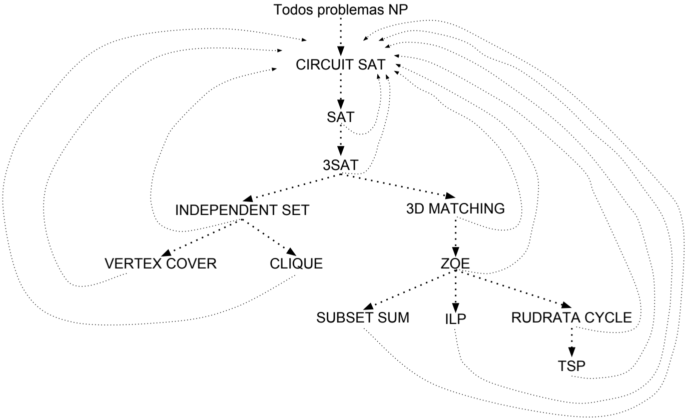
Reduções de Problemas Difíceis

André Vignatti

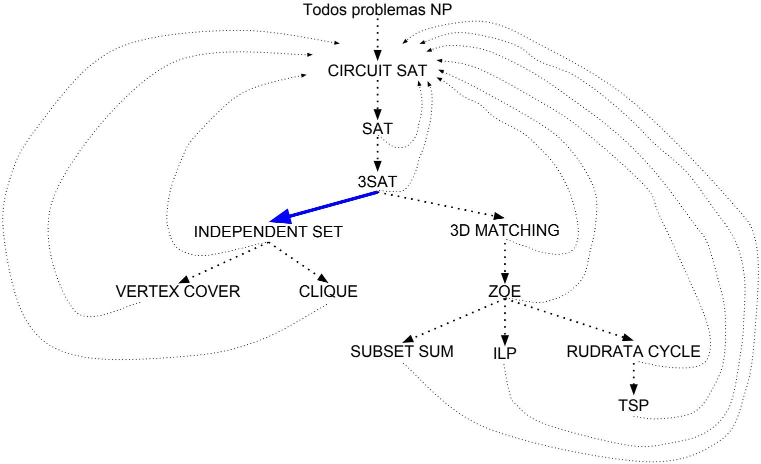
DINF- UFPR

Na figura abaixo, esquema das reduções que vamos (tentar) ver.



Como conseqüência, tais problemas são **NP**-Completos.

3SAT ⇒ INDEPENDENT SET



3SAT $\Rightarrow$ INDEPENDENT SET

3SAT

Entrada: cláusulas com ≤ 3 literais. Por exemplo:

$$(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y}),$$

Objetivo: encontrar uma atribuição verdadeira

INDEPENDENT SET

Entrada: grafo G e um número g
Objetivo: encontrar g vértices não adjacentes

Devemos relacionar lógica booleana com grafos!

3SAT $\Rightarrow$ INDEPENDENT SET

Antes, fazer um pré-processamento para retirar cláusulas com somente um literal. (PODE? PORQUÊ?)

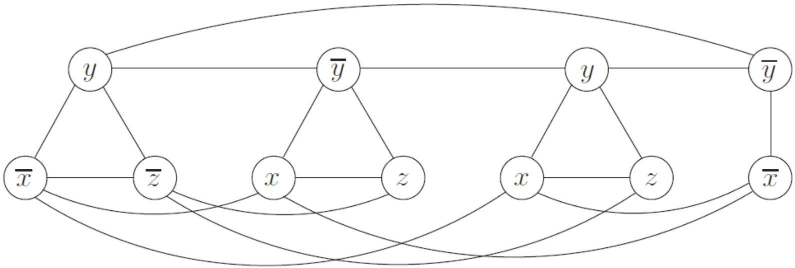
Dada instância I do 3SAT, criamos instância (G, g) do INDEPENDENT SET como segue:

- G tem **um triângulo para cada cláusula** (ou uma aresta, se a cláusula tem dois literais), com vértices nomeados pelos literais da cláusula
- G tem **arestas adicionais** entre vértices que representam literais opostos
- O objetivo g é definido como o **número de cláusulas.**

Claramente, esta construção leva tempo polinomial.

Exemplo de transformação da instância do 3SAT para o INDEPENDENT SET:

$$(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y}),$$



Não podemos esquecer:

Também precisamos reconstruir a solução da primeira instância numa solução para a segunda. (COMO FAZER?)

A redução funciona? Como sempre, há **duas coisas para mostrar**:

1. Se há um INDEPENDENT SET S de g vértices em G:

Vamos mostrar que existe (e é obtido em tempo polinomial) uma atribuição verdade a I.

Para uma variável x, S não pode conter ambos vértices x e $\overline{x}$, porque estão conectados por uma aresta.

- Se S contém x, atribuir **TRUE** a x,
- Se S contém $\overline{x}$, atribuir **FALSE** a x.

Como S tem g vértices, então deve ter um vértice para cada cláusula.

Então a atribuição de **TRUE** e **FALSE** descrita acima satisfaz todas as cláusulas.

2. Se não há um INDEPENDENT SET S de g vértices em G:

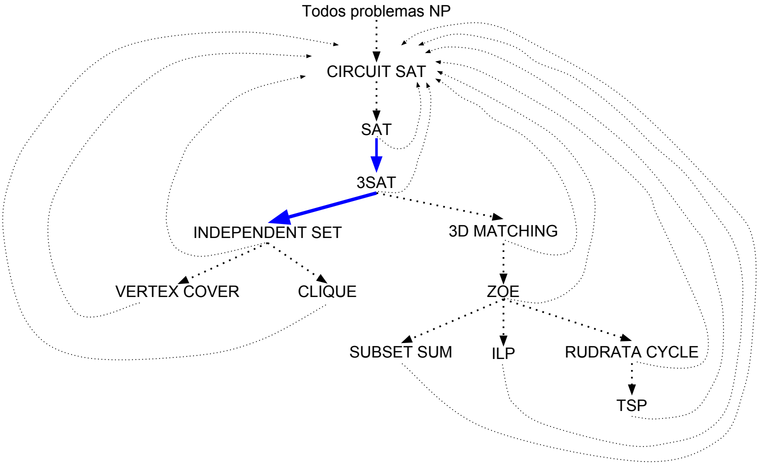
Devemos mostrar então que a fórmula booleana I é **insatisfatível**.

Vamos provar a contrapositiva: Se I for satisfatível, então G tem um INDEPENDENT SET de tamanho g.

Mas isso é fácil: em cada cláusula, escolha um literal cujo a atribuição seja **TRUE** (deve haver pelo menos um), e adicione o vértice correspondente a S.

Você percebe por que S é um conjunto independente? (Exercício)

SAT ⇒ 3SAT



Todos problemas NP
CIRCUIT SAT
SAT
3SAT
INDEPENDENT SET
3D MATCHING
VERTEX COVER
CLIQUE
ZOE
SUBSET SUM
ILP
RUDRATA CYCLE
TSP

SAT $\Rightarrow$ 3SAT

Este é um tipo interessante e comum de redução, de um problema a um caso especial de si mesmo.

Queremos mostrar que o problema continua a ser difícil mesmo se suas entradas são restritas de alguma forma.

Tais reduções modificam a instância de modo a livrar-se da característica proibida (cláusulas com ≥ 4 literais), mantendo a instância essencialmente a mesma.

SAT $\Rightarrow$ 3SAT

Redução:

Dada uma instância do SAT, analise cada cláusula:

- Se a cláusula tiver ≤ 3 literais, use a mesma cláusula para o 3SAT.
- Se a cláusula tiver > 3 literais, ou seja, $(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$ troque por isso:

$$(a_1 \vee a_2 \vee y_1)(\overline{y}_1 \vee a_3 \vee y_2)(\overline{y}_2 \vee a_4 \vee y_3)\ldots(\overline{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k)$$

A conversão é claramente de tempo polinomial.

A redução funciona? Como sempre, **2 coisas para mostrar**:

1. Se há uma atribuição verdadeira para o 3SAT:

Então devemos mostrar que há uma atribuição verdadeira para o SAT.

Vamos olhar **somente as cláusulas transformadas** (as outras não foram modificadas):

- Se

  $$(a_1 \vee a_2 \vee y_1)(\overline{y}_1 \vee a_3 \vee y_2)(\overline{y}_2 \vee a_4 \vee y_3)\dots(\overline{y}_{k-3} \vee a_{k-1} \vee a_k)$$

  estão todas satisfeitas, então pelo menos um dos literais $a_1, \dots, a_k$ deve ser **TRUE**:

  - C.c. (se $a_1, \dots, a_k$ são todos **FALSE**) y_1 deve ser **TRUE**, obrigando y_2 ser **TRUE**, e assim por diante, até obrigar a última cláusula ser **FALSE**.

- Como pelo menos um dos literais $a_1, \dots, a_k$ é **TRUE**, então $(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_k)$ também é **TRUE**.

2. Se não há uma atribuição verdadeira para o 3SAT:

Então devemos mostrar que não há atribuição verdadeira para o SAT.

Vamos provar a contrapositiva: Se há atribuição verdadeira para o SAT, então há atribuição verdadeira para o 3SAT.

- Se $(a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k)$ é **TRUE**, então algum a_i deve ser **TRUE**.
- Faça $y_1, \ldots, y_{i-2}$ ser **TRUE**, e os outros y's serem **FALSE**.
- Isso garante que a cláusula transformada seja **TRUE**.

3SAT mais restrito

Na verdade, 3SAT permanece difícil mesmo sob a restrição de que nenhuma variável apareça em mais de três cláusulas.

Redução:

Suponhamos que na instância 3SAT, a variável x aparece em $k > 3$ cláusulas.

Substitua a sua primeira aparição por x_1, sua segunda aparição por x_2 e assim por diante.

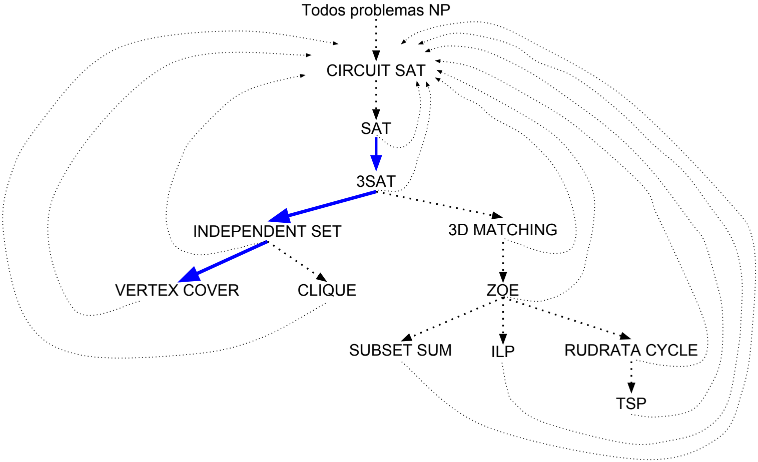
Por último, acrescente as cláusulas:

$$(\overline{x_1} \vee x_2)(\overline{x_2} \vee x_3) \dots (\overline{x_k} \vee x_1)$$

Faça o mesmo para cada variável que aparece mais de três vezes.

Exercício: Mostrar que a redução acima funciona.

INDEPENDENT SET ⇒ VERTEX-COVER



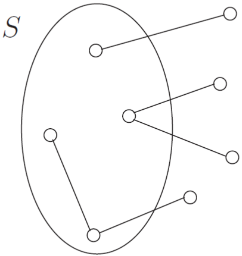
INDEPENDENT SET $\Rightarrow$ VERTEX-COVER

Algumas reduções dependem da criatividade ao relacionar dois problemas totalmente diferentes.

Outras simplesmente se atentam ao fato de que um problema é um **simples disfarce de outro**.

Teorema:

Um conjunto de nós S é um VERTEX-COVER de $G = (V, E)$ se e somente se $V - S$ é um INDEPENDENT SET de G.



Redução:

Dada uma instância (G, g) do INDEPENDENT SET, basta procurar um VERTEX COVER de G com $|V| - g$ nós.

- Se existe VERTEX-COVER S, então pegue os nós $V - S$ para o INDEPENDENT SET.

A redução funciona? Como sempre, há **duas coisas para mostrar**:

1. Se existe VERTEX-COVER com $|V| - g$ nós:

Devemos mostrar que existe um INDEPENDENT SET com g nós.

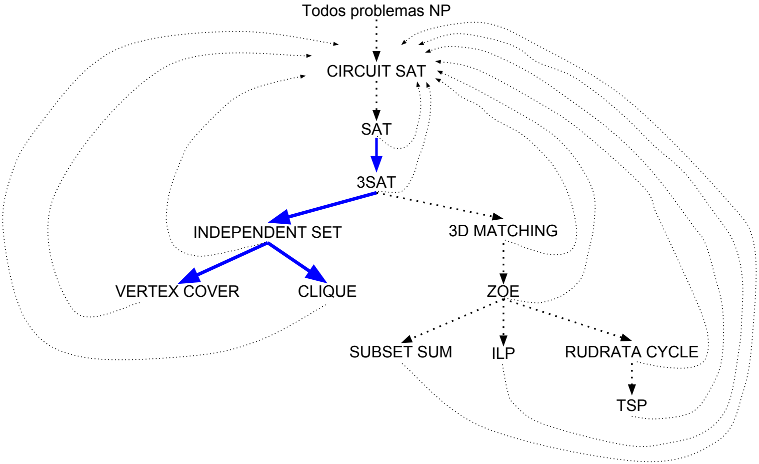
- Os nós que não são do VERTEX-COVER **não estão conectados por arestas**
  - se estivessem conectados, algum dos vértices deveriam estar no VERTEX-COVER
- Há g nós que não são do VERTEX-COVER, portanto formando um INDEPENDENT SET de tamanho g.

2. Se não existe VERTEX-COVER com $|V| - g$ nós:

Devemos mostrar então que não existe INDEPENDENT SET com g nós.

Vamos provar a contrapositiva: (Exercício)

INDEPENDENT SET ⇒ CLIQUE



INDEPENDENT SET $\Rightarrow$ CLIQUE

INDEPENDENT SET e **CLIQUE** também são fáceis de reduzir um ao outro.

Defina o **complemento de um grafo** $G = (V, E)$ como sendo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, onde $\overline{E}$ contém precisamente as arestas que não estão em E.

Teorema:

Um conjunto de nós S é um **INDEPENDENT SET** de G se e somente se S é um **CLIQUE** de $\overline{G}$.

INDEPENDENT SET $\Rightarrow$ CLIQUE

Redução

Transforme a instância (G, g) do **INDEPENDENT SET** na instância $(\overline{G}, g)$ de **CLIQUE.**

(Exercício: mostre que a redução é válida (use os dois passos, como fizemos nas reduções anteriores))