UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Instituto de Física - Departamento de Física Teórica
Primeira lista de exercícios de Física Matemática 3
Prof. Rafael F. Aranha

1 Mostre que, para qualquer conjunto de n números complexos $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, temos que

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n|^2 \leqslant n \left(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + ... + |\alpha_n|^2 \right).$$

2 Considere três vetores ortonormais $\{|i\rangle\}_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^3$, dados por

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad |3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Construa os três projetores P_1, P_2 e P_3 e mostre que

$$\sum_{j=1}^{3} P_j = \mathbb{1}.$$

3 Seja o operador $\hat{U} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, dado por

$$\hat{U} |\alpha\rangle = \hat{U} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} - i \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha_1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha_2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$$

$\hat{U}$ é unitário?

4 Encontre a representação matricial do operador $\hat{R}$ que relaciona a base canônica de $\mathbb{C}^3$ para a base de vetores ortonormais, obtida através da ortonormalização de Gram-Schmidt dos seguintes vetores:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad ; \quad |a_3\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Ou seja, obtenha inicialmente a base romana $|K\rangle = (|I\rangle, |II\rangle, |III\rangle)$ a partir dos vetores acima e, em seguida, obtenha $\hat{R}$ através de $|K\rangle = \hat{R}|k\rangle$ ($K = I, II, III$ e $k = 1, 2, 3$), onde $|k\rangle$ é a base canônica. Verifique que $\hat{R}$ é unitário.

5 Considere o seguinte operador na sua representação matricial,

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix} .$$

i) Encontre os autovalores λ_i ($i = 1, 2$) e os autovetores ortonormais de $\hat{A}$. ii) Calcule os operadores de projeção (forma matricial) P_1 e P_2 e verifique que $\sum_i P_i = \mathbb{1}$ e $\sum_i \lambda_i P_i = \hat{A}$.

6 O operador de spin, $\hat{S} = \{\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z\}$, atua em um espaço de Hilbert bidimensional cuja base de Hamel é dada por $|\, i \,\rangle = \{|+\rangle, |-\rangle\}$, com $i = +, -$. As componentes de $\hat{S}$ operam sobre a base do espaço de acordo com,

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x |+\rangle &= \frac{\hbar}{2} |-\rangle, & \hat{S}_x |-\rangle &= \tfrac{\hbar}{2} |+\rangle, \\
\hat{S}_y |+\rangle &= \frac{i\hbar}{2} |-\rangle, & \hat{S}_y |-\rangle &= -\tfrac{i\hbar}{2} |+\rangle, \\
\hat{S}_z |+\rangle &= \frac{\hbar}{2} |+\rangle, & \hat{S}_z |-\rangle &= -\tfrac{\hbar}{2} |-\rangle.
\end{aligned}$$

i) Mostre que o operador $\hat{S}$ pode ser representado matricialmente por

$$\hat{S}_j = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_j,$$

onde $\hat{\sigma}_j = \{\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z\}$ são as matrizes de Pauli.

ii) Mostre que a relação de anticomutação entre as componentes do operador de spin, utilizando a representação matricial do item anterior, é dada por

$$\{\hat{S}_i, \hat{S}_j\} = \left(\frac{\hbar^2}{2}\right)\delta_{ij},$$

onde o anticomutador é definido por $\{A, B\} \equiv AB + BA$.

7 Considere uma dupla de vetores, $|W\rangle$ e $|V\rangle$, pertencente a um espaço de Hilbert de dimensão finita n_1 e uma segunda dupla de vetores, $|Y\rangle$ e $|Z\rangle$, pertencente a um segundo espaço de Hilbert de dimensão finita n_2. Tais vetores são expandidos, respectivamente, em suas bases de Hamel,

$$\begin{aligned}
|W\rangle &= \sum_{i=1}^{n_1} w_i \,|\, i \,\rangle, & |V\rangle &= \sum_{j=1}^{n_1} v_j \,|\, j \,\rangle, \\
|Y\rangle &= \sum_{l=1}^{n_2} y_l \,|\, l \,\rangle, & |Z\rangle &= \sum_{m=1}^{n_2} z_m \,|\, m \,\rangle,
\end{aligned}$$

onde os coeficientes das expansões pertencem ao conjunto dos números complexos.

i) Mostre que o produto interno entre os produtos diretos $\langle W| \otimes \langle Y|$ e $|V\rangle \otimes |Z\rangle$ é dado por

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} w_i^* v_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n_2} y_j^* z_j\right).$$

ii) Refaça o item anterior utilizando a forma matricial, para o caso em que $n_1 = n_2 = 2$, e mostre que o resultado do produto interno é o mesmo que o apresentado acima.

8 Considere os seguintes operadores hermitianos nas suas respectivas representações matriciais:

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

i) Mostre que tais operadores comutam.

ii) Resolva o problema de autovalores para ambos operadores e mostre que $\hat{\Omega}$ é degenerado e $\hat{\Lambda}$, não.

iii) Construa o operador unitário $\hat{U}$ através dos autovetores de $\hat{\Lambda}$ (não degenerado).

iv) Mostre que este operador unitário diagonaliza não somente $\hat{\Lambda}$, mas, também, $\hat{\Omega}$.

9 Na mecânica estatística quântica, o operador densidade, $\hat{\rho}$, está diretamente relacionado com a probabilidade p_j de ocorrência de um estado quântico representado pelo vetor $|\psi_j\rangle$, o qual forma uma base ortonormal. Este operador é expresso por

$$\hat{\rho} = \sum_{j=1}^{N} p_j \, |\psi_j\rangle \langle\psi_j| \ ,$$

onde N é o número de estados possíveis ($\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$).

i) Mostre que p_j são os autovalores do operador densidade.

ii) Mostre que o traço do operador densidade, definido por

$$Tr\ \hat{\rho} \equiv \sum_{k=1}^{N} \langle\psi_k|\hat{\rho}|\psi_k\rangle \ ,$$

é igual a 1.

iii) Considere que um estado quântico $|\psi_j\rangle$ possua probabilidade de ocorrer de acordo com o seu nível de energia E_j, através da expressão

$$p_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{\sum_{k=1}^{N} e^{-\beta E_j}} \ ,$$

onde E_j são os autovalores do operador hamiltoniano $\hat{H}$ e $\beta = k_B T$. Com isso, mostre que

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Tr\ e^{-\beta \hat{H}}} \ .$$

iv) Mostre que o valor médio de um operador arbitrário $\hat{D}$, com $\hat{D}\left|\psi_j\right\rangle = d_j\left|\psi_j\right\rangle$, dentro da descrição estatística considerada, é dado por

$$\left\langle\hat{D}\right\rangle = Tr\ \hat{\rho}\hat{D}\ .$$

10 Considere o átomo de hidrogênio, onde seu elétron orbita o núcleo formado por um próton. Na presença de um campo magnético externo ao longo do eixo z, o elétron se alinha através de seu momento magnético. A energia de interação entre o elétron e o campo magnético é representada por um operador $\hat{H}$ que atua em um espaço de Hilbert bidimensional. Este operador está relacionado ao operador de Pauli $\hat{\sigma}_z$ através da relação $\hat{H} = -\alpha\hat{\sigma}_z$. Neste caso, $\alpha = \mu B_z$, onde μ é o momento magnético do elétron e B_z é a única componente do campo magnético externo ao longo do eixo z. O operador densidade $\hat{\rho}$ do sistema é dado por

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{Tr\ e^{-\beta\hat{H}}}\ ,$$

onde $\beta = 1/k_B T$, sendo k_B a constante de Boltzmann e T a temperatura do sistema em questão.

i) Mostre que a representação matricial do operador densidade é dada por

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\cosh\alpha\beta}\begin{pmatrix} e^{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & e^{-\alpha\beta}\end{pmatrix}.$$

ii) A entropia S do sistema pode ser obtida através da expressão de von Neumann, $S = -k_B Tr(\hat{\rho}\ln\hat{\rho})$. Mostre que

$$S = k_B\ln 2 + k_B\ln(\cosh\alpha\beta) - k_B\alpha\beta\tanh\alpha\beta.$$

iii) Calcule a entropia de Shannon, $S = -k_B\sum_{j=1}^{n} p_j\ln p_j$, para o caso de uma moeda que possui a mesma probabilidade de se obter cara ou coroa ($p_{cara} = p_{coroa} = 1/2$) e compare com a entropia do item anterior para o caso da ausência do campo magnético externo. O que podemos interpretar desta comparação?

iv) Mostre que

$$\ln\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \ln p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ln p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ln p_n \end{pmatrix}.$$

Dica: Utilize a série de Taylor de $\ln x$ *em torno do ponto* $x = 1$ *para* $x = \hat{\rho}$.

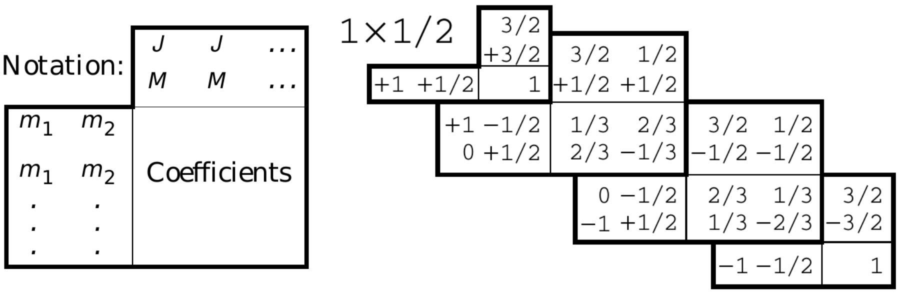
v) Mostre que a entropia de Shannon pode ser obtida a partir da entropia de von Neumann quando as probabilidades p_j de ocorrência de um estado $|\psi_j\rangle$ são os autovalores do operador densidade.

11 O espaço de Hilbert composto de duas partículas de spin $j_1 = 1$ e $j_2 = 1/2$ é descrito pelo espaço

$$\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_{1/2} = \mathbb{H}_{3/2} \oplus \mathbb{H}_{1/2}.$$

Ou seja, uma soma direta dos espaços de partículas de spin $J = 3/2$ e $J = 1/2$.

i) O *tableaux* de Clebsch-Gordan para o espaço considerado pode ser analisado abaixo, juntamente com o gabarito.



Construa as bases de $\mathbb{H}_{3/2} \oplus \mathbb{H}_{1/2}$, $|J, M\rangle$, **apenas** para $J = 1/2, 3/2$ e $M = +1/2$ em termos das bases $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ do espaço $\mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_{1/2}$. *Lembre que uma raiz quadrada deve ser colocada em cada coeficiente, ou seja,* $-1/3$ *significa* $-\sqrt{1/3}$.

ii) De forma geral, as bases do espaço produto, $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$, e de soma, $|J, M\rangle$, são relacionados por uma transformação linear (mudança de base) em uma combinação linear de estados com diferentes m_1 e m_2 ($-j_k \leqslant m_k \leqslant j_k$, $\forall\ k = 1, 2$).

Mostre que tal combinação linear pode ser dada por

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M\rangle |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle.$$

iii) Pelos resultados dos itens anteriores, interprete o significado do produto interno,

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M\rangle.$$

Justifique a interpretação utilizando os cálculos do item i) como exemplo.