

Exercícios - Corte Mínimo Global

Prof. André Vignatti

Exercício 1. Considere o seguinte teorema:

Teorema (Teorema de Lagrange dos números primos). Seja $\pi(n)$ o número de primos $\leq n$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln n} = 1.$$

- (a) Dado um número inteiro aleatoriamente escolhido, qual a probabilidade deste número ser primo? Qual a probabilidade de não ser?
- (b) Dados 2 números inteiros aleatoriamente escolhidos, qual a probabilidade de nenhum deles ser primo? E para k números?
- (c) Quantos números aleatórios deve-se obter para que, com probabilidade maior ou igual a $1 - 1/n$, pelo menos um seja primo? (Dica: será útil a desigualdade $(1 - 1/x)^x \leq 1/e$)

Exercício 2. No Algoritmo de Contração visto em aula, mostre que

- (a) Se uma aresta de um corte mínimo é escolhida, o algoritmo falha ao encontrar aquele corte mínimo.
- (b) Se o algoritmo encontra um certo corte mínimo, então nenhuma aresta deste corte mínimo foi escolhida. (dica: use demonstração contra-positiva no item (a))
- (c) Se nenhuma aresta de um certo corte mínimo foi contraída, então o algoritmo devolve este corte mínimo. (dica: considere o nome dos vértices contraídos como sendo o conjunto dos vértices iniciais que estão “dentro” do vértice contraído, mostre que no final temos dois “super-vértices” com a partição correta)

Exercício 3. Para melhorar a chance de sucesso do algoritmo de contração, ele pode ser executado várias vezes.

- (a) Considere executar o algoritmo duas vezes. Determine o número de contrações e limite inferiormente a probabilidade de encontrar um corte mínimo global.
- (b) Considere a seguinte variação no algoritmo. Começamos com o grafo com n vértices, usamos o algoritmo de contração até ficarmos com k vértices. Fazemos cópias do grafo com k vértices, e executamos o algoritmo ℓ vezes neste grafo reduzido, independentemente. Determine o número de contrações de arestas e limite a probabilidade de encontrar um corte mínimo global.
- (c) Encontre valores ótimos (ou próximos do ótimo) para k e ℓ na variação sugerida no item (b) que maximiza a probabilidade de encontrar um corte mínimo e que usa o mesmo número de contrações de arestas que o algoritmo original usa ao executar duas vezes.