

Exercícios - Variáveis Aleatórias e Esperança

Prof. André Vignatti

- Exercício 1.** (a) Considere a seguinte variação no problema de colecionar figurinhas. Cada caixa de Sucrilhos tem um **cupom de prêmio** de um total de $2n$ cupons. Os cupons são organizadas em n pares, tal que 1 e 2 são um par, 3 e 4 são outro par, e assim por diante. Quando você conseguir um cupom de cada par, você pode trocar por um prêmio. Qual é o número esperado de caixas que deve-se comprar até conseguirmos trocar pelo prêmio?
- (b) Generalize o resultado do problema da parte (a) para o caso onde há kn cupons diferentes, organizados em n conjuntos disjuntos de k cupons, tal que é preciso ter um cupom de cada conjunto.

Exercício 2. Você vai entrevistar n pessoas para algumas vagas de emprego, mas está com preguiça. O seu método então é acessar o site **random.org** e obter um número fracionário p gerado aleatoriamente de maneira uniforme entre 0 e 1. Após isso, para cada candidato i , você obtém outro número fracionário $0 \leq q_i \leq 1$ gerado aleatoriamente de maneira uniforme. Se q_i for menor que p , então você contrata o candidato i , caso contrário você não contrata.

Pede-se:

- (a) Em função de p , qual a probabilidade de um candidato ser contratado?
- (b) Seja X_i uma v.a. tal que $X_i = 1$ se você contratar o candidato i , $X_i = 0$ caso contrário. Qual é o valor de $E[X_i]$?
- (c) Qual é o número esperado de candidatos contratados, em função de p ?

Exercício 3. Considere uma função **random(a,b)** que retorna um inteiro aleatório r distribuído de maneira uniforme, tal que $a \leq r \leq b$. Considere o algoritmo a seguir:

Algoritmo 1: Contador Aleatorizado

Entrada: inteiro n

Saída: inteiro s

```
1 início
2    $s \leftarrow 0$ 
3   para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  fazer
4      $r \leftarrow \text{random}(1, n)$ 
5     se  $r \leq i$  então
6        $s \leftarrow s + 1$ 
7   retorna  $s$ 
```

Seja X_i uma variável aleatória tal que $X_i = 1$ se na i -ésima iteração $r \leq i$; $X_i = 0$ caso contrário. Seja $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Em todos os itens abaixo, **explique detalhadamente**, incluindo TODOS os passos das contas (se houver contas).

- (a) [10 pontos] Qual a probabilidade $Pr[X_i = 1]$?
- (b) [10 pontos] Qual a esperança $E[X_i]$?
- (c) [10 pontos] Qual a relação entre o valor final da variável s (valor de retorno) com a variável aleatória X ?
- (d) [15 pontos] Qual a esperança $E[X]$?