Exercícios - Prova por Indução

Prof. André Vignatti

Exercício 1. Prove por indução que:

(a) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ para todo inteiro positivo.

(b) $\sum_{i=0}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $c \in \mathbb{C} - \{0, 1\}$.

(c) $n^3 + 2n$ é divisível por 3 para todo inteiro não negativo.

(d) $9^n - 1$ é divisível por 8 para todo inteiro não negativo.

(e) $n^2 - 1$ é divisível por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$ ímpar.

(f) $(1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \ldots + (n \times (n + 1)) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

(g) $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ é divisível por 7 para todo inteiro positivo.

Exercício 2. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, o valor $\binom{n}{k}$ é definido como

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0, \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } 1 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove, por indução em n, que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$