

# Exercícios - QuickSort: Intuição do Caso Médio e Versão Aleatorizada

Prof. André Vignatti

**Exercício 1.** Uma análise alternativa do tempo de execução do quicksort aleatorizado foca no tempo esperado de cada chamada recursiva a **QUICKSORT-ALEATORIZADO**, ao invés do número de comparações (como feito em aula).

(a) Explique que, dado um vetor de tamanho  $n$ , a probabilidade de um certo elemento ser escolhido como pivô é  $1/n$ . Use isso para definir a variável aleatória  $X_i$ , onde  $X_i = 1$  se o  $i$ -ésimo menor elemento é escolhido como pivô,  $X_i = 0$  caso contrário. Calcule  $E[X_i]$ .

(b) Seja  $T(n)$  uma variável aleatória que denota o tempo de execução do quicksort num vetor de tamanho  $n$ . Explique porque a seguinte igualdade é válida:

$$E[T(n)] = E \left[ \sum_{q=1}^n X_q (T(q-1) + T(n-q) + \Theta(n)) \right].$$

(c) Mostre que podemos reescrever a equação do item (b) como

$$E[T(n)] = \frac{2}{n} \sum_{q=2}^{n-1} E[T(q)] + \Theta(n).$$

(Use as Dicas 1, 2, 3 e 4.)

(d) Mostre que

$$\sum_{k=2}^{n-1} k \log k \leq \frac{3}{4} n^2 \log n - \frac{1}{8} n^2.$$

(Use a Dica 5.)

(e) Usando o limitante do item (d), mostre que a recorrência do item (c) tem como solução  $E[T(n)] = \Theta(n \log n)$ . (Use a Dica 6.)

---

**Dica 1.** Use linearidade da esperança.

**Dica 2.** Se  $X$  e  $Y$  são duas variáveis aleatórias independentes entre si, então

$$E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y].$$

**Dica 3.** Em algum momento (para ficar mais visível), substitua o  $n$  por um número pequeno (por exemplo, 5) e “abra o somatório” (i.e., escreva o somatório sem usar  $\Sigma$ ) para ver o que acontece.

**Dica 4.** Lembre-se dos valores da base da recorrência.

**Dica 5.** Divida o somatório em duas partes, um para  $k = 2, 3, \dots, \lceil n/2 \rceil - 1$  e um para  $k = \lceil n/2 \rceil, \dots, n - 1$  (André: “Eu acho que dá pra mostrar por indução também”).

**Dica 6.** Mostre, pelo método da substituição, que  $E[T(n)] \leq an \log n$  para  $n$  suficientemente grande e para alguma constante positiva  $a$ .