

# 代数多様体の導来圏の半捻り関手

荒井 勇人

2023 年 7 月 12 日

## 概要

代数多様体  $X$  の接続層の導来圏  $D^b(X)$  の自己同値を構成する重要な手法のひとつが、Seidel と Thomas により導入された球面対象  $E \in D^b(X)$  に沿う捻り関手  $T_E \in \text{Auteq } D^b(X)$  である。これはホモロジー的ミラー対称性のもとでシンプレクティック多様体上の Lagrange 球面に沿う Dehn 捻りに対応する。

本稿では捻り関手の変種として、ミラー対称性のもとで穴あき曲面の半捻りに対応する  $D^b(X)$  の自己同値（半捻り関手）を構成し、それを用いて楕円曲面  $S$  の導来圏の自己同値群  $\text{Auteq } D^b(S)$  の構造を調べる。

## 1 導入

### 1.1 代数多様体の導来圏と自己同値群

$X$  を  $\mathbb{C}$  上の代数多様体とし、 $X$  上の接続層のなすアーベル圏を  $\text{coh } X$ 、その有界な（コチェイン）複体のなすアーベル圏を  $\text{Ch}^b(\text{coh } X)$  とする。複体の間の射  $f: E \rightarrow F$  は、複体のコホモロジーに誘導する射  $H^n(f): H^n(E) \rightarrow H^n(F)$  が全ての  $n \in \mathbb{Z}$  について同型であるとき擬同型と呼ばれる。 $X$  の導来圏  $D^b(X)$  とは、 $\text{Ch}(\text{coh } X)$  を擬同型全体で局所化して得られる圏であり、自然に  $\mathbb{C}$  線形な三角圏の構造を持つ。また  $D^b(X)$  の自己同値群  $\text{Auteq } D^b(X)$  を、 $\mathbb{C}$  線形で三角圏の構造を保つような  $D^b(X)$  の自己同値関手の同型類がなす群とする。 $D^b(X)$  の自己同値として、 $X$  の自己同型  $f$  による逆像  $f^*$ 、 $X$  上の直線束  $L$  によるテンソル積  $(-) \otimes L$ 、および三角圏のシフト関手  $(-)[1]$  が常に存在し、これらの生成する  $\text{Auteq } D^b(X)$  の部分群

$$A(X) := \text{Aut}(X) \ltimes \text{Pic}(X) \times \mathbb{Z}[1] \quad (1)$$

の元は標準的な自己同値と呼ばれる。自己同値群についてのもっとも基本的な結果は次の Bondal と Orlov による定理である。

**Theorem 1.1** ([BO01]).  $X$  を非特異射影多様体とし、 $X$  の標準束  $\omega_X$  またはその双対束  $\omega_X^\vee$  が豊富な直線束だと仮定する。このとき  $A(X) = \text{Auteq } D^b(X)$  である。

この結果により、非自明な包含関係  $A(X) \subsetneq \text{Auteq } D^b(X)$  が生じうる一番単純な状況は  $X$  が楕円曲線の場合となる。このときの  $\text{Auteq } D^b(X)$  は Orlov によるアーベル多様体についての結果を適用すると以下のようになる。

**Theorem 1.2** ([Orl02]).  $X$  を楕円曲線とすると、以下の完全列が存在する。

$$1 \rightarrow \text{Aut } X \ltimes \text{Pic}^0(X) \times \mathbb{Z}[2] \rightarrow \text{Auteq } D^b(X) \xrightarrow{\theta} \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow 1 \quad (2)$$

ここで  $\theta$  は偶数次のコホモロジー群  $H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$  への作用で与えられる。

これにより  $A(X)$  の像を計算すると、 $\theta((-)[1]) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  かつ  $L \in \text{Pic}(X)$  については

$$\theta((-) \otimes L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \deg L & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となるため、 $\theta(A(X)) \subsetneq \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  と  $A(X) \subsetneq \text{Auteq } D^b(X)$  がわかる。

## 1.2 Fourier-向井変換と捻り関手

Fourier-向井変換とは、積分核と呼ばれる  $X \times Y$  の導来圏の対象  $P \in D^b(X \times Y)$  から構成される関手  $\Phi^P = \Phi_{X \rightarrow Y}^P: D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$  である。 $X, Y$  を非特異射影多様体とし、 $p_X: X \times Y \rightarrow X, p_Y: X \times Y \rightarrow Y$  を射影とする。このとき、 $P \in D^b(X \times Y)$  に対し関手

$$\Phi_{X \rightarrow Y}^P: D^b(X) \xrightarrow{p_X^*} D^b(X \times Y) \xrightarrow{- \otimes P} D^b(X \times Y) \xrightarrow{p_{Y*}} D^b(Y) \quad (4)$$

を  $P$  を積分核とする Fourier-向井変換と呼ぶ。ここで  $p_X^*, p_{Y*}, - \otimes P$  はそれぞれ逆像、順像、テンソル積 (の導来関手) を意味する。

以下の定理より、Fourier-向井変換は導来圏の間の関手を調べる上で基本的な道具となる。

**Theorem 1.3** ([Orl97]).  $X, Y$  を非特異射影多様体とし、 $\Phi: D^b(X) \rightarrow D^b(Y)$

## 2 小平ファイバーのミラー対称性と写像類群

楕円曲面  $\pi: S \rightarrow C$  の特異ファイバーとして現れうる曲線は小平と Neron により ADE 型のアファイン Dynkin 図形を用いて分類されている。これらの曲線を小平ファイバーと呼ぶ。例えば  $I_n$  型と呼ばれる曲線は  $n$  本の  $\mathbb{P}^1$  が  $n$  角形のかたちにあわってできる特異曲線であり、アファイン  $A_n$  型 Dynkin 図形に対応する。

$Y_n$  を  $I_n$  型 ( $n \geq 2$ ) の小平ファイバーとすると、そのミラー多様体は  $n$  点穴あきトーラス  $T_n$  であることが [LP17] により示されている。すなわち以下が成り立つ。

**Theorem 2.1.** [LP17]  $\mathcal{W}(T_n)$  を  $T_n$  の巻深谷圏とすると、 $\mathbb{C}$  線形三角圏の同値  $D^b(Y_n) \cong D^b(\mathcal{W}(T_n))$  が存在する。

これにより、おおざっぱにいうと  $Y_n$  上の層とその間の Hom 空間の次元が、 $T_n$  上の曲線とその交差数に対応する。より正確には、以下が成り立つ。

**Theorem 2.2** ([Opp20]). (1) シフト関手 [1] とホモトピーによる違いを除いて、以下のものが 1 体 1 対応する。

- $D^b(Y_n)$  の直既約対象  $F$  の同型類
- $T_n$  上の曲線  $\gamma$  とその上の直既約  $\mathbb{C}$  局所系  $V$  の組

(2) (1) の対応で  $E, F$  と  $(\gamma_E, V_E), (\gamma_F, V_F)$  が対応し、 $E$  または  $F$  が *perfect* で  $\dim V_E = \dim V_F = 1$  を満たすとする。このとき

$$\sum_i \dim \text{Ext}^i(E, F) = \#(\gamma_E \cap \gamma_F) \quad (5)$$

が成り立つ。

さらにこの対応を用いると、 $D^b(Y_n)$  の自己同値群について（楕円曲線の場合と似た）以下の記述が得られる。

**Theorem 2.3.** [Opp20, Theorem D] 完全列

$$1 \rightarrow \text{Aut}^0(Y_n) \times \text{Pic}^0(Y_n) \times \mathbb{Z}[1] \rightarrow \text{Auteq } D^b(Y_n) \xrightarrow{\Upsilon} \text{MCG}(T_n) \rightarrow 1 \quad (6)$$

が存在する。ここで  $\Upsilon$  はミラー対称性による対応と以下の意味で整合的である。

- $\Phi \in \text{Auteq } D^b(Y_n)$  と直既約な  $F \in D^b(Y_n)$  について、 $\Upsilon(\Phi)$  は  $F$  に対応する曲線を  $\Phi(F)$  に対応する曲線に写す。

さらに  $\Upsilon$  によって、球面对象  $F$  に付随する捻り関手  $T_F$  が曲線  $\gamma_F$  に付随する Dehn 捻りに写されることもわかる。

### 3 半捻り関手

**Theorem 3.1.**  $\pi: X \rightarrow T$  を非特異準射影多様体の間の平坦射とし、 $i: Y = \pi^{-1}(0) \rightarrow X$  をファイバーとする。また  $E \in D^b(Y)$  を、 $i_*E \in D^b(X)$  が球面对象になるような対象とする。このとき以下の図式を（自然同型の違いを除いて）可換にするような同値  $H_E: D^b(Y) \rightarrow D^b(Y)$  が一意に存在する。

$$\begin{array}{ccc} D^b(Y) & \xrightarrow{i_*} & D^b(X) \\ H_E \downarrow & & \downarrow T_{i_*E} \\ D^b(Y) & \xrightarrow{i_*} & D^b(X). \end{array} \quad (7)$$

### 4 楕円曲面の自己同値群

以上の半捻り関手を利用して、あるクラスの楕円曲面の自己同値群の記述を与えることができる。まず [Ueh16] による以下の結果がある。

**Theorem 4.1** ([Ueh16]). •  $\pi: S \rightarrow C$  を相対的極小な楕円曲面とし、

- 小平次元  $\kappa(S)$  は 0 ではなく、
- $\pi$  の可約ファイバーは  $I_n$  型 ( $n \geq 2$ ) で重複ファイバーでないとする。

さらに部分群  $B \subset \text{Auteq } D^b(S)$  を

$$B = \langle T_{\mathcal{O}_G(a)} \mid G \subset S: (-2)\text{-曲線}, a \in \mathbb{Z} \rangle \quad (8)$$

と定義する。このとき完全列

$$1 \rightarrow \langle B, (-) \otimes \mathcal{O}_S(D) \mid D.F = 0, F: \text{ファイバー} \rangle \rtimes \text{Aut } S \times \mathbb{Z}[2] \quad (9)$$

$$\rightarrow \text{Auteq } D^b(S) \xrightarrow{\Theta} \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \quad (10)$$

が存在する。

[Ueh16] ではさらに  $\Theta$  の像の特徴づけも与えられている。よってこのような楕円曲面に対しては  $\text{Auteq } D^b(S)$  の構造は  $B$  の構造の研究に帰着されることになる。

**Theorem 4.2.**  $\pi: S \rightarrow C$  の可約ファイバー全体を  $Y_{n_1}, \dots, Y_{n_l}$  とする。ここで  $Y_{n_j}$  は  $I_{n_j}$  型だとする。このとき次の完全列が存在する。

$$1 \rightarrow \langle (-) \otimes \mathcal{O}_S(Y_{n_j}) \mid j = 1, \dots, l \rangle \rightarrow B \rightarrow \prod_{j=1}^l \mathrm{MCG}(T_{n_j}). \quad (11)$$

## 参考文献

- [BO01] Alexei Bondal and Dmitri Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344. MR 1818984
- [LP17] Yankı Lekili and Alexander Polishchuk, *Arithmetic mirror symmetry for genus 1 curves with  $n$  marked points*, Selecta Math. (N.S.) **23** (2017), no. 3, 1851–1907. MR 3663596
- [Opp20] Sebastian Opper, *Spherical objects, transitivity and auto-equivalences of Kodaira cycles via gentle algebras*, arXiv e-prints (2020), arXiv:2011.08288.
- [Orl97] D. O. Orlov, *Equivalences of derived categories and K3 surfaces*, vol. 84, 1997, Algebraic geometry, 7, pp. 1361–1381. MR 1465519
- [Orl02] ———, *Derived categories of coherent sheaves on abelian varieties and equivalences between them*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **66** (2002), no. 3, 131–158. MR 1921811
- [Ueh16] Hokuto Uehara, *Autoequivalences of derived categories of elliptic surfaces with non-zero Kodaira dimension*, Algebr. Geom. **3** (2016), no. 5, 543–577. MR 3568337