \mathcal{F})$$

が成り立つ．よって米田の補題より $f^*(\tilde{G}) = \widetilde{G \otimes_B A}$ である． □

Cor. 13. $f : X \to Y$ を scheme の射とし，$\mathcal{G}$ を q-coh. $\mathcal{O}_Y$-module とする．このとき $f^*\mathcal{G}$ は q-coh. $\mathcal{O}_X$-module である．

Proof. Y の affine open subscheme V に対し，$f(U) \subset V$ となるような X の affine open subscheme U をとる．このとき f^* の構成より

$$(f^*(\mathcal{G}))|_U = f^*(\mathcal{G}|_V)$$

である．そしてこのような U,V を全て考えると U たちは X を覆う．よって Prop.12 と Rem.6 より $f^*(\mathcal{G})$ は q-coh. である．

□

4 $\mathcal{O}_X$-algebras

環 R に対する R 代数に対応する概念として，$\mathcal{O}_X$-algebra を定義する．

Def. 14 ($\mathcal{O}_X$-algebra)**.** scheme $(X, \mathcal{O}_X)$ に対して，$\mathcal{O}_X$-algebra $\mathcal{A}$ とは，X 上の環の sheaf $\mathcal{A}$ と sheaf の射 $\mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$ の組のことである．

また，$\mathcal{O}_X$-algebra の射とは，sheaf の射 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ であって下図を可換にするもののこと，

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{O}_X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathcal{A} \arrow[rr] & & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

つまり各開集合 $U \subset X$ について $\mathcal{A}(U) \to \mathcal{B}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ 代数の射となるようなもののことである．

$\mathcal{O}_X$-algebra に対しても q-coh. が定義される．

Def. 15 (quasi-coherent algebra)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を scheme とする．quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-algebra とは，$\mathcal{O}_X$-module として q-coh. な $\mathcal{O}_X$-algebra のことである．

Ex. 16 (q-coh. polynomial algebra)**.** S を scheme とする．このとき環の presheaf

$$U \longmapsto \mathcal{O}_S(U)[t_1, \ldots, t_n]$$

の sheafification を $\mathcal{O}_S[t_1, \ldots, t_n]$ と書く．これは q-coh. $\mathcal{O}_S$-algebra である．実際 $U \subset S$ を affine open とすると，U に制限すれば presheaf の時点で $\widetilde{\mathcal{O}_S(U)}$ と同型である．

ここまでの準備のもとで，q-coh. $\mathcal{O}_S$-algebra $\mathcal{A}$ の relative spectrum Spec$\mathcal{A}$ を構成する．モチベーションは，「$\mathcal{A}$ に近い」structure sheaf をもつ自然な S-scheme を定義したいというものである．そこで S の affine open subscheme U について Spec$\mathcal{A}(U)$ を考え，sheaf の制限射に対応する affine scheme の射を使って Spec$\mathcal{A}(U)$ たちを貼り合わせる，といった感じのことをする．

Thm. 17 (relative spectrum)**.** S を scheme，$(U_i)_i$ を S の affine open covering，$\mathcal{A}$ を q-coh. $\mathcal{O}_S$-algebra とする．

$$\pi_i : X_i = \mathrm{Spec}\mathcal{A}(U_i) \longrightarrow U_i$$

を $\sigma_i : \mathcal{O}_S(U_i) \to \mathcal{A}(U_i)$ に対応する affine scheme の射とする．このとき scheme の同型

$$\pi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\sim} \pi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

があり，これによって X_i と π_i を貼り合わせて

$$\pi : X \longrightarrow S$$

ができる．この X を $\mathrm{Spec}\mathcal{A}$ と書き，$\mathcal{A}$ の S 上の relative spectrum という．

Proof. まず，各 $U_{ij\lambda}$ が U_i, U_j 両方の中で basic open($D(g)$ 型の開集合) であり

$$U_i \cap U_j = \bigcup_{\lambda} U_{ij\lambda}$$

となるような S の開集合族 $(U_{ij\lambda})$ が取れる．[*4] $g \in \mathcal{O}_S(U_i)$ によって $U_{ij\lambda} = D(g) \subset U_i$ とかけているとする．$\mathcal{A}$ が q-coh. だから $\mathcal{A}(U_i)_g = \mathcal{A}(U_{ij\lambda})$ が成り立つ．よって

$$\pi_i^{-1}(U_{ij\lambda}) = D(\sigma_i(g)) \cong \mathrm{Spec}\mathcal{A}(U_i)_g = \mathrm{Spec}\mathcal{A}(U_{ij\lambda})$$

となり，同型

$$\pi_i^{-1}(U_{ij\lambda}) \xrightarrow{\sim} \pi_j^{-1}(U_{ij\lambda})$$

がある．$U_{ij\lambda'} = D(g')$ とおくと $U_{ij\lambda} \cap U_{ij\lambda'} = D(gg')$ だから，この射は同型

$$\pi_i^{-1}(U_{ij\lambda} \cap U_{ij\lambda'}) \xrightarrow{\sim} \pi_j^{-1}(U_{ij\lambda} \cap U_{ij\lambda'})$$

を誘導する．よって scheme の射の貼り合わせにより同型

$$\varphi_{ji} : \pi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\sim} \pi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$$

ができる．作り方より, この同型は cocycle condition $\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$ を満たすから，X_i たちは glueing lemma（[1] 演習問題 2.12，[2] Prop.3.10) により貼り合って scheme X を作る．

さらに

$$\begin{tikzcd}
\pi_i^{-1}(U_{ij\lambda}) \arrow[r] \arrow[dr] & \pi_j^{-1}(U_{ij\lambda}) \arrow[d] \\
 & U_{ij\lambda}
\end{tikzcd}$$

の可換性より

$$\begin{tikzcd}
\pi_i^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_i"'] & & \pi_j^{-1}(U_i \cap U_j) \arrow[dl, "\pi_j"] \\
 & U_i \cap U_j &
\end{tikzcd}$$

の可換性がわかる．よって glueing の普遍性により π_i は貼り合って

$$\pi : X \longrightarrow S$$

ができる． □

[*4] [2], Lem.3.3 より．

Cor. 18. Thm.17 の状況で，glueing による射

$$\mathrm{Spec}\mathcal{A}(U_i) = X_i \longrightarrow X = \mathrm{Spec}\mathcal{A}$$

は S-scheme としての同型

$$\mathrm{Spec}\mathcal{A}(U_i) \cong \pi^{-1}(U_i)$$

を誘導する．

Proof. glueing lemma の証明における構成より従う．

□

Thm. 19. S-scheme $q : Y \to S$ と q-coh. $\mathcal{O}_S$-algebra $\mathcal{A}$ に対し, 自然同型

$$\mathrm{Hom}_S(Y, \mathrm{Spec}\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}, q_*\mathcal{O}_Y)$$

がある．

Proof. まず，$\mathcal{O}_S$-algebra の同型 $\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}}$ を作る．Thm.17 の証明より同型

$$\mathcal{A}|_{U_i} \cong \pi_{i,*}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}(U_i)}$$

が，Cor.18 より同型

$$\pi_{i,*}\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}(U_i)} \cong \pi_*(\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}}|_{\pi^{-1}(U_i)}) = (\pi_*\mathcal{O}_X)|_{U_i}$$

がある．よって同型 $\mathcal{A}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} (\pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}})|_{U_i}$ があり，これらは貼り合わさって $\mathcal{O}_S$-algebra の同型

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}}$$

を定める[*5]．

次に $f \in \mathrm{Hom}_S(Y, \mathrm{Spec}\mathcal{A})$ とする．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & \mathrm{Spec}\mathcal{A} \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

図の可換性より，$\mathcal{O}_S$-algebra の射 $\pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}} \to q_*\mathcal{O}_Y$ があるから，$\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}}\mathcal{A}$ を合成して $\mathcal{O}_S$-algebra の射

$$\tilde{f} : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}} \longrightarrow q_*\mathcal{O}_Y$$

[*5] すなわち，Spec$\mathcal{A}$ の structure sheaf はほとんど $\mathcal{A}$ そのものである．

を得る．これにより写像

$$\mathrm{Hom}_S(Y, \mathrm{Spec}\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}, q_*\mathcal{O}_Y), \qquad f \longmapsto \tilde{f}$$

ができる．これが自然同型を与えることを示す．inverse を作れば良い．$q : Y \to S$ を S-scheme とし，$\tilde{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{A}, q_*\mathcal{O}_Y)$ とする．Thm.17 における U_i に対し，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(U_i) \arrow[rr] & & \mathcal{O}_Y(q^{-1}(U_i)) \\ & \mathcal{O}_S(U_i) \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

が可換だから，これに対応する図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\mathcal{A}(U_i) \arrow[dr, "\pi_i"'] & & q^{-1}(U_i) \arrow[ll, "f_i"'] \arrow[dl, "q"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$

により S-scheme の射 f_i ができる．$\mathcal{A}$ が q-coh. であることを使うとこれらの f_i は貼り合って S-scheme の射 $f : Y \to \mathrm{Spec}\mathcal{A}$ を定めることがわかる．これが inverse を与えることが計算により確かめられる．自然性は明らか． $\square$

Rem. 20. Thm.19 と米田の補題により，$\mathrm{Spec}\mathcal{A}$ は S の affine open covering $(U_i)_i$ の取り方によらず定まる．特に $S = \mathrm{SpecR}$ が affine scheme，$R \to A$ が R 代数で $\mathcal{A} = \tilde{A}$ の時

$$\mathrm{Spec}\mathcal{A} = \mathrm{Spec}A$$

である．

Ex. 21 (affine n-space)**.** S を scheme とする．q-coh. $\mathcal{O}_S$-algebra $\mathcal{O}_S[t_1, \ldots, t_n]$ に対し

$$\mathbb{A}^n_S = \mathrm{Spec}\mathcal{O}_S[t_1, \ldots, t_n]$$

と定め，affine n-space over S という．

5 *relative spectrum* と表現可能関手

この章では，relative spectrum をある関手の representing object として特徴付ける（[4] も参照）．またそれを利用した fiber product の計算の一例を挙げる．

Def. 22. scheme S と q-coh. $\mathcal{O}_S$-algebra $\mathcal{A}$ に対し関手 $F = F_{(S,\mathcal{A})} : \mathbf{Sch}^{op} \to \mathbf{Set}$ を，対象については

$$Y \longmapsto F(Y) = \{(q, \varphi) | q : Y \to S \text{ は scheme の射，} \varphi : \mathcal{A} \to q_*\mathcal{O}_Y \text{ は } \mathcal{O}_S\text{-algebra の射 }\}$$

によって，射については自然な対応によって定める．

Thm. 23. Spec$\mathcal{A}$ は F の representing object である．すなわち関手の同型

$$F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, \mathrm{Spec}\mathcal{A})$$

がある．

Proof. Y を scheme とする．$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(Y, \mathrm{Spec}\mathcal{A})$ とし，$f^\flat : \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}} \to f_*\mathcal{O}_Y$ を f による sheaf の射とする．このとき

$$f \longmapsto (q : Y \xrightarrow{f} \mathrm{Spec}\mathcal{A} \xrightarrow{\pi} S, \quad \varphi : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \pi_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\mathcal{A}} \xrightarrow{\pi_* f^\flat} q_*\mathcal{O}_Y)$$

により写像 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(Y, \mathrm{Spec}\mathcal{A}) \to F(Y)$ を定める．また，$(q.\varphi) \in F(Y)$ を Thm.19 によって φ に対応する射 $f : Y \to \mathrm{Spec}\mathcal{A}$ に送ることにより写像 $F(Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(Y, \mathrm{Spec}\mathcal{A})$ を定める．これらが互いに inverse であることが Thm.19 によりわかる．自然性も簡単に確かめられる． $\square$

Prop. 24. S, S' を scheme，$g : S' \to S$ を scheme の射とし，$\mathcal{A}$ を q-coh. $\mathcal{O}_S$-algebra，$\mathcal{A}' = g^*\mathcal{A}$ とする（これは Cor.13 により q-coh. $\mathcal{O}_{S'}$-algebra である）．また $F' : \mathbf{Sch}^{op} \to \mathbf{Set}$ を (S', A') に対応する Def.22 の関手とする．このとき図式

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\sigma_{S'}"'] & F \arrow[d, "\sigma_S"] \\ h_{S'} \arrow[r, "g\circ -"'] & h_S \end{tikzcd}$$

は pullback (fiber product) である．

ただし $h_S = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, S)$ は S の米田埋め込みによる像，θ は

$$\theta(Y) : F'(Y) \longrightarrow F(Y), \qquad (q', \varphi') \longmapsto (g \circ q', \varphi')$$

により定まる自然変換，σ_S は第一成分への射影

$$\sigma_S(Y) : F(Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(Y, S)$$

により定まる自然変換である．

Proof. **Set** は完備だから，全ての scheme Y に対して図式

$$\begin{tikzcd} F'(Y) \arrow[r, "\theta(Y)"] \arrow[d, "\sigma_{S'}(Y)"'] & F(Y) \arrow[d, "\sigma_S(Y)"] \\ h_{S'}(Y) \arrow[r, "g\circ -"'] & h_S(Y) \end{tikzcd}$$

が pullback であることを示せば良い.*6

これは **Set** における pullback の表示より

$$F(Y) \times_{h_S(Y)} h_{S'}(Y) = \{((q,\varphi),q') \in F(Y) \times h_{S'}(Y) | q = g \circ q'\} \cong F'(Y)$$

であることからわかる. □

Cor. 25. S, S' を scheme, $g : S' \to S$ を scheme の射とし，$\mathcal{A}$ を q-coh. $\mathcal{O}_S$-algebra, $\mathcal{A}' = g^*\mathcal{A}$ とする. このとき

$$\mathrm{Spec}\mathcal{A}' = \mathrm{Spec}\mathcal{A} \times_S S'$$

である.

Proof. Thm.23 と Prop.24 および米田埋め込みの性質より従う. □

Cor. 26. n を正整数，S, S' を scheme, $g : S' \to S$ を scheme の射とする．このとき

$$\mathbb{A}^n_{S'} = \mathbb{A}^n_S \times_S S'$$

である．特に

$$\mathbb{A}^n_S = \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{Z}} S$$

である*7.

Proof. $g^*\mathcal{O}_S[t_1, \ldots, t_n] = \mathcal{O}_{S'}[t_1, \ldots, t_n]$ を示せば良い．t によって n 個の変数 $(t_1, \ldots, t_n)$ をまとめて略記する.

$U = \mathrm{Spec}B \subset S$, $U' = \mathrm{Spec}A \subset g^{-1}(U) \subset S'$ をそれぞれ affine open とし，$g : U' \to U$ に対応する環の射を $\sigma : B \to A$ とする．このとき q-coh. と Prop.12 より

$$(g^*\mathcal{O}_S[t])|_{U'} = g^*(\mathcal{O}_S[t]|_U) = B\widetilde{[t] \otimes_B} A \cong \widetilde{A[t]} = \mathcal{O}_{S'}[t]|_{U'}$$

である．この同型を貼り合わせれば良い. □

---

*6 [5], 定理 10 の双対をとる．例 14 も参照.

*7 実はこの命題について調べていたところ [4] の証明を発見し，圏論的な証明が面白かったのでこの記事を書いた.

6 おわりに

relative spectrum の構成の準備に多くのページを割いてしまいましたが，一番書きたかった米田埋め込みによる fiber product の計算をしっかり書くことができて満足です．そもそもの元ネタは [4] の The Stacks project 26.4 なのですが，そこでの証明は関手の表現可能性の判定についての大掛かりな準備を元にしたものだったので，この記事では Thm.19 を軸にした証明をつけています．他にも関連して書きたい話題がいくつかあったのですが，ここの証明の修正に手間取ってしまい時間がないので別の機会に記事にしようと思います．

質問等は twitter:@alskdjfhg9 に連絡お願いします．

参考文献

[1] R. ハーツホーン，『代数幾何学 1,2,3』，高橋ほか訳，丸善出版，2012.

[2] Gortz,Wedhorn, *Algebraic Geometry Part I: Schemes With Examples and Exercises*, Vieweg+Teubner Verlag, 2010.

[3] Siegfried Bosch, *Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer, 2013.

[4] https://stacks.math.columbia.edu/tag/01LQ

[5] http://alg-d.com/math/kan_extension/limit.pdf