

Somatórios e Logaritmos

$f: A \rightarrow \mathbb{C}$

X : subconjunto de A .

a, b : inteiros.

Notação 1.

$$\sum_{x \in X} f(x)$$

denota a soma dos valores de $f(x)$ para cada $x \in X$.

Se $X = \emptyset$, então

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0.$$

$$\sum_{i=a}^b f(i) := \sum_{x \in [a..b]} f(x).$$

Teorema 1. Dados um conjunto X e $c \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{x \in X} c = c|X|.$$

Demonstração. Exercício

□

Teorema 2. Dados $f, g: A \rightarrow \mathbb{C}$ e $X \subseteq A$,

$$\sum_{x \in X} (f(x) + g(x)) = \sum_{x \in X} f(x) + \sum_{x \in X} g(x).$$

Demonstração. Exercício

□

Teorema 3. Dada $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $X \subseteq A$ e $c \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{x \in X} cf(x) = c \sum_{x \in X} f(x).$$

Demonstração. Exercício

□

Exemplo 1. Qual o valor do somatório $\sum_{j=1}^5 j^2$?

Temos que $\sum_{j=1}^5 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$.

Exemplo 2. Qual o valor do somatório $\sum_{k=4}^8 (-1)^k$?

(Resolver com os alunos)

Às vezes é útil deslocar o índice do somatório. Isso é geralmente feito para juntar dois somatórios cujos os índices não batem.

Exemplo 3. Suponha o somatório $\sum_{j=1}^5 j^2$. Queremos deslocar o índice, começando de 0 até 4. Para isso, fazemos $k = j - 1$. Então o termo j^2 vira $(k + 1)^2$. Assim,

$$\sum_{j=1}^5 j^2 = \sum_{k=0}^4 (k + 1)^2$$

É fácil verificar que ambos são iguais a 55.

Exemplo 4. Somatórios duplos aparecem em diversos contextos, por exemplo, em análise de algoritmos com laços aninhados. Um exemplo é:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij &= \sum_{i=1}^4 (i + 2i + 3i) \\ &= \sum_{i=1}^4 6i \\ &= 6 \sum_{i=1}^4 i \\ &= 6(1 + 2 + 3 + 4) = 60. \end{aligned}$$

Teorema 4. $\sum_{i=1}^n i = n(n + 1)/2$.

Demonstração. Seja,

$$S = 1 + 2 + \dots + n.$$

$$S = n + (n - 1) + \dots + 1.$$

Somando termo a termo,

$2S = (n + 1) + (n + 1) + \dots + (n + 1) = n(n + 1)$. Isolando S , o resultado segue. □

Exemplo 5. Qual o valor de $\sum_{i=1}^{100} 7i$?

$$\sum_{i=1}^{100} 7i = 7 \sum_{i=1}^{100} i = 7 \frac{(100)(101)}{2} = 35350.$$

Exemplo 6. Qual o valor de $\sum_{i=50}^{100} 11i$?

Note que $\sum_{i=1}^{100} 11i = \sum_{i=1}^{49} 11i + \sum_{i=50}^{100} 11i$. Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{i=50}^{100} 11i &= \sum_{i=1}^{100} 11i - \sum_{i=1}^{49} 11i \\ &= 11 \sum_{i=1}^{100} i - 11 \sum_{i=1}^{49} i \\ &= 11 \left(\sum_{i=1}^{100} i - \sum_{i=1}^{49} i \right) \\ &= 11 \left(\frac{100 \cdot 101}{2} - \frac{49 \cdot 50}{2} \right) \\ &= 11(5050 - 1225) = 42075. \end{aligned}$$

Definição 1. $\log_b x$ é o número y tal que $b^y = x$.

Exemplo 7. $\log_3 81 = 4$ pois $3^4 = 81$

Propriedades (independem do valor da base):

- $b^{\log_b a} = a$
- $\log ab = \log a + \log b$
- $\log a/b = \log a - \log b$
- $\log a^b = b \log a$
- $\log \sqrt[b]{a} = (1/b) \log a$

(Mudança de base) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$.

Em computação, quando o logaritmo é escrito sem base, por convenção, significa que é base 2.