Corte Mínimo Global

Prof. André Vignatti

Definição. A probabilidade condicional do evento E dado que F ocorreu é dado por

$$\Pr(E|F) = \frac{\Pr(E \cap F)}{\Pr(F)},$$

dado que $\Pr(F) > 0$.

Lema. Se $E_1, \ldots, E_k$ são eventos, então

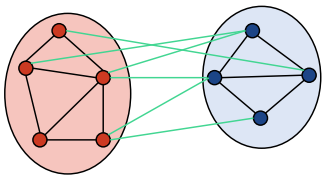
$$\Pr(E_1 \cap \ldots \cap E_k) = \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2|E_1) \cdot \Pr(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots \Pr(E_k|E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{k-1}).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&\Pr(E_1 \cap \ldots \cap E_k) \\
=\ &\Pr((E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1}) \cap E_k) \\
=\ &\Pr(E_1 \cap \ldots \cap E_{k-1}) \cdot \Pr(E_k|E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{k-1}) \\
=\ &\Pr(E_1 \cap \ldots \cap E_{k-2}) \cdot \Pr(E_{k-1}|E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{k-2}) \\
&\qquad \cdot \Pr(E_k|E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{k-1}) \\
&\ \ \vdots \\
=\ &\Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2|E_1) \cdot \Pr(E_3|E_1 \cap E_2) \cdots \Pr(E_k|E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{k-1})
\end{aligned}$$

□

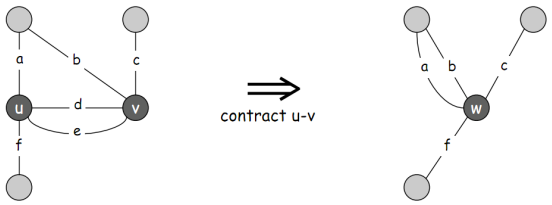
Definição. Dado grafo $G = (V, E)$, um **corte** é uma partição de V em dois subconjuntos A e B.



Definição. Dado um corte (A, B), o **tamanho** do corte é o número de arestas com uma das pontas em A e outra em B.

Na figura anterior, o tamanho do corte é **6**.

Contrair a aresta $e = (u, v)$:



1. Troque u e v pelo super-nodo w.
2. Preserve as arestas, atualizando suas pontas de u e v para w.
3. Mantenha arestas paralelas, mas remova loops.

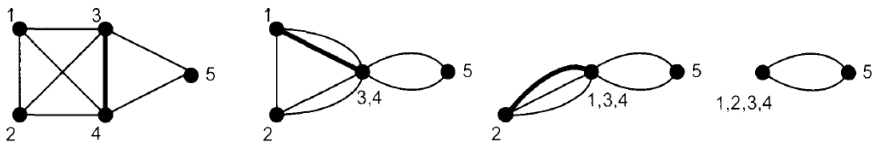
Quantas arestas **desconectam** o grafo? É uma medida de "robustez".

Problema (Corte Mínimo Global)**.** Dado um grafo, ache um corte de tamanho mínimo.

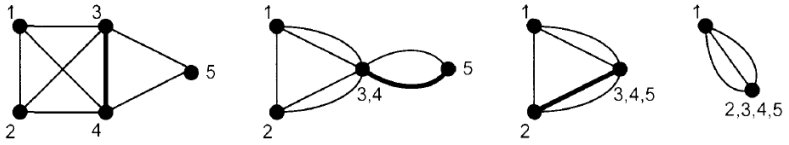
Algoritmo de Contração:

- Pegue $e = (u, v)$ aleatoriamente de maneira uniforme.
- **Contraia** a aresta e.
- Repita até o grafo ficar com dois nodos v_1 e v_2.
- Retorne o corte entre v_1 e v_2.

O algoritmo às vezes funciona, às vezes não funciona:



(a) A successful run of min-cut.



(b) An unsuccessful run of min-cut.

O algoritmo está correto?

Teorema (Corretude)**.** O algoritmo devolve o corte mínimo se nenhuma aresta do corte mínimo foi contraída.

Demonstração. (Exercício) - usar método de prova por invariantes de laço □

Qual a probabilidade de funcionar?

Lema. O algoritmo retorna um corte mínimo com probabilidade $\geq \frac{2}{n(n-1)}$.

Demonstração. Seja k o número de arestas em $C_{\min}$.

Então, $|\delta(v)| \geq k$ para todo $v \in G$, onde $\delta(v)$ é o conjunto de arestas incidentes a v.

Assim,

$$|E| = \frac{\sum_{v \in V} |\delta(v)|}{2} \geq \frac{n \cdot k}{2}.$$

Seja E_i o evento do algoritmo não pegar $e \in C_{\min}$ na iteração i.

$$\begin{aligned}
\Pr(E_1) &= 1 - \frac{k}{|E|} \\
&\geq 1 - \frac{k}{\frac{kn}{2}} = \frac{n-2}{n} \\
\Pr(E_2|E_1) &\geq 1 - \frac{k}{\frac{k(n-1)}{2}} = \frac{n-3}{n-1} \\
\Pr(E_3|E_1 \cap E_2) &\geq 1 - \frac{k}{\frac{k(n-2)}{2}} = \frac{n-4}{n-2} \\
&\vdots \\
\Pr(E_{n-2}|\bigcap_{i=1}^{n-3} E_i) &\geq 1 - \frac{k}{\frac{k(n-(n-3))}{2}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pr(\bigcap_{i=1}^{n-2} E_i) &\geq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdots \frac{n-4}{n-2} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{n-2}{n} \\
&= \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}$$

□

Para aumentar a probabilidade de sucesso, execute o algoritmo várias vezes, retornando o menor corte encontrado.

Fato (não iremos provar): $\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \leq \frac{1}{e}$.

Teorema. Se repetirmos o algoritmo $\frac{n(n-1)}{2} \ln n$ vezes, a probabilidade de não encontrar um corte mínimo global é $\leq 1/n$.

Demonstração. Pela independência entre as execuções do algoritmo, a prob de **não** encontrar um corte mínimo é no máximo

$$\left(1 - \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2} \ln n} = \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^{\ln n} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} = \frac{1}{n}.$$

□

Observação: Tempo de execução

- Cada execução do algoritmo leva tempo $\Theta(m)$. (PORQUÊ?)
- Executamos $\Theta(n^2 \log n)$ vezes o algoritmo.
- Então o algoritmo executa em tempo $\Theta(mn^2 \log n)$.