ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
UNIVERSITY OF CRETE

Θεωρία Πιθανοτήτων

Εαρινό 2025

Γ. Αραμπατζής

Διαγώνισμα Ιουνίου

06.06.2025

Ερώτηση 1: Νομίσματα

Σε ένα κουτί υπάρχουν $n+1$ νομίσματα. Το νόμισμα i φέρνει κορώνα με πιθανότητα $\frac{i}{n}$, $i=0,\ldots,n$. Διαλέγετε ένα νόμισμα στην τύχη και το στρίβετε.

Έστω A_i το ενδεχόμενο να διαλέξω το κέρμα i και K το ενδεχόμενο να έρθει κορώνα. Είναι δεδομένο ότι $\mathbb{P}(K\,|\,A_i)=\frac{i}{n}$ $\mathbb{P}(A_i)=\frac{1}{n+1}$.

α΄) [10] Να δείξετε ότι η πιθανότητα να έρθει κορώνα είναι $\frac{1}{2}$.

Εφόσον τα A_i είναι ξένα και η ένωση τους μας δίνει το δειγματικό χώρο, από το θεώρημα της ολικής πιθανότητας ισχύει ότι,

$$\mathbb{P}(K)=\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(K\,|\,A_i)\mathbb{P}(A_i)=\sum_{i=0}^{n}\frac{i}{n}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\,. \tag{1}$$

β΄) [10] Με δεδομένο ότι ήρθε κορώνα, να υπολογίσετε την πιθανότητα να διαλέξατε το κέρμα i.

Από το θεώρημα του Bayes,

$$\mathbb{P}(A_i\,|\,K)=\frac{\mathbb{P}(K\,|\,A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(K)}=\frac{\frac{i}{n}\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{2}}=\frac{2i}{n(n+1)}\,. \tag{2}$$

(20 ποιντς)

Ερώτηση 2: Ομοιόμορφη κατανομή [20]

Έστω X_1,X_2,X_3 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,1]$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής είναι ίση με 1 για τιμές της X στο $[0,1]$ και 0 αλλού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα η μεγαλύτερη από τις τρεις να ειναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο.

Το ενδεχόμενο του οποίου την πιθανότητα θέλουμε να υπολογίσουμε γράφεται ως,

$$\begin{aligned} A=&\{X_1<X_2+X_3\,,\ X_1>X_2\,,\ X_1>X_3\}\cup\\ &\{X_2<X_1+X_3\,,\ X_2>X_1\,,\ X_2>X_3\}\cup\\ &\{X_3<X_1+X_2\,,\ X_3>X_1\,,\ X_3>X_2\}\\ =&\,A_1\cup A_2\cup A_3\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Επειδή τα σύνολα είναι ξένα μεταξύ τους, ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(A_2)+\mathbb{P}(A_3)=3\mathbb{P}(A_1)\,, \tag{4}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω συμμετρίας του προβλήματος. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένοΝυ A_1.

Για κάθε μία από τις τ.μ. έχουμε ότι η μεγαλύτερη από όλες, η X_1 εδώ, μπορεί να ανήκει οπουδήποτε στο $[0,1]$. Η X_2 είναι σίγουρα μικρότερη από την X_1 και μεγαλύτερη από το 0, άρα ανήκει στο διάστημα $[0,X_1]$. Για την X_3 έχουμε ότι $X_3>X_1-X_2$ και $X_3<X_1$, άρα ανήκει στο διάστημα $[X_1-X_2,X_1]$. Επομένως,

$$\mathbb{P}(X_1<X_2+X_3)=\int_0^1\int_0^{x_1}\int_{x_1-x_2}^{x_1}1\,\mathrm{d}x_3\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1=\ldots=\frac{1}{6}\,. \tag{5}$$

Επομένως, $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$.

Πληροφορίες

- Δίνονται συνολικά 40 μονάδες. Το μέγιστο σκορ είναι 40.
- Η διάρκεια του διαγωνίσματος είναι 150 λεπτά.
- Αιτιολογήστε καθαρά τις απαντήσεις σας. Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν θεωρούνται σωστές.
- Λύστε τα θέματα στο πρόχειρο και παρουσιάστε τις τελικές λύσεις καθαρογραμμένες. Απαντήσεις με μουντζούρες δεν θα βαθμολογούνται.
- Δώστε συγκεντρωμένες απαντήσεις για κάθε άσκηση. Αν προχωρήσετε στην επόμενη χωρίς να έχετε ολοκληρώσει την προηγούμενη, αφήστε επαρκή κενό χώρο σε περίπτωση που θέλετε να επιστρέψετε.