Recorrências: Provando Soluções

Prof. André Vignatti

Aula passada: solução de recorrências - provar X adivinhar.

Para **provar** a solução de uma recorrência:

- Indução

Para **adivinhar** a possível solução de uma recorrência:

- método de iteração
- método de árvore de recorrência
- método de recorrências lineares homonêgeas/não-homogêneas (vistos somente em CI237)

Considere a recorrência:

$$\begin{array}{rcl} T(1) & = & 1 \\ T(n) & = & T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \qquad \text{para } n \geq 2. \end{array}$$

Teorema. $T(n) = O(n \lg n)$.

Demonstração. Deve-se provar que $T(n) \leq cn \lg n$. Vou "chutar" que $c = 3$, ou seja, chuto que $T(n) \leq 3n \lg n$.

Hipótese: $T(k) \leq 3k \lg k, \forall (\text{base}) \leq k < n$.

Passo: Quero provar que $T(n) \leq 3n \lg n$.

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &\leq 3 \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\ &= 3 \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n - 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &= 3n \lg n - 3 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &\leq 3n \lg n. \end{aligned}$$

Base:
(para $n = 1$): $T(1) = 1$ e $3.1. \lg 1 = 0$ e a base da indução **não funciona**!

OK, mas lembre-se da definição de $O(\ )$.

- Basta provar que $T(n) \leq 3n \lg n$ para $n \geq n_0$, onde $n_0 \in \mathbb{R}$.

Vamos tentar com $n_0 = 2$. Nesse caso

$$T(2) = T(1) + T(1) + 2 = 4 \leq 3.2. \lg 2 = 6.$$

Mas $T(3) = T(1) + T(2) + 3$. Ou seja, $T(3)$ **usa** $T(1)$, que não foi provado! Então devemos provar a base para $n_0 = 3$ também.

$$T(3) = T(2) + T(1) + 3 = 8 \leq 3.3. \lg 3 \approx 14{,}26.$$

Assim, o chute vale para $n = 2$ e $n = 3$ (estes serão as bases!)

Precisamos provar mais bases?

- Não! Para $n \geq 4$, a recorrência sempre recai em valores $n = 2$ ou $n = 3$.

$\square$

Mas como descobrir que $T(n) \leq 3n \lg n$? Como achar a constante 3?

- Solução: deixar a constante c "em aberto".

Vamos refazer a prova, sem fixar o valor de c.

Demonstração. **Hipótese:** $T(k) \leq ck \lg k$, $\forall n_0 \leq k < n$ onde c e n_0 são constantes que vou tentar determinar.

Passo: (Primeira Tentativa)

Quero provar que $T(n) \leq cn \lg n$.

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg n + n \\
&= c \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n + n \\
&= cn \lg n + n
\end{aligned}$$

Não deu certo! Motivo: a limitação superior foi muito "folgada"'.

Passo: (Segunda Tentativa)

Quero provar que $T(n) \leq cn \lg n$.

$$\begin{aligned}
T(n) &= T(\lceil n/2 \rceil) + T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq c \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \lg n + c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor (\lg n - 1) + n \\
&= c \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&= cn \lg n - c \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\
&\leq cn \lg n.
\end{aligned}$$

Para garantir a última desigualdade basta que $-c\lceil n/2 \rceil + n \leq 0$.
Dividindo em caso par e ímpar, chegamos que $c \geq 3$, $n_0 \geq 3$. $\square$

Mostramos que $T(n) = O(n \log n)$. Quem garante que não é "menor"?
Neste caso, é melhor mostrar que $T(n) = \Theta(n \log n)$ (Exercício).

"Chutando" Soluções

Com experiência, fica fácil "chutar" a solução e provar por indução!
Considere a recorrência

$$\begin{array}{rcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \quad \text{para } n \geq 2. \end{array}$$

Ela é quase idêntica à anterior e podemos chutar que $T(n) \in \Theta(n \lg n)$. (Exercício)

Uma Sutileza

Considere a recorrência

$$\begin{array}{rcll} T(1) & = & 1 & \\ T(n) & = & 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \quad \text{para } n \geq 2. \end{array}$$

Mas eu vou "provar" que $T(n) = O(n)$!
Vou mostrar que $T(n) \leq cn$ para $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \\ &\leq 2c\lfloor n/2 \rfloor + n \\ &\leq cn + n \\ &= O(n) \qquad \Longleftarrow \textbf{ERRADO!!!} \end{aligned}$$

Por quê?
Não foi feito o passo indutivo, ou seja, não foi mostrado que $T(n) \leq cn$.