- Tema 4 -

Cinemática Directa de Robots Manipuladores (II)

Prof. Oscar E. Ramos, Ph.D.

- 4 de mayo del 2020 -

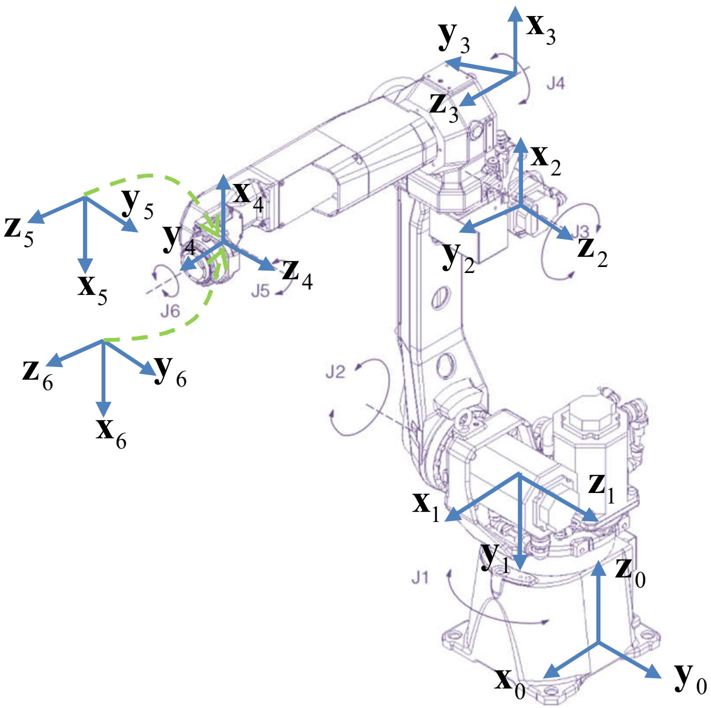
Temas

1. **Convención de Denavit-Hartenberg**
    1.1. Asignación de sistemas de referencia
    1.2. Asignación de parámetros DH
    1.3. Transformación homogénea
2. Ejemplo 1 (DH): Robot SCARA
3. Ejemplo 2 (DH): Robot Fanuc

Convención de Denavit-Hartenberg

- Abreviación: Denavit-Hartenberg = *DH*
- Describe la cinemática directa usando de 4 parámetros por cada articulación: θ_i, d_i, a_i, α_i
- Ejemplo:

Robot Fanuc M-10iA



Parámetros DH

Artic. *i*	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	450	$180°+q_1$	-150	90°
2	0	$90°+q_2$	600	0
3	0	$180°+q_3$	-200	90°
4	640	$180°+q_4$	0	90°
5	0	$180°+q_5$	0	90°
6	0	q_6	0	0

[distancias en mm]

Convención de Denavit-Hartenberg

- Es un método <u>sistemático</u> (y clásico) para describir la cinemática directa (modelo cinemático) de robots manipuladores (industriales)
  - Es casi el “estándar” para modelar cinemáticamente robots manipuladores
  - Se puede extender a robots con varias cadenas cinemáticas (varias patas o varios dedos)

- **Procedimiento:**

1. Determinar 1 sistema de referencia por cada articulación (basado en unas reglas)

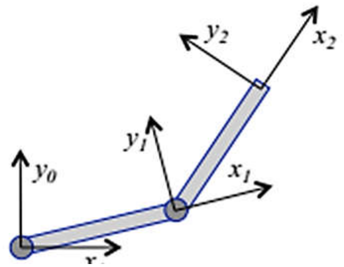
2. Determinar 4 parámetros (θ_i, d_i, a_i, α_i) que describen la posición y orientación entre cada dos sistemas de referencia (basado en unas reglas)

3. Usando los 4 parámetros (por cada articulación) calcular las matrices de transformación homogénea

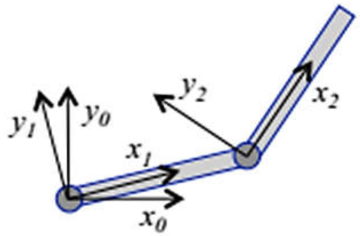
   → Determinar la posición/orientación del efector final con respecto a la base (producto de matrices de transformación homogénea)

Convención de Denavit-Hartenberg

- Existen 2 convenciones:
  - DH estándar
    - Es la convención más utilizada (**se utilizará aquí**)
    - Asigna sistemas de referencia al final de cada eslabón



  - DH modificado
    - Fue introducida por J.J. Craig (*Introduction to Robotics, Mechanics and Control, 1986*)
    - Asigna sistemas de referencia al inicio de cada eslabón



- Puede generar confusiones (si no se menciona qué convención se está usando)

Temas

1. Convención de Denavit-Hartenberg

    1.1. Asignación de sistemas de referencia

    1.2. Asignación de parámetros DH

    1.3. Transformación homogénea

2. Ejemplo 1 (DH): Robot SCARA
3. Ejemplo 2 (DH): Robot Fanuc

Convención de Denavit-Hartenberg

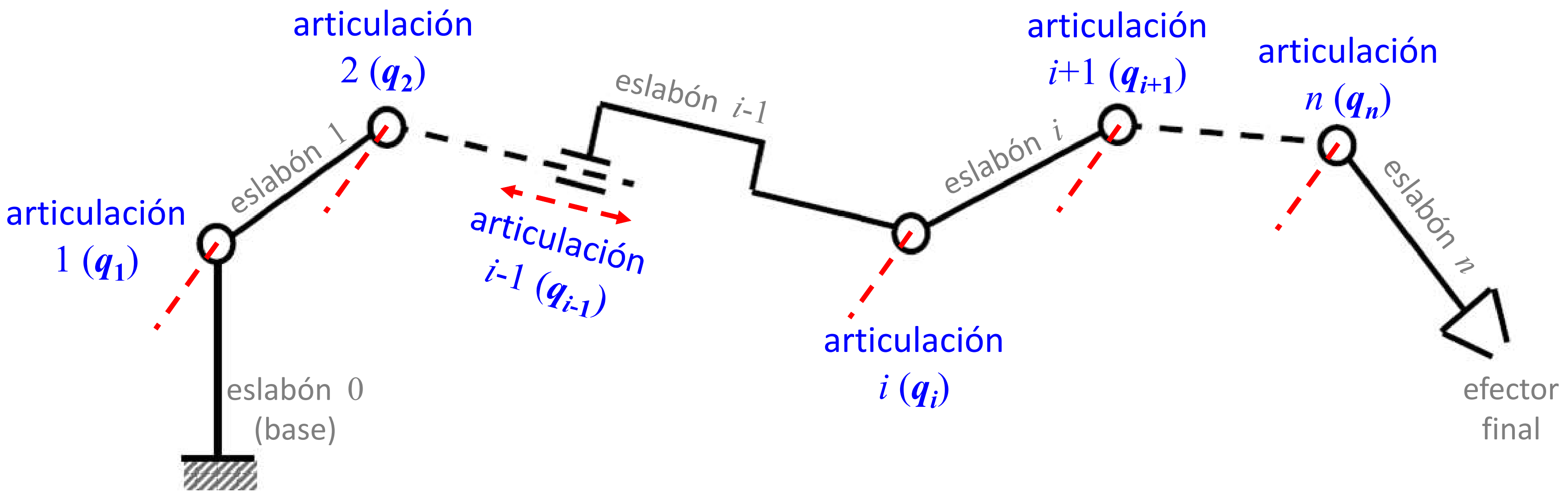
(1) Asignación de Sistemas de Referencia

- *Enumeración y ejes de articulaciones:* de 1 a n (desde la base hacia el efector final) señalando los ejes de movimiento de cada articulación
- *Sistema de coordenadas de la base:* asignar el sistema $\{0\}$ a la base, con eje z_0 a lo largo del eje de movimiento de la articulación 1 (origen arbitrario)
- *Eje z_i:* alinear z_i con el eje de movimiento de la articulación $i+1$
- *Origen del sistema $\{i\}$*: localizar el origen del sistema $\{i\}$ en la intersección de z_i & z_{i-1}, o en la intersección de z_i con la normal común entre z_i & z_{i-1}
- *Eje x_i*: asignar x_i en dirección de z_{i-1} x z_i. Si son paralelos, asignar x_i a lo largo de la normal común entre z_{i-1} & z_i
- *Eje y_i*: asignar y_i para completar el sistema coordenado (según la regla de la mano derecha)
- *Sistema del efector final $\{n\}$:* x_n debe ser ortogonal a z_{n-1} e intersectarlo

Convención de Denavit-Hartenberg

(1) Asignación de Sistemas de Referencia

- *Enumeración y ejes de articulaciones:* de 1 a n (desde la base hacia el efector final) señalando los ejes de movimiento de cada articulación



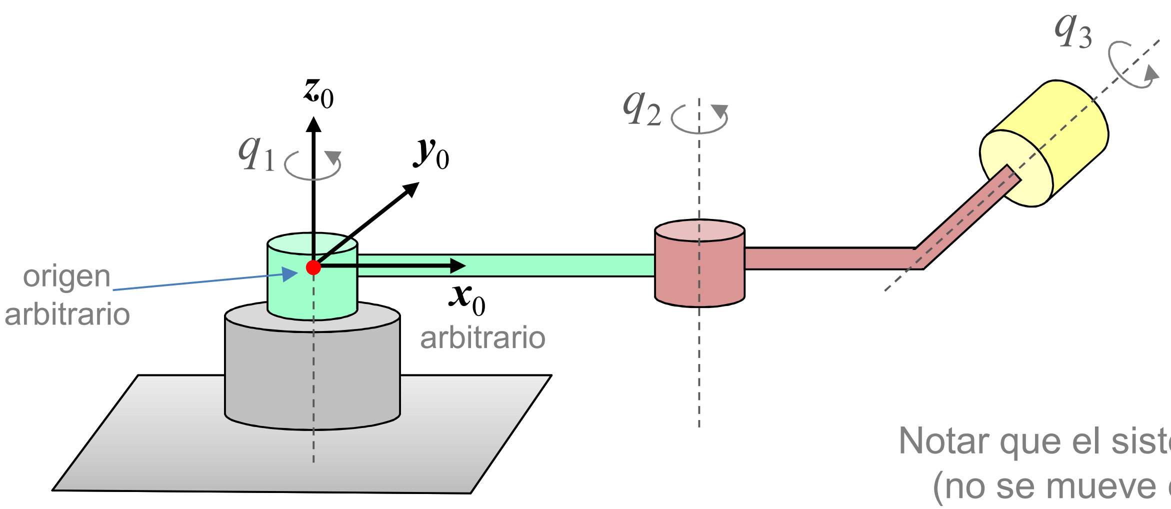
Notar que la articulación i está al inicio del eslabón i

Convención de Denavit-Hartenberg

(1) Asignación de Sistemas de Referencia

- *Enumeración y ejes de articulaciones:* de 1 a n (desde la base hacia el efector final) señalando los ejes de movimiento de cada articulación
- *Sistema de coordenadas de la base:* asignar el sistema $\{0\}$ a la base, con eje z_0 a lo largo del eje de movimiento de la articulación 1 (origen arbitrario)

  → El eje x_0 es arbitrario, y el eje y_0 completa el sistema (según la regla de la mano derecha)

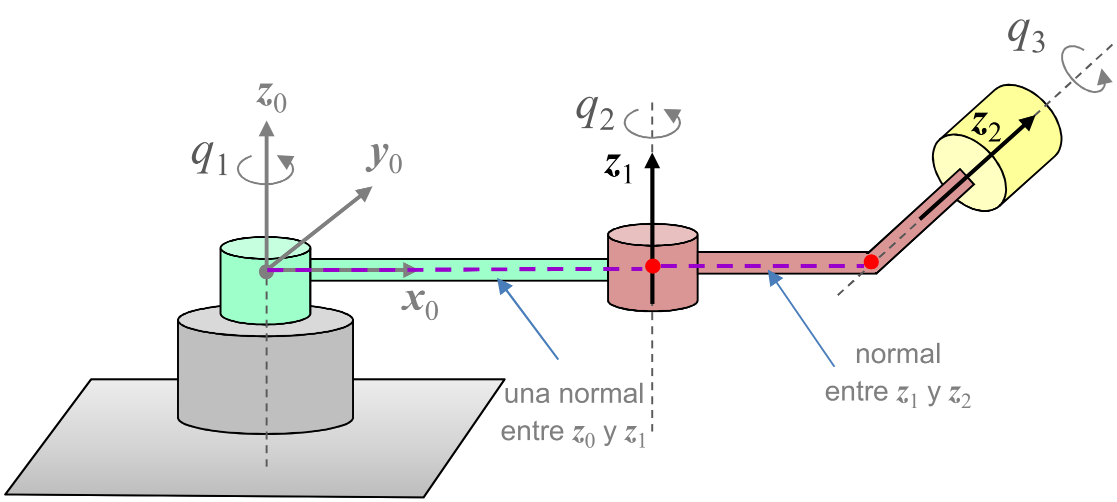


Notar que el sistema {0} está fijo en la base
(no se mueve con ninguna articulación)

Convención de Denavit-Hartenberg

(1) Asignación de Sistemas de Referencia

- *Eje z_i*: (de 1 a n-1) alinear z_i con el eje de movimiento de la articulación i+1
- *Origen del sistema $\{i\}$*: (de 1 a n-1)
  a) En la intersección de z_i & z_{i-1}, o
  b) En la intersección de z_i con la normal común entre z_i & z_{i-1}
     → Si z_i & z_{i-1} son paralelos, escoger arbitrariamente alguna normal

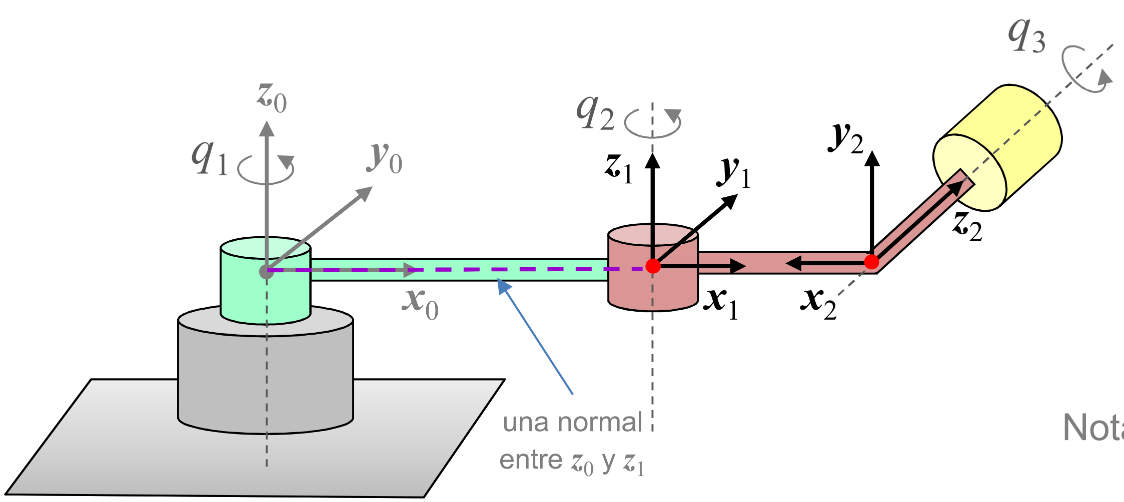


Convención de Denavit-Hartenberg

(1) Asignación de Sistemas de Referencia

- *Eje x_i*: (de 1 a n-1) asignar $\boldsymbol{x}_i$ en dirección de z_{i-1} x z_i. Si (z_{i-1} & z_i) son paralelos, asignar $\boldsymbol{x}_i$ a lo largo de la normal común entre z_{i-1} & z_i (usualmente apuntando "hacia" el efector final)

- *Eje y_i*: (de 1 a n-1) asignar $\boldsymbol{y}_i$ para completar el sistema coordenado (según la regla de la mano derecha)



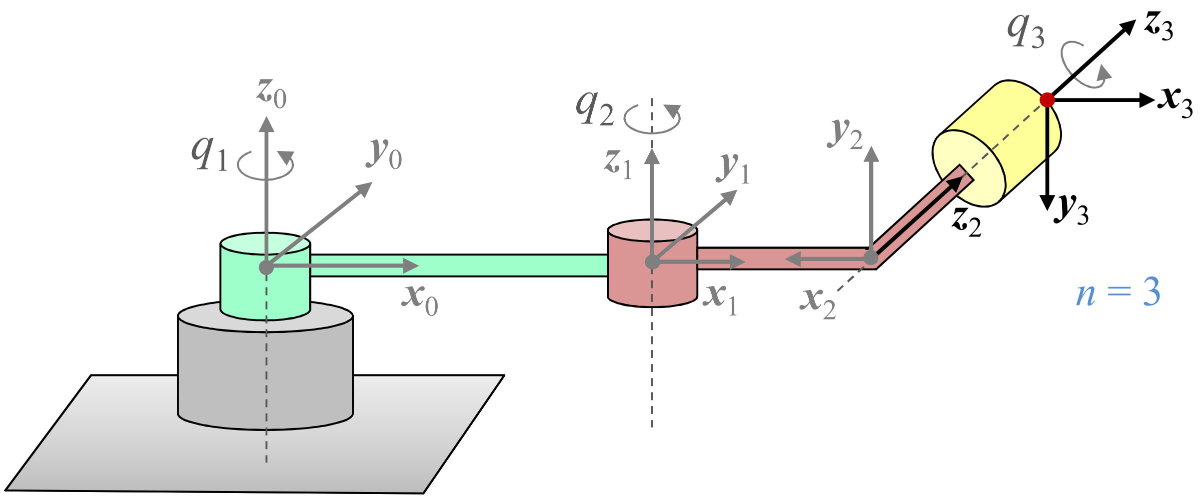
Notar que el sistema $\{i\}$ está al "final" del eslabón i

En realidad, x_i se puede asignar en la dirección de $\pm(z_{i-1}$ x $z_i)$.

Convención de Denavit-Hartenberg

(1) Asignación de Sistemas de Referencia

- *Sistema del efector final $\{n\}$:*
  - x_n debe ser ortogonal a z_{n-1} e intersectarlo (el origen del sistema normalmente al final de la cadena cinemática)
  - Normalmente z_n en la misma dirección de z_{n-1} apuntando hacia afuera del robot
  - y_n completa el sistema (regla de la mano derecha)



Temas

1. Convención de Denavit-Hartenberg
    1.1. Asignación de sistemas de referencia
    1.2. Asignación de parámetros DH
    1.3. Transformación homogénea
2. Ejemplo 1 (DH): Robot SCARA
3. Ejemplo 2 (DH): Robot Fanuc

Convención de Denavit-Hartenberg

(2) Asignación de Parámetros DH

Parámetros de la articulación

- *Ángulo de la articulación* (θ_i)*:* ángulo de rotación del eje $\boldsymbol{x}_{i\text{-}1}$ al eje $\boldsymbol{x}_i$ alrededor del eje $\boldsymbol{z}_{i\text{-}1}$
  → Es la variable articular si la articulación i es de revolución

- *Desplazamiento de la articulación* (d_i)*:* distancia del origen del sistema $\{i\text{-}1\}$ a la intersección del eje $\boldsymbol{z}_{i\text{-}1}$ con el eje $\boldsymbol{x}_i$ a lo largo del eje $\boldsymbol{z}_{i\text{-}1}$
  → Es la variable articular si la articulación i es prismática

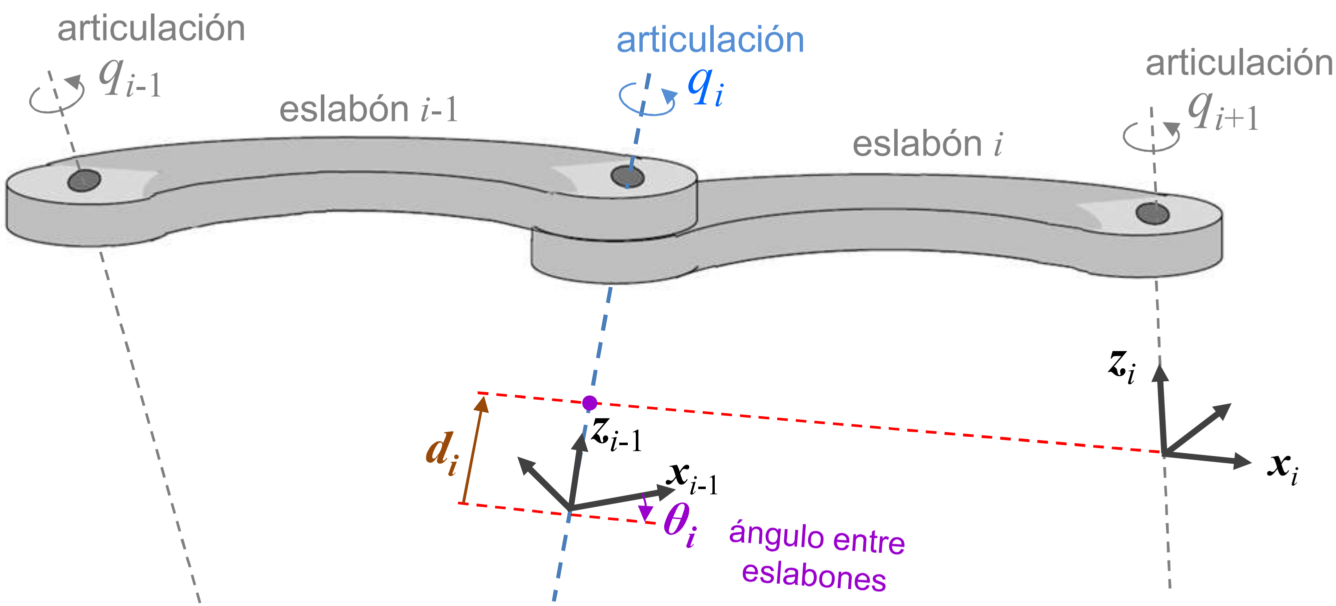
Parámetros del eslabón (constantes)

- *Longitud del eslabón* (a_i)*:* distancia desde la intersección entre el eje $\boldsymbol{z}_{i\text{-}1}$ y el eje $\boldsymbol{x}_i$ hacia el origen del sistema $\{i\}$ a lo largo del eje $\boldsymbol{x}_i$

- *Ángulo de giro del eslabón* (α_i)*:* ángulo de rotación del eje $\boldsymbol{z}_{i\text{-}1}$ al eje $\boldsymbol{z}_i$ alrededor del eje $\boldsymbol{x}_i$

Convención de Denavit-Hartenberg

(2) Asignación de Parámetros DH



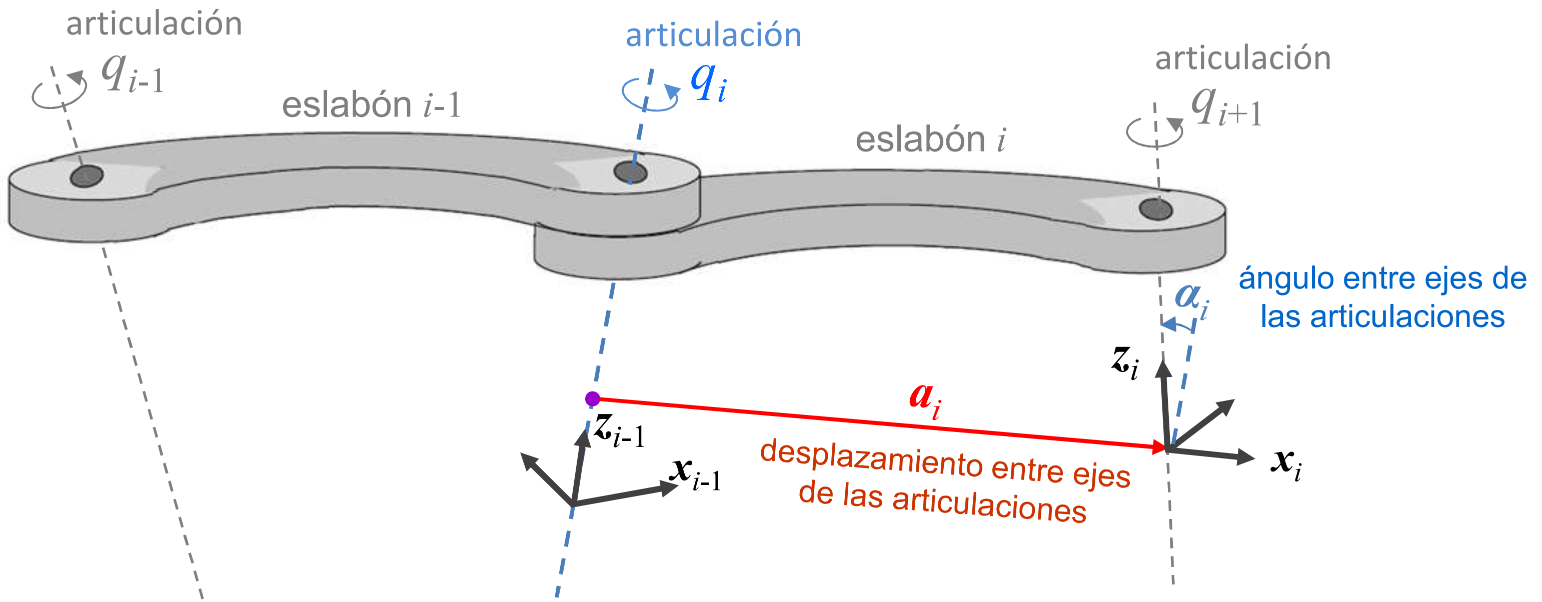
Parámetros de la articulación

- d_i: distancia del origen de $\{i\text{-}1\}$ a la [intersección de z_{i-1} con x_i] a lo largo de z_{i-1}
- θ_i: ángulo de rotación de x_{i-1} a x_i alrededor de z_{i-1}

Nota: d_i, θ_i tienen signo (pueden ser + o -)

Convención de Denavit-Hartenberg

(2) Asignación de Parámetros DH



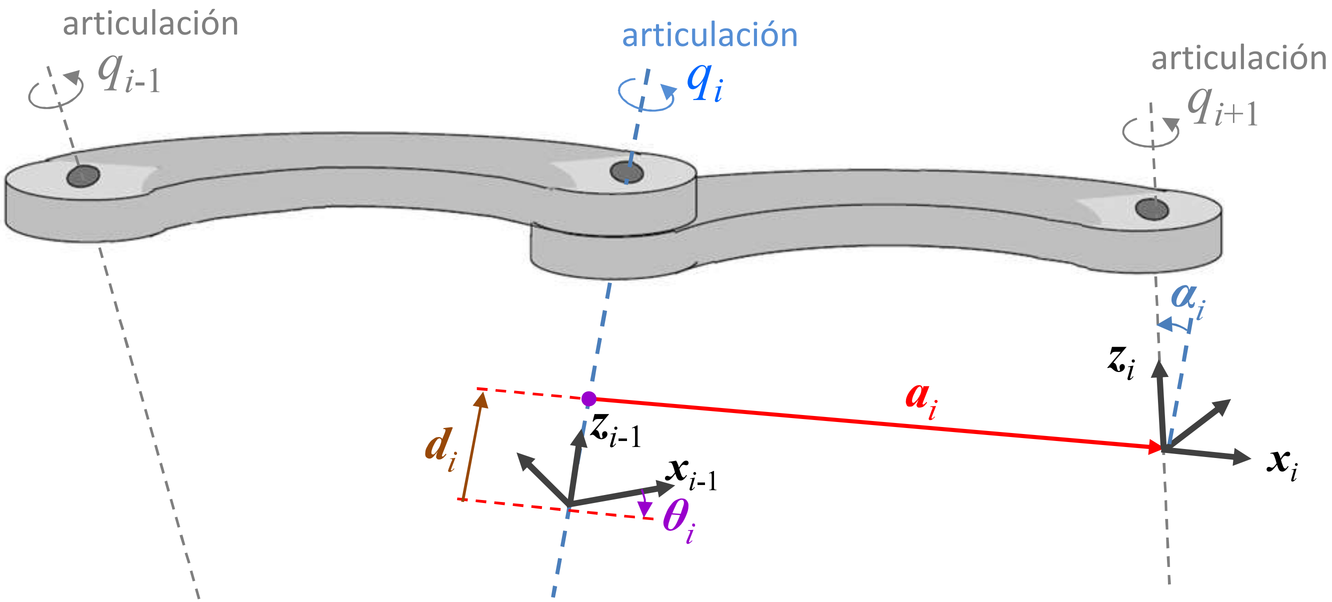
Parámetros del eslabón

- a_i: distancia de [la intersección de z_{i-1} con x_i] al origen de $\{i\}$ a lo largo de x_i
- α_i: ángulo de z_{i-1} a z_i alrededor de x_i

Nota: a_i, α_i tienen signo (pueden ser + o -)

Convención de Denavit-Hartenberg

(2) Asignación de Parámetros DH



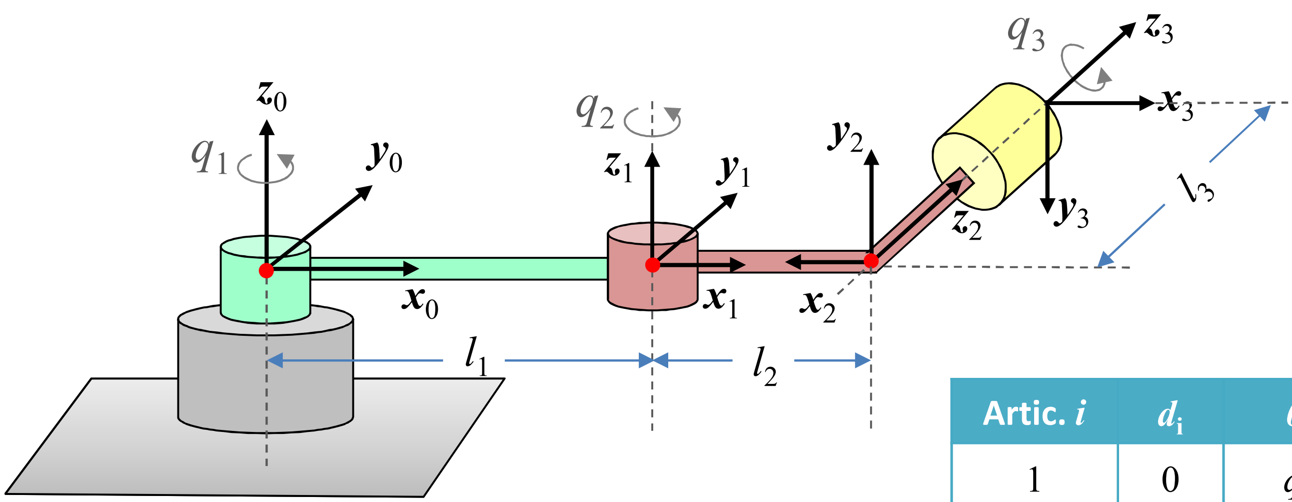
Resumen

- d_i: distancia del origen de $\{i\text{-}1\}$ a la [intersección de z_{i-1}] con x_i a lo largo de z_{i-1}
- θ_i: ángulo de rotación de x_{i-1} a x_i alrededor de z_{i-1}
- a_i: distancia de [la intersección de z_{i-1} con x_i] al origen de $\{i\}$ a lo largo de x_i
- α_i: ángulo de z_{i-1} a z_i alrededor de x_i

Convención de Denavit-Hartenberg

(2) Asignación de Parámetros DH

Ejemplo



Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	q_1	l_1	0°
2	0	$180°+q_2$	$-l_2$	90°
3	l_3	$180°+q_3$	0	0°

d_i: distancia del origen de $\{i\text{-}1\}$ a [la intersección de z_{i-1} con x_i] a lo largo de z_{i-1}

θ_i: ángulo de rotación de x_{i-1} a x_i alrededor de z_{i-1}

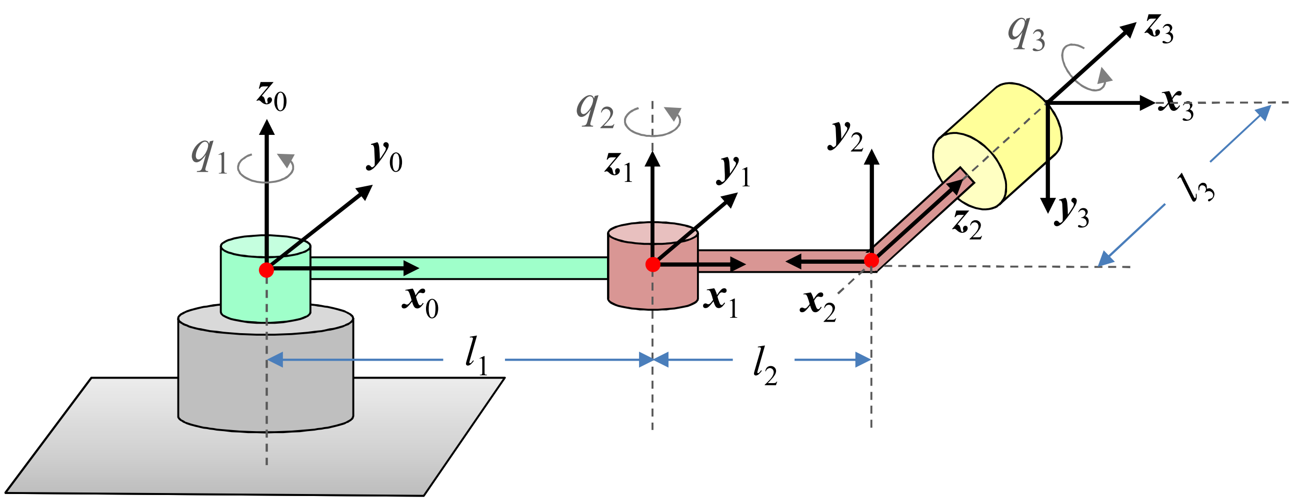
a_i: distancia de [la intersección de z_{i-1} con x_i] al origen de $\{i\}$ a lo largo de x_i

α_i: ángulo de z_{i-1} a z_i alrededor de x_i

Convención de Denavit-Hartenberg

(2) Asignación de Parámetros DH

Ejemplo



Nota:

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	q_1	l_1	0°
2	0	180°+q_2	-l_2	90°
3	l_3	180°+q_3	0	0°

A veces escrito como

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i	Home
1	0	q_1	l_1	0°	0°
2	0	q_2	-l_2	90°	180°
3	l_3	q_3	0	0°	180°

A veces también se omite el “home”

Temas

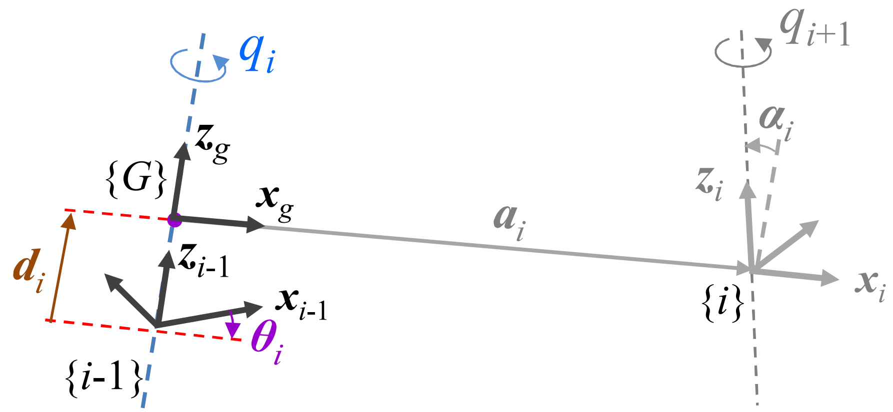
1. Convención de Denavit-Hartenberg
   1.1. Asignación de sistemas de referencia
   1.2. Asignación de parámetros DH
   1.3. Transformación homogénea
2. Ejemplo 1 (DH): Robot SCARA
3. Ejemplo 2 (DH): Robot Fanuc

Convención de Denavit-Hartenberg

(3) Transformación Homogénea

- **Objetivo:** llevar el sistema $\{i\text{-}1\}$ al sistema $\{i\}$

  1. Primero llevar $\{i\text{-}1\}$ a $\{G\}$



- Rotar un ángulo θ_i alrededor de $z_{i\text{-}1}$
- Trasladar una distancia d_i a lo largo de $z_{i\text{-}1}$

$$^{i-1}T_G(\theta_i, d_i) = Trot_{z_{i-1}}(\theta_i)\ Trasl_{z_{i-1}}(d_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Varía según el valor de la articulación (θ_i, d_i)

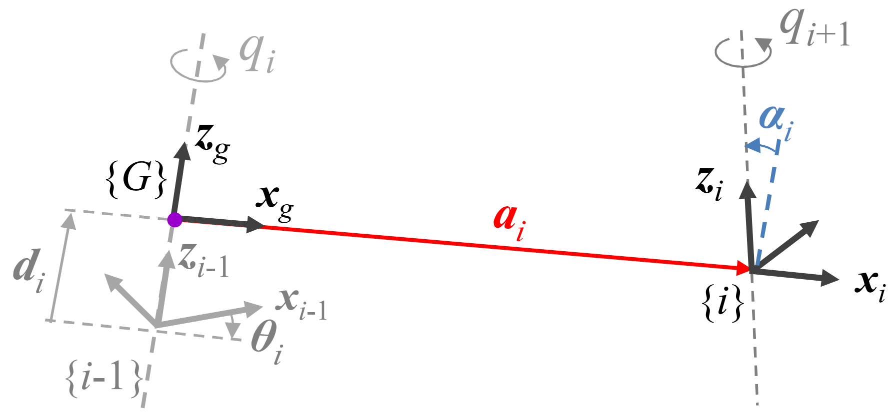
Nota: si primero se traslada y luego se rota, el resultado es el mismo (¿Por qué?)

Convención de Denavit-Hartenberg

(3) Transformación Homogénea

- **Objetivo:** llevar el sistema $\{i\text{-}1\}$ al sistema $\{i\}$

  2. Luego llevar $\{G\}$ a $\{i\}$



- Trasladar una distancia a_i a lo largo de x_i
- Rotar un ángulo α_i alrededor de x_i

$$^{G}T_i(\alpha_i, a_i) = Trasl_{x_i}(a_i)Trot_{x_i}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siempre constante

Nota: si primero se traslada y luego se rota, el resultado es el mismo

Convención de Denavit-Hartenberg

(3) Transformación Homogénea

- **Objetivo:** llevar el sistema $\{i\text{-}1\}$ al sistema $\{i\}$

$$^{i-1}T_i = \left(^{i-1}T_G\right)\left(^{G}T_i\right)$$

$$^{i-1}T_i(\theta_i, d_i, \alpha_i, a_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & 0 \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{^{i-1}T_i(\theta_i, d_i, \alpha_i, a_i) = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i \sin\theta_i & \sin\alpha_i \sin\theta_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cos\theta_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Matriz de transformación homogénea DH que relaciona el sistema $\{i\}$ con respecto al sistema $\{i\text{-}1\}$

Convención de Denavit-Hartenberg

(3) Transformación Homogénea

- Resultado final
  - Una vez calculado cada ${}^{i\text{-}1}T_i$ (para todo $i = 1, 2, \ldots, n$), se pueden multiplicar (producto de transformaciones homogéneas)

$$ {}^{0}T_{n} = \left({}^{0}T_{1}\right)\left({}^{1}T_{2}\right)\cdots\left({}^{n-2}T_{n-1}\right)\left({}^{n-1}T_{n}\right) $$

  - El resultado final representa: (posición y orientación del) efector final con respecto a la base del robot

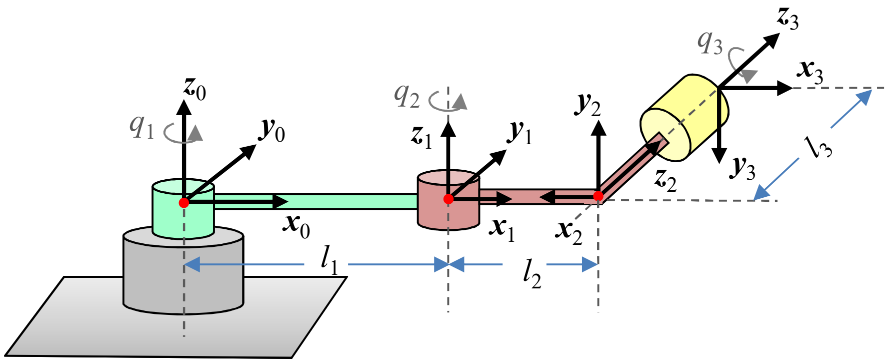
- Implementación
  - Para robots con pocos grados de libertad se puede obtener ${}^{0}T_n$ de manera simbólica ("ecuaciones")
  - Para robots con varios grados de libertad se suele realizar los cálculos de modo numérico (matriz por matriz, y luego se multiplica)

Convención de Denavit-Hartenberg

(3) Transformación Homogénea

Ejemplo

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	q_1	l_1	0
2	0	$180+q_2$	$-l_2$	90
3	l_3	$180+q_3$	0	0



$$
{}^{0}T_{1} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & l_1 \cos q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 & 0 & l_1 \sin q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

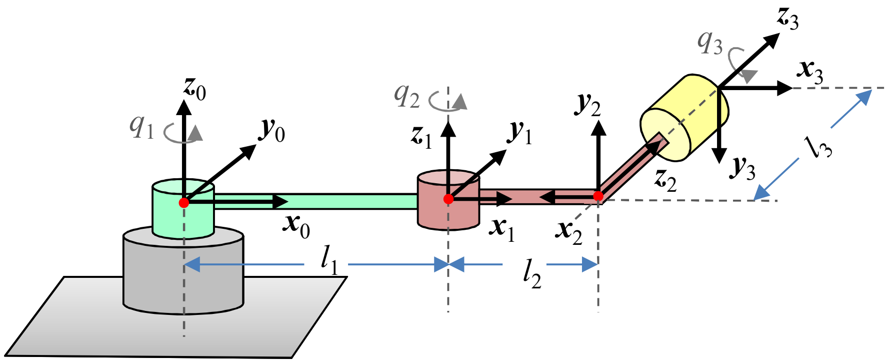
$$
{}^{1}T_{2} = \begin{bmatrix} \cos(180^\circ + q_2) & 0 & \sin(180^\circ + q_2) & -l_2 \cos(180^\circ + q_2) \\ \sin(180^\circ + q_2) & 0 & -\cos(180^\circ + q_2) & -l_2 \sin(180^\circ + q_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos q_2 & 0 & -\sin q_2 & l_2 \cos q_2 \\ -\sin q_2 & 0 & \cos q_2 & l_2 \sin q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Convención de Denavit-Hartenberg

(3) Transformación Homogénea

Ejemplo

Artic. *i*	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	q_1	l_1	0
2	0	$180+q_2$	$-l_2$	90
3	l_3	$180+q_3$	0	0



$$
{}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} \cos(180^\circ+q_3) & -\sin(180^\circ+q_3) & 0 & 0 \\ \sin(180^\circ+q_3) & \cos(180^\circ+q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos q_3 & \sin q_3 & 0 & 0 \\ -\sin q_3 & -\cos q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{0}T_3 = \left({}^{0}T_1\right)\left({}^{1}T_2\right)\left({}^{2}T_3\right) = \begin{bmatrix} c_{12}c_3 & -c_{12}s_3 & -s_{12} & l_2c_{12} - l_3s_{12} + l_1c_1 \\ s_{12}c_3 & -s_{12}s_3 & c_{12} & l_3c_{12} + l_2s_{12} + l_1s_1 \\ -s_3 & -c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

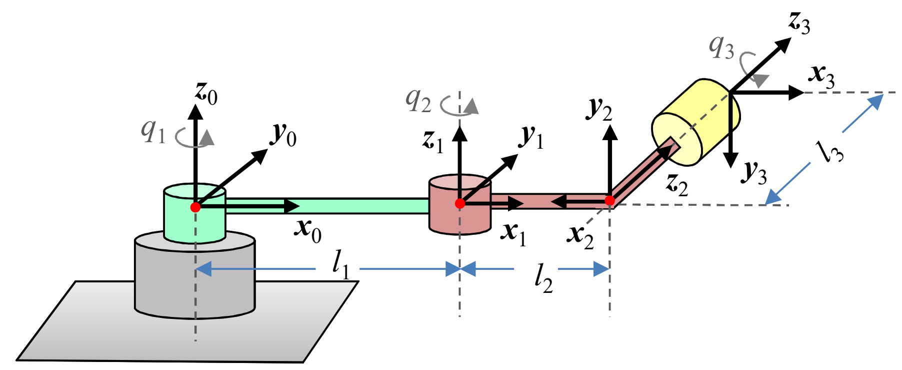
$c_1 = \cos(q_1)$
$s_1 = \sin(q_1)$
$c_{12} = \cos(q_1+q_2)$
$s_{12} = \sin(q_1+q_2)$

Convención de Denavit-Hartenberg

(3) Transformación Homogénea

Ejemplo

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	q_1	l_1	0
2	0	$180+q_2$	$-l_2$	90
3	l_3	$180+q_3$	0	0



Posición inicial (mostrada en la figura):

- Todas las variables articulares en cero ($q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$)

$$
{}^0T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^1T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^2T_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow
{}^0T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Verificar en la figura “interpretando” las transformaciones homogéneas

Convención de Denavit-Hartenberg

Ilustración

Nota: en el vídeo se usa r en lugar de a y no se añade subíndices

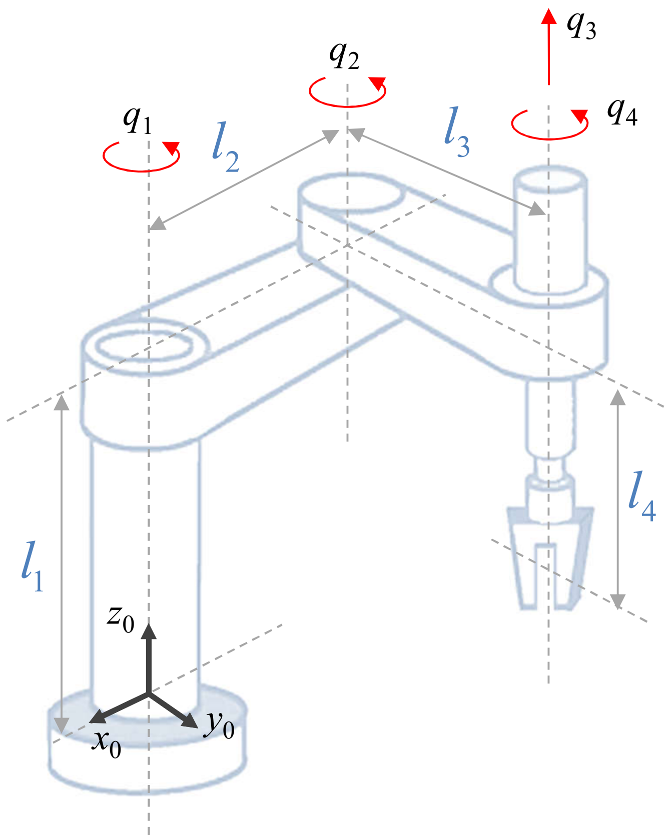
https://youtu.be/rA9tm0gTln8

Temas

1. Convención de Denavit-Hartenberg
   1.1. Asignación de sistemas de referencia
   1.2. Asignación de parámetros DH
   1.3. Transformación homogénea
2. **Ejemplo 1 (DH): Robot SCARA**
3. Ejemplo 2 (DH): Robot Fanuc

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

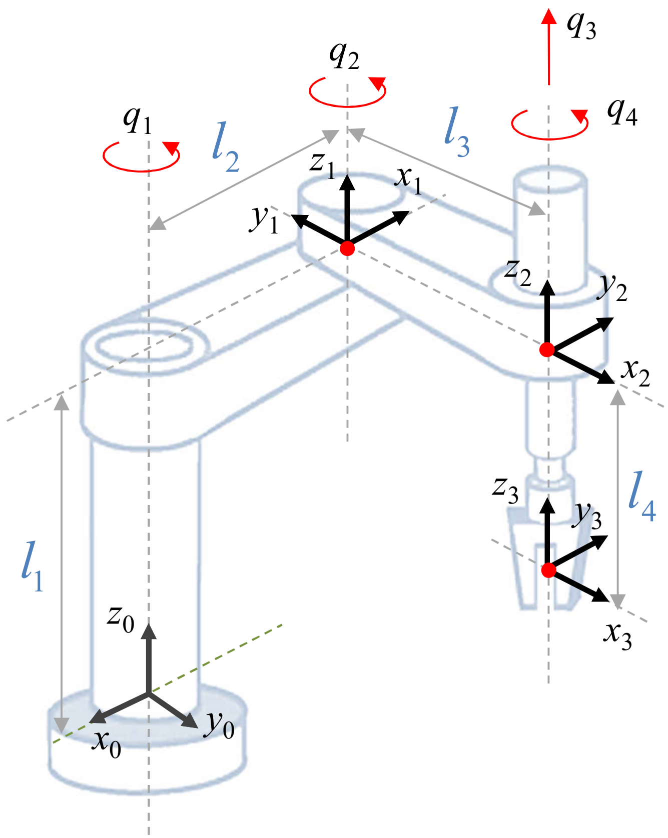
1. Sistemas de referencia



- Enumeración y ejes de articulaciones
- Sistema de coordenadas de la base: z_0 a lo largo del eje de la articulación 1 (origen arbitrario, x_0 arbitrario)

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

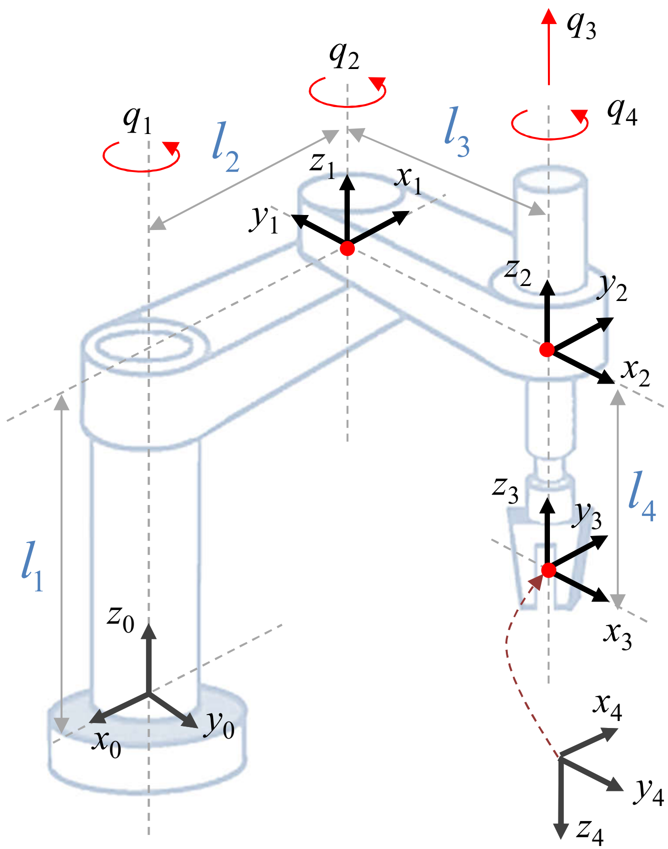
1. Sistemas de referencia



- Eje z_i: z_i en eje de articulación $i+1$
- Origen del sistema $\{i\}$:
  a) Intersección de z_i & z_{i-1}, o
  b) Intersección de z_i con normal entre z_i & z_{i-1}
  (Si z_i & z_{i-1} paralelos: normal arbitraria)
- Eje x_i: en dirección de z_{i-1} x z_i. Si (z_{i-1} & z_i) paralelos, x_i en su normal común
- Eje y_i: asignar y_i para completar el sistema coordenado (según la regla de la mano derecha)

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

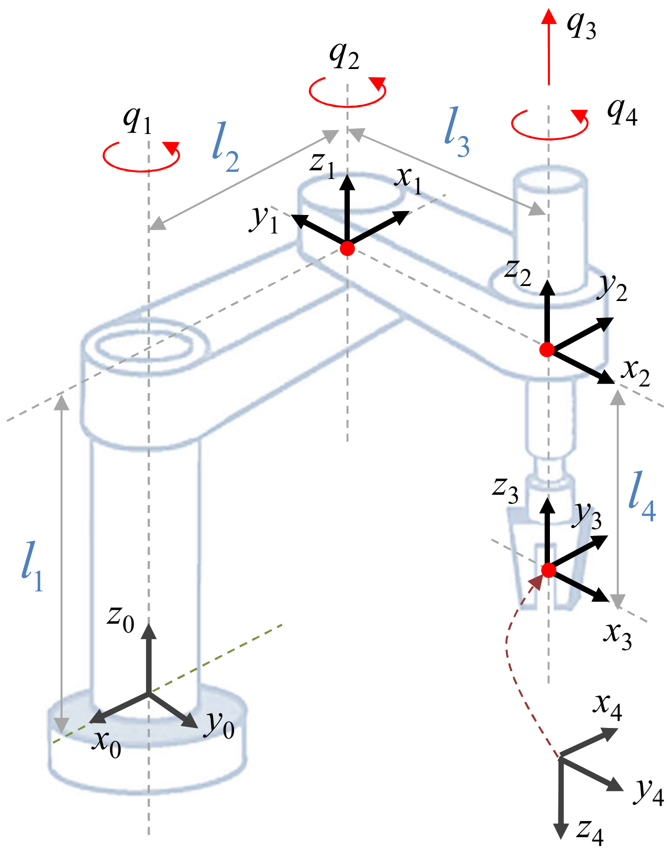
1. Sistemas de referencia



- Sistema del efector final $\{n\}$:
  - x_n ortogonal a $z_{n\text{-}1}$ e intersectarlo (origen al final de la cadena)
  - z_n en dirección de $z_{n\text{-}1}$ hacia afuera
  - y_n completa el sistema

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

2. Parámetros DH



Artic. *i*	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	l_1	$180°+q_1$	l_2	$0°$
2	0	$-90°+q_2$	l_3	$0°$
3	$-l_4+q_3$	$0°$	0	$0°$
4	0	$90°+q_4$	0	$180°$

d_i: distancia de $\{i\text{-}1\}$ a [intersección de z_{i-1} con x_i] en z_{i-1}

θ_i: ángulo de x_{i-1} a x_i alrededor de z_{i-1}

a_i: distancia de [intersección de z_{i-1} con x_i] a $\{i\}$ en x_i

α_i: ángulo de z_{i-1} a z_i alrededor de x_i

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

3. Matrices de Transformación Homogénea

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	l_1	$180°+q_1$	l_2	$0°$
2	0	$-90°+q_2$	l_3	$0°$
3	$-l_4+q_3$	$0°$	0	$0°$
4	0	$90°+q_4$	0	$180°$

$$^0T_1(q_1) = \begin{bmatrix} -\cos q_1 & \sin q_1 & 0 & -l_2\cos q_1 \\ -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 & -l_2\sin q_1 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^2T_3(q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 - l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^1T_2(q_2) = \begin{bmatrix} \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & l_3\sin q_2 \\ -\cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & -l_3\cos q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^3T_4(q_4) = \begin{bmatrix} -\sin q_4 & \cos q_4 & 0 & 0 \\ \cos q_4 & \sin q_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

3. Matrices de Transformación Homogénea

- Efector final con respecto a la base:

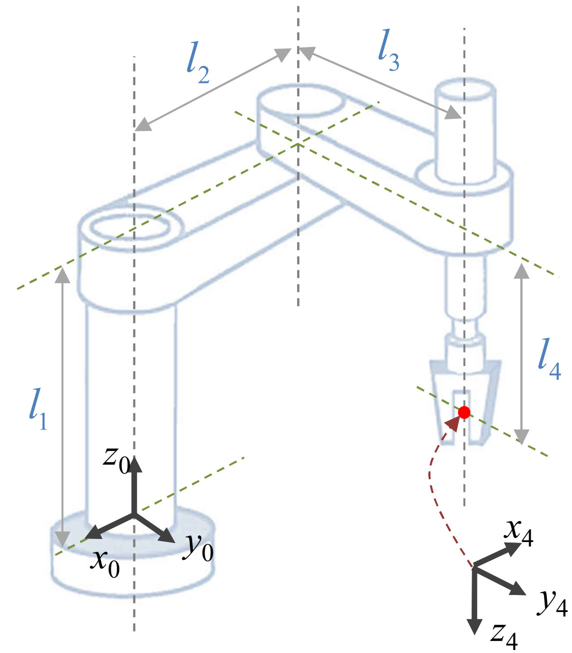
$$ {}^{0}T_{4} = \left({}^{0}T_{1}\right)\left({}^{1}T_{2}\right)\left({}^{2}T_{3}\right)\left({}^{3}T_{4}\right) $$

$$ = \begin{bmatrix} -c_{124} & -s_{124} & 0 & -l_3 s_{12} - l_2 c_1 \\ -s_{124} & c_{124} & 0 & l_3 c_{12} - l_2 s_1 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 - l_4 + q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

- Para la configuración inicial ($q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0$):

$$ {}^{0}T_{4} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -l_2 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & -1 & l_1 - l_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, $$

Verificar por inspección en el diagrama



Robot en configuración inicial

Comparar con el resultado obtenido usando el método geométrico

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

- Nota: representación alternativa de parámetros DH

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	l_1	$180+q_1$	l_2	0
2	0	$-90+q_2$	l_3	0
3	$-l_4+q_3$	0	0	0
4	0	$90+q_4$	0	180

La transformación homogénea resultante ya contiene la posición inicial (de la figura) para las articulaciones en cero

Usando una posición inicial ("home")

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i	Home
1	l_1	q_1	l_2	0	180°
2	0	q_2	l_3	0	-90°
3	q_3	0	0	0	$-l_4$
4	0	q_4	0	180	90°

La transformación homogénea resultante no contiene la posición inicial (de la figura) para las articulaciones en cero

Se debe usar las articulaciones con el valor "home" para obtener la posición de la figura

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

- Matrices de Transformación Homogénea usando Python (SymPy)

Función que obtiene la transf. homogénea dados parámetros DH

```
import sympy as sp

def Tdh(d, theta, a, alpha): # completar
```

Uso de variables simbólicas para el cálculo de cada transformación homogénea.

```
# Variables simbólicas
q1, q2, q3, q4 = sp.symbols("q1 q2 q3 q4")
l1, l2, l3, l4 = sp.symbols("l1 l2 l3 l4")

# Transformaciones homogéneas
T01 = Tdh(l1, sp.pi+q1, l2, 0)
T12 = Tdh(0,-sp.pi/2+q2, l3, 0)
T23 = Tdh(-l4+q3, 0, 0, 0)
T34 = Tdh(0, sp.pi/2+q4, 0, sp.pi)

# Transformación homogénea final
Tf = sp.simplify(T01*T12*T23*T34)
```

Para las condiciones de la figura

```
# Evaluación con valores específicos
Tf.subs([(q1,0),(q2,0),(q3,0),(q4,0)])
```

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

- Verificación de DH usando Python
  - Se define el robot usando únicamente los parámetros DH

```
from serialrobot import *

# Longitudes iniciales
l1=1; l2=1; l3=1; l4=0.5;

# Definición del robot usando parámetros DH
# Orden: d, th, a, alpha, PR
L = [[ l1,     np.pi, l2,      0, 'r'],
     [  0, -np.pi/2, l3,      0, 'r'],
     [-l4,        0,  0,      0, 'p'],
     [  0,  np.pi/2,  0, np.pi, 'r']]

# Creación del robot
scara = SerialRobot(L, name='scara')

# Cinemática directa (posición inicial)
T = scara.fkine([0,0,0,0])

# Visualización (de la posición inicial)
alims = [[-2,2],[-2,2],[-0.2, 1.3]]
scara.plot([0, 0, 0, 0], axlimits=alims)
```

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	l_1	$180+q_1$	l_2	0
2	0	$-90+q_2$	l_3	0
3	$-l_4+q_3$	0	0	0
4	0	$90+q_4$	0	180

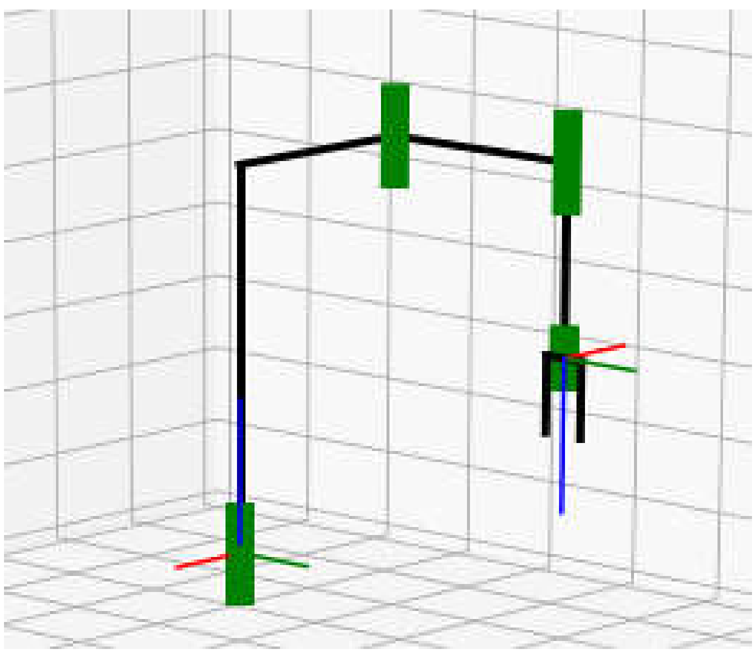
Se usa los parámetros DH incluyendo la configuración inicial (la variable angular q se inicia a 0)

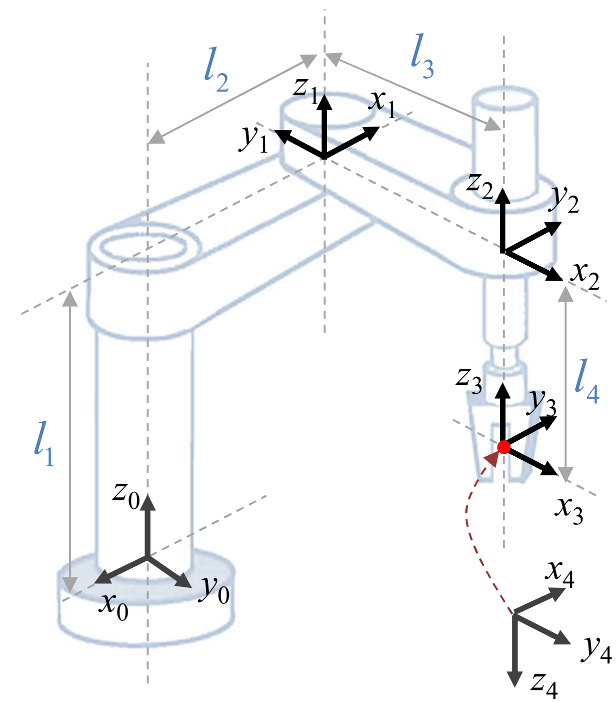
Al definir el eslabón PR indica :
‘r’ = articulación de revolución
‘p’ = articulación de prismática

La clase SerialRobot está en el archivo serialrobot.py (en la página del curso)

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

- Verificación de DH usando Python
  - Al graficar la configuración inicial, se debe observar un modelo simplificado pero similar al robot utilizado
  - Los elementos verdes indican (deben indicar) los ejes "z" de los sistemas de referencia asignados



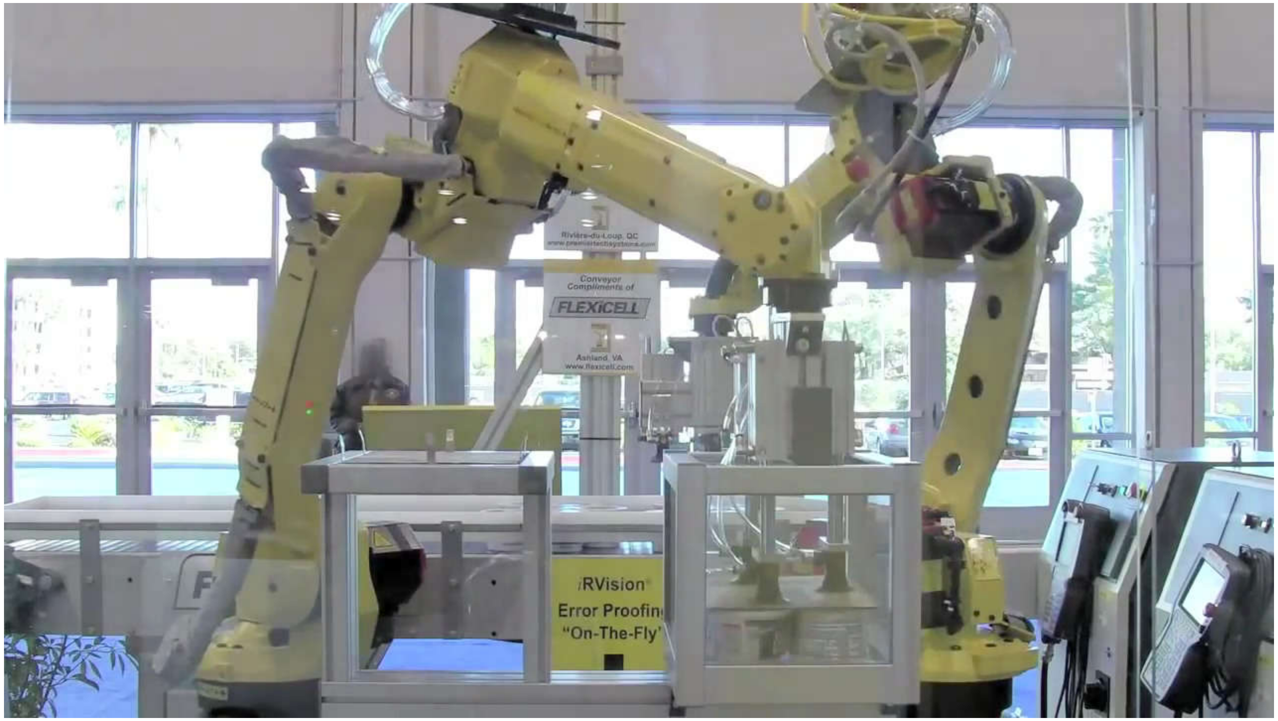


Temas

1. Convención de Denavit-Hartenberg
   1.1. Asignación de sistemas de referencia
   1.2. Asignación de parámetros DH
   1.3. Transformación homogénea
2. Ejemplo 1 (DH): Robot SCARA
3. **Ejemplo 2 (DH): Robot Fanuc**

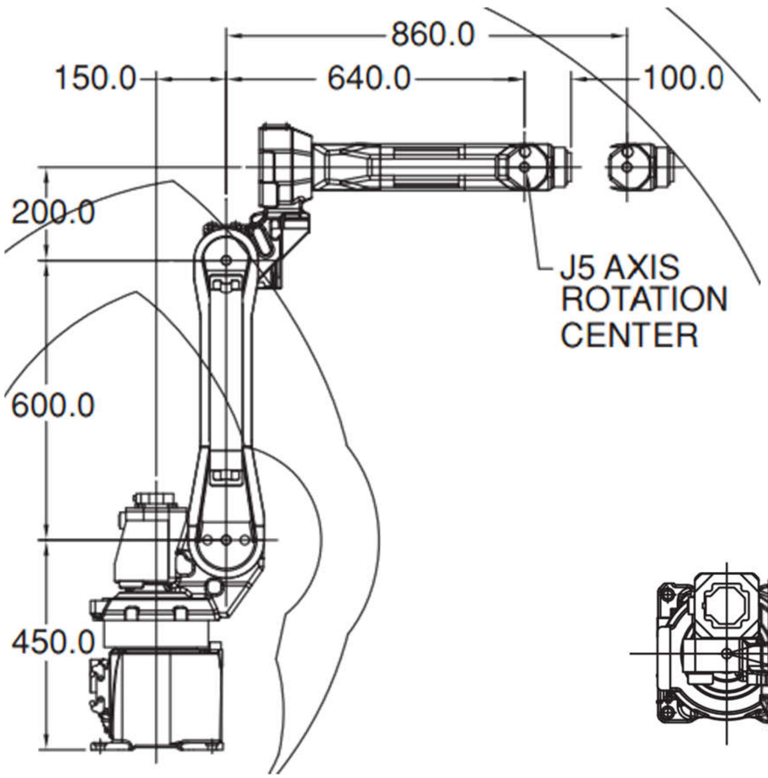
Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

Robot Fanuc M-10iA

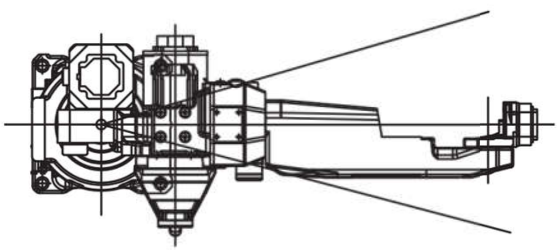


https://youtu.be/Vrxaz0_X3Qs

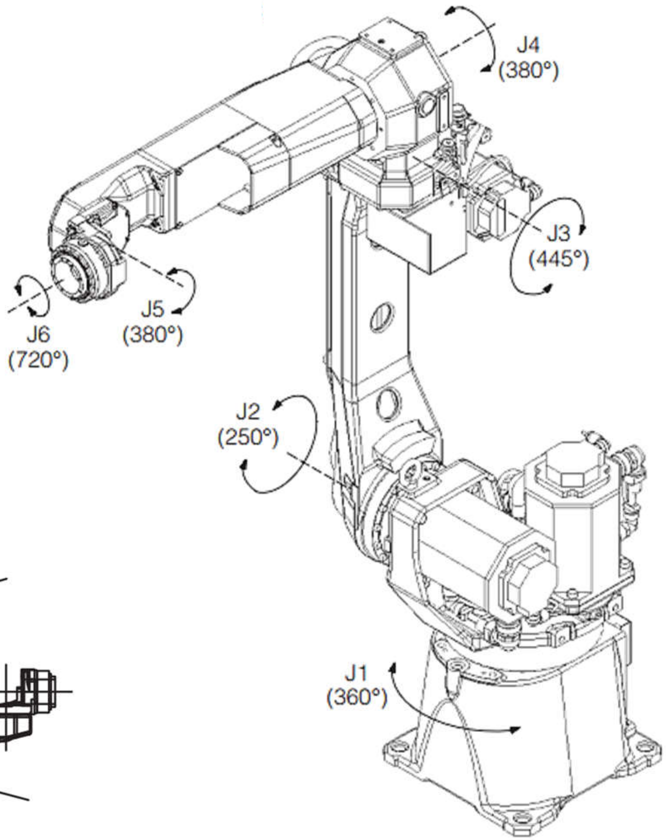
Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA



Esquemático: vista lateral



Esquemático: vista superior

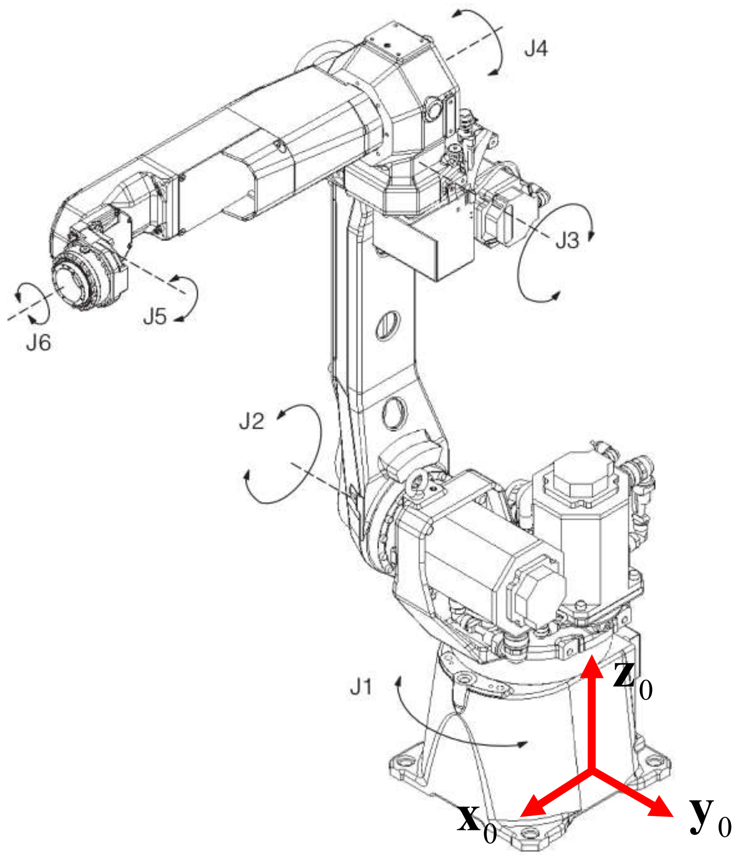


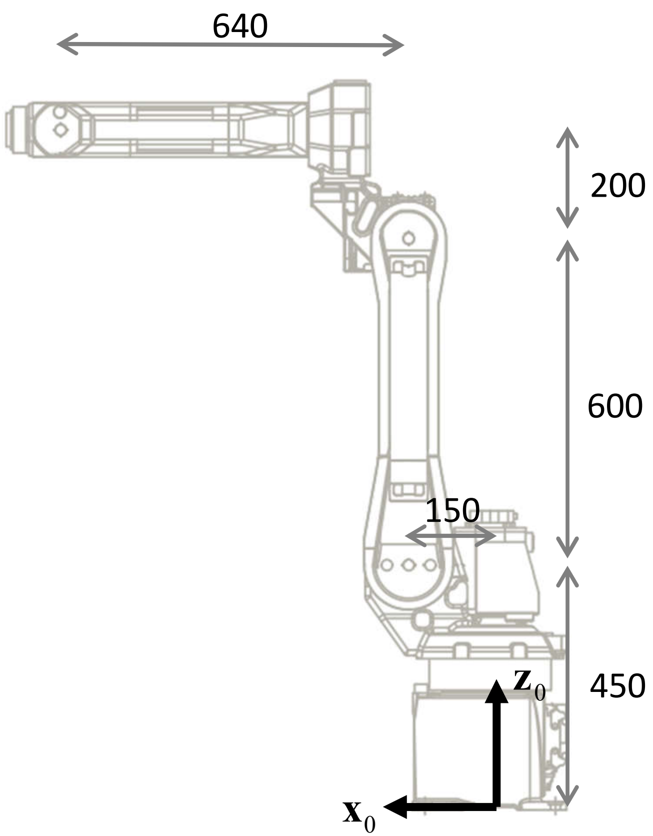
Esquemático:
vista isométrica

De: Datasheet M-10iA Series FANUC ROBOTICS

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

1. Sistemas de referencia

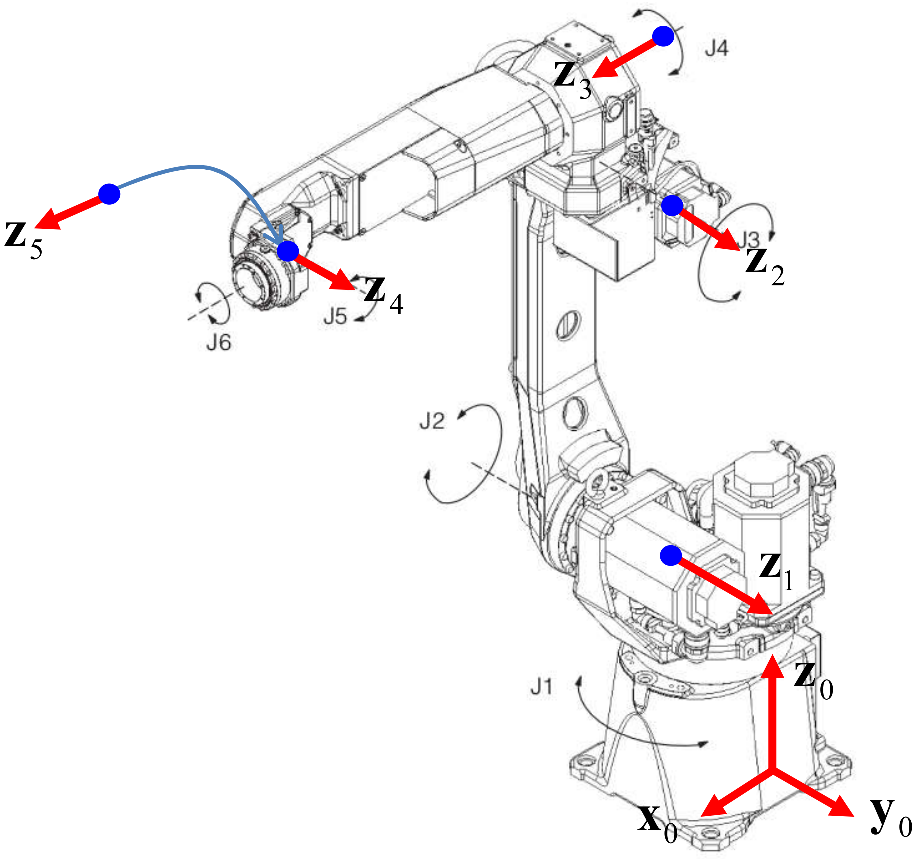


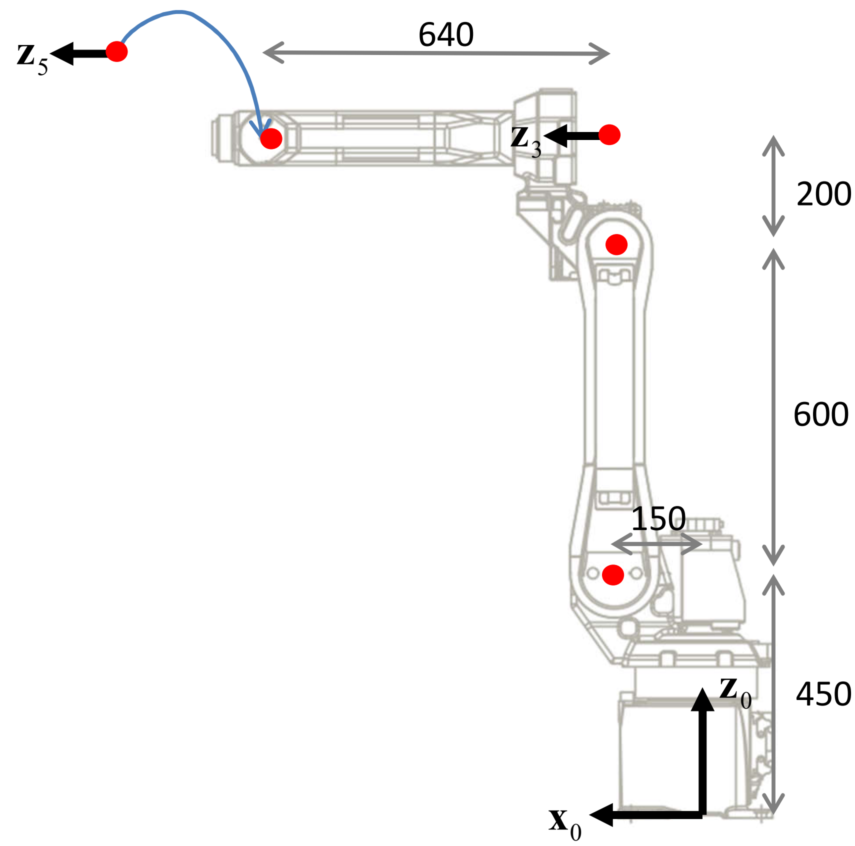


- Enumeración y ejes de articulaciones
- Sistema de coordenadas de la base

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

1. Sistemas de referencia



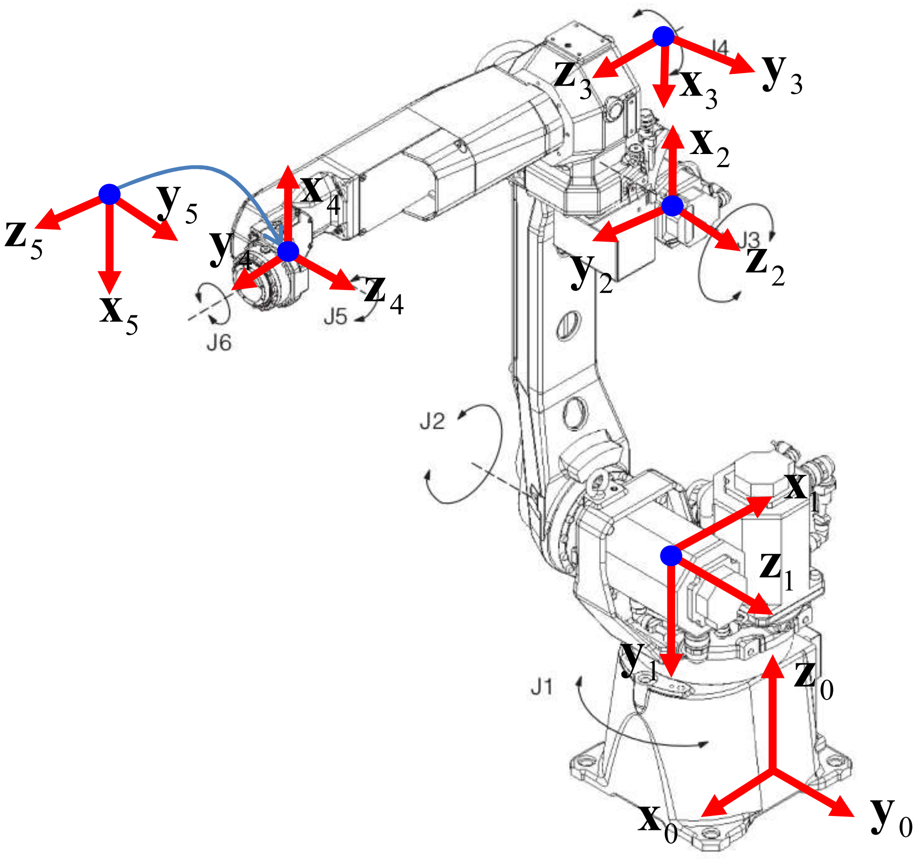


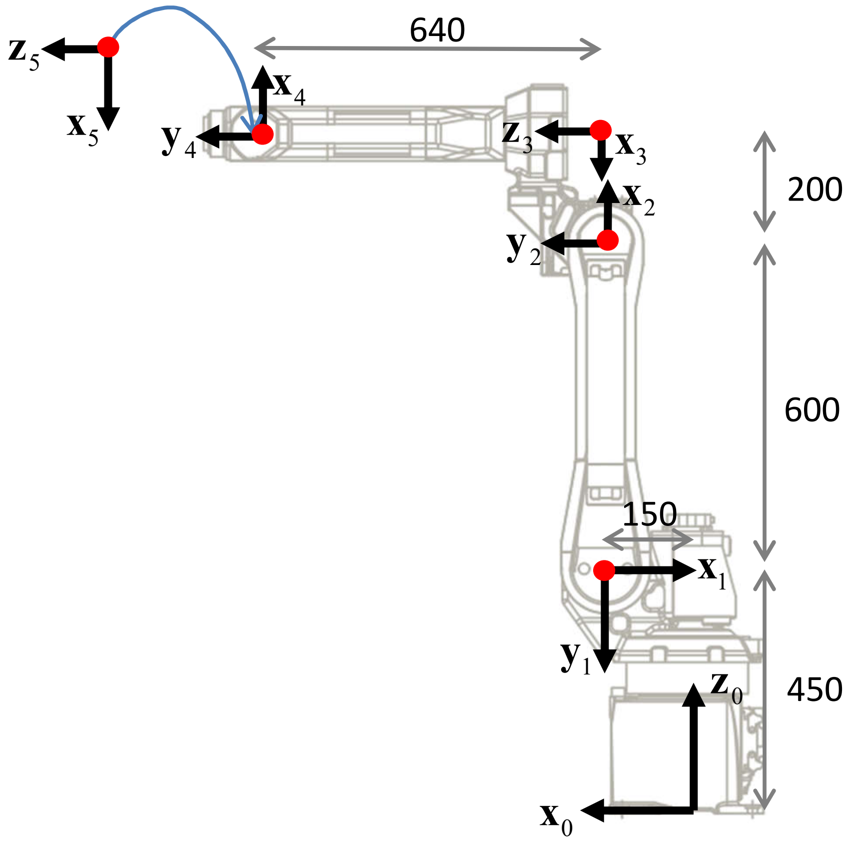
- Eje z_i
- Origen del sistema $\{i\}$

UTEC
UNIVERSIDAD DE INGENIERÍA Y TECNOLOGÍA

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

1. Sistemas de referencia

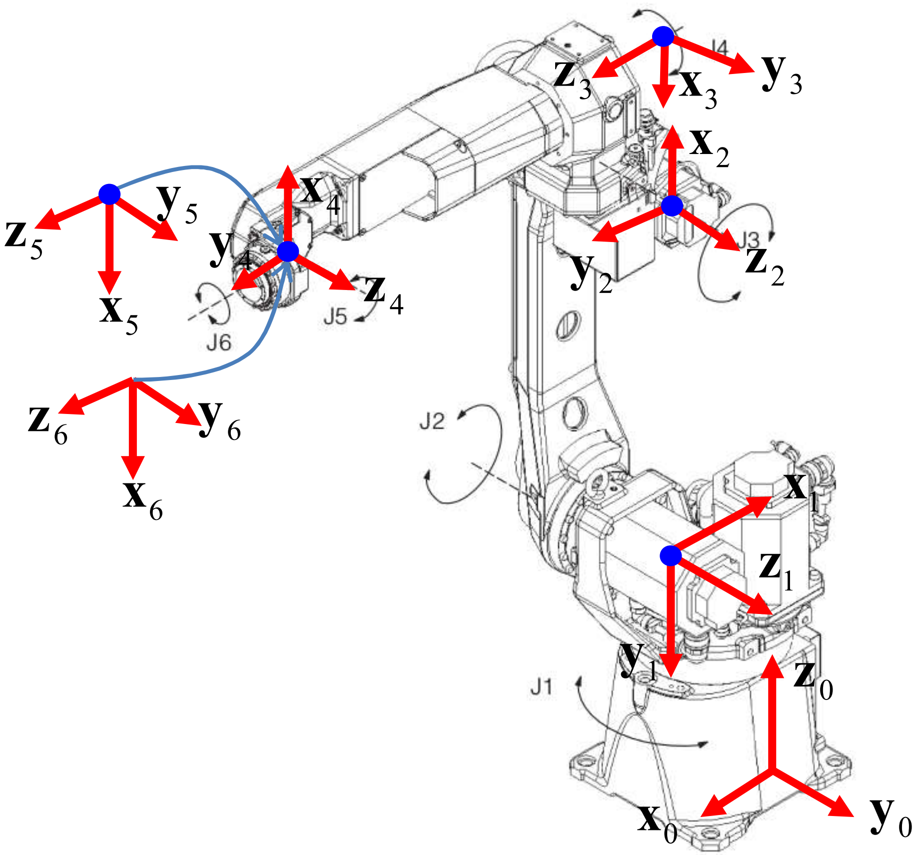


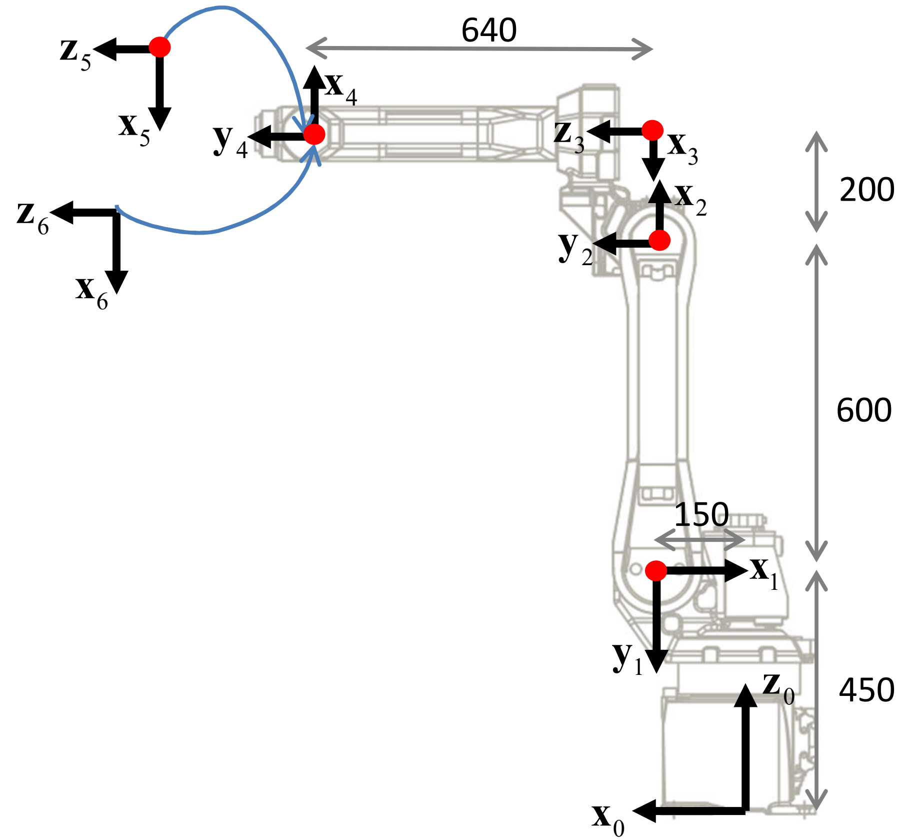


- Eje x_i
- Eje y_i

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

1. Sistemas de referencia





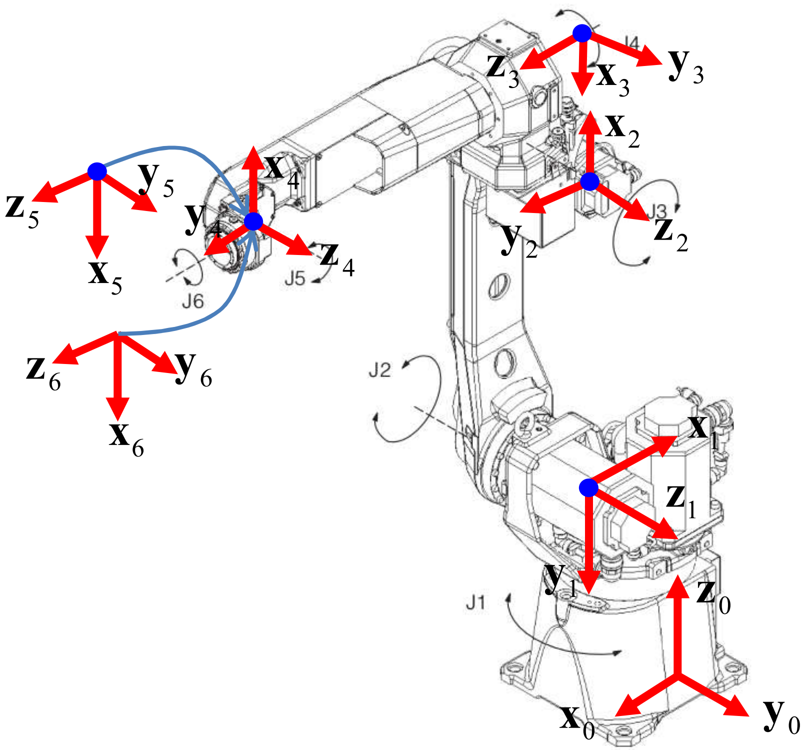
- Sistema del efector final

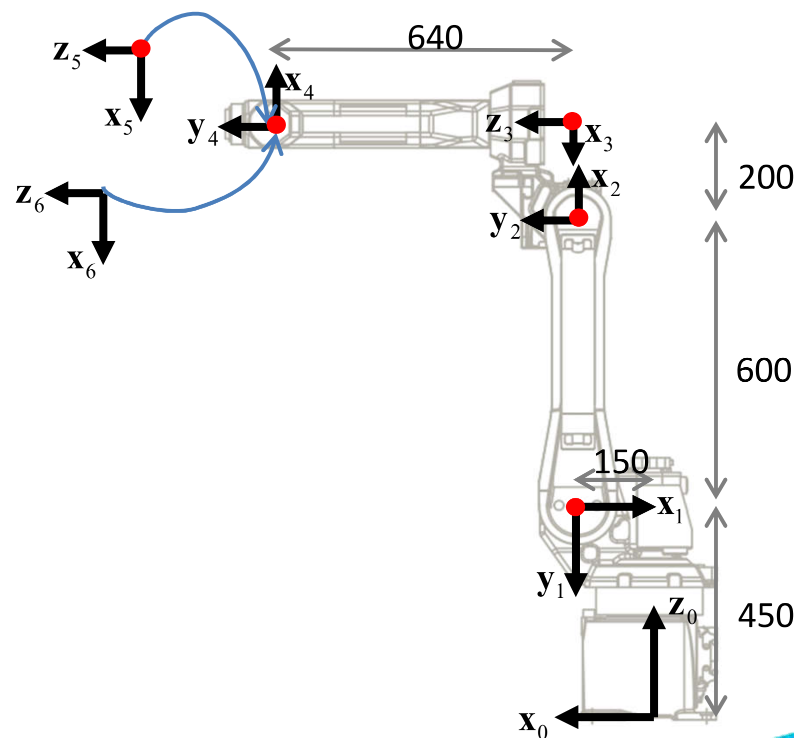
Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

2. Parámetros DH

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	450	$180°+q_1$	-150	90°
2	0	$90°+q_2$	600	0°
3	0	$180°+q_3$	-200	90°

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
4	640	$180°+q_4$	0	90°
5	0	$180°+q_5$	0	90°
6	0	q_6	0	0°





Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

3. Matrices de Transformación Homogénea

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	450	$180°+q_1$	-150	90°
2	0	$90°+q_2$	600	0°
3	0	$180°+q_3$	-200	90°

Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
4	640	$180°+q_4$	0	90°
5	0	$180°+q_5$	0	90°
6	0	q_6	0	0°

$$ {}^0T_1(q_1)=\begin{bmatrix} -\cos(q_1) & 0 & -\sin(q_1) & 150\cos(q_1) \\ -\sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) & 150\sin(q_1) \\ 0 & 1 & 0 & 450 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^3T_4(q_4)=\begin{bmatrix} -\cos(q_4) & 0 & -\sin(q_4) & 0 \\ -\sin(q_4) & 0 & \cos(q_4) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 640 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^1T_2(q_2)=\begin{bmatrix} -\sin(q_2) & -\cos(q_2) & 0 & -600\sin(q_2) \\ \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 600\cos(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^4T_5(q_5)=\begin{bmatrix} -\cos(q_5) & 0 & -\sin(q_5) & 0 \\ -\sin(q_5) & 0 & \cos(q_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2T_3(q_3)=\begin{bmatrix} -\cos(q_3) & 0 & -\sin(q_3) & 200\cos(q_3) \\ -\sin(q_3) & 0 & \cos(q_3) & 200\sin(q_3) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^5T_6(q_6)=\begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

3. Matrices de Transformación Homogénea

- Efector final con respecto a la base:

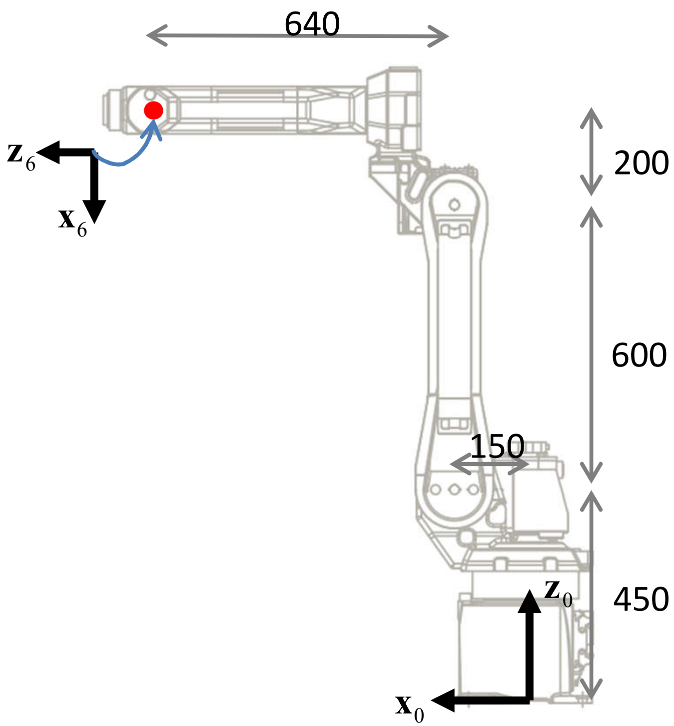
$$^{0}T_{6} = \left(^{0}T_{1}\right)\left(^{1}T_{2}\right)\left(^{2}T_{3}\right)\left(^{3}T_{4}\right)\left(^{4}T_{5}\right)\left(^{5}T_{6}\right)$$

- Para la configuración inicial (ángulos en cero):

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = 0$$

$$^{0}T_{6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 790 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1250 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar por inspección en el diagrama



Robot en configuración inicial

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

- Matrices de Transformación Homogénea usando Python (SymPy)

Función que obtiene la transf. homogénea dados parámetros DH

```
def Tdh(d,theta,a,alpha): # completar
```

Uso de variables simbólicas para el cálculo de cada transformación homogénea.

```
# Variables simbólicas
q1, q2, q3, q4, q5, q6 = sp.symbols("q1 q2 q3 q4, q5, q6")

# Transformaciones homogéneas
T01 = Tdh(450,   sp.pi+q1, -150, sp.pi/2);
T12 = Tdh(  0, q2+sp.pi/2,  600, 0);
T23 = Tdh(  0,   q3+sp.pi, -200, sp.pi/2);
T34 = Tdh(640,   q4+sp.pi,    0, sp.pi/2);
T45 = Tdh(  0,   q5+sp.pi,    0, sp.pi/2);
T56 = Tdh(  0,         q6,    0, 0);

# Transformación homogénea final
Tf = sp.simplify(T01*T12*T23*T34*T45*T56)
```

Para las condiciones de la figura

```
# Evaluación con valores específicos
Tf.subs({q1:0, q2:0, q3:0, q4:0, q5:0, q6:0})
```

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

- Verificación de DH usando Python
  - Se define el robot usando únicamente los parámetros DH

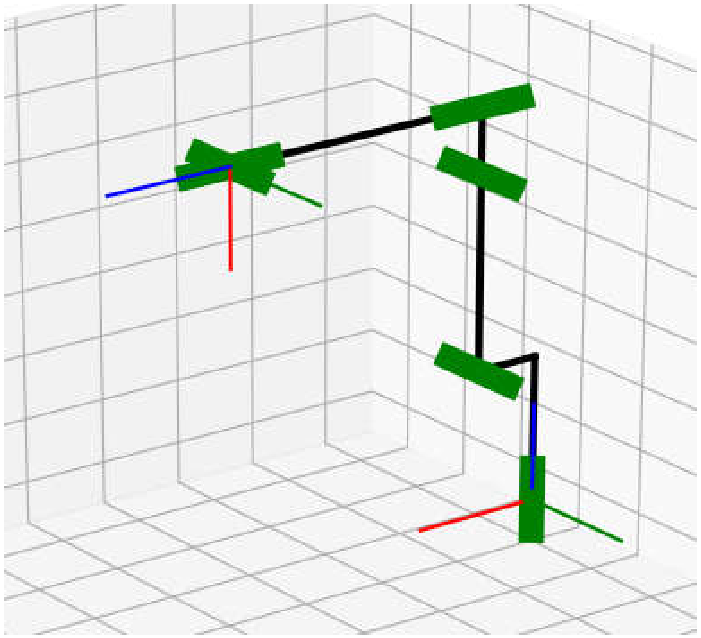
```
from serialrobot import *

# Definición del robot usando parámetros DH
# Orden: d, th, a, alpha, PR
L = [[ 0.450,   np.pi, -0.150, np.pi/2, 'r'],
     [     0, np.pi/2,  0.600,       0, 'r'],
     [     0,   np.pi, -0.200, np.pi/2, 'r'],
     [ 0.640,   np.pi,      0, np.pi/2, 'r'],
     [     0,   np.pi,      0, np.pi/2, 'r'],
     [     0,       0,      0,       0, 'r']]

# Creación del robot
fanuc = SerialRobot(L, name='fanuc-M10iA')

# Cinemática directa (posición inicial)
T = fanuc.fkine([0,0,0,0,0,0])

# Ejes para la visualización
alims = [[-0.1,1.3],[-0.7,0.7],[-0.1, 1.4]]
# Visualización (de la posición inicial)
fanuc.plot([0,0,0,0,0,0], axlimits=alims,
           ascale=0.3, ee=False)
```

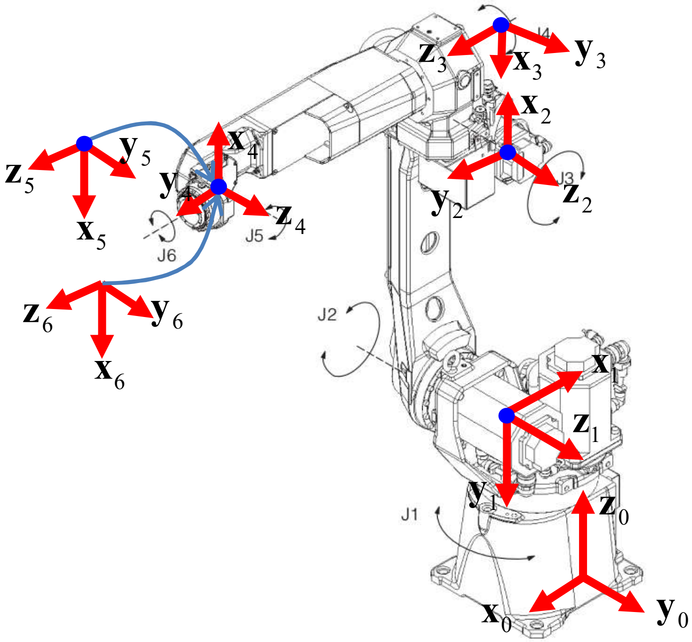
Artic. i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	450	$180°+q_1$	-150	90°
2	0	$90°+q_2$	600	0°
3	0	$180°+q_3$	-200	90°
4	640	$180°+q_4$	0	90°
5	0	$180°+q_5$	0	90°
6	0	q_6	0	0°

La clase SerialRobot está en el archivo serialrobot.py (en la página del curso)

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

- Verificación de DH usando Python
  - Al graficar la configuración inicial, se debe observar un modelo simplificado pero similar al robot utilizado
  - Los elementos verdes indican (deben indicar) los ejes “z” de los sistemas de referencia asignados





Referencias

- B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani, y G. Oriolo. *Robotics: modelling, planning an-d control*. Springer Science & Business Media, 2010 (*Secciones* 2.8-2.9)

- M.W. Spong, S. Hutchinson, y M. Vidyasagar. *Robot Modeling and Control.* John Wiley & Sons, 2006 (*Secciones* 3.1-3.2)

Denavit-Hartenberg Modificado

- Introducido por J.J. Craig (*Introduction to Robotics, Mechanics and Control*)
- Características principales:
  - A veces genera confusiones (cuando no se menciona que se está usando)
  - Usa eje z_i en articulación i
  - a_i, α_i: relacionan z_i y z_{i+1} a lo largo de x_i
  - d_i, θ_i: relacionan x_{i-1} a x_i a lo largo de z_i

Modificado: $${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -s_{\theta_i} & 0 & a_{i-1} \\ c_{\alpha_{i-1}} s_{\theta_i} & c_{\alpha_{i-1}} c_{\theta_i} & -s_{\alpha_{i-1}} & -d_i s_{\alpha_{i-1}} \\ s_{\alpha_{i-1}} s_{\theta_i} & s_{\alpha_{i-1}} c_{\theta_i} & c_{\alpha_{i-1}} & d_i c_{\alpha_{i-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estándar: $${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c_{\theta_i} & -c_{\alpha_i} s_{\theta_i} & s_{\alpha_i} s_{\theta_i} & a_i c_{\theta_i} \\ s_{\theta_i} & c_{\alpha_i} c_{\theta_i} & -s_{\alpha_i} c_{\theta_i} & a_i s_{\theta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

Matrices de Transformación Homogénea usando MATLAB

Función que obtiene la transf. homogénea dados parámetros DH

```
function T = dh(d,theta,a,alpha)
```

Uso de variables simbólicas para el cálculo de cada transformación homogénea.

```
% Declaracion de variables simbolicas
syms q1 q2 q3 q4 l1 l2 l3 pi

% Transformaciones homogeneas parciales
T1 = simplify( dh(l1, pi+q1, l2, 0) )
T2 = simplify( dh(0,-pi/2+q2, l3, 0) )
T3 = simplify( dh(-l4+q3, 0, 0, 0) )
T4 = simplify( dh(0, pi/2+q4, 0, pi) )

% Transformacion homogenea final
Tf = simplify(T1*T2*T3*T4)
```

Para las condiciones de la figura

```
% Evaluacion con valores  especificos
q1=0; q2=0; q3=0; q4=0;
eval(Tf);
```

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

Verificación usando el Robotics Toolbox de P. Corke para MATLAB

```
matlabrc % Para evitar problemas con funciones
addpath('path_a_robotics_toolbox/common')
addpath('path_a_robotics_toolbox/robot')

% Longitudes iniciales
l1=1; l2=1; l3=1; l4=0.5;

% Definicion del robot usando DH (th,d,a,alfa,P/R)
L(1)=Link([0, l1, l2,  0, 0]);
L(2)=Link([0,  0, l3,  0, 0]);
L(3)=Link([0,  0,  0,  0, 1]);
L(4)=Link([0,  0,  0, pi, 0]);
% Creacion del robot
scara = SerialLink(L, 'name', 'scara');

% Cinematica directa (ejemplo: posicion home)
scara.fkine([pi -pi/2 -l4 pi/2])

% Visualizacion (de la posicion inicial)
scara.plot([pi -pi/2 -l4 pi/2],'workspace',...
           [-2 2 -2 2 -1 2]);
```

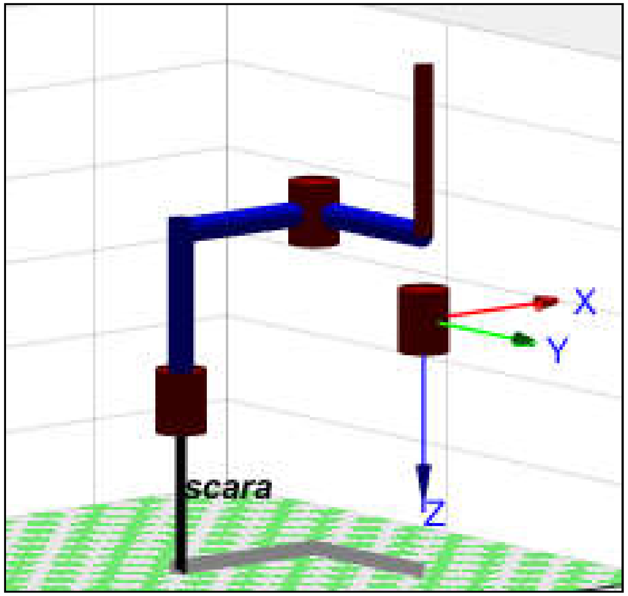
Se usa parámetros DH sin incluir configuración inicial (la variable angular q se inicia a 0)

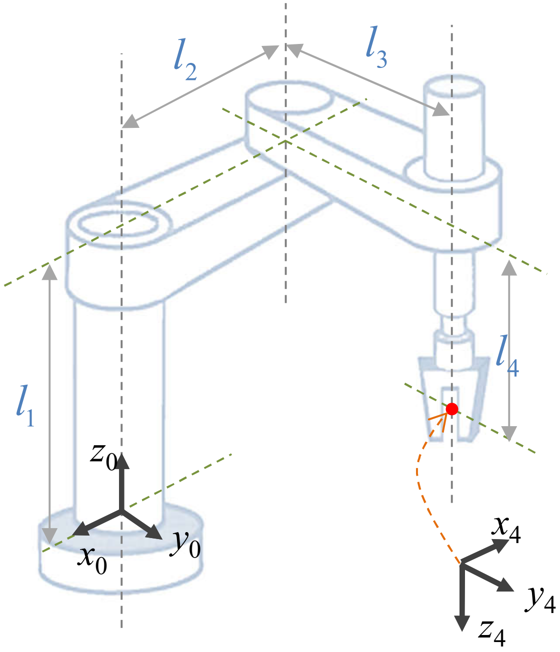
Al definir el eslabón P/R indica :
- 0 = articulación de revolución
- 1 = articulación de prismática

http://petercorke.com/wordpress/toolboxes/robotics-toolbox

Ejemplo 1: DH de un Robot SCARA

Verificación usando el Robotics Toolbox de P. Corke para MATLAB





Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

Matrices de Transformación Homogénea usando MATLAB

Función que obtiene la transf. homogénea dados parámetros DH

```
function T = dh(d,theta,a,alpha)
```

Uso de variables simbólicas para el cálculo de cada transformación homogénea.

```
% Declaracion de variables simbolicas
syms q1 q2 q3 q4 q5 q6 pi
% Transformaciones homogeneas parciales
T1 = simplify( dh(450, pi+q1, -150, pi/2) );
T2 = simplify( dh(0, q2+pi/2, 600, 0) );
T3 = simplify( dh(0, q3+pi, -200, pi/2) );
T4 = simplify( dh(640, q4+pi, 0, pi/2) );
T5 = simplify( dh(0, q5+pi, 0, pi/2) );
T6 = simplify( dh(0, q6, 0, 0) );
% Transformacion homogenea final
Tf = simplify(T1*T2*T3*T4)
```

Para las condiciones de la figura

```
% Evaluacion con datos especificos
q1=0; q2=0; q3=0; q4=0; q5=0; q6=0;
eval(Tf);
```

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

Verificación usando el Robotics Toolbox de P. Corke para MATLAB

```
matlabrc % Para evitar problemas con funciones
addpath('path_a_robotics_toolbox/common')
addpath('path_a_robotics_toolbox/robot')

% Definicion del robot usando DH (th,d,a,alfa)
L(1)=Link([0, 0.450, -0.150, pi/2]);
L(2)=Link([0,     0,  0.600,    0]);
L(3)=Link([0,     0, -0.200, pi/2]);
L(4)=Link([0, 0.640,      0, pi/2]);
L(5)=Link([0,     0,      0, pi/2]);
L(6)=Link([0,     0,      0,    0]);

% Creacion del robot
fanuc = SerialLink(L, 'name', 'fanuc');

% Cinematica directa (ejemplo)
fanuc.fkine([pi pi/2 pi pi pi 0])

% Visualizacion
fanuc.plot([pi pi/2 pi pi pi 0]);
```

http://petercorke.com/wordpress/toolboxes/robotics-toolbox

Ejemplo 2: DH del Robot Fanuc M-10iA

Verificación usando el Robotics Toolbox de P. Corke para MATLAB