代数多様体の導来圏の半捻り関手

荒井 勇人

2023 年 7 月 12 日

概要

代数多様体 X の連接層の導来圏 $D^b(X)$ の自己同値を構成する重要な手法のひとつが、Seidel と Thomas により導入された球面対象 $E \in D^b(X)$ に沿う捻り関手 $T_E \in \mathrm{Auteq} D^b(X)$ である。これはホモロジー的ミラー対称性のもとでシンプレクティック多様体上の Lagrange 球面に沿う Dehn 捻りに対応する。

本稿では捻り関手の変種として、ミラー対称性のもとで穴あき曲面の半捻りに対応する $D^b(X)$ の自己同値（半捻り関手）を構成し、それを用いて楕円曲面 S の導来圏の自己同値群 $\mathrm{Auteq}\, D^b(S)$ の構造を調べる。

1 導入

1.1 代数多様体の導来圏と自己同値群

X を $\mathbb{C}$ 上の代数多様体とし、X 上の連接層のなすアーベル圏を $\mathrm{coh}\, X$、その有界な（コチェイン）複体のなすアーベル圏を $\mathrm{Ch}^b(\mathrm{coh}\, X)$ とする。複体の間の射 $f\colon E \to F$ は、複体のコホモロジーに誘導する射 $H^n(f)\colon H^n(E) \to H^n(F)$ が全ての $n \in \mathbb{Z}$ について同型であるとき擬同型と呼ばれる。X の導来圏 $D^b(X)$ とは、$\mathrm{Ch}(\mathrm{coh}\, X)$ を擬同型全体で局所化して得られる圏であり、自然に $\mathbb{C}$ 線形な三角圏の構造を持つ。また $D^b(X)$ の自己同値群 $\mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ を、$\mathbb{C}$ 線形で三角圏の構造を保つような $D^b(X)$ の自己同値関手の同型類がなす群とする。$D^b(X)$ の自己同値として、X の自己同型 f による逆像 f^*、X 上の直線束 L によるテンソル積 $(-) \otimes L$、および三角圏のシフト関手 $(-)[1]$ が常に存在し、これらの生成する $\mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ の部分群

$$A(X) \coloneqq \mathrm{Aut}(X) \ltimes \mathrm{Pic}(X) \times \mathbb{Z}[1] \tag{1}$$

の元は標準的な自己同値と呼ばれる。自己同値群についてのもっとも基本的な結果は次の Bondal と Orlov による定理である。

Theorem 1.1 ([BO01])**.** X を非特異射影多様体とし、X の標準束 ω_X またはその双対束 $\omega_X^\vee$ が豊富な直線束だと仮定する。このとき $A(X) = \mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ である。

この結果により、非自明な包含関係 $A(X) \subsetneq \mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ が生じうる一番単純な状況は X が楕円曲線の場合となる。このときの $\mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ は Orlov によるアーベル多様体についての結果を適用すると以下のようになる。

Theorem 1.2 ([Orl02])**.** X を楕円曲線とすると、以下の完全列が存在する。

$$1 \to \mathrm{Aut}\, X \ltimes \mathrm{Pic}^0(X) \times \mathbb{Z}[2] \to \mathrm{Auteq}\, D^b(X) \xrightarrow{\theta} \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \to 1 \tag{2}$$

ここで θ は偶数次のコホモロジー群 $H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^0(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ への作用で与えられる。

これにより $A(X)$ の像を計算すると、$\theta((-)[1]) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ かつ $L \in \mathrm{Pic}(X)$ については

$$\theta((-) \otimes L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \deg L & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となるため、$\theta(A(X)) \subsetneq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ と $A(X) \subsetneq \operatorname{Auteq} D^b(X)$ がわかる。

1.2 Fourier–向井関手と捻り関手

Fourier–向井関手（積分関手）とは、積分核と呼ばれる $X \times Y$ の導来圏の対象 $P \in D^b(X \times Y)$ から構成される関手 $\Phi^P = \Phi^P_{X \to Y} \colon D^b(X) \to D^b(Y)$ である。X, Y を非特異射影多様体とし、$p_X \colon X \times Y \to X, p_Y \colon X \times Y \to Y$ を射影とする。このとき、$P \in D^b(X \times Y)$ に対し関手

$$\Phi^P_{X \to Y} \colon D^b(X) \xrightarrow{p_X^*} D^b(X \times Y) \xrightarrow{-\otimes P} D^b(X \times Y) \xrightarrow{p_{Y*}} D^b(Y) \tag{4}$$

を P を積分核とする Fourier–向井関手と呼ぶ。ここで $p_X^*, p_{Y*}, - \otimes P$ はそれぞれ逆像、順像、テンソル積（の導来関手）を意味する。

以下の定理より、Fourier–向井関手は導来圏の間の関手、特に同値を調べる上で基本的な道具となる。

Theorem 1.3 ([Orl97])**.** *X, Y を非特異射影多様体とし、$\Phi \colon D^b(X) \to D^b(Y)$ を充満忠実な $\mathbb{C}$ 線形三角関手とする。このとき Φ はある積分核 P による Fourier–向井関手と同型である。*

また、

2 小平ファイバーのミラー対称性と写像類群

楕円曲面 $\pi \colon S \to C$ の特異ファイバーとして現れうる曲線は小平と Neron により ADE 型のアファイン Dynkin 図形を用いて分類されている。これらの曲線を小平ファイバーと呼ぶ。例えば $\mathrm{I_n}$ 型と呼ばれる曲線は n 本の $\mathbb{P}^1$ が n 角形のかたちに交わってできる特異曲線であり、アファイン A_n 型 Dynkin 図形に対応する。

Y_n を $\mathrm{I_n}$ 型（$n \geq 2$）の小平ファイバーとすると、そのミラー多様体は n 点穴あきトーラス T_n であることが [LP17] により示されている。すなわち以下が成り立つ。

Theorem 2.1. *[LP17] $\mathcal{W}(T_n)$ を T_n の巻深谷圏とすると、$\mathbb{C}$ 線形三角圏の同値 $D^b(Y_n) \cong D^b(\mathcal{W}(T_n))$ が存在する。*

これにより、おおざっぱにいうと Y_n 上の層とその間の Hom 空間の次元が、T_n 上の曲線とその交差数に対応する。より正確には、以下が成り立つ。

Theorem 2.2 ([Opp20])**.** *(1)* シフト関手 [1] とホモトピーによる違いを除いて、以下のものが *1* 対 *1* 対応する。
- $D^b(Y_n)$ の直既約対象 F の同型類
- T_n 上の曲線 γ とその上の直既約 $\mathbb{C}$ 局所系 V の組

(2) *(1)* の対応で E, F と $(\gamma_E, V_E), (\gamma_E, V_F)$ が対応し、E または F が *perfect* で $\dim V_E = \dim V_F = 1$ を満たすとする。このとき

$$\sum_i \dim \mathrm{Ext}^i(E, F) = \#(\gamma_E \cap \gamma_F) \tag{5}$$

が成り立つ。

対象の対応には例えば以下のようなものがある。

Example 2.3. 直既約対象の対応

さらにこの対応を用いると、$D^b(Y_n)$ の自己同値群について（楕円曲線の場合と似た）以下の記述が得られる。

Theorem 2.4. *[Opp20, Theorem D]* 完全列

$$1 \to \mathrm{Aut}^0(Y_n) \times \mathrm{Pic}^0(Y_n) \times \mathbb{Z}[1] \to \mathrm{Auteq}\, D^b(Y_n) \xrightarrow{\Upsilon} \mathrm{MCG}(T_n) \to 1 \tag{6}$$

が存在する。ただし Aut^0 は既約成分を動かさない自己同型、Pic^0 は各既約成分上での次数が 0 である直線束の全体を意味する。

また Υ はミラー対称性による対応と以下の意味で整合的である。

- $\Phi \in \mathrm{Auteq}\, D^b(Y_n)$ と直既約な $F \in D^b(Y_n)$ について、$\Upsilon(\Phi)$ は F に対応する曲線を $\Phi(F)$ に対応する曲線に写す。

さらに Υ によって、球面対象 F に付随する捻り関手 T_F が曲線 γ_F に付随する Dehn 捻りに写されることもわかる。

3 半捻り関手

Theorem 3.1. $\pi\colon X \to T$ を非特異準射影多様体の間の平坦射とし、$i\colon Y = \pi^{-1}(0) \to X$ をファイバーとする。また $E \in D^b(Y)$ を、$i_*E \in D^b(X)$ が球面対象になるような対象とする。このとき以下の図式を（自然同型の違いを除いて）可換にするような同値 $H_E\colon D^b(Y) \to D^b(Y)$ が一意に存在する。

$$\begin{array}{ccc} D^b(Y) & \xrightarrow{i_*} & D^b(X) \\ {\scriptstyle H_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_{i_*E}} \\ D^b(Y) & \xrightarrow{i_*} & D^b(X). \end{array} \tag{7}$$

Theorem 3.2. $\pi\colon S \to C$ を楕円曲面とし、$Y_n \subset S$ を $\mathrm{I_n}$ 型小平ファイバーとする。$G \subset Y_n$ が Y_n の既約成分のとき、半捻り関手 $H_{\mathcal{O}_G(a)} \in \mathrm{Auteq}\, D^b(Y_n)$ は $\Upsilon\colon\ \mathrm{Auteq}\, D^b(Y_n) \to \mathrm{MCG}(T_n)$ によって $\gamma_{\mathcal{O}_G(a)}$ に付随する半捻りに写像される。

4 楕円曲面の自己同値群

以上の半捻り関手を利用して、あるクラスの楕円曲面の自己同値群の記述を与えることができる。まず [Ueh16] による以下の結果がある。

Theorem 4.1 ([Ueh16]).

- $\pi\colon S \to C$ を相対的極小な楕円曲面とし、
- 小平次元 $\kappa(S)$ は 0 ではなく、

- π の可約ファイバーは $\mathrm{I_n}$ 型（$n \geq 2$）で重複ファイバーでないとする。

さらに部分群 $B \subset \operatorname{Auteq} D^b(S)$ を

$$B = \langle T_{\mathcal{O}_G(a)} \mid G \subset S\colon (-2)\text{-曲線}, \, a \in \mathbb{Z} \rangle \tag{8}$$

と定義する。このとき完全列

$$1 \to \langle B, (-) \otimes \mathcal{O}_S(D) \mid D.F = 0, F\colon \text{ファイバー} \rangle \rtimes \operatorname{Aut} S \times \mathbb{Z}[2] \tag{9}$$

$$\to \operatorname{Auteq} D^b(S) \xrightarrow{\Theta} \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \tag{10}$$

が存在する。

[Ueh16] ではさらに Θ の像の特徴づけも与えてられている。よってこのような楕円曲面に対しては $\operatorname{Auteq} D^b(S)$ の構造は可約ファイバーの寄与を表す群 B の構造の研究に帰着されることになる。

半捻り関手の定義を使うと B をファイバーの導来圏の自己同値群と結びつけて考えることができ、ミラー対称性と合わせて以下の結果を得る。

Theorem 4.2. $\pi\colon S \to C$ の可約ファイバー全体を $Y_{n_1}, \ldots, Y_{n_l}$ とする。ここで Y_{n_j} は $\mathrm{I_{n_j}}$ 型だとする。このとき次の完全列が存在する。

$$1 \to \langle (-) \otimes \mathcal{O}_S(Y_{n_j}) \mid j = 1, \ldots, l \rangle \to B \to \prod_{j=1}^{l} \mathrm{MCG}(T_{n_j}). \tag{11}$$

さらに B の像は曲線 $\gamma_{\mathcal{O}_{G_1}(-1)}, \ldots, \gamma_{\mathcal{O}_{G_{n_j}}(-1)}, \gamma_{\mathcal{O}_{G_1}}, \ldots, \gamma_{\mathcal{O}_{G_{n_j}}} \subset T_{n_j}, 1 \leq j \leq l$ に付随する半捻りたちによって生成される。

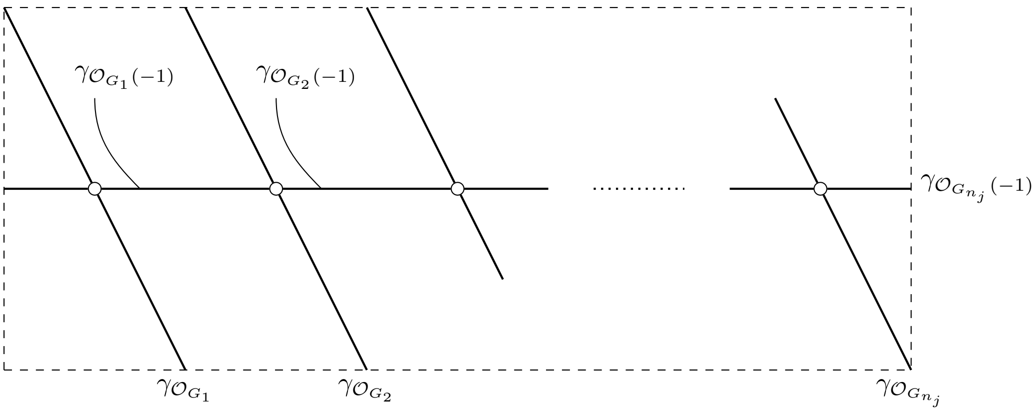

図 1　曲線 $\gamma_{\mathcal{O}_{G_1}(-1)}, \ldots, \gamma_{\mathcal{O}_{G_{n_j}}(-1)}, \gamma_{\mathcal{O}_{G_1}}, \ldots, \gamma_{\mathcal{O}_{G_{n_j}}} \subset T_{n_j}$

参考文献

[BO01] Alexei Bondal and Dmitri Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344. MR 1818984

[LP17] Yankı Lekili and Alexander Polishchuk, *Arithmetic mirror symmetry for genus 1 curves with n marked points*, Selecta Math. (N.S.) **23** (2017), no. 3, 1851–1907. MR 3663596

[Opp20] Sebastian Opper, *Spherical objects, transitivity and auto-equivalences of Kodaira cycles via gentle algebras*, arXiv e-prints (2020), arXiv:2011.08288.

[Orl97] D. O. Orlov, *Equivalences of derived categories and $K3$ surfaces*, vol. 84, 1997, Algebraic geometry, 7, pp. 1361–1381. MR 1465519

[Orl02] ———, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **66** (2002), no. 3, 131–158. MR 1921811

[Ueh16] Hokuto Uehara, *Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with non-zero Kodaira dimension*, Algebr. Geom. **3** (2016), no. 5, 543–577. MR 3568337