Variáveis Aleatórias e Esperança

André Vignatti

DINF- UFPR

Definição: Variável Aleatória (v.a.)

Informalmente, uma **variável aleatória** é uma variável que pode assumir algum valor do espaço amostral.

Ex: Como usar uma v.a.

Um dado define o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Seja X uma v.a. sobre S. Queremos saber a probabilidade de X ser menor ou igual que 2. Ou, formalmente,

$$Pr[X \leq 2],$$

que, neste caso, é igual a $1/3$.

Definição: Esperança

Dada uma variável aleatória X sobre um espaço amostral, a esperança de X é o "valor médio" assumido por X. Formalmente, é definida por

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot Pr[X = j].$$

Ex: Esperança da jogada de dados

Seja X uma v.a. definida sobre o espaço amostral de uma jogada de dados. A esperança de X é dada por

$$\begin{aligned}
E[X] =& 1 \cdot Pr[X = 1] + 2 \cdot Pr[X = 2] + \cdots + 6 \cdot Pr[X = 6] \\
=& 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\
=& \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \ = \ \frac{1}{6} \cdot 21 \ = \ 3.5
\end{aligned}$$

Na definição de esperança, calcula-se para j de 0 até ∞. No exemplo anterior, calculamos até $j = 6$. Porque?

No exemplo anterior, a esperança de X é **exatamente** igual a média aritmética.

Isso porque a distribuição de probabilidade é uniforme, ou seja, são todas iguais (no caso, $\frac{1}{6}$).

Mas nem sempre as probabilidades são iguais.

Exemplo: Esperando o Primeiro Sucesso

- Temos uma moeda viciada: CARA com prob. p, COROA com prob. $1 - p$.
- Queremos jogar até dar a primeira CARA.
- Quantas vezes é esperado termos que jogar?

As jogadas são independentes entre si (ou seja, o resultado de uma jogada não afeta a outra).

Exemplo: Esperando o Primeiro Sucesso

- Seja X a v.a. do número de jogadas até a primeira CARA.
- Qual a probabilidade de jogarmos j vezes até dar a primeira CARA?
- Ou seja, qual é $Pr[X = j]$?
- As $j - 1$ primeiras jogadas tem que dar COROA, a última tem que dar CARA.
- Ou seja, $Pr[X = j] = (1 - p)^{j-1}p$.

Exemplo: Esperando o Primeiro Sucesso

Para calcularmos a esperança, fazemos:

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot Pr[X = j] \; = \; \sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^{j-1}p \; = \; \frac{p}{1-p}\sum_{j=0}^{\infty} j(1-p)^j$$

$$= \text{(ver eq. A.8 do CLRS)} \; \frac{p}{1-p}\frac{(1-p)}{p^2} \; = \; \frac{1}{p}.$$

Podemos resumir tudo no seguinte resultado:

Teorema

Num experimento com jogadas independentes, cada jogada com prob. p de sucesso, o número esperado de jogadas até o primeiro sucesso é $1/p$.

O resultado faz sentido?

Exemplo: Esperando o Primeiro Sucesso

Propriedade Útil

Se X é uma v.a. que só assume valores 0 e 1, então $E[X] = Pr[X = 1]$.

Demonstração.

$$E[X] = \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot Pr[X = j] = \sum_{j=0}^{1} j \cdot Pr[X = j] = Pr[X = 1].$$

□

Linearidade da Esperança

Linearidade da Esperança

Dadas duas v.a. X e Y (não necessariamente independentes) definidas sobre o mesmo espaço amostral,
$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.

É **muito útil** quando é difícil calcular $E[X]$, mas podemos "quebrar" X em $X = X_1 + \ldots + X_n$, e $E[X_i]$ é fácil de calcular.

Exemplo: Adivinhando Cartas (sem memorizar)

JOGO: embaralhar um deck de n cartas; virar elas uma a uma; tentar **adivinhar** cada carta.

adivinhar sem memória: não é possível se lembrar das cartas que já foram viradas.

Neste caso, tentamos adivinhar escolhendo aleatoriamente uma carta do baralho inteiro de maneira **uniforme** (ou seja, com prob. $1/n$).

Exemplo: Adivinhando Cartas (sem memorizar)

Afirmação

O número esperado de vezes que adivinhamos corretamente é 1.

Demonstração.

(surpreendentemente fácil usando a linearidade da esperança)

- Seja $X_i = 1$ se a i-ésima predição está correta, $X_i = 0$ caso contrário.
- Seja $X =$ número de predições corretas $= X_1 + \ldots + X_n$.
- $E[X_i] = Pr[X_i = 1] = 1/n$.
- (linearidade da esperança) $E[X] = E[X_1] + \ldots + E[X_n] = 1/n + \ldots + 1/n = 1$.

$\square$

Exemplo: Adivinhando Cartas (sem memorizar)

Observação

Note como seria mais difícil calcular $E[X]$ diretamente pela definição $\sum_{j=0}^{\infty} j \cdot Pr[X = j]$.

Exemplo: Adivinhando Cartas (memorizando)

JOGO: embaralhar um deck de n cartas; virar elas uma a uma; tentar adivinhar cada carta.

adivinhar memorizando: adivinhar uma carta aleatoriamente de maneira uniforme das cartas que **ainda não foram vistas.**

Neste caso, na i-ésima predição, precisamos adivinhar corretamente das $n - i + 1$ cartas restantes.

Exemplo: Adivinhando Cartas (memorizando)

Afirmação

O número esperado de vezes que adivinhamos corretamente é $\Theta(\log n)$.

Demonstração.

- Seja $X_i = 1$ se a i-ésima predição está correta, $X_i = 0$ caso contrário.
- Seja X = número de predições corretas $= X_1 + \ldots + X_n$.
- $E[X_i] = Pr[X_i = 1] = 1/(n - i + 1)$.
- (linearidade da esperança) $E[X] = E[X_1] + \ldots + E[X_n] = 1/n + \ldots + 1/2 + 1/1 = H(n) = \Theta(\log n)$.

A última igualdade segue da desigualdade A.14 e exercício A.2-3 de CLRS. $\square$

Exemplo: Colecionando Figurinhas

Colecionando Figurinhas: Cada caixa de Sucrilhos tem uma figurinha. No total, há n figurinhas diferentes. Assumindo que as figurinhas são igualmente prováveis, **quantos** Sucrilhos deve-se comprar para ter ≥ 1 figurinha de cada tipo?

- Ideia: Progredimos quando conseguimos uma figurinha nova.
- Objetivo: progredir n vezes.

Exemplo: Colecionando Figurinhas

Quantas caixas preciso comprar para **progredir**?

- Depende de quantas figurinhas você já tem!
- Se tem poucas, o progresso é rápido. Se tem muitas, o progresso é lento.
- Se tem j figurinhas, há progresso se pegar $n - j$ das figurinhas que você ainda não tem.
- Portanto, se tem j figurinhas, a probabilidade de sucesso é $(n - j)/n$.

Exemplo: Colecionando Figurinhas

Isso ainda não respondeu a pergunta: **Quantas caixas preciso comprar para progredir?**

- Fase j = tempo (num. de caixas) entre ter j e $j+1$ figurinhas diferentes.
- Seja X_j = número de caixas compradas na fase j.
- Na fase j, você está esperando o primeiro sucesso de um evento com probabilidade $(n-j)/n$.
- Então, pelo que vimos num exemplo anterior, $E[X_j] = n/(n-j)$.

Vamos tentar calcular o número total de caixas de um exemplo com $n = 5$...

Exemplo: Colecionando Figurinhas

Afirmação

O número esperado de caixas necessárias é $\Theta(n \log n)$.

Demonstração.

Seja $X =$ número total de caixas compradas
$= X_0 + \ldots + X_n - 1$. Então,

$$E[X] = \sum_{j=0}^{n-1} E[X_j] = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n}{n-j} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = nH(n).$$

$\square$