Variáveis Aleatórias e Esperança

André Vignatti

Definição. Uma **variável aleatória** X sobre um espaço amostral Ω é uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Dado v.a. X e $a \in \mathbb{R}$, o evento "$X = a$" representa o conjunto $\{e \in \Omega : X(e) = a\}$.

Assim,

$$\Pr(X = a) = \sum_{e \in \Omega:\ X(e)=a} \Pr(e).$$

Exemplo. Considere o lançamento de dois dados e uma v.a. X que representa a soma dos valores dos dois dados.

- X pode assumir 11 valores possíveis: $X \in \{2, 3, \dots, 12\}$
- Há 36 possibilidades p/ dados: $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1) \dots, (6, 6)\}$

Evento $X = 4$ tem 3 eventos básicos: $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

Portanto

$$\Pr(X = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Definição. Dada uma v.a. X, a **esperança** de X é definida por

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot Pr[X = j].$$

Exemplo. Seja X uma v.a. definida sobre uma jogada de dados. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X] =& 1 \cdot \Pr[X = 1] + 2 \cdot \Pr[X = 2] + \cdots + 6 \cdot \Pr[X = 6] \\
=& 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\
=& \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \ = \ \frac{1}{6} \cdot 21 \ = \ 3.5
\end{aligned}$$

1 Esperando o Primeiro Sucesso

Temos uma moeda viciada: CARA com prob. p, COROA com prob. $1 - p$.

- Quantas jogadas são **esperadas** até tirar a primeira CARA?

Seja X a v.a. do número de jogadas até a primeira CARA.

$$\begin{aligned}
\Pr(X = 1) &= p \\
\Pr(X = 2) &= (1-p)p \\
\Pr(X = 3) &= (1-p)(1-p)p \\
&\vdots \\
\Pr(X = j) &= (1-p)^{j-1}p
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
E[X] = &\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot Pr[X = j] \ = \ \sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j-1}p \ = \ \frac{p}{1-p}\sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^j \\
&= \text{(ver eq. A.8 do CLRS)} \ \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)}{p^2} \ = \ \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Podemos resumir tudo no seguinte resultado:

Teorema. Num experimento com jogadas independentes, cada jogada com prob. p de sucesso, o número **esperado** de jogadas até o primeiro sucesso é $1/p$.

2 Adivinhando Cartas

Se X é uma v.a. que só assume valores 0 e 1, então $E[X] = Pr[X = 1]$. (Exercício)

Teorema (Linearidade da Esperança). Dadas v.a.'s X e Y definidas sobre o mesmo Ω, $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.

É útil se podemos "quebrar" X em $X = X_1 + \ldots + X_n$.

JOGO: embaralhar n cartas; virar elas **uma a uma**; tentar **adivinhar** cada carta.

adivinhar sem memória: não lembramos das cartas já viradas.

Nossa solução: chutamos **aleatoriamente** uma carta, com prob. $1/n$.

- Seja v.a. $X_i = 1$ se a i-ésima predição está correta, $X_i = 0$ caso contrário.
- Seja v.a. X = número de predições corretas = $X_1 + \ldots + X_n$.

Teorema. O número esperado de vezes que adivinhamos corretamente é 1.

Demonstração.
- $E[X_i] = Pr[X_i = 1] = 1/n$.

- (lin. da esperança) $E[X] = E[X_1] + \ldots + E[X_n] = 1/n + \ldots + 1/n = 1$.

$\square$

adivinhar memorizando: conseguimos lembrar das cartas já viradas.

Nossa solução: na i-ésima predição, chutamos uma das $n - i + 1$ cartas restantes.

Teorema. O número esperado de vezes que adivinhamos corretamente é $\Theta(\log n)$.

Demonstração.

- $E[X_i] = Pr[X_i = 1] = 1/(n - i + 1)$.
- (lin. da esperança) $E[X] = E[X_1] + \ldots + E[X_n] = 1/n + \ldots + 1/2 + 1/1 = H(n) = \Theta(\log n)$.

A última igualdade segue da desigualdade A.14 e exercício A.2-3 de CLRS.

$\square$

3 Colecionador de Cupons

Colecionando Cupons: Cada caixa de cereal vem um **cupom**. No total, há n cupons diferentes. **Quantas** caixas deve-se comprar para ter todos os cupons?

- Ideia: **Progredimos** quando conseguimos um cupom novo.
- Objetivo: progredir n vezes.

Qual a probabilidade de progredir?

- Se já tem j cupons, obtém-se um novo com probabilidade $(n - j)/n$.

Quantas caixas para **progredir**?

- Fase j = num. de caixas entre ter j e $j + 1$ cupons diferentes.
- Seja X_j = número de caixas compradas na fase j.
- Na fase j, **esperamos o primeiro sucesso** de um evento com probabilidade $(n - j)/n$.
- Então, $E[X_j] = n/(n - j)$.

Teorema. O número esperado de caixas necessárias é $\Theta(n \log n)$.

Demonstração. Seja $X = X_0 + \ldots + X_{n-1}$ o número total de caixas compradas. Então,

$$E[X] = \sum_{j=0}^{n-1} E[X_j] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n-j} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = nH(n).$$

$\square$