Indução

Mais uma técnica de demonstração.

Teorema 1. $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Para $n = 1$,

$$1 = \frac{1(2)}{2}, \textbf{ OK!}$$

- Para $n = 2$, já sabemos que $\sum_{i=1}^{1} = \frac{1(2)}{2}$. Então

$$\sum_{i=1}^{2} i = \sum_{i=1}^{1} i + 2 = \frac{1(2)}{2} + 2 = \frac{1(2) + 2(2)}{2} = \frac{2(3)}{2}.$$

- Para $n = 3$, já sabemos que $\sum_{i=1}^{2} = \frac{2(3)}{2}$. Então

$$\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = \frac{2(3)}{2} + 3 = \frac{2(3) + 2(3)}{2} = \frac{3(4)}{2}.$$

  e está OK!

- Para $n = 4$, já sabemos que $\sum_{i=1}^{3} = \frac{3(4)}{2}$. Então

$$\sum_{i=1}^{4} i = \sum_{i=1}^{3} i + 4 = \frac{3(4)}{2} + 4 = \frac{3(4) + 2(4)}{2} = \frac{4(5)}{2}.$$

  e está OK!

- Para $n = 5$, já sabemos que $\sum_{i=1}^{4} = \frac{4(5)}{2}$. Então

$$\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{i=1}^{4} i + 5 = \frac{4(5)}{2} + 5 = \frac{4(5) + 2(5)}{2} = \frac{5(6)}{2}.$$

e está OK!

$$\vdots$$

Para $n = k$: ainda não fizemos todo o raciocínio até $k-1$, mas podemos **supor (hipótese)** que $\sum_{i=1}^{k-1} = \frac{(k-1)(k)}{2}$. Então

$$\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{i=1}^{k-1} i + k = \frac{(k-1)(k)}{2} + k = \frac{(k-1)(k) + 2(k)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

e está OK!

Mas note que isso vale para qualquer $k > 1$! A exceção é $k = 1$ (**base**), onde o mesmo raciocínio não foi feito. As contas que, usando a hipótese, concluem que $\sum_{i=1}^{k} = \frac{k(k+1)}{2}$ é chamada de **passo**.

Então:

- Pela base, conclui-se que o resultado vale para $n = 1$.
- A hipótese **induz** o resultado sair de $n = 1$ e valer para $n = 2$.
- A hipótese **induz** o resultado sair de $n = 2$ e valer para $n = 3$.
- ...
- A hipótese **induz** o resultado sair de $n = 1000$ e valer para $n = 1001$.

Note o resultado vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$! Basta que:

- A base seja verdadeira.
- Supondo que a hipótese seja verdadeira para algum k,
- Realizar o passo, e concluir que o resultado é valido para $k + 1$.

A hipótese **induz** os resultados um a um, por isso o nome **indução**.

Definição 1 (Axioma da Indução Matemática)**.** *Seja $b \in N$ e $p(n)$ uma proposição. O A.I.M. é definido como:*

- *se $p(b)$ é verdadeiro e*
- *se $p(k) \Rightarrow p(k+1), \forall k \geq b$ é verdadeiro,*

- *Então* $\forall n \geq b, p(n) \equiv V$ *é verdadeiro.*

Nomenclatura:

base da indução : a proposição $p(b) \equiv V$

hipótese da indução : a supor $p(k)$ verdadeiro.

passo da indução : a implicação $p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

Demonstração por Indução Matemática

Na demonstração por I.M. deve-se

- demonstrar que a base $p(b)$ é verdadeira;
- assumir que é verdade $p(k)$;
- demonstrar a implicação $p(k) \Rightarrow p(k+1)$;

Exemplo 1. *Prove que* $n < 2^n, \forall n \in N$.

Demonstração. **base da indução** : Seja $k = 0$, então $0 < 1 = 2^0$. Logo $p(0)$ é verdadeiro.

hipótese da indução : Assumir que $p(k) : k < 2^k$ é verdadeiro.

passo da indução : Mostrar que $p(k) \Rightarrow p(k+1)$.

$$k + 1 < (hip.)2^k + 1 \leq 2^k + 2^k = 2 * 2^k = 2^{k+1}.$$

$\square$

Exemplo 2. *Prove que* $2^n < n!, \forall n \in N, n > 3$.

Demonstração.

base da indução : Seja $k = 4$. Então $2^4 = 16 < 24 = 4!$.

hipótese da indução : Assumir que $p(k) : 2^k < k!, k > 3$ é verdadeiro.

passo da indução :

$$2^{k+1} = 2 * 2^k < (hip)2 * k! < (k+1)k! < (k+1)!.$$

$\square$

- Existe, na verdade, um 2^o axioma da I.M.

No 1^o axioma, p/ concluir $p(k+1)$ assumimos como verdade somente $p(k)$ (o anterior).

No 2^o axioma, p/ concluir $p(k+1)$, assumimos todos os anteriores como verdade.

Definição 2 (2^o axioma da I.M.). *Seja $b \in N$ e $p(n)$ uma proposição. O A.I.M. é definido como:*

(a) *$p(b)$ é verdadeira;*

(b) *$p(b)$ e $p(b+1)$ e $\ldots$ e $p(k) \Rightarrow p(k+1), \forall k \geq b$ são verdadeiros.*

(c) *Então $\forall n \geq b, p(n)$ é verdadeira.*

- Na demonstração usando o 2o axioma da I.M., na hipótese, assumimos que $p(b)$ e $p(b+1)$ e $\ldots$ e $p(k)$ é verdade.

- Existem casos em que é necessário provar mais que uma base.