代数多様体の導来圏の半捻り関手

荒井 勇人

2023 年 7 月 8 日

概要

代数多様体 X の連接層の導来圏 $D^b(X)$ の自己同値を構成する重要な手法のひとつが、Seidel と Thomas により導入された球面対象 $E \in D^b(X)$ に沿う捻り関手 $T_E \in \mathrm{Auteq} D^b(X)$ である。これはホモロジー的ミラー対称性のもとでシンプレクティック多様体上の Lagrange 球面に沿う Dehn 捻りに対応する。

本講演では代数多様体の平坦族 $X \to T$ について、適切な設定のもと $D^b(X)$ 上の捻り関手をファイバー X_t の導来圏の自己同値に『制限』できるという結果について紹介する。特にその具体例として楕円曲面と可約ファイバーの場合を考えることで、楕円曲面の自己同値群を穴あきトーラスの写像類群の言葉で記述できることを説明する。さらにこれらの具体例から、『制限』によって得られる導来圏の自己同値が実曲面上の弧 (arc) に沿った半捻り (half twist) のミラー対称性による類似物であると考えられること、およびこの現象に関連した今後の展望についても述べたい。

1 導入

1.1 代数多様体の導来圏と自己同値群

X を $\mathbb{C}$ 上の代数多様体とし、X 上の連接層のなすアーベル圏を $\mathrm{coh}\, X$、その有界な（コチェイン）複体のなすアーベル圏を $\mathrm{Ch}^b(\mathrm{coh}\, X)$ とする。複体の間の射 $f\colon E \to F$ は、複体のコホモロジーに誘導する射 $H^n(f)\colon H^n(E) \to H^n(F)$ が全ての $n \in \mathbb{Z}$ について同型であるとき擬同型と呼ばれる。X の導来圏 $D^b(X)$ とは、$\mathrm{Ch}(\mathrm{coh}\, X)$ を擬同型全体で局所化して得られる圏であり、自然に $\mathbb{C}$ 線形な三角圏の構造を持つ。また $D^b(X)$ の自己同値群 $\mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ を、$\mathbb{C}$ 線形で三角圏の構造を保つような $D^b(X)$ の自己同値関手の同型類がなす群とする。$D^b(X)$ の自己同値として、X の自己同型 f による連接層の引き戻し f^*、X 上の直線束 L によるテンソル積 $(-) \otimes L$、および三角圏のシフト関手 $(-)[1]$ が常に存在し、これらの生成する $\mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ の部分群

$$A(X) \coloneqq \mathrm{Aut}(X) \ltimes \mathrm{Pic}(X) \times \mathbb{Z}[1] \tag{1}$$

の元は標準的な自己同値と呼ばれる。自己同値群についてのもっとも基本的な結果は次の Bondal と Orlov による定理である。

Theorem 1.1 ([BO01])**.** X を非特異射影多様体とし、X の標準束 ω_X またはその双対束 $\omega_X^\vee$ が豊富な直線束だと仮定する。このとき $A(X) = \mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ である。

この結果により、非自明な包含関係 $A(X) \subsetneq \mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ が生じうる一番単純な状況は X が楕円曲線の場合となる。このときの $\mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ は Orlov によるアーベル多様体についての結果を適用すると以下のようになる。

Theorem 1.2 ([Orl02])**.** X を楕円曲線とすると、以下の完全列が存在する。

$$1 \to \operatorname{Aut} X \ltimes \operatorname{Pic}^0(X) \times \mathbb{Z}[2] \to \operatorname{Auteq} D^b(X) \xrightarrow{\theta} \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \to 1 \tag{2}$$

ここで θ は偶数次のコホモロジー群 $H^0(X,\mathbb{Z}) \oplus H^0(X,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ への作用で与えられる。

これにより $A(X)$ の像を計算すると、$\theta((-)[1]) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ かつ $L \in \operatorname{Pic}(X)$ については

$$\theta((-) \otimes L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \deg L & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となるため、$\theta(A(X)) \subsetneq \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ と $A(X) \subsetneq \operatorname{Auteq} D^b(X)$ がわかる。

1.2 Fourier–向井変換と捻り関手

多様体の導来圏の間の関手を構成する一般的な方法である Fourier–向井変換と、自己同値の重要な構成法である捻り関手について説明する。

X, Y を非特異射影多様体とし、$p_X \colon X \times Y \to X, p_Y \colon X \times Y \to Y$ を射影とする。このとき、$D^b(X \times Y)$ の対象 P をとるごとに関手 $\Phi^P_{X \to Y}$

$$\Phi^P_{X \to Y}(-) \coloneqq p_{Y*}(p_X^*(-) \otimes P) \colon D^b(X) \to D^b(Y) \tag{4}$$

2 小平ファイバーのミラー対称性と写像類群

3 半捻り関手

4 楕円曲面の自己同値群

参考文献

[BO01] Alexei Bondal and Dmitri Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344. MR 1818984

[Orl02] D. O. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **66** (2002), no. 3, 131–158. MR 1921811