# Somatórios e Logaritmos

$f\colon A \to \mathbb{R}$

$X$**:** subconjunto de $A$.

$a, b$**:** inteiros.

**Notação 1.**
$$\sum_{x \in X} f(x)$$
*denota a soma dos valores de* $f(x)$ *para cada* $x \in X$*.*

*Se* $X = \emptyset$*, então*
$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

$$\sum_{i=a}^{b} f(i) := \sum_{x \in \{a, a+1, \ldots, b\}} f(x).$$

**Teorema 1.** *Dados um conjunto* $X$ *e* $c \in \mathbb{R}$*,*
$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

**Teorema 2.** *Dados* $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ *e* $X \subseteq A$*,*
$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

**Teorema 3.** *Dada* $f\colon A \to \mathbb{R}$*,* $X \subseteq A$ *e* $c \in \mathbb{R}$*,*
$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

**Exemplo 1.** *Qual o valor do somatório* $\sum_{j=1}^{5} j^2$*?*

*Temos que* $\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$

**Exemplo 2.** *Qual o valor do somatório* $\sum_{k=4}^{8} (-1)^k$*?*

*(Resolver em sala)*

Às vezes é útil deslocar o índice do somatório. Isso é geralmente feito para juntar dois somatórios cujos os índices não batem.

**Exemplo 3.** *Suponha o somatório* $\sum_{j=1}^{5} j^2$*. Queremos deslocar o índice, começando de* $0$ *até* $4$*. Para isso, fazemos* $k = j - 1$*. Então o termo* $j^2$ *vira* $(k+1)^2$*. Assim,*

$$\sum_{j=1}^{5} j^2 = \sum_{k=0}^{4} (k+1)^2$$

*É fácil verificar que ambos são iguais a* $55$*.*

**Exemplo 4.** *Somatórios duplos aparecem em diversos contextos, por exemplo, em análise de algoritmos com laços aninhados. Um exemplo é:*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} ij &= \sum_{i=1}^{4} (i + 2i + 3i) \\ &= \sum_{i=1}^{4} 6i \\ &= 6 \sum_{i=1}^{4} i \\ &= 6(1+2+3+4) = 60. \end{aligned}$$

**Teorema 4.** $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2.$

*Demonstração.* Seja,
$S = 1 + 2 + \ldots + n.$
$S = n + (n-1) + \ldots + 1.$
Somando termo a termo,

$2S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$. Isolando $S$, o resultado segue. $\square$

**Exemplo 5.** *Qual o valor de* $\sum_{i=1}^{100} 7i$*?*

$\sum_{i=1}^{100} 7i = 7 \sum_{i=1}^{100} i = 7 \frac{(100)(101)}{2} = 35350.$

**Exemplo 6.** *Qual o valor de* $\sum_{i=50}^{100} 11i$*?*

*Note que* $\sum_{i=1}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{49} 11i + \sum_{i=50}^{100} 11i$*. Assim,*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=50}^{100} 11i &= \sum_{i=1}^{100} 11i - \sum_{i=1}^{49} 11i \\
&= 11\sum_{i=1}^{100} i - 11\sum_{i=1}^{49} i \\
&= 11\left(\sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{49} i\right) \\
&= 11\left(\frac{100 \cdot 101}{2} - \frac{49 \cdot 50}{2}\right) \\
&= 11(5050 - 1225) = 42075.
\end{aligned}$$

**Definição 1.** $\log_b x$ *é o número* $y$ *tal que* $b^y = x$*.*

**Exemplo 7.** $\log_3 81 = 4$ *pois* $3^4 = 81$

Propriedades (independem do valor da base):

- $b^{log_b a} = a$
- $\log ab = \log a + \log b$
- $\log a/b = \log a - \log b$
- $\log a^b = b \log a$
- $\log \sqrt[b]{a} = (1/b) \log a$

(Mudança de base) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

Em computação, quando o logaritmo é escrito sem base, por convenção, significa que é base 2.