CI165 — Recorrências 1 - Provando Soluções de Recorrências

André Vignatti

31 de julho de 2014

Mergesort

```
MERGESORT(A, p, r)
  se p < r
     então q ← ⌊(p + r)/2⌋
           MERGESORT(A, p, q)
           MERGESORT(A, q + 1, r)
           INTERCALA(A, p, q, r)
```

Qual é a complexidade de MERGESORT?

Seja $T(n) :=$ o consumo de tempo máximo (pior caso) em função de $n = r - p + 1$

Complexidade do Mergesort

```
MERGESORT(A, p, r)
1    se p < r
2        então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3              MERGESORT(A, p, q)
4              MERGESORT(A, q + 1, r)
5              INTERCALA(A, p, q, r)
```

linha	consumo de tempo
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

$$T(n) = ?$$

Complexidade do Mergesort

```
MERGESORT(A, p, r)
1  se p < r
2      então q ← ⌊(p + r)/2⌋
3          MERGESORT(A, p, q)
4          MERGESORT(A, q + 1, r)
5          INTERCALA(A, p, q, r)
```

linha	consumo de tempo
1	b_0
2	b_1
3	$T(\lceil n/2 \rceil)$
4	$T(\lfloor n/2 \rfloor)$
5	an

$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + (b_0 + b_1)$$

Resolução de recorrências

- Queremos resolver a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + an + b \qquad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

- Resolver uma recorrência significa encontrar uma fórmula fechada para $T(n)$.
- Não é necessário achar uma solução exata. Basta encontrar uma função $f(n)$ tal que $T(n) \in \Theta(f(n))$.

Resolução de recorrências

Método para **provar** a solução de uma recorrência:

- Substituição (prova por indução)

Alguns métodos para **adivinhar** a possível solução de uma recorrências:

- iteração
- árvore de recorrência
- recorrências lineares homonêgeas/não-homogêneas (vistos somente em CI237)

Método da substituição

- Idéia básica: “adivinhe” qual é a solução e prove por indução que ela funciona!
- Método poderoso mas nem sempre aplicável (obviamente).
- Com prática e experiência fica mais fácil de usar!

Exemplo

Considere a recorrência:

$$\begin{array}{rcl} T(1) & = & 1 \\ T(n) & = & T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n \geq 2. \end{array}$$

Chuto que $T(n) \in O(n \lg n)$.

Mais precisamente, chuto que $T(n) \leq 3n \lg n$.

(Lembre que $\lg n = \log_2 n$.)

Exemplo

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq 3\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= 3\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= 3n \lg n - 3\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq 3n \lg n.
\end{aligned}
$$

(Yeeeeeeesssssss!)

Exemplo

- Mas espere um pouco!
- $T(1) = 1$ e $3.1.\lg 1 = 0$ e a base da indução não funciona!
- Certo, mas lembre-se da definição da classe $O(\ )$.

  Só preciso provar que $T(n) \leq 3n \lg n$ para $n \geq n_0$ onde n_0 é alguma constante.

  Vamos tentar com $n_0 = 2$. Nesse caso

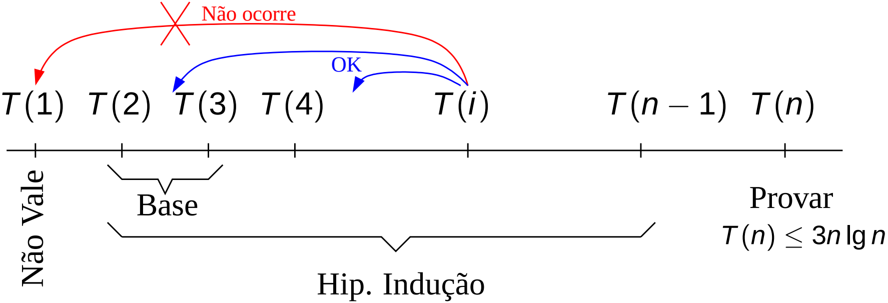
  $$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3.2.\lg 2 = 6,$$

  $$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3.3.\lg 3 \approx 14{,}26,$$

  Assim, o chute vale para $n = 2$ e $n = 3$ (esta será a Base!)

  Como a recorrência de $T(n)$, para $n > 3$, recai em recorrências menores até cair na base, estamos feitos.

$$T(1) = 1$$
$$T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$$



Exemplo

- Certo, funcionou para $T(1) = 1$.
- Mas e se por exemplo $T(1) = 8$?

  Então $T(2) = 8 + 8 + 2 = 18$ e $3.2. \lg 2 = 6$.
  Não deu certo...
- Certo, mas aí basta escolher uma constante maior.
  Mostra-se do mesmo jeito que $T(n) \leq 10n \lg n$, pois
  $T(2) = 18 \leq 10.2. \lg 2 = 20$,
  $T(3) = T(1)+T(2)+3 = 8+18+3 = 29 \leq 10.3. \lg 3 \approx 47{,}55$.
- De modo geral, se o passo de indução funciona ($T(n) \leq cn \lg n$), é possível escolher c e a base da indução de modo conveniente!

Como achar as constantes?

- Tudo bem. Dá até para chutar que $T(n)$ pertence a classe $O(n \lg n)$.
- Mas como descobrir que $T(n) \leq 3n \lg n$? Como achar a constante 3?
- Eis um método simples: suponha como hipótese de indução que $T(n) \leq cn \lg n$ para $n \geq n_0$ onde c e n_0 são constantes que vou tentar determinar.

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\
&= c \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n + n \\
&= cn \lg n + n
\end{aligned}
$$

(Hummm, não deu certo...)

Segunda tentativa

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq cn \lg n.
\end{aligned}
$$

Para garantir a última desigualdade basta que $-c\lceil n/2 \rceil + n \leq 0$ e $c = 3$ funciona. (Yeeeeeeessssss!)

Completando o exemplo

Mostramos que a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

satisfaz $T(n) \in O(n \lg n)$.

Mas quem garante que $T(n)$ não é "menor"?

O melhor é mostrar que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$.

Resta então mostrar que $T(n) \in \Omega(n \lg n)$. A prova é similar. (Exercício!)

Como chutar?

Não há nenhuma receita genérica para adivinhar soluções de recorrências. A experiência é o fator mais importante.

Felizmente, há várias idéias que podem ajudar.

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Ela é quase idêntica à anterior e podemos chutar que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$. Isto de fato é verdade. (Exercício ou consulte o CLRS)

Como chutar?

Considere agora a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n \qquad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Ela parece bem mais difícil por causa do "17" no lado direito.

Intuitivamente, porém, isto não deveria afetar a solução. Para n **grande** a diferença entre $T(\lfloor n/2 \rfloor)$ e $T(\lfloor n/2 \rfloor + 17)$ não é tanta.

Chuto então que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$. (Exercício!)

Truques e sutilezas

Algumas vezes adivinhamos corretamente a solução de uma recorrência, mas as contas aparentemente não funcionam! Em geral, o que é necessário é fortalecer a hipótese de indução.

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \quad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Chutamos que $T(n) \in O(n)$ e tentamos mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante c.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil + c\lfloor n/2 \rfloor + 1 \\ &= cn + 1. \end{aligned}$$

(Humm, falhou...)

E agora? Será que erramos o chute? Será que $T(n) \in \Theta(n^2)$?

Na verdade, adivinhamos corretamente. Para provar isso, é preciso usar uma hipótese de indução mais forte.

Vamos mostrar que $T(n) \leq cn - b$ onde $b > 0$ é uma constante.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + 1 \\ &\leq c\lceil n/2 \rceil - b + c\lfloor n/2 \rfloor - b + 1 \\ &= cn - 2b + 1 \\ &\leq cn - b \end{aligned}$$

onde a última desigualdade vale se $b \geq 1$.
(Yeeeesssss!)

Cuidados com a notação assintótica

A notação assintótica é muito versátil e expressiva. Entretanto, deve-se tomar alguns cuidados.

Considere a recorrência

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

É similar a recorrência do Mergesort!

Mas eu vou "provar" que $T(n) = O(n)$!

Cuidados com a notação assintótica

Vou mostrar que $T(n) \leq cn$ para alguma constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \Longleftarrow \textbf{ERRADO!!!} \end{aligned}$$

Por quê?

Não foi feito o passo indutivo, ou seja, não foi mostrado que $T(n) \leq cn$.