Limitante Inferior para o Problema da Ordenação

André Vignatti

Quão rápido podemos ordenar?

Iremos provar um limitante inferior para esse problema.

Já estudamos alguns algoritmos de ordenação.

- Eles têm algo em comum: a única operação que usam para definir a posição relativa dos elementos são **comparações**.
- Isto é, o resultado de comparar x_i com x_j, define se x_i será posicionado **antes ou depois** de x_j.

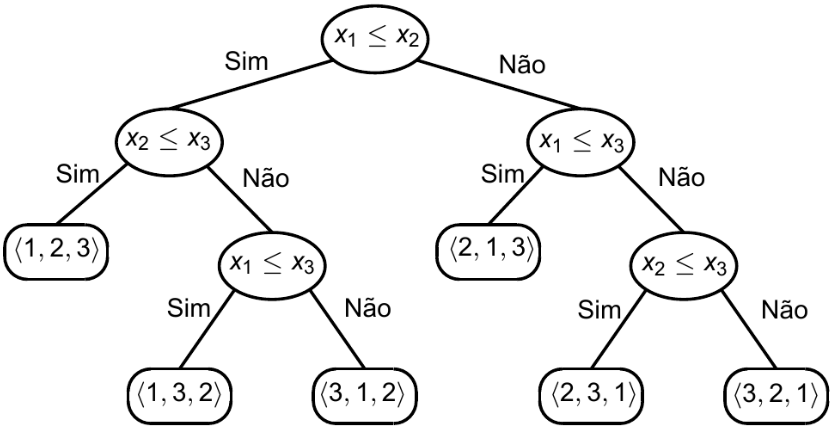
Limitantes Inferiores para a Ordenação:

- $\Omega(n)$ para examinar toda entrada.
- Mas todos os algoritmos vistos levam $\Omega(n \log n)$.
- Iremos mostrar que $\Omega(n \log n)$ é um limitante inferior para ordenação baseada somente em comparações.

Árvore de Decisão:

- Abstração de qualquer ordenação baseada em comparações.
- Representa comparações feitas por
  - um dado algoritmo de ordenação
  - em entradas de um certo tamanho
- Abstrai todo o resto: controle e movimento de dados.
- Iremos contar **somente** comparações.

Figura 1: Árvore do comportamento do *Insertion Sort* para 3 elementos



- Nós representam **comparações** entre dois elementos, digamos $x_i \leq x_j$.
- Ramificações representam os possíveis resultados da comparação: **SIM** se $x_i \leq x_j$, ou **NÃO** caso contrário.
- Folhas representam **possíveis soluções**: as diferentes permutações dos n índices.

Quantas folhas existem na árvore de decisão? Há $\geq n!$ folhas, pois cada permutação aparece pelo menos uma vez.

Para qualquer algoritmo de ordenação:

- Há uma árvore diferente.
- A árvore modela todas os possíveis caminhos de execução.

O caminho mais comprido da raíz a uma folha representa o **pior caso**. Ele depende do algoritmo. No InsertionSort é $\Theta(n^2)$, No MergeSort é $\Theta(n \log n)$.

Lema. Qualquer árvore binária de altura h tem no máximo 2^h folhas.

Demonstração. (indução em h)

Base: $h = 0$. A árvore é só um nó, que é folha. $2^h = 1$.

Hipótese: Assuma que o resultado é verdade para altura $h - 1$.

Passo: Na árvore de altura $h-1$, aumente a altura em 1 criando o maior número de novas folhas possíveis. Cada folha vira pai de duas novas folhas.

$$\begin{aligned}
\#\text{ de folhas para altura } h &= 2 \cdot (\#\text{ de folhas para altura } h-1) \\
(hip.) &= 2 \cdot 2^{h-1} \\
&= 2^h.
\end{aligned}$$

□

Teorema. Qualquer árvore de decisão que ordena n elementos tem altura $\Omega(n \log n)$.

Demonstração. Seja l o número de folhas da árvore de decisão.

- $l \geq n!$
- Pelo Lema, $n! \leq l \leq 2^h$, ou seja, $2^h \geq n!$
- Tirando logs, $h \geq \log_2 n!$.
- Mas,

$$\begin{aligned}
\log_2 n! &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \log i \\
&\geq \textstyle\sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} \log i \\
&\geq \textstyle\sum_{i=\lceil n/2 \rceil}^{n} \log n/2 \\
&\geq (n/2 - 1) \log n/2 \\
&= n/2 \log n - n/2 - \log n + 1 \\
&\geq n/4 \log n, \text{ para } n \geq 16.
\end{aligned}$$

- Então, $h \in \Omega(n \log n)$.

□

Como consequência direta do Teorema, podemos dizer que:

- O melhor algoritmo baseado em comparações será $\Omega(n \log n)$ no pior caso.
- O MergeSort é um algoritmo ótimo.

Cap 8 do CLRS têm o título "Ordenação em Tempo Linear". Como isso é possível? O livro está errado?

Algoritmos de ordenação baseados **não somente** em comparações devem **assumir alguma propriedade sobre a entrada**:

- COUNTING SORT: assume que cada um dos n elementos é um inteiro entre 0 e $k \Rightarrow \Theta(n+k)$.
- RADIX SORT: assume que cada dígito dos n elementos assume d valores distintos $\Rightarrow \Theta(d(n+k))$, com $k =$ número de elementos distintos.
- BUCKET SORT: assume que os n números estão distribuídos de acordo com a **distribuição uniforme** $\Rightarrow$ tempo **esperado** $\Theta(n)$.

Uma diferença crucial:

- Até agora no curso: **análise de algoritmo**.
- Hoje: **análise de problema**.

Já estudamos as ferramentas básicas de análise de algoritmos. Agora, no restante do curso, vamos mudar o foco para fazer análise de problemas.