elliptic surface $\pi\colon S \to C$ の定義などは [Ueh15] に従う．

Thm.0.1 $\pi\colon S \to C$ を elliptic surface とし，$G \subset S$ を (-2)-curve，$a \in \mathbb{Z}$ を整数とする．このとき S の spherical object $\mathcal{O}_G(a)$ に付随する twist functor の核

$$P = \mathrm{Cone}(\mathcal{O}_G(a) \boxtimes \mathcal{O}_G(a)^\vee \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_\Delta)$$

は $S \times_C S$ 上の層である．

Lem.0.1 $\pi\colon S \to C$ を elliptic surface とする．この時 π は flat である．

Proof $\pi(x) = y$ とおくと，局所環の射 $\mathcal{O}_{C,y} \to \mathcal{O}_{S,x}$ が誘導される．$\mathcal{O}_{C,y}$ は PID で，$\mathcal{O}_{S,x}$ は正則局所環だから特に整域である．よって $\mathcal{O}_{S,x}$ は PID 上の torsion-free 加群だから flat である． $\square$

Lem.0.2 図式

$$\begin{tikzcd} S \times_C S \arrow[r] \arrow[d] & S \times S \arrow[d, "\pi\times\pi"] \\ C \arrow[r, "\Delta_C"] & C \times C \end{tikzcd}$$

はカルテシアンである．

Proof いわゆる magic diagram. $\square$

Lem.0.3 $X = S \times_C S, Y = S \times S$ とし，$i\colon X \to Y$ を inclusion とする．このとき Y 上の line bundle L と完全列

$$0 \to L \to \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X \to 0$$

がある．ここで $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ は自然な全射である．

Proof C は非特異だから, $\Delta_C\colon C \to C\times C$ により C は $C\times C$ の中で local complete intersection であり，完全列

$$0 \to \mathcal{O}_{C\times C}(-\Delta) \to \mathcal{O}_{C\times C} \to \mathcal{O}_\Delta \to 0$$

がある．さらに Lem.0.1 より $\pi\times\pi$ は flat だから，この完全列を $\pi\times\pi$ で pullback して Lem.0.2 の図式と組み合わせると求める完全列を得る． $\square$

Lem.0.4 Lem.0.3 の状況で $F \in \mathrm{Coh}(X)$ とすると

$$Li^*(i_*F) \cong F[0] \oplus (F \otimes L_{|X})[1]$$

である．さらに随伴 $Li^* \dashv i_*$ に付随する counit 射 $\epsilon\colon Li^*(i_*F) \to F$ は，この同型により自然な projection $F[0] \oplus (F \otimes L_{|X})[1] \to F$ に対応する（はず，まだ確かめてない！）．

Proof $i_*\colon D^*(X)\to D^*(Y)$ は exact だから $i_*Li^*\cong L(i_*i^*)$ である．ここで $i_*i^*\cong -\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X$ だから，$L(i_*i^*)\cong -\otimes^L_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_X$ となる．よって Lem.0.3 の完全列により $\mathcal{O}_X$ を分解することで

$$L(i_*i^*)(i_*F)\cong(\cdots\to 0\to i_*F\otimes L\xrightarrow{d^{-1}} i_*F\to 0\to\cdots)$$

となる（i_*F が 0 次の complex）．このとき，d^{-1} が 0 射であることをしめす．問題は local なので X,Y は affine としてよい．$Y=\operatorname{Spec}A, X=\operatorname{Spec}A/I$ とし，F は A/I 加群 M に付随する層だとする．Lem.0.3 の完全列は

$$0\to A\to A\to A/I\to 0$$

となり，左の射は I の生成元 f による f 倍写像である．すると d^{-1} は f 倍写像 $M\to M$ となるが，M は A/I 加群なのでこれは 0 射に等しい．

ここまでで

$$i_*Li^*(i_*F)\cong i_*F[0]\oplus i_*(F\otimes L)[1]$$

が示せた．よって後は「i_* を施して層のシフトの（bounded な）直和になる complex は，元々層のシフトの直和である」ことを証明すれはよい．それは complex の長さによる帰納法でわかる．

また counit 射 $\epsilon\colon Li^*(i_*F)\to F$ は □

Lem.0.5 $G\subset S$ が (-2)-curve で $a\in\mathbb{Z}$ のとき，$\mathcal{O}_G(a)\boxtimes\mathcal{O}_G(a)^\vee\in D^b(S\times S)$ は $G\times G$ 上の層の -1 シフト（の pushforward）である．

Proof S 上の divisor D であって $G.D=a$ であるものを 1 つとる．($G.G=-2\neq 0$ と Poincaré duality により必ずとれる．）このとき $\mathcal{O}_S(D)_{|G}\cong\mathcal{O}_G(a)$ である．完全列

$$0\to\mathcal{O}_S(-G)\to\mathcal{O}_S\to\mathcal{O}_G\to 0$$

より，$D^b(S)$ において

$$\mathcal{O}_G(a)\cong(\cdots\to 0\to\mathcal{O}_S(D-G)\to\mathcal{O}_S(D)\to 0\to\cdots)$$

となる（右辺は 0 次に $\mathcal{O}_S(D)$ がある complex）．よって

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_G(a)^\vee&\cong(\cdots\to 0\to\mathcal{O}_S(-D)\to\mathcal{O}_S(G-D)\to 0\to\cdots)\\&\cong\mathcal{O}_S(G-D)_{|G}[-1]\end{aligned}$$

となる．すると

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}_G(a)\boxtimes\mathcal{O}_G(a)^\vee\\&\cong p_1^*\mathcal{O}_S(D)_{|G}\otimes^L p_2^*\mathcal{O}_S(G-D)_{|G}[-1]\\&\cong\mathcal{O}_{S\times S}(D\times S)_{|G\times S}\otimes^L\mathcal{O}_{S\times S}(S\times G-S\times D)_{|S\times G}[-1]\end{aligned}$$

となる．よって derived tensor の higher cohomology が消えていることを示せばこれは

$$\begin{aligned}&\mathcal{O}_{S\times S}(D\times S)_{|G\times S}\otimes\mathcal{O}_{S\times S}(S\times G-S\times D)_{|S\times G}[-1]\\&=\mathcal{O}_{S\times S}(D\times S+S\times G-S\times D)_{|G\times G}[-1]\end{aligned}$$

となり命題が示される．問題は local なので $\mathcal{O}_{S\times S}(D\times S)_{|G\times S}$ と $\mathcal{O}_{S\times S}(S\times G-S\times D)_{|S\times G}$ はそれぞれ $\mathcal{O}_{G\times S}$ と $\mathcal{O}_{S\times G}$ だと思ってよく，すると $G\times S$ と $S\times G$ が $S\times S$ の中で transversal intersection なので全ての $q>0$ について

$$\mathcal{T}or_q^{\mathcal{O}_{S\times S}}(\mathcal{O}_{G\times S},\mathcal{O}_{S\times G})=0$$

となり derived tensor の higher cohomology が消えていることがわかる． □

<u>Thm.0.2</u> $\pi\colon S\to C$ を elliptic surface とし，$G\subset S$ を (-2)-curve，$a\in\mathbb{Z}$ を整数とする．このとき S の spherical object $\mathcal{O}_G(a)$ に付随する twist functor の核

$$P=\mathrm{Cone}(\mathcal{O}_G(a)\boxtimes\mathcal{O}_G(a)^\vee\xrightarrow{ev}\mathcal{O}_\Delta)$$

は $S\times_C S$ 上の complex（より強く，層）の pushforward である．

<u>Proof</u> Lem.0.5 より，$G\times G$ 上の層 F を用いて $\mathcal{O}_G(a)\boxtimes\mathcal{O}_G(a)^\vee\cong F[-1]$ と表せる．よって $D^b(S\times S)$ における distinguished triangle

$$F[-1]\xrightarrow{ev}\mathcal{O}_\Delta\to P\xrightarrow{+1}F$$

がある．ここでもし $ev\in\mathrm{Hom}_{D^b(S\times S)}(F[-1],\mathcal{O}_\Delta)$ が $\mathrm{Hom}_{D^b(S\times_C S)}(F[-1],\mathcal{O}_\Delta)$ の元の像だったとすると，$D^b(S\times_C S)$ での Cone

$$P'=\mathrm{Cone}(\mathcal{O}_G(a)\boxtimes\mathcal{O}_G(a)^\vee\xrightarrow{ev}\mathcal{O}_\Delta)$$

を $D^b(S\times S)$ に push したものは P と同型になる．よって inclusion $S\times_C S\to S\times S$ による（derived）pushforward が誘導する射

$$\mathrm{Hom}_{D^b(S\times_C S)}(F[-1],\mathcal{O}_\Delta)\to\mathrm{Hom}_{D^b(S\times S)}(F[-1],\mathcal{O}_\Delta)$$

が全射であることを証明すれば定理が示される．

以下 $X=S\times_C S$，$Y=S\times S$ とおき，$i\colon X\to Y$ を自然な inclusion とする．

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{D^b(S\times S)}(F[-1],\mathcal{O}_\Delta)\\&=\mathrm{Ext}^1_Y(i_*F,i_*\mathcal{O}_\Delta)\\&\cong\mathrm{Ext}^1_X(Li^*(i_*F),\mathcal{O}_\Delta)\end{aligned}$$

となるが，Lem.0.4 よりこれは $\mathrm{Hom}_X(F\otimes L_{|X},\mathcal{O}_\Delta)\oplus\mathrm{Ext}^1_X(F,\mathcal{O}_\Delta)$ と同型である．さらに pushforward が誘導する射

$$\mathrm{Ext}^1_X(F,\mathcal{O}_\Delta)\to\mathrm{Ext}^1_Y(i_*F,i_*\mathcal{O}_\Delta)$$

は随伴同型 $\mathrm{Ext}^1_Y(i_*F, i_*\mathcal{O}_\Delta) \cong \mathrm{Ext}^1_X(Li^*(i_*F), \mathcal{O}_\Delta)$ により counit 射 $\epsilon\colon Li^*(i_*F) \to F$ の誘導する射

$$\mathrm{Ext}^1_X(F, \mathcal{O}_\Delta) \to \mathrm{Ext}^1_X(Li^*(i_*F), \mathcal{O}_\Delta)$$

に対応するので，Lem.0.4 の結果と合わせると $\mathrm{Hom}_X(F \otimes L_{|X}, \mathcal{O}_\Delta) = 0$ を証明すればよいことがわかる．

以下それを示す．随伴により

$$\mathrm{Hom}_X(F \otimes L_{|X}, \mathcal{O}_\Delta) \cong \mathrm{Hom}_\Delta((F \otimes L_{|X})_{|\Delta}, \mathcal{O}_\Delta)$$

だが，F は $G \times G \subset X$ 上の層だったため，$(F \otimes L_{|X})_{|\Delta}$ は $(G \times G) \cap \Delta = \Delta_G$ 上の層 F' である．よって

$$\mathrm{Hom}_\Delta((F \otimes L_{|X})_{|\Delta}, \mathcal{O}_\Delta) = \mathrm{Hom}_\Delta(F', \mathcal{O}_\Delta)$$

となり，$\Delta_G \subset \Delta$ は $G \subset S$ とみなせるため，結局 G 上の層 F' について $\mathrm{Hom}_S(F', \mathcal{O}_S) = 0$ を証明すればよい．これは Serre duality より明らか． $\square$

参考文献

[Ueh15] H. Uehara, *Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with non-zero Kodaira dimension*,arXiv e-prints (2021), arXiv:1501.06657v2.