特にことわらない限り，X を小平 III 型曲線（=2 つの $\mathbb{P}^1$ が 1 点で接している特異曲線）とする．

<u>Lem.0.1</u> $p, q \in X$ を異なる既約成分上にある非特異閉点とする．p, q を動かさない $f \in \mathrm{Aut}\, X$ は $k^\times$ によりパラメトライズされる．

<u>Proof</u> X を $\{y = x^2\} \cup \{y = 0\} \subset \mathbb{A}^2$ の射影化 $\{yz = x^2\} \cup \{y = 0\} \subset \{[x : y : z]\} = \mathbb{P}^2$ とみる．これにより $p = [0 : 1 : 0] \in \{yz = x^2\}, q = [1 : 0 : 0] \in \{y = 0\}$ だとする．$s \in X$ を X の（唯一の）特異点 $[0 : 0 : 1]$ とし，$n \colon L_1 \sqcup L_2 \to X$ を X の正規化とする．$L_1, L_2 \cong \mathbb{P}^1$ の座標を

$$n|_{L_1}(0) = s, n|_{L_1}(\infty) = x, n|_{L_2}(0) = s, n|_{L_2}(\infty) = y,$$

となるようにとる．このとき f が誘導する $L_1 \sqcup L_2$ の自己同型 $\tilde{f}$ は，上の座標により L_1, L_2 上で 0 でない定数倍写像により与えられる．（f は X の既約成分を保つので各 L_i の自己同型を誘導し，座標の取り方より 0 と ∞ を固定する $\mathbb{P}^1$ の自己同型になるから．）$\tilde{f}|_{L_1}, \tilde{f}|_{L_2}$ をそれぞれ a 倍，b 倍だとする．

以上の座標の設定により，s のアファイン近傍 $U = X - \{p, q\}$ に n を制限したものは単射な k 代数準同型

$$k[x, y]/y(y - x^2) \to k[x_1] \times k[x_2]$$
$$x \mapsto (x_1, x_2)$$
$$y \mapsto (x_1^2, 0)$$

の Spec をとったものになる（$k[x_1], k[x_2]$ がそれぞれ L_1, L_2 に対応）．f が p, q を保つという条件より，f は U の自己同型，すなわち $k[x, y]/y(y - x^2)$ の自己同型 φ を誘導する．また $\tilde{f}|_{L_1}, \tilde{f}|_{L_2}$ が $\mathbb{P}^1$ の a 倍，b 倍写像だったので，結局以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
k[x_1] \times k[x_2] \arrow[r, "(x_1 \mapsto ax_1, x_2 \mapsto bx_2)"] & k[x_1] \times k[x_2] \\
k[x, y]/y(y - x^2) \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"] & k[x, y]/y(y - x^2) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

このとき $a = b$ で $\varphi(x) = ax, \varphi(y) = a^2 y$ であることを示す．まず $y \in k[x, y]/y(y - x^2)$ について考えると，

$$\begin{tikzcd}
(x_1^2, 0) \arrow[r, mapsto] & (a^2 x_1^2, 0) \\
y \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \varphi(y) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

となり，縦の射は単射だったから $\varphi(y) = a^2 y$ となる．次に $\varphi(x) \in k[x, y]/y(y - x^2)$ の $k[x, y]$ へのリフトの 1 つを $g(x, y)$ とすると，

$$\begin{tikzcd}
(x_1, x_2) \arrow[r, mapsto] & (ax_1, bx_2) \\
x \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & g(x, y) \quad \bmod y(y - x^2) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

より，

$$g(x_1, x_1^2) = ax_1, g(x_2, 0) = bx_2$$

が成り立つ．2 つ目の式より多項式 $h(x, y)$ を使って

$$g(x.y) = bx + yh(x, y)$$

とかけ，1 つ目の式より

$$bx_1 + x_1^2 h(x_1, x_1^2) = ax_1$$

となる．係数比較により $a = b$ となり，

$$\begin{tikzcd} (x_1, x_2) \arrow[r, mapsto] & (ax_1, ax_2) \\ x \arrow[u, hook, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \varphi(x) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

となるから，縦の射の単射性より $\varphi(x) = ax$ である． □

Lem.0.2 $p, q \in X$ を異なる既約成分上にある非特異閉点とし，p と q を入れ替えるような X の自己同型で，involution であるものの 1 つを σ とする．（このような σ は 2 つある．）$r \in X$ を非特異閉点とし，$s = \sigma(r) \in X$ と定めると，

$$\mathcal{O}(p + q) \cong \mathcal{O}(r + s)$$

である．

Proof p, q で 1 位の極をもち r, s で 1 位の零点を持つような X 上の有理型関数を構成すればよい．Lem.0.1 と同じ記法・座標で考える．σ としてあり得るのは（Lem.0.1 の記法のもとで）$x_1 \mapsto x_2, x_2 \mapsto x_1$ または $x_1 \mapsto -x_2, x_2 \mapsto -x_1$ の 2 通りである．

r は（Lem.0.1 の座標で）$[1 : 1 : 1] \in \{yz = x^2\}$ だとしてよい．また s の座標が $[a : 0 : 1]$（$a \in k^\times$）だとする．このとき p, r は n により $L_1 \cong \mathbb{P}^1$ 上の点 $\infty, 1$ に対応し，q, s は n により $L_2 \cong \mathbb{P}^1$ 上の点 ∞, a に対応する．

そこで，L_1 上の ∞ に 1 位の極，1 に 1 位の零点をもつ有理型関数 f と，L_2 上の ∞ に 1 位の極，a に 1 位の零点をもつ有理型関数 g をうまく取り，それらを貼り合わせて求める X 上の有理型関数が作れることを示せばよいが，$f(x_1) = x_1 - 1, g(x_2) = x2 - 1$ とおけばこれらは $\mathrm{Spec}\, k[x, y]/y(y - x^2)$ 上の正則関数 $h(x, y) = x - 1$ の引き戻しだから，X 上で貼り合う． □

Lem.0.3 (I 型でも正しい．)

$x \in X$ を非特異閉点とする．$D^b(X)$ の spherical object $\mathcal{O}_x, \mathcal{O}$ に伴う twist functor をそれぞれ $T_x, T_{\mathcal{O}}$ とすると，$D^b(X)$ において次が成り立つ．

(1) $T_x T_{\mathcal{O}} T_x \cong T_{\mathcal{O}} T_x T_{\mathcal{O}}$ (Braid relation)

(2) $T_x \cong \mathcal{O}(x) \otimes -$

(3) $T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}(-x)[1]$
(4) $T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x)) \cong \mathcal{O}_x$
(5) $T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}) \cong \mathcal{O}$

Proof (1) $\sum_i \dim \mathrm{Hom}^i(\mathcal{O}, \mathcal{O}_x) = 1$ だから, 組 $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_x)$ は [ST01] の意味での A_2 - configuration である．よって [ST01] Thm.1.2 により正しい.

□

Lem.0.4 (I 型でも正しい．)
$x, y \in X$ を非特異閉点とする（同じ既約成分上にあっても ok)．このとき

(1) $T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x+y)) \cong \mathcal{O}(-x-y)[1]$
(2) $T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x-y)) \cong \mathcal{O}(x-y)$

が成り立つ.

Proof (1) Braid relation $T_x T_{\mathcal{O}} T_x \cong T_{\mathcal{O}} T_x T_{\mathcal{O}}$ に $\mathcal{O}(y)$ を代入すると

$$T_x T_{\mathcal{O}} T_x(\mathcal{O}(y)) \cong \mathcal{O}(x) \otimes T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x+y))$$

$$T_{\mathcal{O}} T_x T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(y)) \cong T_{\mathcal{O}} T_x(\mathcal{O}_y) \cong T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_y) \cong \mathcal{O}(-y)[1]$$

となるからよい.

(2) Braid relation $T_x T_{\mathcal{O}} T_x \cong T_{\mathcal{O}} T_x T_{\mathcal{O}}$ に $\mathcal{O}_y$ を代入すると

$$T_x T_{\mathcal{O}} T_x(\mathcal{O}_y) \cong T_x T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_y) \cong T_x(\mathcal{O}(-y)[1]) \cong \mathcal{O}(x-y)[1]$$

$$T_{\mathcal{O}} T_x T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_y) \cong T_{\mathcal{O}} T_x(\mathcal{O}(-y)[1]) \cong T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x-y)[1])$$

となるからよい.

□

Lem.0.5 (I 型でも正しい．)
$x, y \in X$ を，異なる既約成分上にある非特異閉点とする．$F \in \mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ が

- $F(\mathcal{O}) \cong \mathcal{O}$
- $F(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}_x$
- $F(\mathcal{O}_y) \cong \mathcal{O}_y$

を満たすならば，$f \in \mathrm{Aut}\, X$ により $F \cong f^*$ となる．さらにこの f は x, y を保つ.

Proof（III 型のとき）$L = \mathcal{O}(x+y)$ とおくと，これは ample である．($X = \{Y=0\} \cup \{YZ = X^2\} \subset \mathbb{P}^2$, $x = [1:0:0], y = [0:1:0]$ とみたときに, $\mathbb{P}^2$ の hyperplane $Z = 0$ による X の hyperplane section は $x + 2y$ なので，$\mathcal{O}(x+2y), \mathcal{O}(2x+y)$ が very ample になり，従って $L^3 = \mathcal{O}(3x+3y)$ も very ample だから.）

あとは [Sib14] Lem 3.3 と同じ．条件から $F(L^{\otimes m}) \cong L^{\otimes m}$ が任意の整数 m について成り立つ．これらの同型はそのままでは自然な同型ではないかもしれないが，これが $\oplus_{m=0}^{\infty} H^0(L^{\otimes m})$ に誘導する代数の同型を考え，そこから X の自己同型 f を作ってやると Bondal - Orlov reconstruction と同じ議論で $F \cong f^*$ となる．（$D^b(X)$ の ample sequence $\{L^{\otimes m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 上で同型→全体に伸ばす.） $\square$

<u>Lem.0.6</u> $x, y, z \in X$ を非特異閉点とし，$F = (T_x T_{\mathcal{O}} T_y)^2$ とする．このとき

$$F(\mathcal{O}(z)) \cong \mathcal{O}(2x - z)[1]$$

である.

<u>Proof</u>

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{O}(z-y)) &= T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}} T_y (\mathcal{O}(z)) && (1)\\
&\cong T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}(y+z)) && (2)\\
&\cong T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x (\mathcal{O}(-y-z)[1]) && (3)\\
&\cong T_x T_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}(x-z)[1])] && (4)\\
&\cong T_x (\mathcal{O}(x-z)[1]) && (5)\\
&\cong \mathcal{O}(2x-z)[1] && (6)
\end{aligned}$$

$\square$

<u>Thm.0.1</u> $x, y \in X$ を非特異閉点とする．$\mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ において等式

$$(T_x T_{\mathcal{O}} T_y)^4 = [2]$$

が成り立つ.

<u>Proof</u> $F = (T_x T_{\mathcal{O}} T_y)^2$ とおく．Lem.0.2 のような x と y を入れ替える involution の 1 つを σ とする．まず

$$(\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ \sigma^* F[-1] \cong \mathrm{id}$$

であることを示す.

$$\begin{aligned}
(\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ \sigma^* F[-1](\mathcal{O}) &= (\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ \sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}} T_y (\mathcal{O})[-1] && (7)\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ \sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}(y))[-1] && (8)\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ \sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x (\mathcal{O}_y)[-1] && (9)\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ \sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} (\mathcal{O}_y)[-1] && (10)\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ \sigma^* T_x (\mathcal{O}(-y)) && (11)\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ \sigma^* (\mathcal{O}(x-y)) && (12)\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y) \otimes (\mathcal{O}(y-x)) && (13)\\
&\cong \mathcal{O} && (14)
\end{aligned}$$

$$
\begin{align}
(\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* F[-1](\mathcal{O}_x) &= (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}} T_y(\mathcal{O}_x)[-1] \tag{15}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_x)[-1] \tag{16}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x(\mathcal{O}(-x)) \tag{17}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(y)) \tag{18}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x(\mathcal{O}_y) \tag{19}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^*(\mathcal{O}_y) \tag{20}\\
&\cong \mathcal{O}(x-y)\otimes(\mathcal{O}_x) \tag{21}\\
&\cong \mathcal{O}_x \tag{22}\\
& \tag{23}
\end{align}
$$

$$
\begin{align}
(\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* F[-1](\mathcal{O}_y) &= (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}} T_y(\mathcal{O}_y)[-1] \tag{24}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_y)[-1] \tag{25}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x(\mathcal{O}(-y)) \tag{26}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x)) \tag{27}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* T_x(\mathcal{O}_x) \tag{28}\\
&\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^*(\mathcal{O}_x) \tag{29}\\
&\cong \mathcal{O}(x-y)\otimes(\mathcal{O}_y) \tag{30}\\
&\cong \mathcal{O}_y \tag{31}\\
& \tag{32}
\end{align}
$$

だから，Lem.0.5 よりある x, y を動かさない X の自己同型 f があり

$$(\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* F[-1] \cong f^*$$

となる．さらに $z \in X$ を x, y と異なる非特異閉点としたとき，Lem.0.6 により

$$
\begin{align}
(\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* F[-1](\mathcal{O}(z)) &\cong (\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^*\mathcal{O}(2x-z) \tag{33}\\
&\cong \mathcal{O}(x-y)\otimes\mathcal{O}(2y-\sigma(z)) \tag{34}\\
&\cong \mathcal{O}(x+y-\sigma(z)) \tag{35}\\
& \tag{36}
\end{align}
$$

となる（$\sigma^{-1} = \sigma$ に注意する）．これは Lem.0.2 により $\mathcal{O}(z)$ と同型である．つまり $(\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^* F[-1] \cong f^*$ は $\mathcal{O}(z)$ を保つ．f は自己同型だから連接層の完全列を保つことに注意して完全列

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(z) \to \mathcal{O}_z \to 0$$

に f^* を施すと，

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(z) \to f^*\mathcal{O}_z \to 0$$

という完全列を得る．単射 $\mathcal{O} \to \mathcal{O}(z)$ は（リーマンロッホより $\dim H^0(\mathcal{O}(z)) = 1$ であることから）$k^\times$ 倍を除いて一意だから，結局この完全列より $f^*\mathcal{O}_z \cong \mathcal{O}_z$ がわかる．つまり f は z を保ち，Lem.0.1 より $f = \mathrm{id}$ となる．

以上より

$$F \cong \sigma^* \circ (\mathcal{O}(y-x) \otimes -)[1]$$

となる．これと

$$\sigma^* \circ (\mathcal{O}(y-x) \otimes -) \cong (\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ \sigma^*$$

により，

$$F^2 \cong [2]$$

である． □

Sibilla の矛盾？→解決した．

計算してたらおかしな結果が出たので，どこか間違ってるはず．

Prop.0.1（[Sib14]Thm.3.6 の証明の $n=2$ の議論） X を I_2 型曲線とし，$x, y \in X$ を異なる既約成分上にある非特異閉点とする．また x と y を入れ替え特異点を保つような唯一の involution を $\sigma \colon X \to X$ とし，$F = (T_x T_{\mathcal{O}} T_y)^2$ とする．このとき x, y を保つような自己同型 $f \colon X \to X$ があり，

$$F \cong (\mathcal{O}(x-y) \otimes -) \circ f^* \sigma^* [1]$$

となる．さらに f は 2 つの特異点を入れ替えるような唯一の involution または id で，σ と可換である．特に

$$F^2 \cong [2]$$

である．

Proof Lem.0.3 を使って

$$F(\mathcal{O}) \cong \cancel{\mathcal{O}[1]}\ \mathcal{O}(x-y)[1]$$
$$F(\mathcal{O}_x) \cong \mathcal{O}_y[1]$$
$$F(\mathcal{O}_y) \cong \mathcal{O}_x[1]$$

を示す．$\mathcal{O}_x$ については

$$\begin{aligned}
T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}} T_y(\mathcal{O}_x) &\cong T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_x) && (37)\\
&\cong T_x T_{\mathcal{O}} T_y T_x(\mathcal{O}(-x)[1]) && (38)\\
&\cong T_x T_{\mathcal{O}} T_y(\mathcal{O}[1]) && (39)\\
&\cong T_x T_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(y)[1]) && (40)\\
&\cong T_x \mathcal{O}_y[1] && (41)\\
&\cong \mathcal{O}_y[1] && (42)\\
& && (43)
\end{aligned}$$

となり，他も同様にわかる．よって関手 $(\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ\sigma^*\circ F[-1]$ は Lem.0.5 の条件を満たす．よって Lem.0.5 より（$\sigma^2=\mathrm{id}$ に注意すると）x,y を保つような自己同型 $f\colon X\to X$ があり，

$$F\cong(\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ f^*\sigma^*[1]$$

となる．さらに f が X の 2 つの特異点を入れ替えるか，保つかによって involution または id となることが（normalization に誘導する自己同型を見ることで）わかる． □

Prop.0.2 Prop.??の状況で，$z\in X$ を非特異閉点とする．このとき

$$F(\mathcal{O}(z-2y))\cong\mathcal{O}(-z)[1]$$

であり，

$$(\mathcal{O}(x-y)\otimes -)\circ f^*\sigma^*(\mathcal{O}(z-2y))[1]\cong \cancel{\mathcal{O}(f(\sigma(z))-2x)[1]}\ \mathcal{O}(f(\sigma(z))-x-y)[1]$$

である．

Proof Lem.0.3, Lem.0.4 を使って計算すると

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{O}(z-2y)) &= T_xT_{\mathcal{O}}T_yT_xT_{\mathcal{O}}T_y(\mathcal{O}(z-2y)) &(44)\\
&\cong T_xT_{\mathcal{O}}T_yT_xT_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(z-y)) &(45)\\
&\cong T_xT_{\mathcal{O}}T_yT_x(\mathcal{O}(z-y)) &(46)\\
&\cong T_xT_{\mathcal{O}}T_y(\mathcal{O}(x+z-y)) &(47)\\
&\cong T_xT_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}(x+z)) &(48)\\
&\cong T_x(\mathcal{O}(-x-z)[1]) &(49)\\
&\cong \mathcal{O}(-z)[1] &(50)\\
& &(51)
\end{aligned}$$

となる． □

~~$\mathcal{O}(-z)$ と $\mathcal{O}(f(\sigma(z))-2x)$ では multi - degree が合わないので何かおかしい.~~あってる．（σ は既約成分を入れ替え，f は保つので $f(\sigma(z))$ は z と異なる既約成分の上にある.）

参考文献

[Sib14] N. Sibilla, *A note on mapping class group actions on derived categories*, Proceedings of the American Mathematical Society, 142(6):1837 – 1848, 2014.

[ST01] P. Seidel and R. Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Math. J., 108(1):37 – 108, 2001, MR 1831820, Zbl 1092.14025.