

**Abrégé de mécanique quantique  
à l'usage de la préparation à  
l'agrégation de physique**

Jean Hare

5 juin 2019



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>vi</b>
<b>I La genèse de la mécanique quantique</b>	<b>9</b>
I.1 Faits expérimentaux et idées pré-quantiques . . . . .	9
I.1.1 Quantification des longueurs d'onde de rayonnement . . . . .	9
I.1.2 Rayonnement du corps noir : lois empiriques et théorie de Planck .	10
I.1.3 Dualité onde-corpuscule selon Einstein . . . . .	11
I.1.4 Structure de l'atome et Quantification de l'énergie . . . . .	13
I.1.5 Théorie de Bohr-Wilson-Sommerfeld : l'ancienne théorie des quanta	14
I.1.6 La mécanique des matrices . . . . .	15
I.1.7 Dualité onde-corpuscule selon de Broglie et Schrödinger . . . . .	15
I.1.8 Le spin 1/2 . . . . .	18
I.2 Applications . . . . .	20
I.2.1 Ordres de grandeurs . . . . .	20
I.2.2 Unités naturelles de l'atome d'hydrogène . . . . .	20
I.2.3 Le modèle de Bohr : approche historique (1913) . . . . .	21
<b>II La mécanique ondulatoire</b>	<b>23</b>
II.1 La notion de fonction d'onde . . . . .	23
II.1.1 Fonction d'onde et postulat de Born . . . . .	23
II.1.2 Représentation impulsions . . . . .	24
II.1.2 a) Opérateur impulsions . . . . .	24
II.1.2 b) Valeurs moyennes de l'impulsion . . . . .	24
II.1.2 c) Densité de probabilité en impulsions . . . . .	25
II.2 L'équation d'évolution . . . . .	25
II.2.1 Le postulat . . . . .	25
II.2.2 Obtention heuristique . . . . .	25
II.2.3 Courant de probabilité . . . . .	27
II.2.4 États stationnaires . . . . .	27
II.2.5 Superposition d'états . . . . .	27
II.3 Inégalités de Heisenberg . . . . .	30
II.3.1 Position du problème . . . . .	30
II.3.2 Approche heuristique . . . . .	30
II.3.3 Démonstration générale . . . . .	31
II.4 La particule libre . . . . .	33
II.4.1 États stationnaires (à une dimension) . . . . .	33
II.4.2 Normalisation généralisée des fonctions propres de $p$ . . . . .	33
II.4.3 Étude générale d'un paquet d'onde libre . . . . .	34
II.4.4 Le cas particulier du paquet d'onde gaussien . . . . .	36

<b>III Formalisme et postulats</b>	<b>41</b>
III.1 L'espace des états . . . . .	42
III.1.1 Espace pré-hilbertien . . . . .	42
III.1.1 a) Produit hermitien . . . . .	42
III.1.1 b) Norme et distance . . . . .	42
III.1.1 c) Espace de Hilbert . . . . .	43
III.1.2 Dualité . . . . .	43
III.1.2 a) Dual topologique $H'$ et notation de Dirac . . . . .	43
III.1.2 b) Exemples . . . . .	43
III.1.2 c) Bases hilbertiennes . . . . .	44
III.1.3 Systèmes composites . . . . .	46
III.2 Les grandeurs physiques . . . . .	47
III.2.1 Éléments de matrice . . . . .	47
III.2.2 Opérateur adjoint et conjugaison hermitique . . . . .	48
III.2.3 Opérateurs auto-adjoints . . . . .	49
III.2.3 a) Définition . . . . .	49
III.2.3 b) Propriétés des opérateurs auto-adjoints . . . . .	49
III.2.3 c) Diagonalisation . . . . .	49
III.2.3 d) Représentations position et impulsion . . . . .	50
III.2.4 Algèbre des opérateurs . . . . .	51
III.2.4 a) Quantification canonique . . . . .	51
III.2.4 b) Calcul opératorielle . . . . .	52
III.2.4 c) Opérateurs unitaires . . . . .	53
III.2.4 d) Diagonalisation simultanée . . . . .	54
III.2.4 e) Notion d'ECOC . . . . .	55
III.3 La mesure . . . . .	55
III.3.1 Les postulats . . . . .	55
III.3.2 Contenu physique . . . . .	56
III.3.3 Exemples . . . . .	57
III.3.4 Moyenne et variance . . . . .	58
III.3.5 Inégalités de Heisenberg . . . . .	58
III.3.6 États intriqués et projection du paquet d'ondes . . . . .	59
III.4 Évolution temporelle . . . . .	60
III.4.1 Hamiltonien . . . . .	60
III.4.2 Équation de Schrödinger . . . . .	60
III.4.3 Équation de Heisenberg . . . . .	61
III.4.4 L'opérateur d'évolution . . . . .	63
III.4.5 Équivalence Schrödinger – Heisenberg . . . . .	64
III.4.6 Théorème de Ehrenfest . . . . .	65
III.5 Particules identiques . . . . .	66
III.5.1 Position du problème . . . . .	66
III.5.2 Postulat de symétrisation . . . . .	66
III.6 Applications . . . . .	67
III.6.1 Paquet d'onde libre dans le point de vue de Heisenberg . . . . .	67
III.6.2 Force de Lorentz . . . . .	69
<b>IV Problèmes à une dimension</b>	<b>71</b>
IV.1 Problèmes à potentiel constant par morceaux . . . . .	71
IV.1.1 Cadre général . . . . .	72
IV.1.1 a) Notations . . . . .	72
IV.1.1 b) Principe de raccordement . . . . .	72
IV.1.2 Marche de potentiel . . . . .	73
IV.2 Puits de potentiel . . . . .	75

IV.2.1	Notion de puits de potentiel . . . . .	75
IV.2.2	Puits de potentiel infini . . . . .	76
IV.2.3	Puits de potentiel fini . . . . .	76
IV.2.4	Puits de potentiel quelconque . . . . .	78
IV.3	Effet tunnel . . . . .	80
IV.3.1	Probabilité de franchissement . . . . .	80
IV.3.2	Exemples d'applications . . . . .	83
IV.3.2 a)	Couplage tunnel entre deux puits . . . . .	83
IV.3.2 b)	Théorie de Gamow de la radioactivité alpha . . . . .	88
IV.3.2 c)	Le microscope à effet tunnel . . . . .	90
<b>V</b>	<b>Moment cinétique</b>	<b>91</b>
V.1	Théorie générale . . . . .	91
V.1.1	Introduction . . . . .	91
V.1.2	Construction de la base standard . . . . .	92
V.1.2 a)	Choix d'un ECOC . . . . .	92
V.1.2 b)	Opérateurs d'échelle . . . . .	92
V.1.2 c)	Valeurs possibles de $\lambda$ et $\mu$ . . . . .	93
V.1.2 d)	Résultat . . . . .	94
V.2	Application au spin 1/2 . . . . .	94
V.2.1	Base standard et matrices de Pauli . . . . .	94
V.3	Harmoniques sphériques . . . . .	95
V.3.1	Contexte : particule dans un potentiel central . . . . .	95
V.3.2	Définitions et propriétés . . . . .	96
V.3.2 a)	Définition des harmonique sphériques . . . . .	96
V.3.2 b)	Propriétés . . . . .	96
V.3.2 c)	Exemples . . . . .	98
V.4	L'atome d'hydrogène . . . . .	98
V.4.1	Retour sur le potentiel central . . . . .	98
V.4.1 a)	Équation radiale générale . . . . .	98
V.4.1 b)	Formes asymptotiques . . . . .	99
V.4.2	Équation radiale pour l'atome d'hydrogène . . . . .	100
V.4.2 a)	Changements de fonction . . . . .	100
V.4.2 b)	Comportement asymptotique et quantification . . . . .	101
V.4.2 c)	Conséquences . . . . .	101
V.4.3	Récapitulation . . . . .	102
V.4.4	Effet d'entraînement du noyau . . . . .	102
<b>Appendices</b>		<b>A-105</b>
A <sub>II</sub>	Limite classique de l'équation de Schrödinger . . . . .	A-105
A <sub>II.1</sub>	L'approximation des courtes longueurs d'onde . . . . .	A-105
A <sub>II.2</sub>	L'équation de Hamilton-Jacobi . . . . .	A-106
A <sub>II.3</sub>	Variables action-angle et ancienne théorie des quanta . . . . .	A-107
B <sub>II</sub>	Caractère complexe de la fonction d'onde . . . . .	A-108
C <sub>II</sub>	Limite paraxiale de l'optique . . . . .	A-108
D <sub>II</sub>	L'intégrale gaussienne complexe . . . . .	A-109
E <sub>III</sub>	Ensemble de définition et hermiticité de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{p}$ . . . . .	A-111
F <sub>III</sub>	Représentations position et impulsion . . . . .	A-113
F <sub>III.1</sub>	Base propres de $\mathbf{x}$ . . . . .	A-113
F <sub>III.1 a)</sub>	Utilisation de l'opérateur de translation . . . . .	A-113
F <sub>III.1 b)</sub>	Représentation position et action de $\mathbf{x}$ . . . . .	A-113
F <sub>III.1 c)</sub>	Orthonormalité de la base propres de $\mathbf{x}$ . . . . .	A-113
F <sub>III.1 d)</sub>	Action de $\mathbf{p}$ en représentation position . . . . .	A-114

F <sub>III</sub> .2	Base propre de $\mathbf{p}$ . . . . .	A-114
	F <sub>III</sub> .2 a) Vecteurs propres . . . . .	A-114
	F <sub>III</sub> .2 b) Symétrie entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{p}$ . . . . .	A-114
G <sub>III</sub>	Transformations unitaires dépendant du temps . . . . .	A-114
	G <sub>III</sub> .1 Transformations unitaires . . . . .	A-114
	G <sub>III</sub> .2 Transformations unitaires dépendant du temps . . . . .	A-115
	G <sub>III</sub> .3 Représentation intermédiaire . . . . .	A-115
	G <sub>III</sub> .4 Représentation d'interaction . . . . .	A-115
	G <sub>III</sub> .5 Perturbations dépendant du temps . . . . .	A-116
H <sub>III</sub>	Spin fictif . . . . .	A-116
	H <sub>III</sub> .1 Les matrices de Pauli . . . . .	A-116
	H <sub>III</sub> .2 Représentation par un spin fictif . . . . .	A-118
	H <sub>III</sub> .3 Interaction avec une onde électromagnétique . . . . .	A-119
I <sub>III</sub>	Approximation adiabatique . . . . .	A-124
	I <sub>III</sub> .1 Position du problème . . . . .	A-124
	I <sub>III</sub> .2 Approche classique . . . . .	A-124
	I <sub>III</sub> .3 Théorème adiabatique quantique . . . . .	A-127
J <sub>IV</sub>	Réflexion totale interne frustrée . . . . .	A-129
K <sub>V</sub>	Approximation WKB . . . . .	A-130
	K <sub>V</sub> .1 Position du problème . . . . .	A-130
	K <sub>V</sub> .2 Solution semi-classique . . . . .	A-131
	K <sub>V</sub> .3 La divergence sommable des amplitudes . . . . .	A-133
	K <sub>V</sub> .4 Les conditions de raccordement . . . . .	A-134
	K <sub>V</sub> .5 La condition de retour en phase . . . . .	A-135
<b>Bibliographie</b>		<b>A-139</b>

# Table des figures

I.1	Spectre de Fraunhofer . . . . .	10
I.2	Graphe de l'article original, pour le mercure, montant les seuils d'excitation successifs à des multiples de 4.9 eV . . . . .	14
I.3	Exemple de quantification spatiale. . . . .	15
I.4	Onde de phase et rayons pour l'atome d'hydrogène . . . . .	16
I.5	Vue en perspective et de dessus de l'interféromètre, et franges obtenues	18
I.6	Interferogrammes de Fraunhofer à 2 et à 5 fentes . . . . .	18
II.1	Expérience de fentes d'Young sur les atomes de néon par SHIMIZU et al.	29
II.2	Paramètres du paquet d'onde gaussien . . . . .	38
III.1	Postulat de projection du paquet d'onde pour deux observables incompatibles . . . . .	56
III.2	Paquet d'onde chirpé . . . . .	68
IV.1	Suspensions colloïdales de nanocristaux de semi-conducteurs (alliages II-IV) de tailles différentes. . . . .	76
IV.2	Solution graphique pour le puits fini symétrique . . . . .	77
IV.3	États stationnaires du puits fini . . . . .	78
IV.4	Condition de quantification pour le potentiel de Pöschl-Teller . . . . .	79
IV.5	Principe de la diode à cascade quantique . . . . .	84
IV.6	Exemple de double puits et modélisation par un potentiel constant par morceaux . . . . .	84
IV.7	Potentiels avec puits à gauche et à droite . . . . .	84
IV.8	Résolution graphique de l'équation de raccordement et forme des modes	85
IV.9	Graphe des fonctions de recouvrement . . . . .	87
IV.10	Potentiel vu par la particule $\alpha$ et allure de la fonction d'onde . . . . .	88
IV.11	Tracé de $\ln(\Gamma)$ en fonction de $1/\sqrt{E}$ . . . . .	89
V.1	Exemple de structure de la matrice $J_z$ . . . . .	93
V.2	Expression et forme polaire des premières harmoniques sphériques . . . . .	97
D <sub>II</sub> .1	Chemins complexes pour le calcul de l'intégrale gaussienne . . . . .	A-110
H <sub>III</sub> .1	Sphère de Bloch et les différents vecteurs rotations . . . . .	A-121
H <sub>III</sub> .2	Probabilité de la transition au cours du temps . . . . .	A-123
J <sub>IV</sub> .1	Géométrie de la réflexion totale interne frustée . . . . .	A-129
K <sub>V</sub> .1	Vue du puits de potentiel et des zones caractéristiques. . . . .	A-131
K <sub>V</sub> .2	Solution d'ordre zéro pour la zone classiquement autorisée . . . . .	A-132
K <sub>V</sub> .3	Solution d'ordre un pour la zone classiquement autorisée . . . . .	A-133
K <sub>V</sub> .4	Fonctions d'Airy . . . . .	A-135



# I – La genèse de la mécanique quantique

## Sommaire

---

<b>I.1</b>	<b>Faits expérimentaux et idées pré-quantiques</b>	<b>9</b>
I.1.1	Quantification des longueurs d'onde de rayonnement	9
I.1.2	Rayonnement du corps noir : lois empiriques et théorie de Planck	10
I.1.3	Dualité onde-corpuscule selon Einstein	11
I.1.4	Structure de l'atome et Quantification de l'énergie	13
I.1.5	Théorie de Bohr-Wilson-Sommerfeld : l'ancienne théorie des quanta	14
I.1.6	La mécanique des matrices	15
I.1.7	Dualité onde-corpuscule selon de Broglie et Schrödinger	15
I.1.8	Le spin 1/2	18
<b>I.2</b>	<b>Applications</b>	<b>20</b>
I.2.1	Ordres de grandeurs	20
I.2.2	Unités naturelles de l'atome d'hydrogène	20
I.2.3	Le modèle de Bohr : approche historique (1913)	21

---

## I.1 Faits expérimentaux et idées pré-quantiques

Voici un rappel des principales expériences ou observations expérimentales et élaborations théoriques qui ont pavé le chemin de la mécanique quantique.

Pour cet aspect historique, les références bibliographiques principales sont le chapitre 1 de CAGNAC et al. (2005) et un certain nombre de paragraphes des chapitres 1 à 6 de ASLANGUL (2007). Quelques éléments se trouvent aussi dans le chapitre 1 de COHEN-TANNOUDJI et al. (1997a) et celui de LE BELLAC (2013).

### I.1.1 Quantification des longueurs d'onde de rayonnent

**1802–1859** William Hyde WOLLASTON, Josef von FRAUNHOFER, Gustav Robert KIRCHHOFF, Anders Jonas ÅNGSTRÖM, Charles WHEATSTONE, John HERSCHEL, William TALBOT etc. observent et cataloguent les raies spectrales présentes dans le spectre de la lumière visible du soleil, des étoiles, des flammes et des vapeurs atomiques. Notamment, Joseph von FRAUNHOFER fabrique le premier réseau de diffraction, qui contrairement au prisme permet une mesure directe des longueurs d'ondes. Il identifie, mesure et nomme les raies d'absorption du spectre solaire (1814), observées en 1802 par William WOLLASTON, dont plusieurs seront attribuées à des éléments par Gustav KIRCHHOFF et Robert BUNSEN en 1859.

CAGNAC et al., §1.3  
ASLANGUL, §6.1

**1885** Johann Jakob BALMER établit la formule éponyme relative au nombre d'onde ( $\sigma = \lambda^{-1}$ ) pour les quatre raies visibles de l'hydrogène atomique (découvertes par

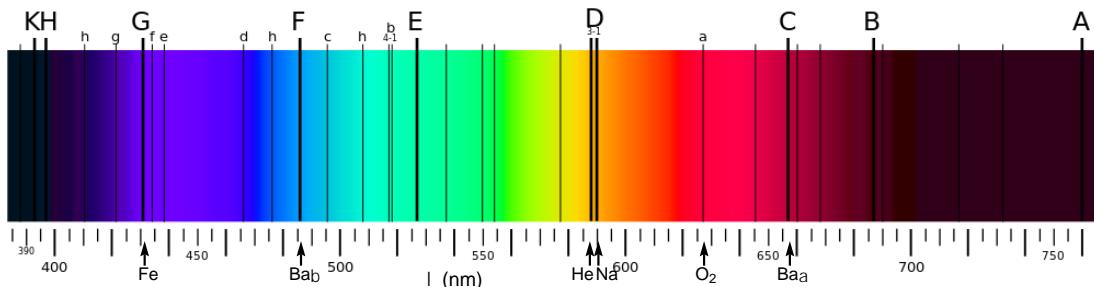


Fig. I.1 – Spectre de Fraunhofer

A.J. ÅNGSTRÖM en 1862) constituant la « série de Balmer »[1] :

$$\sigma = R_H(1/4 - 1/n^2),$$

où  $R_H$  sera plus tard appelée constante de Rydberg.

**1888-1890** Johannes RYDBERG généralise la formule de Balmer aux autres séries de l'hydrogène [2]<sup>1</sup>. En étudiant les spectres, en termes de nombre d'onde, il identifie des séries et observe des régularités qu'il essaie de quantifier à l'aide de nombres entiers. Il essaye notamment des lois quadratiques de la forme  $\sigma = \sigma_0 - C_0/(m+\delta)^2$  où  $m$  est entier (ordre dans la série), tandis que  $C_0$  et  $\delta$  sont des constantes, l'une universelle, et l'autre caractéristique de la série. Apprenant les travaux de BALMER, il se convainc que l'hydrogène est un cas particulier avec  $\delta = 0$  ( $\delta$  est aujourd'hui appelé « défaut quantique »), et  $\sigma_0 = C_0/4$ , est caractéristique de la série, le 4 pouvant être remplacé par un autre entier  $m < n$  :

$$\sigma = R_H(1/m^2 - 1/n^2).$$

**1908** Walther RITZ formalise les résultats précédents et établit la « loi de combinaison de Ritz » : la somme ou la différence de nombres d'onde de deux raies d'un même élément donne généralement le nombre d'onde d'une autre raie [3]. Notamment la somme des nombres d'onde de la série de Balmer avec celui de la première raie de la série de Lyman (dite Lyman<sub>α</sub> ou H<sub>α</sub>) redonne la série de Lyman. Cette propriété conduit à identifier des « termes spectraux » caractéristiques d'un élément, tels que le nombre d'onde de toute raie soit simplement la différence de deux termes spectraux. Ces termes spectraux, en nombre réduit, ont un caractère plus fondamental ou intrinsèque que les raies.

### I.1.2 Rayonnement du corps noir : lois empiriques et théorie de Planck

CAGNAC et al., §1.1  
LE BELLAC, §1.3.1  
ASLANGUL, ch. 4  
FEYNMAN, §4.5

**1896** Wilhelm WIEN établit la loi de Wien  $\Phi_\lambda = C\lambda^{-5}/\exp(c/\lambda T)$  ( $\Phi_\lambda$  est l'émittance spectrale) qui n'est valide qu'à la limite de courtes longueurs d'onde, et où  $C$  et  $c$  appellées respectivement première et seconde constante de rayonnement, ont des valeurs empiriques.[4]

1. Singulièrement, les travaux de Rydberg qui l'on conduit à cette formule portent sur les alcalins (atomes à 1 électron « optiquement actif »)

[1] J. J. BALMER ; «Notiz über die Spectrallinien des Wasserstoffs» ; *Annalen der Physik* **261**, p. 80–87 (1885).  
 [2] J. R. RYDBERG ; «Recherches sur la constitution des spectres d'émission des éléments chimiques» ; *Kongl. Svenska vetenskaps-akademiens handlingar* **23** (1890) URL <http://lup.lub.lu.se/record/a8e98679-034d-480f-9e12-5bd157c13d96>.  
 [3] W. RITZ ; «On a New Law of Series Spectra» ; *The Astrophysical Journal* **28**, p. 237 (1908).  
 [4] W. WIEN ; «Ueber die Energievertheilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers» ; *Ann. Phys.* **294**, p. 662–669 (1896).

**1900&1907** John William STRUTT, plus connu sous le nom de Lord RAYLEIGH [5] puis James JEANS[6] établissent la loi dite de Rayleigh-Jeans  $\Phi_\lambda = AT\lambda^{-4}$  qui n'est valide à la limite des grandes longueurs d'onde. Cette loi donne lieu à une divergence non-sommable aux courtes longueurs d'onde, identifiée par Lord RAYLEIGH en 1900, reprise par Albert EINSTEIN en 1905 (cf. *infra*) et nommée « catastrophe ultraviolette » par Paul EHRENFEST en 1911.

**1900** Max PLANCK présente une nouvelle expression du rayonnement électromagnétique du corps noir [7], obtenue en premier lieu de façon empirique comme une extension de la loi de Wien en accord avec l'expérience (qui sera retenue comme une formule d'interpolation des lois de Wien et de Rayleigh-Jeans :  $\Phi_\lambda = C\lambda^{-5}/(\exp(c/\lambda T)-1)$ , mais en fait M. PLANCK n'avait pas connaissance de la Loi de en question lors de sa proposition initiale).

Il l'a ensuite réinterprétée de façon théorique [8,9] en utilisant les méthodes statistiques de Ludwig BOLTZMANN, mais en omettant la dernière étape qui consiste à faire tendre vers zéro l'énergie élémentaire qu'elle implique, ou de façon équivalente la taille de la cellule élémentaire dans l'espace des phases. Cela le conduit à introduire les constantes de Boltzmann  $k_B$  et de Planck  $h$ . Il la nomme  $h$  comme « hilfe » (aide en allemand) ce qui montre bien qu'il la considère alors comme un auxiliaire mathématique sans réel contenu physique. Cette théorie revient donc à postuler que l'échange d'énergie entre la matière et le rayonnement<sup>2</sup> de fréquence  $\nu$  se fait exclusivement sous forme discrète, par quanta valant  $\Delta E = h\nu$ . En deux mots, cela supprime la catastrophe ultraviolette puisque qu'aux courtes longueurs d'onde, où l'on prédirait autrement une énergie de  $k_B T$  par mode, le prix à payer pour exciter ces modes sera de  $h\nu \gg k_B T$ , et sera donc très fortement défavorisé. Notons bien que cela invalide le “principe” d'équipartition de d'énergie.

### I.1.3 Dualité onde-corpuscule selon Einstein

**1905** Albert EINSTEIN introduit l'idée d'une nature corpusculaire de la lumière (révélant en cela sur quarante ans de triomphe de l'interprétation ondulatoire) en la présentant comme un simple *point de vue heuristique* [10]. Cette hypothèse possède un caractère plausible en raison de la proportionnalité de la densité d'énergie avec la densité de quantité de mouvement ou de moment cinétique du champ électromagnétique, mais elle est tout de même difficilement conciliable avec les innombrables preuves du caractère ondulatoire de la plupart des phénomènes optiques.

Les idées clés de l'article d'Einstein sont les suivantes :

- Le contraste entre la nature discrète de la matière (atomes et électrons) d'une part , et le caractère fondamentalement continu de l'électromagnétisme de

2. Ces échanges d'énergie avec la matière sont indispensables pour que puisse s'établir un équilibre thermodynamique du rayonnement, vu que électromagnétisme étant linéaire, les différents modes électromagnétiques n'interagissent pas directement

CAGNAC et al., §1.2
ASLANGUL, §5.1
LE BELLAC, §1.3.2
COHEN-TANNOUDJI et al., §I.A

- 
- [5] L. RAYLEIGH ; «Remarks upon the law of complete radiation» ; *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.* **49**, p. 539–540 (1900).
- [6] J. H. JEANS ; «On the partition of energy between matter and Æther» ; *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.* **10**, p. 91–98 (1905).
- [7] M. K. PLANCK ; «Über eine Verbesserung der Wienschen Spectralgleichung» ; *Verhandl. Dtsc. Phys. Ges.* **2**, p. 202 (1900) URL <http://www.lawebdefisica.com/arts/improvementwiens.pdf> ; traduction anglaise : On an Improvement of Wien's Equation for the Spectrum <http://www.lawebdefisica.com/arts/improvementwiens.pdf>.
- [8] M. K. E. L. PLANCK ; «Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum» ; *Verhandl. Dtsc. Phys. Ges.* **2**, p. 237 (1900) URL [http://www.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo\\_maletin/Planck\(1901\)\\_Energydistribution.pdf](http://www.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Planck(1901)_Energydistribution.pdf) ; traduction anglaise : [http://www.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo\\_maletin/Planck%20\(1901\),%20Energy%20distribution.pdf](http://www.ffn.ub.es/luisnavarro/nuevo_maletin/Planck%20(1901),%20Energy%20distribution.pdf).
- [9] M. K. PLANCK ; «Ueber das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum» ; *Ann. Phys.* **309**, p. 553–563 (1901).
- [10] A. EINSTEIN ; «Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt» ; *Ann. Phys.* **322**, p. 132–148 (1905). URL <http://aapt.scitation.org/doi/abs/10.1119/1.1971542>; traduction anglaise : <http://aapt.scitation.org/doi/abs/10.1119/1.1971542>.

Maxwell et des quantités énergétiques associées d'autre part, n'est guère satisfaisant.

- Le caractère corpusculaire serait essentiel uniquement dans les échanges d'énergie avec la matière, en raison notamment du caractère discret de celle-ci.
- Le problème de la catastrophe ultraviolette apparaissant si l'on applique les conditions d'équilibre thermodynamique entre le rayonnement et un gaz.
- Une étude thermodynamique détaillée, reprenant les travaux de Max PLANCK, montre que la dépendance en volume de l'entropie d'un rayonnement monochromatique de fréquence  $\nu$ , coïncide avec celle d'un milieu discontinu constitué de quanta d'énergie de valeur  $R\beta\nu/\mathcal{N}_A$ , (où  $R/\mathcal{N}_A$  est en fait la constante de Boltzmann  $k_B$ ), et la constante phénoménologique  $\beta$  est bien sûr  $h/k_B$ . Ce qui est un gage de plausibilité de l'existence des quanta.
- La loi de STOCKES<sup>3</sup> relative à la fréquence d'émission  $\nu_2$  d'un corps fluorescent illuminé par un rayonnement de fréquence  $\nu_1$ , selon laquelle on a  $\nu_2 < \nu_1$ , peut être interprétée en terme de conservation de l'énergie des quanta absorbé et émis. Une conséquence prévue, si l'interprétation en terme de quanta est correcte, est que le processus correspondant n'a pas de seuil vis-à-vis du flux d'énergie incident, mais dépend seulement de sa fréquence.
- La fameuse discussion de l'effet photoélectrique<sup>4</sup>, alors dénommé « Production de rayons cathodiques par illumination de corps solides ». Einstein s'appuie sur les observations publiées par Philipp von LENARD, principalement le fait que l'énergie des électrons est indépendante de l'intensité lumineuse, mais qu'elle est plus importante pour des courtes longueurs d'onde. L'hypothèse selon laquelle un quantum d'énergie électromagnétique produit *au plus* un électron explique la seconde observation et prédit l'existence d'un seuil. Ce seuil correspond à la situation où l'énergie fournie par le quantum lumineux est exactement celle du travail de sortie de l'électron  $W_s$ , caractéristique du matériau. Elle explique aussi que l'énergie des photo-électrons dépend de la fréquence du rayonnement, mais pas de son intensité<sup>5</sup>. Enfin elle *prédit* que l'énergie cinétique des électrons (mesurée à l'aide d'un potentiel électrique « d'arrêt ») est une fonction affine de la fréquence du rayonnement, dont la pente est la constante de Planck  $h$ .

**1914** Robert Andrews MILLIKAN vérifie expérimentalement avec une grande précision la loi précédente [11]. Pour la petite histoire, MILLIKAN n'a jamais cru à l'existence des photons.

**1923** Arthur COMPTON publie ses résultats sur la diffusion des rayons  $\gamma$  et  $X$  par différents matériaux, qui mettent en évidence une diffusion fortement inélastique du rayonnement [12]. Plus précisément elle se caractérise par des rayons diffusés plus « mous » (c'est-à-dire de plus grande longueur d'onde) et cet effet est indépendant du matériau utilisé. Ses travaux sur cet effet qui porte aujourd'hui son nom s'étalent sur une longue période de 1917 à 1923, jalonnée d'interprétations ondulatoires erronées. Dans l'article de 1923, il propose une théorie complète fondée que les quanta d'Einstein, décrivant la collision d'un quantum d'énergie électromagnétique doté d'un impulsions  $h\sigma = \hbar k$  — en posant  $\hbar = h/2\pi$  — avec un électron au repos

3. de George G. STOKES, qui l'a décrite en 1852.

4. Observé en 1839, par Antoine et Alexandre BECQUEREL, puis interprété qualitativement en 1887 par Heinrich Rudolf HERTZ

5. L'intensité impacte bien sûr le taux de production des électrons, puisque le flux de photons est  $\Phi = P/h\nu$ .

[11] R. A. MILLIKAN ; «A Direct Determination of  $h$ » ; *Phys. Rev.* **4**, p. 73–75 (1914).

[12] A. H. COMPTON ; «A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements» ; *Phys. Rev.* **21**, p. 483–502 (1923).

donnant lieu à un échange d'énergie et de quantité de mouvement, qui se traduit par le recul de l'électron, emportant une partie de l'énergie du quantum incident.

**1977** Il est essentiel de noter que tous ces travaux ne sont que des considérations *heuristiques* autour de l'existence des photons, dont l'hypothèse est rendue plausible et s'avère commode, mais ne sont pas des preuves, car les deux principaux phénomènes — effet photo-électrique et effet Compton — peuvent être interprétés dans le cadre d'une théorie semi-quantique, dans laquelle la matière est quantifiée mais pas le rayonnement (cf. compléments).

Si Gilbert LEWIS introduit le terme de « photon » en 1926, les preuves expérimentales du caractère intrinsèquement discret de la lumière ne seront apportées qu'à la fin de la décennie 1950–60 par les contributions de Robert HANDBURY BROWN, Richard Q. TWISS, E. M. PURCELL, et Leonard MANDEL sur la statistique des photons. On peut considérer que la preuve définitive a été apportée en 1977 par l'expérience sur le dégroupement de photons de H. Jeff KIMBLE, Mario DAGENAIS, et Leonard MANDEL [13]. Depuis, de nombreuses autres preuves ont été obtenues, comme dans certaines expériences d'atomes refroidis par laser, ou des effets d'électrodynamique quantique, qui n'ont pas d'interprétation classique.

CAGNAC et al., §5.4

#### I.1.4 Structure de l'atome et Quantification de l'énergie

L'hypothèse atomique, sans remonter jusqu'à l'antiquité (et notamment le philosophe grec DEMOCRITE), fut inspirée par la loi de la stoechiométrie chimique<sup>6</sup>. Elle resta très controversée durant le XIX<sup>e</sup> siècle, mais un relatif consensus s'est établi avant 1900 chez les physiciens ayant pris part à la révolution quantique, et la question peut être considérée comme close par la publication de Jean PERRIN, « Les atomes », en 1913.

**1896** Joseph John THOMSON montre que les « rayons cathodiques », connus depuis un demi-siècle (premières études scientifiques dues à Michael FARADAY en 1838.), sont composés d'électrons (particules de charge négative) arrachés à la matière [14]. Robert Andrews MILLIKAN mesure leur charge[15] entre 1908 et 1913. Cela suggère que les fameux atomes ne sont pas insécables, contrairement à ce que leur nom impliquerait. Il propose alors en 1904 un modèle de l'atome [16] dans lequel les électrons « nagent » dans un noyau sphérique, de charge positive pour assurer l'électroneutralité de la matière, et ayant l'extension de l'atome.

LE BELLAC, §1.5.1  
ASLANGUL, §1.2,1.4

**1908-1911** Ernest RUTHERFORD (avec Hans GEIGER et Ernest MARSDEN) montre, en envoyant des particules  $\alpha$  sur une feuille d'or que le nombre de diffusions sous des angles élevés est incompatible avec le modèle de THOMSON [17,18]. Cette expérience suggère au contraire que l'essentiel de l'atome est vide, et que la charge positive est concentrée dans un très petit volume. Cela le conduit à proposer, avec Niels BOHR, le modèle planétaire, où les électrons tournent autour d'un noyau massif central comme les planètes autour du soleil.

CAGNAC et al.,  
Ann 4  
ASLANGUL, ch. 3  
LE BELLAC, §1.5.2  
COHEN-TANNOUDJI  
et al., VII.C.2

6. L'histoire a retenu le nom de John DALTON et son article fondamental "de 1805 : "On the Absorption of Gases by Water and other Liquids". Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester. 2nd. 6 : 271–287. Mais l'enchaînement des idées et des propositions est assez compliqué et sujet à controverses. Voir par exemple l'article consacré à Dalton sur Wikipedia.

- [13] H. J. KIMBLE, M. DAGENAIS & L. MANDEL ; «Photon Antibunching in Resonance Fluorescence» ; *Phys. Rev. Lett.* **39**, p. 691–695 (1977).
- [14] J. J. THOMSON ; «Cathode Rays» ; *Philosophical Magazine* **90**, p. 25–29 (2010).
- [15] R. A. MILLIKAN ; «On the Elementary Electrical Charge and the Avogadro Constant» ; *Phys. Rev.* **2**, p. 109–143 (1913).
- [16] J. J. THOMSON ; «On the structure of the atom : an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle ; with application of the results to the theory of atomic structure» ; *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.* **7**, p. 237–265 (1904).
- [17] E. RUTHERFORD ; «The scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  particles by matter and the structure of the atom» ; *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.* **21**, p. 669–688 (1911).
- [18] D. H. GEIGER & E. MARSDEN ; «The laws of deflexion of  $\alpha$  particles through large angles» ; *Lond. Edinb. Dubl. Phil. Mag.* **25**, p. 604–623 (1913).

Ce modèle pose néanmoins un nouveau problème théorique : la stabilité de ces orbites qui contredit les équations de Maxwell, selon lesquelles les électrons devraient rayonner leur énergie et aller « s'écraser » sur le noyau » en un temps très court (de l'ordre de la nanoseconde).

**1913** Niels BOHR publie un modèle quantitatif de l'atome d'hydrogène [19], dans lequel il combine des représentations classiques et des idées quantiques. Ce modèle lui permet d'établir la formule de Rydberg et de prédire l'expression de la constante de Rydberg en fonction de constantes fondamentales ( $e^2/\varepsilon_0$ ,  $m_e$ ,  $c$  et  $\hbar$ ), en accord avec sa détermination spectroscopique. L'idée centrale est la combinaison de l'hypothèse d'états quantifiés et du principe de correspondance. Nous reviendrons en détail sur ce modèle (cf. §I.2.3) dans l'approche utilisée par Bohr, qui contient bien plus de physique que l'hypothèse usuelle de la quantification du moment cinétique (qui n'est qu'une remarque dans l'article historique de Bohr). Ce modèle montre finalement que les termes spectraux ne sont rien d'autre que les énergies des orbites autorisées (en langage moderne « états stationnaires ») à un simple facteur  $hc$  près.

CAGNAC et al.,  
§1.3.3.2  
ASLANGUL, §6.2

CAGNAC et al., §1.4  
ASLANGUL, §6.3.3

**1914** James FRANCK et Gustav HERTZ réalisent l'expérience qui porte leur nom [20]. Elle constitue plus ou moins à mesurer la transmission des électrons, accélérés par un champ électrique, à travers une vapeur de mercure. Pour certaines valeurs équidistantes de l'énergie acquise par les électrons sous l'effet du champ électrique, cette transmission s'effondre. Cela montre le fait qu'un électron ne peut céder son énergie aux atomes lorsqu'il a acquis une certaine énergie cinétique (mais pas davantage), et les creux successifs signent le nombre d'atomes qu'ont successivement excité, en moyenne, chaque électron. Ce qui confirme la quantification des niveaux d'énergie dans les atomes.

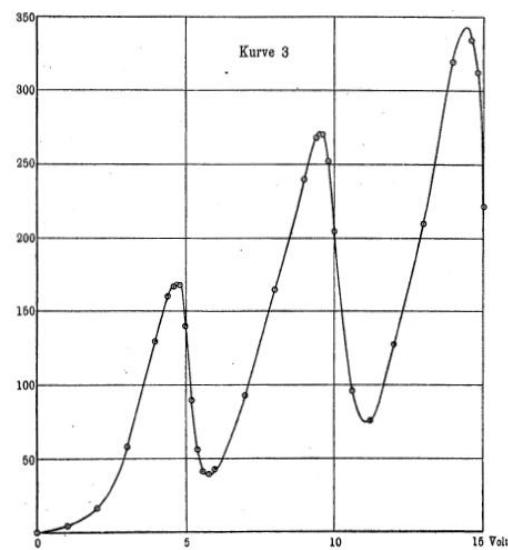


Fig. I.2 – Graphe de l'article original, pour le mercure, montant les seuils d'excitation successifs à des multiples de 4.9 eV

### I.1.5 Théorie de Bohr-Wilson-Sommerfeld : l'ancienne théorie des quanta

ASLANGUL,  
ch. 7, §9.1

**1915-1916** Indépendamment l'un de l'autre, William WILSON [21] et Arnold SOMMERFELD [22] introduisent des « règles de quantification » qui généralisent le modèle de BOHR à des systèmes multi-périodiques. Dans son article de 1916, SOMMERFELD

- ◆ explique aussi la structure fine de l'hydrogène et des alcalins par des effets relativistes. C'est à cette occasion qu'il introduit la « constante de structure fine »  $\alpha = \frac{e^2/4\pi\varepsilon_0}{\hbar c}$ .
- ◆ prédit une « quantification spatiale » du moment cinétique. Dans cette approche, le moment cinétique (ainsi que le moment magnétique qui lui est proportionnel) doit appartenir à des cercles autour de l'axe de quantification, caractérisés par une projection sur cet axe multiple entier de  $\hbar$ , tandis que sa longueur est elle aussi un multiple entier de  $\hbar$  (cf. Fig. I.1.5).

[19] N. BOHR ; «On the constitution of atoms and molecules» ; *Phil. Mag.* **26**, p. 1–25 (1913).

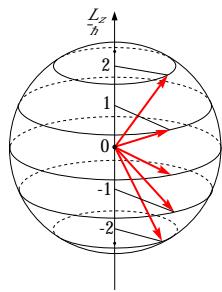
[20] J. FRANCK & G. HERTZ ; «Über Zusammenstöße zwischen Elektronen und den Molekülen des Quecksilberdampfes und die Ionisierungsspannung desselben» ; *Verh. d. Dt. Phys. Ges.* **16**, p. 457–467 (1914).

[21] W. WILSON ; «The quantum-theory of radiation and line spectra» ; *Philosophical Magazine (Series 6)* **29**, p. 795–802 (1915).

[22] A. SOMMERFELD ; «Zur Quantentheorie der Spektrallinien» ; *Ann. Phys.* **356**, p. 1–94 (1916).

Cette théorie est celle que l'on appelle aujourd'hui « l'ancienne théorie des quanta ». Elle repose sur une analyse classique suivie par une quantification des variables d'action, auxquelles on impose arbitrairement de prendre une valeur multiple entier de  $\hbar$ .

Les « variables d'action » sont des variable dynamiques qui s'introduisent naturellement dans l'étude des systèmes mécaniques intégrables, dont notamment ceux pour lesquels on peut séparer les variables. On trouvera en appendice la formulation et la justification de cette approche, dans le cadre de la limite quasi-classique de la mécanique quantique.



**Fig. I.3 – Exemple de quantification spatiale.**

### I.1.6 La mécanique des matrices

**1925** Werner HEISENBERG introduit la mécanique dite « des matrices » comme une formulation cohérente de la mécanique quantique qui prolonge la Théorie de Bohr-Wilson-Sommerfeld. Elle fait une large place au principe de correspondance, tout en éliminant les règles de quantification *ad hoc*, au prix d'une algèbre non commutative [23]. C'est la première formulation de la dynamique quantique qui met en avant la notion d'observable en se concentrant notamment sur les fréquences d'émission atomiques et leur intensité, qui sont à l'époque les seules données directement accessibles. Cette théorie a été élaborée des contributions de Wolfgang PAULI, Max BORN (qui était au départ le seul à connaître le formalisme matriciel) et Pascual JORDAN. Cette théorie a notamment permis à W. HEISENBERG, dès son premier article en 1925, de poser les bases rigoureuses de la quantification du moment cinétique

ASLANGUL, §9.2

**1926** Wolfgang PAULI publie une théorie quantique rigoureuse de la structure de l'atome d'hydrogène [24], sans utiliser de fonction d'onde, plusieurs mois avant l'article de SCHRÖDINGER qui utilise aussi l'atome d'hydrogène comme illustration de l'équation qu'il avait obtenue.

**1927-1930-1932** L'équivalence mathématique des deux formulations de SCHRÖDINGER et de HEISENBERG, est établie par Erwin SCHRÖDINGER lui même dès 1926 [25], ainsi que par Paul DIRAC (en 1930), et sera définitivement formulée dans un cadre mathématique plus consistant par John von NEUMANN en 1932.

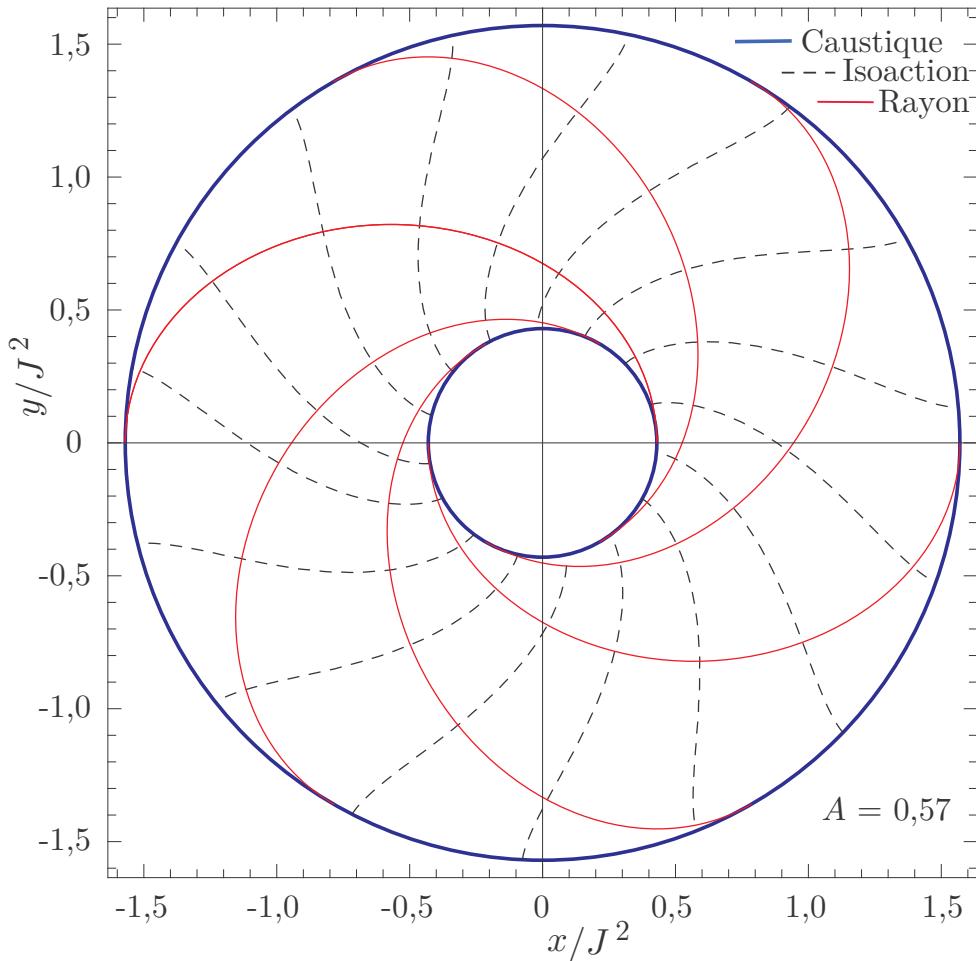
### I.1.7 Dualité onde-corpuscule selon de Broglie et Schrödinger

**1923** Louis DE BROGLIE, dans sa thèse de doctorat « Recherches sur la théorie des quanta » (soutenue en 1923 et publiée au Annales de Physique en 1925) postule qu'à tout mouvement de particule (l'électron par exemple) est associé une onde telle que  $\lambda = h/p$  où  $h$  est la constante de Planck, et  $p$  l'impulsion de la particule, qu'il appelle « onde de phase » [26,27]. Il s'appuie pour cela sur l'impact de l'effet Doppler relativiste sur la relation de Planck-Einstein, supposée valide *structo sensu* pour

ASLANGUL, §9.3  
LE BELLAC, §1.4.1  
COHEN-TANNOUDJI  
et al., §I.B.2

- [20] J. FRANCK & G. HERTZ; «Über Zusammenstöße zwischen Elektronen und den Molekülen des Quecksilberdampfes und die Ionisierungsspannung desselben»; *Verh. d. Dt. Phys. Ges.* **16**, p. 457–467 (1914).
- [23] W. HEISENBERG; «Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.»; *Zeitschrift für Physik* **33**, p. 879–893 (1925).
- [24] W. PAULI; «Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik»; *Z. Physik* **36**, p. 336–363 (1926).
- [25] E. SCHRÖDINGER; «Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen»; *Ann. Phys.* **384**, p. 734–756 (1926). ISSN 1521-3889. URL <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19263840804/abstract>.
- [26] L. V. P. R. DE BROGLIE; «Quanta de lumière, diffraction et interférences»; *C. R. Acad. Sci. Paris* **177**, p. 548 (1923) URL [http://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Broglie/Broglie\\_pdf/CR1923\\_p548.pdf](http://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Broglie/Broglie_pdf/CR1923_p548.pdf).
- [27] L. DE BROGLIE; «Waves and Quanta»; *Nature* **112**, p. 540 (1923). URL <https://www.nature.com/articles/112540a0>.

une particule au repos. En bref, et en termes actuels, cette relation entre l'énergie, composante temporelle du quadri-vecteur énergie-impulsion, et la fréquence, n'est cohérente que l'on suppose l'existence d'une « onde de phase » dont le vecteur d'onde serait le pendant de l'impulsion. Soit :  $(E/c, \mathbf{p}) = \hbar(\nu/c, 2\pi/\lambda n)$  ou dans les notations les plus usuelles aujourd'hui  $(E, \mathbf{p}) = \hbar(\omega, \mathbf{k})$ , et où  $(\omega, \mathbf{k})$  est le gradient quadri-dimensionnel de la phase, laquelle est un quadri-scalaire. Le point essentiel, qui sera repris par SCHRÖDINGER, est l'introduction d'une « vitesse de phase » et d'une « vitesse de groupe » dont les expressions sont tirées de la mécanique.



**Fig. I.4** – L'onde de phase et les rayons pour l'atome d'hydrogène, à deux dimensions, pour des valeurs de  $J$  (action totale) et  $L$  (moment cinétique) données, correspondants à l'excentricité  $A = \sqrt{1 - L^2/J^2}$  donnée sur la figure. Les deux cercles bleus sont les « caustiques » associées aux deux distances extrêmes, (apocentre =  $1/1 - A$  et péricentre =  $1/1 + A$  en unités réduites). Les lignes pointillées sont des « surfaces d'onde »  $S(r, \varphi) = \text{Cste}$ , et les lignes rouges des rayons, perpendiculaires aux surfaces d'onde, de forme elliptique comme attendu.

**1927** Erwin R. J. A. SCHRÖDINGER reprenant les idées de DE BROGLIE, établit l'équation qui porte son nom. Sa première publication en allemand [28] est datée de janvier 1926, et sa première publication en anglais [29], reprenant le contenu des 5 articles parus en allemand durant l'année 1926, est datée de décembre 1926. Pour décrire plus précisément l'onde de phase, il s'appuie sur les travaux de HAMILTON qui avait souligné l'analogie entre le principe de de Fermat et le principe de Hamil-

ASLANGUL, §9.4, 14.1  
COHEN-TANNOUDJI  
et al., §I.B.2  
FEYNMAN, ch 16  
LE BELLAC, §4.2.1

[28] E. SCHRÖDINGER ; «Quantisierung als Eigenwertproblem (1)» ; *Ann. Phys.* **384**, p. 361–376 (1926).  
[29] E. SCHRÖDINGER ; «An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules» ; *Phys. Rev.* **28**, p. 1049–1070 (1926).

ton (c'est-à-dire de moindre action) ainsi qu'entre les équations aux dérivées partielles satisfaites par le chemin optique d'un coté (équation eikonale) et l'action de l'autre (équation de Hamilton-Jacobi), et enfin entre les équations « géométriques » ou « mécaniques » que l'on en déduit, c'est à dire l'équation des rayons lumineux et les équations de Newton.

ASLANGUL, §7.1.3

**En optique** l'équation de d'Alembert (ou équation des ondes) donne pour un rayonnement monochromatique l'équation de Helmholtz (à l'approximation scalaire),  $\Delta S + k_0^2 S = 0$ , où  $k_0 = \omega/c$  est le vecteur d'onde dans le vide. Pour un milieu inhomogène d'indice lentement variable on obtient  $\Delta S + n^2(\mathbf{r})\omega^2/c^2 S = 0$ . Dans cette équation,  $n(\mathbf{r})\omega/c$  est la longueur du vecteur d'onde local  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$ , et on a donc  $\Delta S + \mathbf{k}^2(\mathbf{r}) S = 0$ . À la limite des grandes longueurs d'onde, en écrivant  $S = A \exp(i\mathcal{L}(\mathbf{r})/\lambda)$ , où  $\lambda = 1/k_0$  et  $\mathcal{L}(\mathbf{r})$  est le chemin optique, on obtient l'équation eikonale  $(\nabla \mathcal{L})^2 = n^2(\mathbf{r})$ , qui est l'équation fondamentale de l'optique géométrique<sup>7</sup>.

**En mécanique** on peut faire le chemin inverse : les équations « géométriques » de Hamilton (ou de Newton) découlent d'une équation aux dérivées partielles satisfait par l'action  $\mathcal{S}$  (fonction principale de Hamilton) qui est l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$-\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \mathcal{H}(\nabla \mathcal{S}, \mathbf{r}) = \frac{\nabla \mathcal{S}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) = E$$

Cette équation pourrait elle-même découler d'une équation ondulatoire satisfait par « l'onde de phase » de DE BROGLIE, de la forme de l'équation de Helmholtz dans un « milieu inhomogène », la phase de l'onde étant liée à l'action. Plus précisément, on a  $dS = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - Edt$ , et donc  $d\mathcal{S}/\hbar = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \cdot d\mathbf{r} - \frac{E}{\hbar} dt$ . Cette dernière équation retranscrit exactement les relations de de Broglie et de Planck-Einstein. De façon heuristique, pour un « état » d'énergie  $E$  donnée, il suffit de reporter l'équation de Broglie dans l'équation de Helmholtz, en remplaçant simplement  $\mathbf{k}(\mathbf{r})$  par  $\mathbf{k}_{dB}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}(\mathbf{r})/\hbar$ , et on obtient alors pour la fonction d'onde  $\varphi(\mathbf{r})$  :

$$\Delta \varphi + \mathbf{k}_{dB}^2(\mathbf{r}) \varphi = \Delta \varphi + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{r})^2}{\hbar^2} \varphi = \Delta \varphi + \frac{2m(E - V(\mathbf{r}))}{\hbar^2} \varphi = 0 .$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Schrödinger stationnaire d'énergie  $E$ . La fonction d'onde complète,  $\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}) e^{-iEt/\hbar}$ , vérifie  $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi = -\hbar^2/2m \Delta \psi + V(\mathbf{r}) \psi$ , et par conséquent, en vertu du principe de superposition des ondes, toute fonction d'onde vérifiera l'équation de Schrödinger.

Cette approche heuristique est visualisée sur la figure I.4 pour l'atome d'hydrogène, où figurent les « rayons » (c'est à dire les trajectoires) et les « fronts d'onde » (c'est à dire les surfaces iso-action), qui leur sont perpendiculaires, comme l'indique la loi de Malus en optique. L'onde de phase n'est pas donnée directement par la fonction principale de Hamilton, mais doit s'en rapprocher à la limite semi-classique (voir les Appendices AII et KV pour d'autres précisions).

Notons que l'équivalent quantique du principe de Huygens-Fresnel ne sera formulé de façon précise que beaucoup plus tard, par Richard FEYNMAN (intégrales de

7. On en déduit notamment l'équation des rayon lumineux, ces derniers étant définis comme les lignes de champ du chemin optique, lequel décrit la phase de l'onde. En paramétrisant le rayon par son abscisse curviligne  $s$  et en notant  $t = d/ds$  le vecteur unitaire tangent, on peut écrire  $\nabla \mathcal{L} = nt$  et on a :

$$\frac{d}{ds}(nt) = (\mathbf{t} \cdot \nabla)nt = \frac{1}{n}(\nabla \mathcal{S} \cdot \nabla)\nabla \mathcal{S} = \frac{1}{2n}\nabla(\nabla \mathcal{S}^2) = \frac{1}{2n}\nabla(n^2) = \nabla n$$

chemin). Ces deux principes permettent d'interpréter l'émergence d'une trajectoire, à la limite des courtes longueurs d'onde, comme le résultat d'un critère de « phase stationnaire ».

**1927** Clinton DAVISSON et Lester GERMER vérifient expérimentalement l'hypothèse de Louis de Broglie dans une expérience où un faisceau d'électrons fortement monochromatique subit une diffraction de Bragg dans un monocristal de nickel [30]. Pour la petite histoire, Max BORN avait dès 1926 interprété les expériences préliminaires publiées par DAVISSON en 1923 comme une vérification du comportement ondulatoire broglien des électrons.

De multiples expériences de diffraction et d'interférométrie ont depuis été réalisées avec toutes sortes de particules, neutres ou chargées. Citons notamment :

- Parmi de nombreux travaux sur les neutrons, une expérience remarquable [31] réalisée à Vienne en 1974, dans laquelle un interféromètre de type « Mach-Zehnder » est formé dans un monocristal de silicium

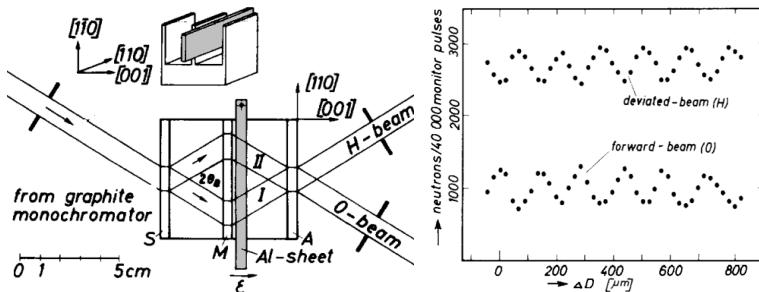


Fig. I.5 – Vue en perspective et de dessus de l'interféromètre, et franges obtenues

- Les expériences de types « fentes d'Young » sur les électrons [32], comme celles décrites dans son cours par Richard Feynman, réalisées en 1959-1961 à Tübingen. La difficulté était d'une part de produire des fentes assez petites, et d'écranner les champs électrique et magnétique inhomogènes vus par les électrons.
- Enfin, l'expérience de « fentes d'Young » pour des atomes de Néon refroidis par laser, réalisée en 1992 dans le groupe de F. SHIMIZU à l'université de Tokyo [33], qui sera présentée dans le chapitre II de ce cours.

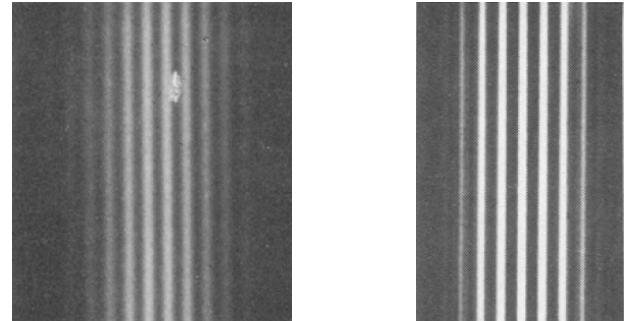


Fig. I.6 – Interferogrammes de Fraunhofer à 2 et à 5 fentes

### I.1.8 Le spin 1/2

Pour ce paragraphe, les livres se concentrent essentiellement sur l'expérience de Stern et Gerlach, qui reste le paradigme de la mesure quantique, malgré le peu de poids qu'elle a eu dans l'élaboration de la théorie du spin 1/2. Aussi les références marginales sont les références générales sur le spin 1/2, dont le côté historique est peu ou pas développé.

**Effet Zeeman anormal** Dans son article de 1916, SOMMERFELD prédit aussi la forme des spectres attendus lors de l'application d'un champ magnétique (effet Zeeman) ou d'un champ électrique (effet Stark).

- 
- [30] C. DAVISSON & L. H. GERMER ; «Diffraction of Electrons by a Crystal of Nickel» ; *Phys. Rev.* **30**, p. 705–740 (1927). URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.30.705>.
- [31] H. RAUCH, W. TREIMER & U. BONSE ; «Test of a single crystal neutron interferometer» ; *Physics Letters A* **47**, p. 369 – 371 (1974). ISSN 0375-9601.
- [32] C. JÖNSSON ; «Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten» ; *Zeitschrift für Physik* **161**, p. 454–474 (1961). ISSN 0044-3328.

Dans la théorie en question, il reste néanmoins un problème : l'interprétation de l'effet Zeeman anormal, découvert par Thomas PRESTON en 1898.

Lors de l'application d'un champ magnétique, les raies spectrales se scindent en différentes composantes, révélant l'existence, dans chaque niveau de structure fine caractérisé par un moment cinétique intrinsèque  $\ell\hbar$ , de  $2\ell + 1$  états qui diffèrent par la projection du moment cinétique sur l'axe de quantification. Comme  $\ell$  est un entier, on attend un nombre impair de raies (concrètement 3 raies dans le cas de la transition  $(n+1)P \rightarrow nS$ ). Or dans certains cas (en fait pour les atomes de  $Z$  impair, mais le cas de l'hydrogène est spécial), on observe un nombre pair de raies.

- 1921** Alfred LANDÉ introduit l'idée que le facteur gyromagnétique  $\gamma$  pourrait ne pas être toujours égal à sa valeur classique  $q/2m$  et envisage aussi qu'un moment cinétique puisse être demi-entier [34]. Il introduit le facteur de Landé  $g$  tel que le rapport gyromagnétique soit  $\gamma = gq/2m$ .
- 1922** Otto STERN et Walther GERLACH réalisent (malgré les doutes de Max BORN) l'expérience célèbre qui porte leur nom [35,36], afin de confirmer l'existence de la quantification spatiale prédicta par la théorie de SOMMERFELD, mais ne concluent pas quant à la valeur de  $\ell$  et encore moins sur le facteur de Landé  $g$ .
- 1925** Wolfgang PAULI publie un article qui comporte une discussion sur la signification physique des nombres quantiques [37] et suggère que si trois nombres quantiques suffisent en principe pour une particule à 3 dimensions, il serait semble-t-il nécessaire d'en introduire un quatrième pour rendre compte de l'effet Zeeman anormal.
- 1925** George E. UHLENBECK et Samuel GOUDSMIT, s'appuyant sur les travaux de LANDÉ et l'article de PAULI ci-dessus, proposent l'idée du spin 1/2 de l'électron, associé à une facteur gyromagnétique de  $q/m$  (c'est-à-dire  $g = 2$ ) [38]. Notons que l'idée d'un moment cinétique demi-entier était aussi envisagée par HEISENBERG dans son article fondateur de 1925 (cf. ci-dessus). Et encore que, dès le début de l'année 1925 Ralph KRONIG, alors jeune physicien germano-américain<sup>8</sup> ayant fait un séjour postdoctoral à Tübingen puis Copenhague, avait eu l'idée, mais un certain Wolfgang PAULI avait trouvé l'idée ridicule et l'avait dissuadé de publier ses travaux.
- 1927** Wolfgang PAULI publie l'article [39], qui clôt le débat autour du spin de l'électron et son facteur de Landé. C'est dans cet article que PAULI introduit les fameuses matrices de Pauli et les spineurs à deux composantes .
- 1928** Paul DIRAC introduit l'équation éponyme qui étend la mécanique quantique au domaine relativiste [40]. La théorie de DIRAC repose sur une représentation linéaire du groupe de POINCARRÉ, qui donne une origine plus fondamentale au spin 1/2, aux matrice de Pauli et au hamiltonien postulé par PAULI dans son article de 1925.

**ASLANGUL,**  
§11.2,11.3.3  
**LE BELLAC,** §3.2  
**FEYNMAN,** §5.1, ch 6  
**COHEN-TANNOUDJI**  
et al., §IV.A  
**COHEN-TANNOUDJI**  
et al., Tome 2,  
ch IX

8. Ralf KRONIG est surtout connu pour les relations de Krammers-Kronig.

- 
- [34] A. LANDÉ; «Über den anomalen Zeeman-Effekt (Teil I)»; *Z. Physik* **5**, p. 231–241 (1921).
- [35] W. GERLACH & O. STERN; «Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms»; *Z. Physik* **8**, p. 110–111 (1922).
- [36] W. GERLACH & O. STERN; «Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld»; *Z. Physik* **9**, p. 349–352 (1922).
- [37] W. PAULI; «Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren»; *Z. Physik* **31**, p. 765–783 (1925).
- [38] G. E. UHLENBECK & S. GOUDSMIT; «Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Formulierung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons»; *Naturwissenschaften* **13**, p. 953–954 (1925).
- [39] W. PAULI; «Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons»; *Z. Physik* **43**, p. 601–623 (1927).
- [40] P. a. M. DIRAC; «The quantum theory of the electron»; *Proc. R. Soc. Lond. A* **117**, p. 610–624 (1928).

## I.2 Applications

COHEN-TANNOUDJI  
et al., §A.1  
LE BELLAC, §1.5.3  
ASLANGUL,  
§7.4.9,9.7.1

### I.2.1 Ordres de grandeurs

1. Considérons un objet macroscopique très petit, comme un cube de glace (on assimilera la densité de la glace à celle de l'eau) de côté  $a = 100 \text{ nm}$ . Montrons que cet objet ne manifestera guère de comportement quantique.
  - En supposant qu'il se déplace à  $1 \text{ mm/s}$ , nous pouvons estimer son impulsion à  $p = \rho a^3 v = 1000 \times (10^{-7})^3 \times 10^{-3} = 10^{-21} \text{ kg.m/s}$  et sa longueur d'onde de de Broglie à  $\lambda_{\text{dB}} = h/p \approx 7 \times 10^{-13} \text{ m}$  soit près d'un million de fois plus faible que sa taille, et même très inférieure à celle d'un atome !
  - En supposant qu'il se déplace à  $1 \text{ mm/h}$ , on ne gagne que 3 ordres de grandeur sur  $\lambda_{\text{dB}}$ , qui reste mille fois plus petit que  $a$ . Dans les deux cas, les effets quantiques seront négligeables et en tout cas impossibles à observer.
2. Considérons maintenant un électron de masse  $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .
  - A la vitesse de  $1 \text{ mm/s}$ , il aurait une longueur d'onde  $\lambda_{\text{dB}} \approx 730 \text{ mm}$  qui est macroscopique (et plus d'un milliard de fois plus grand que la taille typique d'un atome) !
  - à la vitesse  $\alpha c$ , qui est celle que l'on obtient dans le modèle de Bohr, on trouve  $3 \times 10^{-10} \text{ m}$ , ce qui est cohérent avec la taille de l'atome.
3. Considérons un neutron « thermique », c'est-à-dire dont l'énergie cinétique est de l'ordre de l'énergie thermique à la température ambiante, soit  $m_n v^2 / 2 \approx k_B T \approx 0.025 \text{ eV}$ . On en déduit  $v = \sqrt{2 * 0.025 * 1.6 \times 10^{-19} / 1.7 \times 10^{-27}} \approx 2200 \text{ m/s}$ ,  $p \approx 10^{-23} \text{ kg.m/s}$  et  $\lambda_{\text{dB}} \approx 10^{-10} \text{ m}$ , ce qui donne un comportement quantique à l'échelle atomique, mis à profit dans la diffraction neutronique, utilisée pour la caractérisation des matériaux à l'échelle atomique.

On retiendra que le comportement quantique d'une particule libre est d'autant plus important que sa masse est petite, et sa vitesse faible.

### I.2.2 Unités naturelles de l'atome d'hydrogène

Il est utile de montrer que les quantités fondamentales de la physique atomique peuvent être obtenues indépendamment de la théorie sous-jacente par des considérations dimensionnelles.

- ◆ Notons avec Bohr que l'atome classique n'a pas de longueur d'échelle propre : son énergie est caractérisée par la masse (ou masse réduite) de l'électron  $m$  et la constante de force de Coulomb  $K = q^2 / 4\pi\varepsilon_0$ , qui est une quantité purement mécanique. Il n'est alors pas possible de former une longueur, ni une énergie, ni un temps, ni une action. à partir de ces deux constantes fondamentales. Ce qui signifie notamment que si l'on multiplie les longueurs par un réel quelconque  $\lambda$ , on retrouve les mêmes lois en multipliant les énergies par  $\lambda^{-1}$ , les temps par  $\lambda^{2/3}$  (loi des aires), les actions par  $\lambda^{1/2}$ .
- ◆ Si en revanche on introduit le quantum d'action  $h$  ou plutôt  $\hbar$ , on peut immédiatement obtenir à partir des trois grandeurs mécaniques  $m$ ,  $K$  et  $\hbar$  toutes les autres grandeurs mécaniques et notamment le rayon de Bohr  $a_0$ , l'énergie  $E_0$  (appelée le hartree) et la pulsation  $\Omega_0$  :

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mK} , \quad E_0 = \frac{mK^2}{\hbar^2} , \quad \Omega_0 = \frac{mK^2}{\hbar^3} \text{ etc.}$$

Ces quantités caractérisent un système d'unités naturelles dans lequel  $m = 1$ ,  $K = 1$ , et  $\hbar = 1$ .

- ♦ Dans ce système, l'unité de vitesse est  $v_0 = a_0 \times \Omega_0 = K/\hbar$ . Si on la compare à la vitesse  $c$  de la lumière, qui n'avait jusqu'ici aucune raison d'intervenir, on observe que l'on peut écrire :

$$v_0 = \alpha c, \quad E_0 = \alpha^2 mc^2, \quad a_0 = r_c/\alpha^2 \quad \text{avec} \quad r_c = K/mc^2.$$

Dans cette équation,  $r_c$  est appelé « rayon classique de l'électron » et où l'on a introduit après Sommerfeld la constante sans dimension  $\alpha = v_0/c = K/\hbar c$ , dite « constante de structure fine », dont l'inverse vaut environ 137.

Ces relations font le lien avec un autre système d'unités dans lequel  $\hbar$  ne joue plus aucun rôle, et qui est caractérisé par les relations  $m = 1$ ,  $K = 1$  et  $c = 1$ , si bien que  $\hbar = \alpha^{-1}$ .

- ♦ A l'aide de la constante structure fine, on peut construire autant d'échelles de longueur ou d'énergie que l'on veut. Les plus notables sont l'énergie  $\alpha^2 E_0$  qui est l'échelle des corrections relativistes dans l'atome, d'où son nom, ou encore les deux longueurs :

$$\lambda_C = \alpha a_0 = \frac{\hbar}{mc} = \frac{c}{mc^2/\hbar} \quad \text{et} \quad \lambda_0 = \alpha^{-1} a_0 = \frac{\hbar^3 c}{mK^2} = \frac{c}{E_0/\hbar}$$

qui sont visiblement les longueurs d'onde électromagnétiques associées à des photons d'énergie respectivement  $mc^2$  (longueur d'onde de Compton) ou  $E_0$  (rayonnement dipolaire de l'atome).

### I.2.3 Le modèle de Bohr : approche historique (1913)

Comme indiqué plus haut, l'approche historique de Bohr repose sur l'hypothèse des niveaux quantifiés, la relation de Planck-Einstein, les équations de Maxwell, et enfin le principe de correspondance. Pour reprendre ce raisonnement :

- ♦ Nous supposons l'existence de niveaux quantifiés, définis comme des orbites « autorisées », qui seront repérés par un numéro entier, en partant de 1 pour l'état de plus basse énergie.
- ♦ Nous admettons que la transition de l'état  $n+1$  à  $n$  par émission d'un photon<sup>9</sup> de fréquence  $\omega$  correspond à une perte d'énergie  $\Delta E = -\hbar\omega$ .
- ♦ En vertu des équations de Maxwell, le rayonnement émis par l'atome a la fréquence  $\omega$  du mouvement classique de l'électron autour du proton.
- ♦ Le principe de correspondance suppose que pour les états très excités, ont retrouvé un comportement classique, la quantification ne jouant plus de rôle décisif. Notamment, on peut utiliser les équations de la mécanique classique, c'est-à-dire ici les relations<sup>10</sup> qui lient l'énergie  $E$ , le rayon  $r$  et la fréquence de révolution  $\omega$  pour une orbite circulaire dans le champ coulombien du proton :  $\omega = (K/mr^3)^{1/2}$  et  $E = -K/2r$ .

On est alors conduit à la relation :

$$E_{n+1} - E_n = -\frac{K}{2r_{n+1}} + \frac{K}{2r_n} = \hbar\omega_{n+1}.$$

Comme la mécanique classique nous indique que lorsque  $n$  et  $r$  augmentent les fréquences diminuent et les niveaux liés sont de plus en plus resserrés en énergie, on peut d'une part

9. Les niveaux d'énergie devenant équidistants à la limite semi-classique, on peut aussi imaginer l'émission de  $k$  photons, de même fréquences, faisant passer de l'état  $n+k$  à l'état  $n$ .

10. Du PFD on tire  $mr\omega^2 = K/r^2$  d'où  $\omega = (K/mr^3)^{1/2}$  (3<sup>e</sup> loi de Kepler), et en reportant dans l'expression de l'énergie  $E = mr^2\omega^2/2 - K/r$ , on obtient  $E = -E_c = E_p/2 = -K/2r$ .

approcher la variation de  $E$  dans cette équation par une dérivée, et d'autre part négliger le fait que  $\omega_{n+1} \neq \omega_n$ . Il vient alors :

$$\frac{dE_n}{dn} = +\frac{K}{2r_n^2} \frac{dr_n}{dn} = \hbar \left( \frac{K}{mr_n^3} \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{r_n}} \frac{dr_n}{dn} = \left( \frac{\hbar^2}{mK} \right)^{1/2} = \sqrt{a_0}$$

Cette dernière équation différentielle s'intègre en  $(r/a_0)^{1/2} = n+n_0$  soit  $r_n = a_0(n+n_0)^2$ , où  $n_0$  est une constante d'intégration, laquelle sera prise nulle par cohérence.

On obtient ainsi le résultat bien connu :

$$r_n = a_0 n^2 \quad \text{et} \quad E_n = -\frac{K}{2a_0} \frac{1}{n^2} = -\frac{E_0}{2n^2} .$$

Les fréquences émises sont alors de la forme :

$$\omega_{n \rightarrow m} = \frac{E_0}{2\hbar} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad \text{pour } n > m$$

qui redonne la loi de Balmer-Rydberg. Le grand succès rencontré par cette théorie tient aussi à ce que l'on prédit l'expression de la constante de Rydberg en termes des constantes fondamentales :

$$R = \frac{E_0}{4\pi\hbar c} = \frac{mK^2}{4\pi\hbar^3 c}$$

et que la valeur calculée ainsi est en accord avec la valeur observée.

Ce n'est qu'en reportant dans l'expression du moment cinétique  $L$  que l'on observe :

$$L = mr^2\omega = ma_0^2n^4 \left( \frac{K}{ma_0^3n^6} \right)^{1/2} = n(mKa_0)^{1/2} = n\hbar .$$

Cette simple relation de proportionnalité a été simplement observée par Bohr. Si elle a été retenue par l'histoire, c'est parce que la généralisation (faite dès 1916 par Sommerfeld, Wilson et Bohr lui-même) de cette approche a fait jouer un rôle central aux « variables d'action » en leur imposant d'être un multiple entier de  $\hbar$ . Dans le cas simple du moment cinétique sur une orbite circulaire, on peut considérer cette condition comme une condition de retour en phase de l'onde de de Broglie qui accompagne le mouvement circulaire de l'atome : la circonférence  $2\pi r$  est un multiple entier de  $\lambda_{dB} = \hbar/m_e r\omega$ , soit  $L = m_e r^2\omega = n\hbar/2\pi$

# II – La mécanique ondulatoire

## Sommaire

---

<b>II.1</b>	<b>La notion de fonction d'onde</b>	<b>23</b>
II.1.1	Fonction d'onde et postulat de Born	23
II.1.2	Représentation impulsion	24
II.1.2 a)	Opérateur impulsion	24
II.1.2 b)	Valeurs moyennes de l'impulsion	24
II.1.2 c)	Densité de probabilité en impulsion	25
<b>II.2</b>	<b>L'équation d'évolution</b>	<b>25</b>
II.2.1	Le postulat	25
II.2.2	Obtention heuristique	25
II.2.3	Courant de probabilité	27
II.2.4	États stationnaires	27
II.2.5	Superposition d'états	27
<b>II.3</b>	<b>Inégalités de Heisenberg</b>	<b>30</b>
II.3.1	Position du problème	30
II.3.2	Approche heuristique	30
II.3.3	Démonstration générale	31
<b>II.4</b>	<b>La particule libre</b>	<b>33</b>
II.4.1	États stationnaires (à une dimension)	33
II.4.2	Normalisation généralisée des fonctions propres de $\mathbf{p}$	33
II.4.3	Étude générale d'un paquet d'onde libre	34
II.4.4	Le cas particulier du paquet d'onde gaussien	36

---

Pour ce chapitre, l'essentiel des notions et calculs se trouvent dans quasiment tous les livres de mécanique quantique. Compte tenu de l'aspect un peu formel de l'exposé de Le Bellac (auquel nous ferons sa juste place au chapitre III) nous renvoyons ici principalement aux ouvrages :

- ◆ *COHEN-TANNOUDJI et al.*, Chapitre I (notamment § I.B et I.C, App. A<sub>I</sub>, B<sub>I</sub>, D<sub>I</sub> et G<sub>I</sub>) et chapitre II, App. D<sub>II</sub>.
- ◆ *ASLANGUL*, Chapitre 9, § 9.4, 9.5, 9.6 et Chapitre 10.

## II.1 La notion de fonction d'onde

### II.1.1 Fonction d'onde et postulat de Born

Dans le point de vue de Schrödinger, l'état d'une particule quantique (typiquement l'électron d'un atome d'hydrogène) est décrit par une « fonction d'onde », notée  $\psi$  ci-après, qui contient toute l'information disponible, mais n'est pas directement accessible. Cette fonction est un champ scalaire défini sur l'espace des positions accessibles (typiquement  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) et est à valeur complexe :  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ .

Son interprétation physique est alors (partiellement) donnée par l'hypothèse suivante :

En chaque point  $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$  de l'espace, le réel positif  $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$  représente la *densité de probabilité* de présence de la particule en ce point.

En conséquence, la fonction d'onde doit être *normalisée* en imposant :

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = 1 .$$

Le caractère intrinsèquement complexe de la fonction d'onde, au contraire de l'électromagnétisme où les champs *réels* peuvent être *représentés* par des complexes, peut être justifiée par différents arguments plus ou moins physiques, mais bien sûr pas simplement par le fait que le nombre imaginaire  $i$  figure dans l'équation d'évolution. On se référera à l'appendice B<sub>II</sub> pour une justification détaillée de ce choix.

Chaque fois que l'on a une densité de probabilité, on peut se poser la question de la valeur de ses moments et notamment celle de la valeur moyenne et de la variance. Compte tenu de la densité de probabilité, on peut écrire les valeurs moyennes, dépendant de l'état  $\psi$  considéré :

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{r} e |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 \mathbf{r} \quad \text{et plus généralement} \quad \langle f(\mathbf{r}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3 \mathbf{r} \quad (\text{II.1})$$

et la condition de normalisation n'est autre que l'identité  $\langle 1 \rangle = 1$ .

### II.1.2 Représentation impulsion

#### II.1.2 a) Opérateur impulsion

Les ondes planes parfaitement monochromatiques  $\psi \propto e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar}$  ne peuvent pas être normalisées *stricto sensu* mais constituent seulement une base commode de décomposition de l'onde. Elles ont un autre intérêt important : elles (et elles seules) ont un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  parfaitement défini, pour lequel la relation  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  a un sens univoque, et on accède à  $\mathbf{k}$  en prenant le gradient par rapport à  $\mathbf{r}$  :

$$\mathbf{p} \psi(\mathbf{r}) = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r}) .$$

Par extension, si on effectue une décomposition de Fourier de  $\psi$  sous la forme<sup>1</sup> :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar} d^3 \mathbf{p} , \quad (\text{II.2})$$

chacune des composantes de fréquence bien définie vérifie cette relation, et par linéarité, on peut écrire :

$$\mathbf{p} \psi(\mathbf{r}) = -i\hbar \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \nabla(e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar}) d^3 \mathbf{p} = -i\hbar \nabla \psi(\mathbf{r})$$

Ceci nous conduit dans ce qui suit à représenter l'impulsion  $\mathbf{p}$  par l'opérateur différentiel  $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$ , qui est aussi une réminiscence de la relation  $\mathbf{p} = \nabla \mathcal{S}$  dans le point de vue de Hamilton-Jacobi.

#### II.1.2 b) Valeurs moyennes de l'impulsion

L'évaluation de la valeur moyenne  $\langle \mathbf{p} \rangle$  va donc impliquer une dérivation, qui peut porter soit sur  $\psi(\mathbf{r})$  soit sur  $\psi^*(\mathbf{r})$ . On peut en fait opter pour une option comme pour l'autre. En effet, en vertu du théorème du gradient, on a :

$$\langle \mathbf{p} \rangle = -i\hbar \int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \underbrace{\int_S |\psi(\mathbf{r})|^2 d^2 S}_{\rightarrow 0} + i\hbar \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$$

et il suffit donc que le terme de surface (intégration sur une sphère de rayon tendant vers l'infini) soit nul, c'est à dire que  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  tende assez rapidement vers zéro à l'infini, ce qui est raisonnable pour un état physique.

---

1. En vertu des propriétés de la transformation de Fourier, on a les deux relations :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{p} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) \exp\left[i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right] \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3 \mathbf{r} \psi(\mathbf{r}) \exp\left[-i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar}\right]. \quad (\text{Fourier})$$

De façon similaire, et moyennant les mêmes hypothèses, on aura pour le carré de  $\mathbf{p}$  :

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \psi^*(\mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = - \int_{\mathbb{R}^3} \psi^*(\mathbf{r}) \Delta \psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = - \int_{\mathbb{R}^3} \Delta \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (\text{II.3})$$

### II.1.2 c) Densité de probabilité en impulsion

Si on utilise la décomposition de Fourier (II.2) de  $\psi$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} \rangle &= \frac{-i\hbar}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3\mathbf{r} \left( \int d^3\mathbf{p} \tilde{\psi}(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \right)^* \nabla \left( \int d^3\mathbf{p}' \tilde{\psi}(\mathbf{p}') e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}/\hbar} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \iint d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}' \mathbf{p} \tilde{\psi}^*(\mathbf{p}) \tilde{\psi}(\mathbf{p}') \underbrace{\int d^3\mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}/\hbar}}_{(2\pi\hbar)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}'-\mathbf{p})} \end{aligned}$$

où  $\delta^{(3)}$  est une distribution de Dirac tridimensionnelle qui impose  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ .

On obtient ainsi la relation :

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \int d^3\mathbf{p} \mathbf{p} |\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2 \quad \text{et plus généralement} \quad \langle g(\mathbf{p}) \rangle = \int d^3\mathbf{p} g(\mathbf{p}) |\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2$$

qui est très analogue à la relation (II.1) pour les fonctions de  $\mathbf{r}$ .

Ceci conduit à postuler :

Si  $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$  dénote la transformée de Fourier tridimensionnelle de  $\psi(\mathbf{r})$ , la densité de probabilité *en impulsions* est donnée par  $|\tilde{\psi}(\mathbf{p})|^2$ .

Celle-ci est automatiquement normée en vertu de l'identité de Parseval-Plancherel (ou de façon équivalente en calculant  $\langle 1 \rangle$ ).

## II.2 L'équation d'évolution

### II.2.1 Le postulat

Si on suppose que le système est décrit par un hamiltonien classique standard  $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$ , l'évolution quantique de la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = H \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{II.4})$$

Noter que, compte tenu de (II.3), l'intervention du laplacien dans le terme représentant l'énergie cinétique est attendue. Le membre de droite est le hamiltonien quantique  $H$  de la particule appliqué à la fonction d'onde  $\psi$ . Il est obtenu à partir du hamiltonien classique  $\mathcal{H} = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$ , en utilisant la relation  $\mathbf{p} \psi = -i\hbar \nabla \psi$  et donc  $\mathbf{p}^2 \psi = -\hbar^2 \Delta \psi$ .

### II.2.2 Obtention heuristique

Nous avons donné au chapitre I la méthode utilisée par Schrödinger pour obtenir son équation à partir de l'équation de Helmholtz, mais on peut se convaincre de la plausibilité de cette équation sans repasser par les développements élaborés de de Broglie et de Schrödinger. Pour ce faire, utilisons les relations  $E = \hbar\omega$  et  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ . En les appliquant à l'onde plane complexe  $\psi = K \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ , on constate qu'elle s'écrit aussi  $\psi = K \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar]$ , et donc on a :

$$\mathbf{p} \psi = -i\hbar \nabla \psi \quad \text{et} \quad E\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi .$$

- ◆ Considérons d'abord une particule libre, pour laquelle  $E = \mathbf{p}^2/2m$ , dont on déduit :

$$E\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi$$

Bien sûr les ondes planes ne sont pas des solutions physiquement réalistes (fonction d'onde d'extension infinie et donc non-normalisable). Il sera donc nécessaire pour tout ce qui suit de considérer des ondes mieux localisées dans l'espace, que l'on appellera « paquet d'onde ». Ceux- tirent leur nom de ce que l'on peut les former en superposant des ondes planes. Inversement, un paquet d'onde quelconque  $\chi(\mathbf{r}, t)$ , peut être décomposé en somme de Fourier spatiale <sup>2</sup> :

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{k} \tilde{\chi}(\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)] t = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} \tilde{\chi}(\mathbf{p}) \exp[i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et}{\hbar}]$$

où l'on a supposé implicitement l'existence d'une « relation de dispersion »  $\omega(\mathbf{k})$  ou  $E(\mathbf{p})$ . En dérivant sous le signe somme, on obtient comme attendu :

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} \tilde{\chi}(\mathbf{p}) \mathbf{p} \exp[i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - E(\mathbf{p})t}{\hbar}] \\ \text{et} \quad i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} \tilde{\chi}(\mathbf{p}) E \exp[i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - E(\mathbf{p})t}{\hbar}] \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{1}{2m} \int d^3\mathbf{p} \tilde{\chi}(\mathbf{p}) \mathbf{p}^2 \exp[i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - E(\mathbf{p})t}{\hbar}] = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \mathbf{r}^2}. \end{aligned}$$

- ◆ Pour le cas où le potentiel  $V$  dépend de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  n'est plus constant, et on n'a donc plus de relation de dispersion. Il faut donc recourir à une décomposition de Fourier spatio-temporelle :

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^3\mathbf{p} dt \tilde{\chi}(\mathbf{p}, E) \exp[i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et}{\hbar}],$$

dans laquelle  $E = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$  est l'énergie mécanique totale. On a alors :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} &= \int \frac{d^3\mathbf{p} dt}{(2\pi)^2} \tilde{\chi}(\mathbf{p}, E) (\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})) \exp[i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et}{\hbar}] \\ &= \underbrace{\int \frac{d^3\mathbf{p} dt}{(2\pi)^2} \tilde{\chi}(\mathbf{p}, E) \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \exp[i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et}{\hbar}]}_{-\hbar^2/2m \Delta \chi} + \underbrace{\int \frac{d^3\mathbf{p} dt}{(2\pi)^2} \tilde{\chi}(\mathbf{p}, E) V(\mathbf{r}) \exp[i\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - Et}{\hbar}]}_{V(\mathbf{r}) \chi} \end{aligned}$$

On peut en déduire un certain nombre de propriétés détaillées ci-dessous.

- 
2. A une dimension, on définit la transformation de Fourier et son inverse par :

$$\mathcal{F}[f](k) = \alpha \int dx f(x) e^{\pm i\gamma kx} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}[g](x) = \beta \int dk g(k) e^{\mp i\gamma kx}, \quad \text{avec} \quad \alpha\beta\gamma = 2\pi. \quad (\text{II.5})$$

Le choix usuel en traitement du signal est  $\alpha = \beta = 1$  et  $\gamma = 2\pi$  et la variable conjuguée de  $x$  est alors une fréquence ; en optique on utilise le plus souvent  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2\pi}$  et  $\gamma = 1$  ; en mécanique quantique on peut conserver le choix de l'optique, mais la variable conjuguée de  $x$  est alors  $k = p/\hbar$ , ou bien on fait comme ici  $\gamma = 1/\hbar$  et  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$ . On notera qu'en optique, où les champs sont réels, on peut aussi choisir le signe  $\pm$  que l'on préfère devant  $\gamma$ , alors qu'en mécanique quantique, on *doit* faire  $\pm \rightarrow -$  et  $\mp \rightarrow +$ . En dimension  $d$ , le préfacteur est mis à la puissance  $d$  et dans la phase  $px/\hbar$  devient  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar$ .

### II.2.3 Courant de probabilité

Soit  $\psi(\mathbf{r}, t)$  un paquet d'onde, et  $\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$  la densité de probabilité associée. On peut étudier la conservation locale de la probabilité en calculant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* + \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi = \frac{1}{i\hbar} (\psi^*(\mathbf{H}\psi) - \psi(\mathbf{H}\psi^*)) \\ &= -\frac{\hbar}{2im} (\psi^*(\Delta\psi) - \psi(\Delta\psi^*)) = -\frac{\hbar}{2im} \operatorname{div}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi) \\ \text{soit } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{J}) &= 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathbf{J} = \operatorname{Re}\left(\psi^* \frac{\mathbf{p}}{m} \psi\right) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im}\left(\psi^* \nabla \psi\right)}, \end{aligned}$$

qui est le courant probabilité. On note que ces calculs ne sont possibles utilisent le caractère réel du potentiel, ce qui fait qu'il s'élimine entre les deux équations de Schrödinger : celle portant sur  $\psi$ , et celle portant sur  $\psi^*$ , obtenue par conjugaison complexe de (II.4).

La conservation de la probabilité *totale* peut, à nouveau, s'en déduire en admettant que pour un paquet d'onde physique normalisable, le fluix de  $\mathbf{J}$  (intégrale surfacique) décroît assez vite lorsque l'on considère une surface arbitrairement grande.

### II.2.4 États stationnaires

Les états stationnaires, qui étaient des hypothèses *ad hoc* dans l'ancienne théorie des quanta, sont maintenant bien définis : ce sont ceux pour lesquels la densité  $\rho(\mathbf{r}, t)$  n'évolue pas avec le temps, ce qui signifie que seule la phase de  $\psi$  évolue. En écrivant alors  $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\chi(t)} \varphi(\mathbf{r})$ , on peut utiliser la méthode usuelle de séparation des variables :

$$i\hbar \left( -i\frac{d\chi}{dt} e^{-i\chi} \right) \varphi(\mathbf{r}) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi + V(\mathbf{r}) \varphi \right) e^{-i\chi} \Rightarrow \hbar \dot{\chi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \varphi}{\varphi} + V(\mathbf{r}),$$

et l'égalité de deux fonctions dont l'une ne dépend que de  $t$  (à gauche) et l'autre ne dépend que de  $\mathbf{r}$  (à droite) permet de conclure qu'elles sont constantes. Compte tenu de sa dimension, on peut noter  $E$  cette constante (c'est l'énergie !) et on obtient les deux équations séparées :

$$\hbar \dot{\chi} = E \Rightarrow e^{-i\chi(t)} = e^{-iEt/\hbar} \quad \text{et} \quad \boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi + V(\mathbf{r}) \varphi = E \varphi}.$$

La première équation est une simple réalisation de  $E = \hbar\omega$  (mais avec un signe imposé), et la seconde est une équation aux dérivées partielles pour  $\varphi(\mathbf{r})$  qui est appelée « équation de Schrödinger stationnaire ».

Cette équation est de la forme  $\mathbf{H}\varphi = E\varphi$ , ce qui signifie que la partie spatiale d'un état stationnaire est un vecteur propre de l'opérateur différentiel hamiltonien associé à la valeur propre  $E$ . Un système préparé dans un tel état stationnaire, bien qu'il ne soit décrit par qu'une certaine densité de probabilité en position (et en impulsion, cf. *infra*) possède une valeur certaine de l'énergie.

### II.2.5 Superposition d'états

On connaît en physique un *principe de superposition*, qui s'applique à tous les systèmes linéaires. Comme l'équation de Schrödinger est linéaire par rapport à  $\psi$ , on peut effectivement construire des solutions par combinaison linéaire. Ainsi une fonction  $\Phi$  combinaison linéaire de deux états stationnaires  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  s'écrit :

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \lambda \varphi_1(\mathbf{r}, t) e^{-iE_1 t/\hbar} + \mu \varphi_2(\mathbf{r}, t) e^{-iE_2 t/\hbar}. \quad (\text{II.6})$$

On peut calculer la densité de probabilité en position de cet état en formant :

$$\rho_\Phi(\mathbf{r}, t) = |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\lambda|^2 |\varphi_1(\mathbf{r})|^2 + |\mu|^2 |\varphi_2(\mathbf{r})|^2 + \lambda^* \mu e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} \varphi_1^*(\mathbf{r}) \varphi_2(\mathbf{r}) + c.c.,$$

où *c.c.* est l'abréviation de « complexe conjugué » indiquant que l'on doit ajouter au troisième terme un quatrième qui est son conjugué (ce qui assure que  $\rho_\Phi$  est réel puisque les deux premiers termes sont réels). Ces termes croisés sont des termes d'interférence quantique. L'existence de tels termes d'interférence est caractéristique du comportement ondulatoire et constitue la plus simple des propriétés qui distinguent fondamentalement la mécanique quantique de la mécanique classique. Nous présentons au paragraphe suivant un exemple relativement récent d'expérience d'interférences dans laquelle le caractère ondulatoire des atomes joue un rôle décisif.

Visiblement (c'était déjà évident sur  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  à l'équation (II.6)), cet état ne sera stationnaire que si les énergies coïncident ( $E_1 = E_2$ ) et on dit alors que les états  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont *dégénérés*. La « figure d'interférence » est alors statique. Dans le cas contraire, les termes d'interférence oscillent à de battements à la fréquence  $|\omega_{12}|$ , où  $\omega_{12} = (E_1 - E_2)/\hbar$ , qui est appelée « fréquence de Bohr » du système. Dans tous les cas  $\rho_\Phi(\mathbf{r}, t)$  fait intervenir le produit de  $\varphi_1(\mathbf{r})$  avec  $\varphi_2^*(\mathbf{r})$  qui est *a priori* quelconque.

En revanche, l'état superposition  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  doit être normé à tout instant, ce qui peut s'écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} \rho_\Phi(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 = |\lambda|^2 \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle + |\mu|^2 \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle + \lambda^* \mu \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle e^{i\omega_{12}t} + c.c. = 1. \quad (\text{II.7})$$

Dans cette équation nous avons noté les intégrales sous la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} u(\mathbf{r})^* v(\mathbf{r}) = \langle u | v \rangle$$

où la notation « braket » souligne le fait qu'il s'agit d'un *produit hermitien*. Ce produit généralise au cas d'un espace vectoriel complexe la notion de produit scalaire. Sa définition précise et ses propriétés seront détaillés au début du chapitre III.

Avec ces notations, la normalisation des états  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  s'écrit  $\langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle = 1$  et l'égalité (II.7) devient :

$$2|\lambda| |\mu| |\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle| \cos(\omega_{12}t - \beta) = 1 - |\lambda|^2 + |\mu|^2 ,$$

où  $\beta$  est l'argument du produit  $\lambda^* \mu \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle$ . Deux cas se distinguent nettement :

- ◆ Si  $\omega_{12} \neq 0$ , on doit imposer la nullité du terme oscillant. Comme  $\lambda = 0$  ou  $\mu = 0$  n'ont aucun intérêt, on en déduit que l'on a nécessairement  $\langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = 0$  ce qui montre que deux états stationnaires d'énergies différentes sont *orthogonaux*. La solution est alors simplement  $|\lambda|^2 + |\mu|^2 = 1$
- ◆ Si au contraire  $\omega_{12} = 0$  le cos est constant et on obtient une condition sur  $\lambda$  et  $\mu$  qui dépend de la valeur *a priori* quelconque de  $\langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle$  et n'a pas d'intérêt particulier.

## Expériences d'interférométrie atomique

Depuis l'avènement des méthodes de refroidissement par laser des atomes, de nombreuses expériences d'interférométrie atomique ont été et sont toujours réalisées. Leur intérêt n'est pas seulement fondamental, mais réside aussi dans l'extrême précision que cela permet d'atteindre. Nous en avons sélectionné une, réalisée en 1992 à l'université de Tokyo dans l'équipe de Fujio SHIMIZU, qui est une réalisation de l'expérience des fentes d'Young. Son intérêt pédagogique tient à ce qu'elle utilise une méthode de détection simple et très efficace, et surtout que l'équipe de recherche a diffusé un film qui permet de voir les atomes arriver un par un et néanmoins reconstruire les franges d'interférence attendues.

PHYSICAL REVIEW A

VOLUME 46, NUMBER 1

1 JULY 1992

## Double-slit interference with ultracold metastable neon atoms

Fujio Shimizu

Department of Applied Physics, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

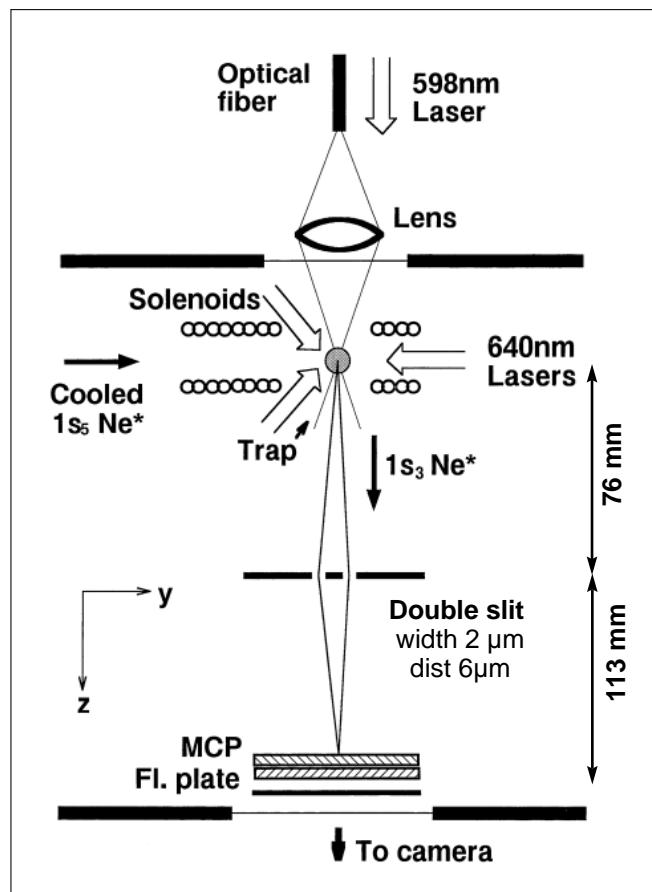
Kazuko Shimizu and Hiroshi Takuma

Institute for Laser Science, University of Electro-Communications, Chofu-shi, Tokyo 113, Japan

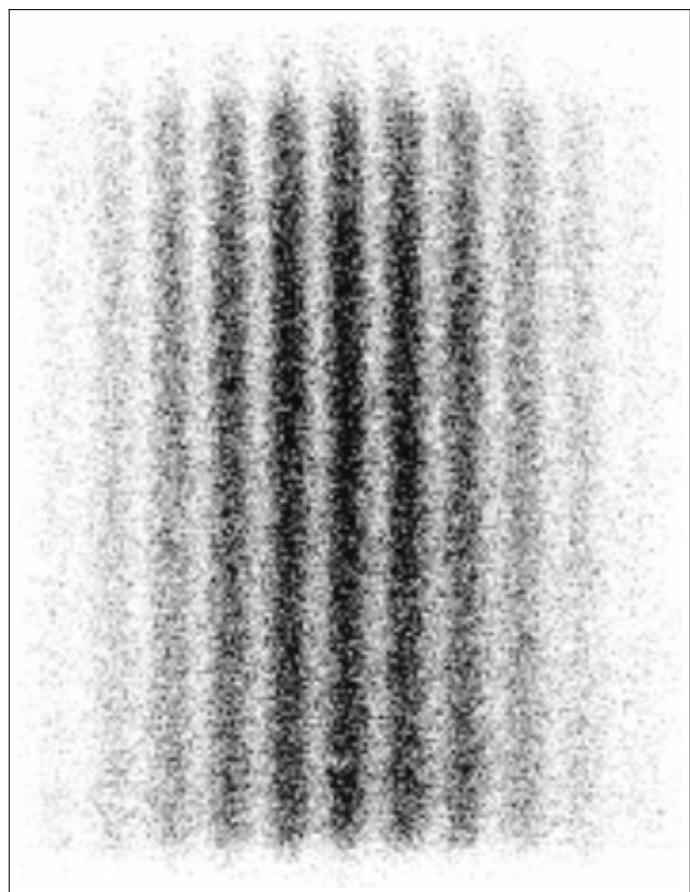
(Received 16 December 1991; revised manuscript received 16 March 1992)

A double-slit interference of ultracold neon atoms in the  $1s_3$  metastable state is studied. The interferometer is aligned vertically, and because of gravity acceleration the atom changes its velocity as much as 2 m/s during the passage of the interference. The interference fringes are observed for the initial atomic velocity between 0 and 2 m/s.

(a) Entête de l'article



(b) Dispositif expérimental



(c) Signal d'interférences

**Fig. II.1** – Éléments essentiels de l'article de SHIMIZU et al. Le fonctionnement du dispositif expérimental (b) est décrit dans le texte. Le signal de frange (c) est extrait de la vidéo après une pause assez longue. La valeur de l'interfrange ne peut être calculée simplement ici en raison de l'accélération des atomes qui complique l'analyse.

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si }  x  \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{si }  x  > \frac{a}{2} \end{cases} \iff \tilde{f}(k) = \frac{\sin(\frac{ka}{2})}{\sqrt{2\pi} \frac{ka}{2}}$ $\Delta x = a/\sqrt{12} \quad \Delta k = \infty$	$f(x) = \frac{e^{- x /a}}{2a} \iff \tilde{f}(k) = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{1 + (ka)^2}$ $\Delta x = a/\sqrt{2} \quad \Delta k = 1/a$
$f(x) = \frac{e^{-x^2/2a^2}}{\sqrt{2\pi}a} \iff \tilde{f}(k) = \frac{a e^{-\frac{k^2 a^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ $\Delta x = a/\sqrt{2} \quad \Delta k = 1/a\sqrt{2}$	$f(x) = \frac{(a\pi)^{-1}}{\cosh(x/a)} \iff \tilde{f}(k) = \frac{(2\pi)^{-1}}{\cosh(\frac{k\pi a}{2})}$ $\Delta x = a\pi/2\sqrt{3} \quad \Delta k = 1/\sqrt{3}a$

Table II.1 – Table de quatre fonctions usuelles et de leur transformée de Fourier. Le nombre  $a$  est un réel positif caractérisant la largeur de  $f$ , et l'inverse de celle de  $\tilde{f}$ . Pour chaque cas, la fonction  $f(x)$  à gauche est normalisée de sorte que son intégrale vaut 1, et donc  $\tilde{f}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ . Pour chaque fonction, on donne l'écart-type  $\Delta x$  ou  $\Delta k$ , calculé avec les densités  $|f(x)|^2$  et  $|\tilde{f}(k)|^2$  convenablement normalisées.

Le dispositif utilise des atomes de néon dans l'état métastable <sup>3</sup>  $1s_3$ , qui libèrent une énergie de près de 17 eV lorsqu'ils heurtent la galette de microcanaux (MCP), ce qui permet de les détecter un par un. Les atomes (préalablement refroidis) sont d'abord piégés dans un piège magnéto-optique, utilisant les bobines de champs et les lasers à 640 nm résonants sur la transition  $1s_5 \leftrightarrow 3p_9$ . Dans ce piège, le nuage d'atomes froids a une taille de 1 mm et une température de 2.5 mK environ. La source d'atomes dans l'état  $1s_3$  est obtenue en focalisant sur environ 50 μm le laser à 598 nm qui induit la transition  $1s_5 \rightarrow 2p_5 \rightsquigarrow 1s_3$ . Les atomes ainsi portés dans l'état  $1s_3$  ne voient plus le piège et tombent en chute libre.

## II.3 Inégalités de Heisenberg

### II.3.1 Position du problème

Il résulte de la nature ondulatoire de la description de la matière une impossibilité de connaître avec une précision arbitraire la position et l'impulsion de la particule quantique. Cette propriété se manifeste par l'existence d'une borne inférieure au produit de l'écart-type en position  $\Delta x$  et de l'écart-type en impulsions  $\Delta p$ . En d'autres termes, un paquet d'onde qui a un  $\Delta x$  petit aura un  $\Delta p$  grand, et inversement.

On peut d'emblée le vérifier sur des transformées de Fourier d'usage courant, présentées sur la table II.1. Pour ces fonctions, le meilleur compromis possible est obtenu avec la gaussienne, qui vérifie  $\Delta x \cdot \Delta k = 1/2$  (cf. démonstration au § III.3.5).

Pour se convaincre de la généralité de ce résultat, on peut considérer une propriété essentielle de la transformée de Fourier :

$$\text{si } a \in \mathbb{R}^{+*} \text{ et } \mathcal{F}[f(x)](k) = g(k) \text{ alors } \mathcal{F}[f(ax)](k) = g(k/a) .$$

C'est à dire que si on augmente la largeur de  $f$ , on diminue celle de  $\tilde{f}$  et inversement.

### II.3.2 Approche heuristique

Au-delà de ces quelques exemples, nous adoptons une approche qualitative plus générale (toujours à une dimension). Soit donc une fonction d'onde  $\psi(x)$  et sa transformée de

3. L'atome de néon ( $Z = 10$ ) possède une couche complète  $(1s)^2$  analogue à l'hélium, et deux électrons célibataires sur la couche 2. Comme tous les atomes à deux électrons, il possède des états triplets métastables. Ces états, en raison de propriétés de symétrie s'opposant fortement à l'émission spontanée (« règles de sélections »), sont caractérisés par des temps de retour vers l'état fondamental largement supérieurs à la seconde.

Fourier  $\tilde{\psi}(k)$ , dont les modules carrés définissent la densité de probabilité respectivement en  $x$  et en  $p$ . Nous omettons la variable temps qui ne joue pas de rôle, et nous utilisons la variable  $k = p/\hbar$  plutôt que  $p$  pour simplifier les équations. En introduisant les valeurs moyennes  $\langle x \rangle$  et  $\langle k \rangle$  (qui dépendent de  $\psi$ ) nous pouvons introduire la fonction auxiliaire  $\varphi$  et sa transformée de Fourier<sup>4</sup> :

$$\varphi(x) = e^{-i\langle k \rangle x} \psi(x + \langle x \rangle) \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(k) = e^{i(k + \langle k \rangle)x} \tilde{\psi}(k + \langle k \rangle). \quad (\text{II.8})$$

Ce sont des répliques de  $\psi$  et  $\tilde{\psi}$  dont a simplement annulé les valeurs moyennes de  $x$  et de  $k$  par les translations appropriées dans l'espace des phases ce qui permet d'éliminer les oscillations rapides auxquelles donnent généralement lieu des  $\langle x \rangle$  ou  $\langle k \rangle$  non nuls. Pour simplifier la discussion nous supposons, dans ce paragraphe, que les deux fonctions  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  sont réelles positives (elles sont donc aussi paires).

Comme  $|\varphi|^2$  et  $|\tilde{\varphi}|^2$  sont seulement translatées, leurs largeurs  $\Delta x$  et  $\Delta k$  ne sont pas modifiées par rapport à celles que l'on aurait obtenues pour  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$ . Comme on le voit, ces fonctions sont telles que :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= e^{-i\langle k \rangle(x - \langle x \rangle)} \int \tilde{\varphi}(k - \langle k \rangle) e^{i(k - \langle k \rangle)(x - \langle x \rangle)} dk \\ \tilde{\psi}(k) &= e^{ik\langle x \rangle} \int \varphi(x - \langle x \rangle) e^{-i(k - \langle k \rangle)(x - \langle x \rangle)} dx. \end{aligned}$$

où les facteurs de phase hors des intégrales n'ont pas d'influence sur les distributions de densité de probabilité de  $x$  ni de  $k$ .

Considérons l'intégrale dans la première de ces deux relations. Pour construire  $\psi(x)$ , on doit superposer des ondes de vecteur d'onde  $k$  dans un intervalle de largeur  $\sim \Delta k$  autour de  $\langle k \rangle$ , déphasées les unes par rapport aux autres par l'exponentielle qui figure dans l'intégrale. Lorsque  $x$  est suffisamment proche de  $\langle x \rangle$ , ce déphasage est négligeable, et toutes les composantes interfèrent constructivement, donnant à  $|\psi(x)|$  une amplitude de l'ordre de  $\int \tilde{\varphi}(k) dk$  (qui est la valeur maximale en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Par contre, lorsque  $x$  s'éloigne de sa valeur moyenne, le déphasage augmente et les composantes commencent à se brouiller, ce qui fait décroître  $|\psi(x)|$  en raison d'interférences destructives. La valeur pour laquelle ce brouillage commence à se manifester correspond à une phase  $(k - \langle k \rangle)(x - \langle x \rangle)$  de l'ordre de  $\pm\pi/2$ ; évidemment ce brouillage est de plus en plus précoce si  $|k - \langle k \rangle|$  augmente, mais cette quantité ne peut notamment excéder  $\Delta k$ . On en déduit que la largeur  $\Delta x$  de l'intervalle autour de  $\langle x \rangle$  où  $|\psi(x)|$  est appréciable est typiquement de l'ordre de  $1/\Delta k$ .

En pratique,  $\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$  ne peut être réalisé que si les fonctions  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  sont suffisamment piquées autour de la valeur moyenne, et dans le cas le plus général  $\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$  n'est qu'une indication qualitative. Sa valeur précise dépend de la forme précise des fonctions mises en jeu. L'hypothèse d'une phase constante pour  $\tilde{\varphi}(k)$  est évidemment un peu excessive, et on constate aisément que si  $\varphi$  ou  $\tilde{\varphi}$  oscillent, ou ont une dérivée première ou seconde discontinue, cette égalité est à comprendre comme une *borne inférieure*.<sup>5</sup>

### II.3.3 Démonstration générale

*Ce paragraphe un peu technique peut être passé en première lecture, car une démonstration encore plus générale mais mathématiquement plus simple est donnée dans le chapitre III de ce cours.*

L'inégalité de Heisenberg est intimement liée au fait que les opérateurs  $x$  (la simple multiplication par  $x$ ) et l'opérateur différentiel  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$  ne commutent pas, comme le

4. La dissymétrie contenue dans la phase constante  $e^{i\langle k \rangle \langle x \rangle}$ , sans conséquence physique, vient de ce que les deux opérateurs de translation  $e^{-i\langle k \rangle x}$  et  $e^{ik\langle x \rangle}$  ne commutent pas.

5. On peut considérer, à la place de la fonction gaussienne, sa dérivée, proportionnelle à  $x e^{-x^2/2}$ . Un calcul élémentaire donne alors  $\Delta x = \Delta k = \sqrt{3/2}$  soit  $\Delta x \cdot \Delta k = 3/2 > 1/2$ .

montre le calcul élémentaire :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \psi(x) = -i\hbar x \psi'(x) \neq \mathbf{p} \times \psi(x) = -i\hbar(x \psi'(x) + \psi(x)) \Rightarrow [\mathbf{x}, \mathbf{p}] = i\hbar \mathbb{1}.$$

où  $\mathbb{1}$  désigne l'opérateur « identité », c'est-à-dire la multiplication par 1.

Revenons à la variable  $p$  plutôt que  $k$ . Reprenons les fonctions translatées définies par (II.8), sans faire d'hypothèse sur leur propriétés, autre que  $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$ , par construction. Il en résulte que les écarts types  $\Delta x$  et  $\Delta p$  sont tels que :

$$\Delta x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle_{\psi} = \langle x^2 \rangle_{\varphi} \quad \text{et} \quad \Delta p^2 = \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle_{\psi} = \langle k^2 \rangle_{\varphi}.$$

Introduisons maintenant la fonction  $\Phi(x) = (\mathbf{x} + i\lambda \mathbf{p})\varphi(x) = x\varphi + \lambda\hbar\nabla\varphi$ , où  $\lambda$  est un réel quelconque et calculons :

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \Phi \rangle &= \int |\Phi|^2(x) dx = \int (x\varphi + \lambda\hbar\nabla\varphi)^*(x\varphi + \lambda\hbar\nabla\varphi) dx \\ &= \int (x^2 |\varphi|^2 + \hbar^2 \lambda^2 |\nabla\varphi|^2 + \lambda\hbar(x\varphi^*\nabla\varphi + \nabla(\varphi^*)x\varphi)) dx \\ &= \Delta x^2 + \lambda^2 \Delta p^2 + \lambda\hbar I \end{aligned}$$

où, en intégrant par parties :

$$I = \int (x\varphi^*\nabla\varphi + x\varphi\nabla\varphi^*) dx = \int x\varphi^*\nabla\varphi dx - \int \nabla(x\varphi)\varphi^* dx = \int |\varphi|^2 dx = 1$$

Comme nous l'avons déjà supposé, le terme de surface<sup>6</sup> peut raisonnablement être négligé, et on a ainsi fait réapparaître une différence qui résulte de la non permutation de la multiplication et de la dérivation. Du coup,  $\langle \Phi | \Phi \rangle$ , qui est toujours réel positif, apparaît sous la forme d'un polynôme de degré 2 en  $\lambda$  : son discriminant  $\Delta = (\hbar)^2 - 4\Delta x^2 \Delta p^2$  est donc négatif ou nul. On en déduit la forme rigoureuse de l'inégalité de Heisenberg :

$$\boxed{\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}.$$

A trois dimensions, elle se généralise en  $\Delta x_i \Delta p_j \geq \delta_{ij} \frac{\hbar}{2}$ , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de lien entre  $\Delta x$  et  $\Delta p_y$  par exemple, puisque  $[\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_j]$  est nul si  $i \neq j$ .

**Application à l'atome** Si un électron est confiné, par le potentiel d'interaction avec le noyau, sur une extension  $\Delta x \sim a$ , il y a nécessairement une impulsion dont la valeur quadratique moyenne vérifie :

$$\langle p^2 \rangle = \langle p \rangle^2 + \Delta p^2 \geq \frac{\hbar^2}{4a^2},$$

et, dans le cas de l'interaction coulombienne, l'énergie totale sera au minimum de :

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{8ma^2} - \frac{K}{a} \quad \text{qui est minimale pour} \quad a = \frac{\hbar^2}{4mK} = \frac{a_0}{4},$$

ce qui donne un ordre de grandeur satisfaisant.

---

6. Ici il s'écrit  $[x\varphi^*\varphi]_{-\infty}^{+\infty}$ , et à 3 dimensions, on utiliserait le théorème du gradient, et il s'écrirait

$$\int |\varphi|^2 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}$$

sur une surface fermée dont le position est arbitrairement grande.

### Version temporelle

Les variables  $E$  et  $t$ , qui sont aussi des variables conjuguées, vérifient elles aussi des inégalité de type Heisenberg. Il n'est pas possible de définir un opérateur  $T$  représentant le temps, mais il suffit de considérer cette fois la décomposition de Fourier temporelle pour obtenir, par les mêmes arguments l'ordre de grandeur  $\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 1$  ou plus généralement  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$ .

## II.4 La particule libre

Le cas de la particule libre, c'est-à-dire qui n'est soumise à aucune force est physiquement et pédagogiquement important. L'absence de force signifie que le potentiel  $V$  est constant, et sa valeur peut arbitrairement être choisie comme origine des énergies, soit  $V = 0$ . Nous allons nous limiter dans un premier temps à un problème à une dimension, la généralisation ne posant pas de problème spécifique.

### II.4.1 États stationnaires (à une dimension)

L'équation de Schrödinger stationnaire s'écrit alors :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) = E \varphi(x) \quad \text{soit} \quad \varphi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x)$$

où l'on a utilisé le fait que l'état stationnaire est indépendant du temps et qu'il n'y a qu'une dimension d'espace, pour remplacer la dérivée partielle par une dérivée simple. Du point de vue mathématique, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle (ordinaire) linéaire d'ordre 2 est un espace vectoriel (e.v.) de dimension 2, dont une base est donnée par :

$$\varphi = (e^{ikx}, e^{-ikx}) \quad \text{si} \quad k^2 = +\frac{2mE}{\hbar^2} > 0 \quad \text{soit} \quad E > 0 . \quad (\text{a})$$

$$\varphi = (e^{\kappa x}, e^{-\kappa x}) \quad \text{si} \quad \kappa^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} > 0 \quad \text{soit} \quad E < 0 , \quad (\text{b})$$

Visiblement aucune de ces quatre solutions n'est normalisable et il sera donc nécessaire de former des paquets d'onde par combinaison linéaire d'états d'énergies différentes. Toutefois, une combinaison linéaire non-nulle des états de la forme (b) ne sera *jamais* de carré sommable sur  $\mathbb{R}$  en entier, et on est donc conduit à rejeter ces solutions.

On en déduit que pour  $E < 0$  il n'y a pas de solution *physiquement* acceptable. Dans le cas limite  $E = 0$ , on a  $\varphi(x) = \alpha x + \beta$ , c'est à dire un e.v. de dimension 1 formé de fonctions non normalisables, et pour  $E > 0$  des solutions oscillantes, d'extension infinie mais que l'on va pouvoir localiser par transformation de Fourier<sup>7</sup>. Il est notable que ces solutions de base sont des états propres non seulement de  $H$  mais aussi de  $p$  (valeur propre  $\pm\hbar k$ ). Plus généralement, tout vecteur propre  $\Psi_p$  de  $p$  associé à la valeur propre  $p$  est un vecteur propre de  $H = p^2/2m$  avec la valeur propre  $E = p^2/2m$ . Il en serait différemment si on avait privilégié des fonctions de la forme  $\cos(kx)$  ou  $\sin(kx)$ , qui sont bien des états propres de  $H$  sans être des états propres de  $p$ .

### II.4.2 Normalisation généralisée des fonctions propres de $p$

Comme nous l'avons souligné précédemment, ces fonctions propres de  $p$  ne sont pas normalisables. Toutefois, il est nécessaire pour pouvoir conduire les calculs de choisir le coefficient devant l'exponentielle ainsi que nous l'avons fait dans la transformation de Fourier au § II.1.2.

7. Si on garde un potentiel  $V(x) = V_0 \neq 0$ , la valeur critique 0 est naturellement remplacée par  $V_0$ .

La règle de normalisation généralisée est la suivante :

$$\langle \Psi_p | \Psi_{p'} \rangle = \delta(p - p')$$

ou  $\delta$  désigne la distribution de Dirac<sup>8</sup>.

Si l'on écrit  $\Psi_p(x) = A e^{ipx/\hbar}$ , où  $A$  est un réel positif indépendant de  $p$ , on a :

$$\langle \Psi_p | \Psi_{p'} \rangle = |A|^2 2\pi \delta\left(\frac{p-p'}{\hbar}\right) = |A|^2 2\pi \hbar \delta(p - p') \quad \text{d'où} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (\text{II.9})$$

### II.4.3 Étude générale d'un paquet d'onde libre

La description générale d'un paquet d'onde libre est un problème classique de propagation avec dispersion, dans le cas où  $E(p) = p^2/2m$ , ce qui donne, via les relations de Planck-Einstein et de de Broglie, la relation de dispersion  $\omega(k) = \hbar k^2/2m$ .

On peut alors décrire le paquet d'onde  $\psi(x, t)$  en terme de sa transformée de Fourier  $\tilde{\psi}$ , en utilisant le fait que les ondes planes sont des fonctions propres de  $\mathbf{p}$  et donc des états stationnaires :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\psi}(k) e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |\tilde{\psi}(k)| e^{-i\chi(k)} e^{ikx} e^{-i\omega(k)t} dk,$$

où l'on a séparé le module et l'argument  $-\chi(k)$  de  $\tilde{\psi}(k)$ . On suppose de plus que  $|\tilde{\psi}(k)|$  est fortement piqué autour d'une valeur finie  $k_0$  et possède une largeur  $\Delta k$ , faible devant  $k_0$ , mais suffisante pour que le paquet d'onde soit raisonnablement localisé en  $x$ , avec une largeur  $\Delta x \sim 1/\Delta k$ .

Pour déterminer la position centrale du paquet d'onde, on utilise le principe de la « phase stationnaire » : les différentes composantes en fréquence interfèrent de façon constructive, à  $t$  donné, si  $x$  est tel que la phase  $\varphi(x, k, t) = kx - \omega(k)t - \chi(k)$  varie lentement avec  $k$ , c'est à dire soit *stationnaire* :

$$\frac{d\varphi}{dk} = x - \frac{d\omega}{dk}t - \frac{d\chi}{dk} = 0.$$

Cette équation dépend encore de  $k$ , mais on peut ici remplacer  $k$  par  $k_0$ , car il n'y aurait pas d'intérêt à rechercher une interférence constructive de composantes fréquentielles dont le poids est négligeable. En supposant que  $d\chi/dk$  est à peu près constant sur  $\Delta k$  et peut être écrit  $x_0$ , on obtient la position :

$$x_c(t) = \frac{d\omega}{dk}t + \frac{d\chi}{dk} = \frac{\hbar k_0}{m}t + x_0,$$

qui fait apparaître la vitesse de groupe  $v_g = d\omega/dk = \hbar k_0/m$ , qui coïncide avec la vitesse classique moyenne  $v = p_0/m$  d'une particule d'impulsion  $p_0 = \hbar k_0$ , et où  $x_0$  s'interprète simplement comme la position initiale.

---

8. Cette distribution (abusivement nommée aussi *fonction* de Dirac), est nulle si son argument est non nul (les exponentielles associées à des  $k$  différents sont indépendantes et orthogonales), et infinie si son argument est nul. Sous forme régularisée, elle peut être représentée par la limite des fonctions  $f(x)$  du § II.3 lorsque  $a$  tend vers 0. En tant que distribution, elle est définie par son action sur une fonction  $f$  suffisamment régulière par l'identité :

$\langle \delta(x - c) | f(x) \rangle = f(c)$  ou sous forme (abusive) de fonction  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - c) f(x) dx = f(c)$ .

Elle vérifie notamment les relations : (i) :  $\langle \delta(x - c) | 1 \rangle = \int \delta(x - c) dx = 1$ ; (ii) :  $\delta(x - c) = \delta(c - x)$ , (iii) :  $\delta(f(x) - f(c)) = \delta(x - c)/|f'(c)|$ . Toutefois l'intégrale non-convergente de l'équation (II.9) peut être prise comme définition et c'est aussi la façon la plus directe de montrer la formule de réciprocité de Fourier (II.5).

On peut alors étudier la forme du paquet d'onde au voisinage de  $x_c(t)$  en utilisant un DL d'ordre 2 de  $\varphi(k)$  au voisinage de  $k_0$  (on néglige de plus  $d^2\chi/dk^2$ ), ce qui fait apparaître un terme quadratique en  $k$  dans la phase<sup>9</sup> :

$$\begin{aligned}\varphi(k) &= \varphi(k_0) + \frac{d\varphi}{dk}(k_0)(k - k_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2\varphi}{dk^2}(k_0)(k - k_0)^2 \\ \Rightarrow \psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |\tilde{\psi}(k)| e^{i\varphi(k)} dk = \frac{e^{i\varphi_0}}{\sqrt{2\pi}} \int \tilde{\psi}(k) e^{-i\frac{\hbar t}{2m}(k-k_0)^2} e^{i(k-k_0)(x-x_c)} dk ,\end{aligned}$$

Dans cette expression, le préfacteur,  $e^{i\varphi_0} = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t - x_0 - (\chi(k) - \chi(k_0)))}$  décrit simplement l'onde plane globale, qui se déplace à la vitesse de phase  $v_\varphi = \omega(k_0)/k_0 = \hbar k_0/2m$ , et l'intégrale décrit l'enveloppe, que nous allons caractériser.

1. Si on suppose, dans un premier temps, que  $t$  est assez petit pour que le terme quadratique en  $\hbar t/2m$  soit négligeable (c'est le cas pour  $\hbar t/2m \ll \Delta x$ ), on obtient une transformée de Fourier de  $\psi$ , où  $kx$  est remplacé par  $(k - k_0)(x - x_c(t))$ , c'est-à-dire où les distributions en  $k$  et en  $x$  sont recentrées sur leurs valeurs moyennes<sup>10</sup> et on en déduit simplement  $\psi(x, t) = \psi(x - x_c(t), 0)$  : l'enveloppe se déplace à la vitesse classique  $v_g$ , sans se déformer.
2. Si on tient compte maintenant du terme quadratique, on peut faire le même raisonnement sur la transformation de Fourier qu'au § 1, mais en remplaçant ici  $\tilde{\psi}$  par  $\tilde{\psi} \exp(-i\hbar t(k - k_0)^2/2m)$ . Quelle est alors l'influence de cette modification sur la forme de l'enveloppe ? Si on se place dans la limite de temps longs où  $\frac{\hbar t}{2m}(k - k_0)^2$  domine  $(k - k_0)(x - x_c)$ , c'est à dire  $\frac{\hbar t}{2m}\Delta k^2 \gg \Delta x \Delta k$ , la fonction dont on doit prendre la transformée de Fourier inverse oscille très rapidement dès que  $k - k_0$  n'est plus nul, ce qui se traduit par un rétrécissement effectif de cette fonction.

On peut estimer sa largeur effective en considérant le moment où les deux déphasages quadratique et linéaire ont le même ordre de grandeur, soit  $\Delta k_{\text{eff}} = \frac{2m}{\hbar t} \Delta x$ , qui donne lieu à une largeur de  $\Delta x_{\text{eff}} \sim 1/\Delta k_{\text{eff}} \sim \frac{\hbar t}{2m\Delta x}$ . On constate donc que le paquet d'onde s'élargit lorsque  $t$  augmente, et cela d'autant plus vite que la largeur initiale  $\Delta x$  est plus petit.

Le croisement entre les deux régimes 1 et 2 s'obtiendra pour  $\Delta x_{\text{eff}} = \Delta x$ , soit  $t \sim m\Delta x^2/\hbar$ , et il est satisfaisant que ce temps tende vers l'infini pour  $m$  grand ou pour  $\hbar$  petit, cas pour lesquels on s'attend à retrouver le comportement classique correspondant, en première analyse, au cas du § 1.

Nous verrons en application, dans l'étude du paquet d'onde gaussien, mais aussi dans un cas plus général au chapitre suivant, que la loi d'évolution de l'écart du paquet d'onde est rigoureusement

$$\Delta x(t) = \sqrt{\Delta x^2 + \left(\frac{\Delta p}{m}t\right)^2}, \quad (\text{II.10})$$

ce qui est cohérent avec les résultats qualitatifs obtenus ci-dessus.

Cette expression (II.10) peut en fait être interprétée dans un contexte purement classique. Si nous considérons une ensemble de particules lancées avec une certaine dispersion de position  $\Delta x$  et de vitesse  $\Delta v = \Delta p/m$ . Comme chaque particule de position  $x(0)$  et de vitesse (constante)  $p/m$  obéit à la loi  $x(t) = x(0) + p/m t$ , la variance de la somme est la somme de celles des deux termes, dans la mesure où ceux-ci sont indépendants. Cette indépendance est implicitement liée à la structure choisie pour l'état initial ; dans le cas général, si on introduit une corrélation entre  $x$  et  $p$  dans l'état initial, le paquet d'onde

9. On peut noter l'analogie formelle avec le propagateur de Huygens en optique, qui permet d'identifier cet effet à un effet de diffraction.

10. Dans le référentiel se déplaçant comme  $x_c$  à la vitesse  $v_g$ , l'impulsion n'est plus  $\hbar k$  mais  $\hbar(k - k_0)$ .

peut se contracter avant de se dilater, comme on le constatera au paragraphe consacré au calcul explicite dans la cas d'une enveloppe gaussienne, et on le démontrera de façon plus générale au chapitre III.

#### II.4.4 Le cas particulier du paquet d'onde gaussien

##### Le modèle

Considérons un paquet d'onde de forme gaussienne, d'une part parce que c'est le seul pour lequel un calcul analytique exact est possible, mais d'autre part pour des raisons plus fondamentales qui apparaîtront au prochain chapitre. Nous nous plaçons à une dimension, et nous utilisons le vecteur d'onde  $k = p/\hbar$  pour simplifier les équations. Notons  $x_0$  la position centrale de la gaussienne,  $k_0$  le vecteur d'onde moyen, et  $w_0$  la largeur en position de la gaussienne. La forme *la plus simple* pour écrire  $\psi(x)$  à l'instant initial est la suivante :

$$\psi(x) = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{w_0}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2w_0^2}\right) \exp(ik_0(x-x_0)), \quad (\text{II.11})$$

mais nous verrons bientôt que ce n'est pas la forme *la plus générale*.

On vérifiera que le préfacteur assure la normalisation de la fonction d'onde, et que  $\Delta x = w_0/\sqrt{2}$ . Pour étudier la propagation de ce paquet d'onde, il faut faire apparaître les états stationnaires, dont nous savons qu'il peuvent être choisis comme des états propres de  $p$ , c'est-à-dire comme des ondes planes. Ceci conduit à privilégier la représentation impulsions de  $\psi$  pour la suite. On peut calculer ainsi la transformée de Fourier de  $\psi$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2\pi w_0}} e^{-ik_0 x} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2w_0^2}\right) \exp(-i(k-k_0)(x-x_0)) dx \end{aligned}$$

où nous avons de plus fait apparaître  $(x-x_0)$  dans le terme de phase afin de simplifier les calculs ultérieurs.

##### La représentation impulsion

En regroupant les deux exponentielles et en mettant l'exposant total sous la forme canonique, il s'écrit :

$$\begin{aligned} \chi(x, k) &= -\frac{(x-x_0)^2}{2w_0^2} - i(k-k_0)(x-x_0) \\ &= -\frac{1}{2w_0^2} \left( (x-x_0)^2 + 2i(k-k_0)w_0^2(x-x_0) \right) \\ &= -\frac{1}{2w_0^2} \left( ((x-x_0) + i(k-k_0)w_0^2)^2 - (i(k-k_0)w_0^2)^2 \right) \\ &= -\frac{((x-x_0) + i(k-k_0)w_0^2)^2}{2w_0^2} - \frac{(k-k_0)^2 w_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Le second terme de  $\chi$ , est visiblement indépendant de  $x$ , peut être factorisé hors de l'intégrale. Cette dernière

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{((x-x_0) + i(k-k_0)w_0^2)^2}{2w_0^2}\right) dx \quad (\text{II.12})$$

fait donc apparaître une structure gaussienne mais où la variable d'intégration jouant le rôle de  $x$  est désormais complexe. Nous montrons dans l'appendice D<sub>II</sub>, et nous admettrons ici que cette « translation » ne modifie pas la valeur de l'intégrale, qui vaut donc

$\sqrt{2\pi}w_0$ , ce qui donne pour la représentation impulsion :

$$\tilde{\psi}(k) = \pi^{-1/4} \sqrt{w_0} \exp(-(k - k_0)^2 w_0^2/2) \exp(-ix_0(k - k_0)) ,$$

dont le caractère entièrement symétrique de (II.11) montre bien le caractère singulier de la structure gaussienne. En outre, on a  $\Delta k^2 = \langle (k - k_0)^2 \rangle = w_0^{-2}/2$ , et cette quantité de dépend pas du temps puisque l'évolution des état stationnaires ne modifie pas la densité  $|\tilde{\psi}(k)|^2$ .

### Propagation : le calcul explicite

Pour étudier la propagation il convient de multiplier chacune des ondes planes d'impulsion  $\hbar k$  par l'exponentielle  $\exp(-iE(\hbar k)t/\hbar)$  où  $E(\hbar k) = \hbar^2 k^2/2m$ . On pourra alors obtenir l'expression explicite de  $\psi(x, t)$  en prenant la transformée de Fourier inverse de  $\tilde{\psi}(k, t) = \tilde{\psi}(k, 0) \exp(-i\omega(k)t)$ , en faisant apparaître la « relation de dispersion »  $\omega(k) = \hbar k^2/2m$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{\psi}(k, 0) e^{-i\omega(k)t} e^{ikx} dk \\ &= \pi^{-1/4} \sqrt{\frac{w_0}{2\pi}} \int \exp\left(\underbrace{-\frac{(k - k_0)^2 w_0^2}{2} - i\frac{\hbar k^2 t}{2m} - ix_0(k - k_0) + ikx}_{\chi(x, k, t)}\right) dk \end{aligned}$$

On peut à nouveau réorganiser l'argument de exponentielle ; en utilisant le DL *exact*  $k^2 = k_0^2 + 2k_0(k - k_0) + (k - k_0)^2$ , il se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \chi(x, k, t) &= -\frac{w_0^2}{2} \left( (k - k_0)^2 - 2i\frac{(k - k_0)(x - x_0) + k_0 x}{w_0^2} + iat \left( k_0^2 + 2k_0(k - k_0) + (k - k_0)^2 \right) \right) \\ &= \left( ik_0 x - i\frac{\hbar k_0^2 t}{2m} \right) - \frac{w_0^2}{2} \left( (1 + iat)(k - k_0)^2 + 2i\frac{(k - k_0)(x - x_0 - v_0 t)}{w_0^2} \right) \\ &= \left( ik_0 x - i\frac{\hbar k_0^2 t}{2m} - \frac{(x - x_0 - v_0 t)^2}{2w_0^2(1 + iat)} \right) - \underbrace{\frac{w_0^2}{2}(1 + iat)}_{\alpha/2} \underbrace{\left( k - k_0 + i\frac{(x - x_0 - v_0 t)}{w_0^2(1 + iat)} \right)^2}_{\beta} \end{aligned}$$

où l'on a posé  $a = \hbar/mw_0^2$  et  $v_0 = a k_0 = \hbar k_0/m$ . Cette dernière expression fait apparaître la vitesse classique associée au vecteur d'onde moyen. Le terme  $x - x_0 - v_0 t$  montre que le centre du paquet d'onde ne sera plus  $x_0$  mais  $x_1(t) = x_0 + v_0 t$ , comme nous l'avons montré au II.4.3. Par ailleurs, les termes dans la première parenthèse sont des termes indépendants de  $k$  que l'on peut factoriser hors de l'intégrale et dont l'interprétation est limpide : le premier, qui était déjà dans (II.11), décrit le mouvement d'ensemble ; le second décrit le déphasage global moyen associé à la valeur moyenne de  $k$ , et le troisième donne une structure gaussienne centrée autour de  $x_1(t)$ .

Il reste donc à évaluer l'intégrale associée à la seconde parenthèse, dont celle du (II.12) est visiblement un cas particulier. Ce calcul est un peu ardu car il repose sur des techniques d'analyse complexe. On montre à l'appendice D<sub>II</sub> que sous sa forme générique, cette intégrale vaut :

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\alpha\frac{(u - i\beta)^2}{2}\right) du = I(\alpha, 0) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$$

où  $\beta$  un nombre complexe quelconque et  $\alpha$  est un nombre complexe de partie réelle positive, ce qui est bien le cas pour les intégrales qui nous intéressent. Cette condition sur  $\alpha$  assure que l'exponentielle tende vers 0 quand  $u$  tend vers l'infini<sup>11</sup>. Ici la notation abusive  $\sqrt{\alpha}$  désigne celle des deux racines carrées de  $\alpha$  qui est elle-même de partie réelle positive.

11. Si  $\Re(\alpha) > 0$ , l'intégrale est alors absolument convergente, et le cas  $\Re(\alpha) = 0$  s'obtient en prenant la limite, au sens des distributions, des précédentes.

### Propagation : résultat et interprétation

En récapitulant les résultats précédents nous obtenons l'expression :

$$\psi(x, t) = \frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{w_0(1 + iat)}} \exp\left(-\frac{(x - x_1(t))^2}{2w_0^2(1 + iat)}\right) \exp\left(ik_0(x - x_1(t)) - \frac{\hbar k_0^2}{2m}t\right), \quad (\text{II.13})$$

où la physique intéressante est dans le terme  $(w_0^2(1 + iat))^{-1}$  qui figure dans le préfacteur et dans la première exponentielle. Pour séparer les contribution à l'amplitude et à la phase dans cette exponentielle, il convient d'écrire :

$$\frac{1}{w_0^2(1 + iat)} = \frac{1 - iat}{w_0^2(1 + (at)^2)} = \underbrace{\frac{1}{w_0^2(1 + (at)^2)}}_{1/w^2(t)} - i \underbrace{\frac{at}{w_0^2(1 + (at)^2)}}_{k_0/2R(t)}$$

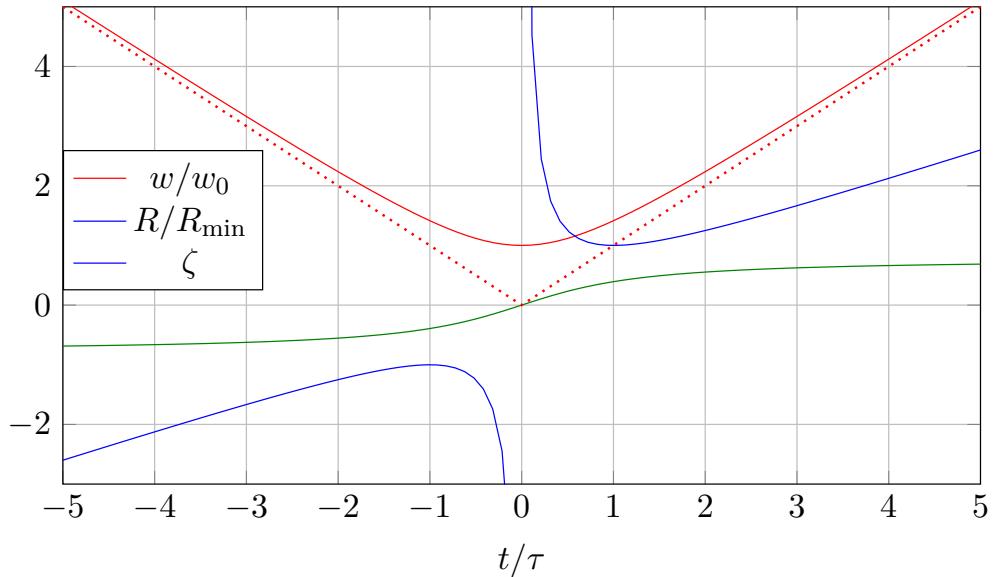
ce qui donne :

$$\psi(x, t) = \underbrace{\frac{\pi^{-1/4}}{w(t)} \exp\left(-\frac{(x - x_1(t))^2}{2w^2(t)}\right)}_{\text{amplitude}} \underbrace{\exp\left(ik_0\left((x - x_1(t)) + \frac{(x - x_1(t))^2}{2R(t)}\right) + \zeta(t)\right)}_{\text{phase}} \quad (\text{II.14})$$

où l'on fait apparaître le « waist »  $w(t)$  et le « rayon de courbure  $R(t)$  », et la phase additionnelle  $\zeta(t)$ , issue du préfacteur dans (II.13). Ces paramètre s'écrivent, en fonction du temps caractéristique  $\tau = 1/a = mw_0^2/\hbar$  :

$$\boxed{w(t) = w_0\sqrt{1 + t^2/\tau^2}} \quad \boxed{R(t) = \frac{k_0 w_0^2}{2} \frac{1 + t^2/\tau^2}{t/\tau}} \quad \text{et} \quad \boxed{\zeta(t) = \frac{\arctan(t/\tau)}{2}}.$$

Ils caractérisent respectivement l'extension de l'enveloppe, et la dépendance non triviale (quadratique) de la phase vis-à-vis du temps.



**Fig. II.2 –** Tracé des paramètres caractérisant la propagation du paquet d'onde gaussien, montrant en rouge la contraction pour  $t < \tau$ , largeur stationnaire pour  $t$  petit devant  $\tau$ , et l'élargissement pour  $t > \tau$ , avec les asymptotes classiques en pointillé. On note que  $w(\pm\tau) = \sqrt{2}w_0$ . Le rayon de courbure est minimal pour  $t \sim \pm\tau$ . La phase additionnelle  $\zeta$  est à peu près constante égale à  $\pm\pi/4$ , sauf dans la zone centrale où elle tourne de  $+\pi/2$ .

Ces résultats montrent que le paquet d'onde reste à tout instant de forme gaussienne, et que sa largeur  $\Delta x = w(t)$  passe par un minimum à l'instant initial, puis croît

indéfiniment avec la valeur absolue du temps, avec une asymptote correspondant tout simplement à la dispersion de vitesse  $\Delta v = \hbar\Delta k/m$ . Le paquet d'onde vérifie à tout instant la relation  $\Delta x(t) \cdot \Delta p = \sqrt{(1 + t/\tau^2)/2}$ , et à l'instant initial *seulement* réalise le cas d'égalité de l'inégalité de Heisenberg.

L'instant initial où  $\Delta x$  est minimal a pour particularité de réaliser la condition  $1/R(0) = 0$ , ce qui signifie que le terme de phase quadratique dans (II.14) n'existe pas, comme on voit directement dans II.11. À tout autre instant, le rayon de courbure  $R(t)$  est une mesure du degré de corrélation entre position et vitesse. Nous montrerons au chapitre suivant, dans un cadre plus général, qu'il est une mesure de ces corrélations et peut être relié à la covariance  $\langle(x - \langle x \rangle)(p - \langle p \rangle)\rangle$ .

**NB:** Ce résultat, important pour la mécanique quantique, l'est plus encore dans le cadre de l'analogie avec l'optique paraxiale présentée dans l'appendice C<sub>II</sub>, où il décrit la propagation d'un faisceau gaussien, tel qu'il est produit par la plupart des lasers. Dans cette analogie, le paramètre  $w$ , appelé *waist*, désigne alors le rayon à  $1/e$  du spot du laser, et l'élargissement du faisceau à partir du foyer décrit un simple effet de diffraction. Le rayon  $R$  est alors le rayon de courbure des fronts d'onde,  $\zeta$  porte le nom de « phase de Gouy », et l'équivalent du temps  $\tau$  est la longueur de Rayleigh.



# III – Formalisme et postulats

## Sommaire

---

<b>III.1 L'espace des états</b> . . . . .	<b>42</b>
III.1.1 Espace pré-hilbertien . . . . .	42
III.1.1 a) Produit hermitien . . . . .	42
III.1.1 b) Norme et distance . . . . .	42
III.1.1 c) Espace de Hilbert . . . . .	43
III.1.2 Dualité . . . . .	43
III.1.2 a) Dual topologique $H^*$ et notation de Dirac . . . . .	43
III.1.2 b) Exemples . . . . .	43
III.1.2 c) Bases hilbertiennes . . . . .	44
III.1.3 Systèmes composites . . . . .	46
<b>III.2 Les grandeurs physiques</b> . . . . .	<b>47</b>
III.2.1 Éléments de matrice . . . . .	47
III.2.2 Opérateur adjoint et conjugaison hermitique . . . . .	48
III.2.3 Opérateurs auto-adjoints . . . . .	49
III.2.3 a) Définition . . . . .	49
III.2.3 b) Propriétés des opérateurs auto-adjoints . . . . .	49
III.2.3 c) Diagonalisation . . . . .	49
III.2.3 d) Représentations position et impulsion . . . . .	50
III.2.4 Algèbre des opérateurs . . . . .	51
III.2.4 a) Quantification canonique . . . . .	51
III.2.4 b) Calcul opératoriel . . . . .	52
III.2.4 c) Opérateurs unitaires . . . . .	53
III.2.4 d) Diagonalisation simultanée . . . . .	54
III.2.4 e) Notion d'ECOC . . . . .	55
<b>III.3 La mesure</b> . . . . .	<b>55</b>
III.3.1 Les postulats . . . . .	55
III.3.2 Contenu physique . . . . .	56
III.3.3 Exemples . . . . .	57
III.3.4 Moyenne et variance . . . . .	58
III.3.5 Inégalités de Heisenberg . . . . .	58
III.3.6 États intriqués et projection du paquet d'ondes . . . . .	59
<b>III.4 Évolution temporelle</b> . . . . .	<b>60</b>
III.4.1 Hamiltonien . . . . .	60
III.4.2 Équation de Schrödinger . . . . .	60
III.4.3 Équation de Heisenberg . . . . .	61
III.4.4 L'opérateur d'évolution . . . . .	63
III.4.5 Équivalence Schrödinger – Heisenberg . . . . .	64
III.4.6 Théorème de Ehrenfest . . . . .	65
<b>III.5 Particules identiques</b> . . . . .	<b>66</b>
III.5.1 Position du problème . . . . .	66
III.5.2 Postulat de symétrisation . . . . .	66
<b>III.6 Applications</b> . . . . .	<b>67</b>
III.6.1 Paquet d'onde libre dans le point de vue de Heisenberg . . . . .	67
III.6.2 Force de Lorentz . . . . .	69

---

Pour ce chapitre, les références bibliographiques générales sont :

- ◆ COHEN-TANNOUDJI et al., chapitre III, y compris  $C_{III}$ ,  $F_{III}$  et  $G_{III}$ ;

- ◆ *ASLANGUL*, § 12.1 et 12.2, chapitre 13, § 14.1.
- ◆ *LE BELLAC*, chapitre 2, § 3.2, chapitre 4. Des références au chapitre 6 seront précisées localement.

En outre on ne saurait trop recommander de lire *FEYNMAN*, mais l'exposé des postulats y est dispersé dans tout le cours...

## III.1 L'espace des états

**COHEN-TANNOUDJI**  
et al., § II.A, II.B  
**ASLANGUL**, § 12.1.1  
**LE BELLAC**, § 4.1

Les états quantiques sont des vecteurs unitaires d'un espace de Hilbert

### III.1.1 Espace pré-hilbertien

#### III.1.1 a) Produit hermitien

C'est une généralisation du produit scalaire usuel aux espaces vectoriels complexes. Nous l'avons rencontré incidemment dans le chapitre II et noté  $(\psi, \varphi)$ , mais dorénavant nous utiliserons la notation « braket » (crochet)  $\langle u|v\rangle$ . Un produit hermitien est une forme sesqui-linéaire à symétrie hermitienne définie positive, c'est à dire que :

**Forme :**  $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} : (u, v) \mapsto \langle u|v\rangle$ .

**Symétrie hermitienne :** Pour tout couple  $(u, v) \in \mathcal{H}^2$ , on a  $\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^*$ .

**Sesqui-linéarité :** Pour tout couple  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  :

$$\begin{aligned} \langle u|\lambda v_1 + \mu v_2\rangle &= \lambda \langle u|v_1\rangle + \mu \langle u|v_2\rangle && \text{linéarité à droite} \\ \langle \lambda u_1 + \mu u_2|v\rangle &= \lambda^* \langle u|v_1\rangle + \mu^* \langle u|v_2\rangle && \text{semi-linéarité à gauche} \end{aligned}$$

**Définie positive** Pour tout  $u \in \mathcal{H}$  non-nul, on a  $\langle u|u\rangle > 0$ .

On notera que :

- ◆ La symétrie hermitienne combinée avec la linéarité à droite implique la semi-linéarité à gauche.
- ◆ La symétrie hermitienne implique que  $\langle u|u\rangle$  soit réel, mais ne renseigne pas sur son signe. On notera que  $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\Re(\langle u|v\rangle)$ .
- ◆ Le caractère « défini » du produit signifie que vecteur nul est le seul vecteur de norme 0.
- ◆ Deux vecteurs non nuls  $u$  et  $v$  sont dits orthogonaux si  $\langle u|v\rangle = 0$ .

#### III.1.1 b) Norme et distance

L'application  $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R} : u \mapsto \sqrt{\langle u|u\rangle}$  définit une norme sur  $\mathcal{H}$ , qui permet de définir une distance et donc une topologie. Cette norme vérifie les relations habituelles usuelles :

- ◆ Pythagore : si  $u$  et  $v$  sont orthogonaux,  $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ .
- ◆ Inégalité de Cauchy-Schwarz :  $|\langle u|v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ .
- ◆ Inégalité triangulaire :  $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ .

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, et son cas d'égalité ont une importance physique particulière, et méritent donc d'être détaillés. Soient  $u$  et  $v$  deux vecteurs non-nuls de  $\mathcal{H}$ . L'application  $T : \lambda \in \mathbb{R} \mapsto T(\lambda) = \|u + \lambda v\|^2$  est une application à valeurs réelles, et est positive ou nulle pour tout  $\lambda$  puisqu'il s'agit d'une norme. Or on a  $T(\lambda) = \|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + \lambda^2 \|v\|^2 + 2\lambda \Re(\langle u|v\rangle)$ . On peut supposer sans perte de généralité que  $\langle u|v\rangle$  est réel, car si ce n'est pas le cas, on peut toujours multiplier  $u$  ou  $v$  par un facteur de phase adéquat, sans modifier ni  $|\langle u|v\rangle|$ , ni  $\|u\|$  ou  $\|v\|$ . On alors un trinôme en  $\lambda$  à coefficients réels, qui ne peut être positif que si son discriminant est négatif ou nul, soit

$(\langle u|v \rangle)^2 - \|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$ , ce qui établit l'inégalité au sens large. Le cas d'égalité est celui le cas où il existe un  $\lambda_0$  réel (racine double) pour lequel  $T(\lambda) = \|u + \lambda_0 v\|^2 = 0$ , ce qui implique  $u + \lambda_0 v = 0$ .

### III.1.1 c) Espace de Hilbert

Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien, qui possède en outre la propriété d'être complet (pour la topologie induite par le produit hermitien), c'est-à-dire que toute suite de Cauchy est convergente<sup>1</sup>. C'est un cas particulier d'espace de Banach.

Tout espace pré-hilbertien, s'il est de dimension finie  $n$ , est isomorphe à  $\mathbb{C}^n$  doté du produit hermitien canonique  $(x, y) = \sum_i x_i^* y_i$ ; il est donc complet en vertu de la complétude de  $\mathbb{C}$  lui-même, et constitue un exemple simple d'espace de Hilbert.

Dans le cas plus général de la dimension infinie, la complétude est une hypothèse essentielle, notamment pour ce qui représente le dual de l'espace, et la notion de base hilbertienne.

### III.1.2 Dualité

#### III.1.2 a) Dual topologique $\mathcal{H}'$ et notation de Dirac

Le dual  $\mathcal{H}^*$  d'un espace vectoriel  $\mathcal{H}$  est l'ensemble des formes linéaires ( $\varphi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ) définies sur  $\mathcal{H}$ . Le dual topologique  $\mathcal{H}'$  est le sous ensemble de  $\mathcal{H}^*$  ne contenant que les formes linéaires continues (c'est-à-dire bornées sur la boule unité). La structure de  $\mathcal{H}^*$  et de son s.e.v.  $\mathcal{H}'$  dépend fortement de la dimension, finie ou infinie de l'espace  $\mathcal{H}$ .

Indépendamment de cette dimension, on définit « l'injection canonique »  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$  qui à tout  $u \in \mathcal{H}$  associe la forme  $\varphi_u$ , telle que  $\varphi_u(v) = \langle u|v \rangle$ . Il est alors commode d'introduire la notation de Dirac : le braket est scindé en deux parties, le « bra »  $\langle u|$  et le « ket »  $|v\rangle$ . Le ket n'est visiblement qu'une notation nouvelle pour un vecteur de  $\mathcal{H}$ . Le bra, lui, définit une forme linéaire agissant sur  $\mathcal{H}$  et fondée sur  $u$  : c'est très exactement la forme  $\varphi_u$ . Le mot « injection » signifie qu'à tout ket on peut associer un bra, et que ce bra à un unique antécédent. Mais la réciproque ne va pas de soi.

- ◆ Dans le cas de la dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues (c'est-à-dire que  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H}'$ ) et l'injection canonique est une bijection, c'est-à-dire que  $\mathcal{H}'$  et  $\mathcal{H}$  sont isomorphes.
- ◆ Si  $\mathcal{H}$  est de dimension infinie, la structure du dual est plus compliquée : en général  $\mathcal{H}^*$  et même  $\mathcal{H}'$  sont beaucoup plus grand que  $\mathcal{H}$ , c'est à dire que  $\varphi(\mathcal{H})$  est un petit sous ensemble de  $\mathcal{H}'$ . Toute fois, le « théorème de représentation de Riesz » nous assure, grâce à la complétude de  $\mathcal{H}$ , que toute forme de  $\mathcal{H}'$  a un (exactement) antécédent.

En définitive, pour tout espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , à tout ket  $|u\rangle$  dans  $\mathcal{H}$  il correspond un unique bra  $\langle u|$  dans  $\mathcal{H}'$ , et inversement à tout bra  $\langle u|$  dans  $\mathcal{H}'$  il correspond un unique ket  $|u\rangle$  dans  $\mathcal{H}$ . Ainsi le produit  $\langle u|v \rangle$  peut être vu comme l'action de  $\langle u|$  sur  $|u\rangle$  ou, à une conjugaison près, l'action de  $\langle v|$  sur  $|u\rangle$ .

#### III.1.2 b) Exemples

**Exemple 1 : système à deux niveaux** Lorsqu'on considère le spin d'un électron, on a un espace  $\mathcal{H}_S$  sous-tendu par deux niveaux, correspondant à un spin polarisé vers le haut ou vers le bas, et donc  $\mathcal{H}$  est de dimension 2. Nous noterons ces deux kets  $|\uparrow\rangle$  pour le premier et  $|\downarrow\rangle$  pour le second. Nous supposons en outre que ces deux situations sont incompatibles, ce qui se traduit (justification au § III.3 consacré à la mesure) par le fait que ces deux kets sont *orthogonaux* :  $\langle \uparrow|\downarrow \rangle = \langle \downarrow|\uparrow \rangle = 0$ , et s'ils sont bien de norme 1, ils forment une base orthonormée de  $\mathcal{H}_S$ . Compte tenu de la structure vectorielle, on peut

---

1. une suite de Cauchy est une suite  $\{u_n\}$  telle que  $\lim_{p,q \rightarrow \infty} \|u_p - u_q\| = 0$ .

considérer des états qui sont des combinaisons linéaires arbitraires de ces deux vecteurs de base, pourvu qu'on prenne soin de les normer. Ainsi les deux kets  $|\psi_{\pm}\rangle = (|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$  représentent des états possibles. Il constituent de plus une base orthonormée, puisque :

$$\begin{aligned}\langle \psi_{\pm} | \psi_{\pm} \rangle &= \frac{\langle \uparrow | \uparrow \rangle + (\pm)^2 \langle \downarrow | \downarrow \rangle}{2} = 1, \\ \langle \psi_{\pm} | \psi_{\mp} \rangle &= \frac{(\langle \uparrow | + \langle \downarrow |) (\langle \uparrow | - \langle \downarrow |)}{2} = \frac{\langle \uparrow | \uparrow \rangle - \langle \downarrow | \downarrow \rangle}{2} = 0.\end{aligned}$$

**Exemple 2 : fonctions de carré sommable** On montre en analyse que le dual topologique de  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$  (fonctions de puissance  $p \in \mathbb{N}$  sommable sur  $\mathbb{R}$ ) est l'espace  $\mathcal{L}^q(\mathbb{R})$  et inversement, si  $1/p + 1/q = 1$ . Il s'ensuit que l'ensemble des fonctions de carré sommable  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  est identique à son dual topologique. Muni du produit hermitien défini au chapitre précédent :

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(x) g(x) dx$$

c'est un espace de Hilbert<sup>2</sup> décrivant les fonctions d'onde pour une particule à une dimension, de masse non nulle et dépourvue de spin, comme étudié au chapitre II. Il n'est pas immédiat de savoir si on peut exhiber une base orthonormée dans cet espace. En réalité, la question ainsi posée est dépourvue de sens mathématique, et nécessite d'introduire la notion de base hilbertienne.

### III.1.2 c) Bases hilbertiennes

**Bases algébriques en dimension finie** Considérons à titre heuristique une base orthonormée  $\{\varphi_j\}$  pour  $j \in \{1, \dots, n\}$  d'un espace de Hilbert de dimension finie  $n$ . Le caractère orthonormé s'écrit de façon synthétique :

$$\boxed{\langle \varphi_j | \varphi_k \rangle = \delta_{jk}} \quad \text{pour tout couple d'indices } (j, k). \quad (\text{III.1})$$

Tout ket  $|\psi\rangle$  s'écrit de façon unique sous la forme :

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^n c_j |\varphi_j\rangle ; \quad \text{et en vertu de l'orthonormalisation} \quad \langle \varphi_j | \psi \rangle = c_j , \quad (\text{III.2})$$

c'est-à-dire que la  $j$ -ème coordonnée s'obtient en projetant sur le ket de base correspondant. On peut alors écrire :

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^n \langle \varphi_j | \psi \rangle |\varphi_j\rangle = \sum_{j=1}^n |\varphi_j\rangle \langle \varphi_j | \psi \rangle = \sum_{j=1}^n (|\varphi_j\rangle \langle \varphi_j|) |\psi\rangle = \left( \sum_{j=1}^n (|\varphi_j\rangle \langle \varphi_j|) \right) |\psi\rangle .$$

Dans cette équation, nous avons tiré parti de la flexibilité de la notation de Dirac, en transformant successivement l'équation comme suit :

1. Comme  $\langle \varphi_j | \psi \rangle$  est un nombre et  $|\varphi_j\rangle$  un vecteur, on peut les écrire dans l'ordre qu'on veut.
2. Pour un  $j$  donné, l'objet  $|\varphi_j\rangle \langle \varphi_j|$  est un « opérateur »<sup>3</sup>, puisqu'il agit sur un ket et donne un nouveau ket. Il s'agit en fait du *projecteur* orthogonal sur le ket  $|\varphi_j\rangle$  puisque il donne un vecteur porté par  $|\varphi_j\rangle$  et dont la longueur (algébrique) est la projection de  $|\psi\rangle$  sur  $|\varphi_j\rangle$ .
3. Puisque les  $n$  projecteurs  $|\varphi_j\rangle \langle \varphi_j|$  agissent tous sur le même ket  $|\psi\rangle$ , on peut utiliser la linéarité pour factoriser la somme des projecteurs.

2. Il faut en fait considérer le quotient par la relation d'équivalence « égale presque partout », laquelle signifie « égale sauf sur un ensemble de mesure nulle ».

3. C'est-à-dire un endomorphisme de  $\mathcal{H}$  ou de façon équivalente, une application linéaire  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ .

On arrive ainsi à l'égalité entre opérateurs, appelée « relation de fermeture » de la base considérée

$$\boxed{\sum_{j=1}^n |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| = \mathbb{1}} . \quad (\text{III.3})$$

**Bases hilbertiennes en dimension infinie** La définition des bases en dimension infinie n'est pas aussi évidente, car la somme figurant dans (III.2) devrait alors comporter une infinité de termes, et par conséquent il n'existe pas de bases à proprement parler dans un espace de dimension infinie. Toutefois sa généralisation à une base « dénombrable »  $\{|\varphi_j\rangle\}$  pour  $j \in \mathbb{N}$ , qui s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j |\varphi_j\rangle$$

est en réalité une série. En vertu de la complétude de  $\mathcal{H}$ , elle est convergente dans  $\mathcal{H}$  si et seulement si la série numérique  $\sum_{j=1}^{\infty} |c_j|^2$  est un nombre réel fini. Et si les coefficients  $c_j$  sont donnés par  $c_j = \langle\varphi_j|\psi\rangle$ , la limite en question est bien le ket  $|\psi\rangle$ . En bref, on généralise sans problème les relations (III.2), et nous admettrons que les propriétés fondamentales de la base hilbertienne sont la généralisation des relations d'orthonormalisation (III.1) et de la relation de fermeture (III.3)<sup>4</sup>.

**Bases continues** En dimension infinie, il arrive assez souvent que l'on souhaite décomposer les états sur une famille *non-dénombrable* de vecteurs. Dans ce cas, la « base » a généralement la puissance du continu, et les vecteurs de base n'appartiennent pas à l'espace  $\mathcal{H}$ . C'est notamment le cas de la mécanique ondulatoire du chapitre II, où la transformation de Fourier apparaît comme une décomposition sur une infinité continue de fonctions  $e^{ipx/\hbar}$  qui ne sont pas de carré sommable, et qui prises isolément ne décrivent donc pas des états physiquement pertinents.

Les pseudo-états qui composent une telle base peuvent être caractérisés par un (ou plusieurs) indice(s) continu(s), que nous noterons  $\alpha$  (par exemple  $\alpha$  peut aussi bien être un nombre réel qu'un vecteur de  $\mathbb{C}^n$ ). Nous écrirons simplement  $|\alpha\rangle$  le ket associé à  $\alpha$ . Ces vecteurs ne sont pas normalisables, mais on peut néanmoins imposer à la place de (III.1) une relation d'orthonormalisation généralisée (en notant  $n$  la dimension de l'espace où « vit »  $\alpha$ ) :

$$\boxed{\langle\alpha|\alpha'\rangle = \delta^{(n)}(\alpha - \alpha')} \quad (\text{III.4})$$

COHEN-TANNOUDJI  
 et al., § II.A.3  
 ASLANGUL, § 12.2.3  
 LE BELLAC, § 6.1

où  $\delta^{(n)}$  est la distribution de Dirac de dimension  $n$ . Il importe de noter que si  $\alpha$  est dimensionné, alors  $\delta^{(n)}(\alpha - \alpha')$  l'est aussi, et  $[\delta^{(n)}(\alpha - \alpha')] = [\alpha]^{-n}$ , et donc  $|\alpha\rangle$  est lui-même de dimension  $[\alpha]^{-n/2}$ . Cette dimension aura des conséquences importantes par la suite, mais elle assure déjà l'homogénéité de la relation de fermeture généralisée :

$$\boxed{\int d\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}} .$$

où l'intégrale des  $\alpha$  est étendue au domaine nécessaire pour avoir une base complète, et on écrira donc (abusivement) :

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}|\psi\rangle = \int d\alpha |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle .$$

---

4. Il s'agit d'une convergence « faible », puisque la série des opérateurs n'est probablement pas convergente, mais son action sur les kets de  $\mathcal{H}$  l'est.

On a alors :

$$\begin{aligned}\langle \psi | \psi \rangle &= \left( \int d\alpha \langle \alpha | \psi \rangle | \alpha \rangle \right)^\dagger \left( \int d\alpha' \langle \alpha' | \psi \rangle | \alpha' \rangle \right) \\ &= \iint d\alpha d\alpha' \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha' | \psi \rangle \langle \alpha | \alpha' \rangle = \iint d\alpha d\alpha' \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha' | \psi \rangle \delta^{(n)}(\alpha - \alpha') \\ &= \int d\alpha |\langle \psi | \alpha \rangle|^2,\end{aligned}$$

et le caractère normalisable de l'état  $|\psi\rangle$  est donc lié à la sommabilité de  $|\langle \psi | \alpha \rangle|^2$ , de façon très similaire à ce que l'on trouvé sous forme discrète pour les bases hilbertiennes, à savoir la convergence de  $\sum_j |\langle \varphi_j | \psi \rangle|^2$ .

En dimension finie comme infinie, le choix d'une base orthonormée est souvent appelé « représentation ». C'est notamment le cas des représentations positions et impulsion que nous avons introduites au chapitre II, et sur lesquelles nous reviendrons (voir aussi l'appendice F<sub>III</sub>).

### III.1.3 Systèmes composites

COHEN-TANNOUDJI et al., § II.F  
LE BELLAC, § 2.4, 2.5.12

Lorsqu'un système composite  $\mathcal{C}$  est formé de deux sous-systèmes 1 et 2, l'espace de Hilbert associé à  $\mathcal{C}$  est formé par le produit tensoriel :  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

On rappelle que le produit tensoriel est une opération bilinéaire qui crée un espace beaucoup plus grand que  $\mathcal{H}_1$  ou  $\mathcal{H}_2$ <sup>5</sup>. La définition intrinsèque du produit tensoriel est un peu compliquée<sup>6</sup>, mais d'un point de vue pratique il suffit de dire que l'on peut former une base de  $\mathcal{H}_{\mathcal{C}} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  en faisant le produit cartésien d'une base de  $\mathcal{H}_1$  et d'une base de  $\mathcal{H}_2$ . Ainsi, si  $\{\varphi_j\}$  est une base de  $\mathcal{H}_1$  et  $\{\chi_k\}$  est une base de  $\mathcal{H}_2$ , un état  $|\Psi\rangle$  de l'espace produit tensoriel peut se décomposer de façon unique en :

$$|\psi\rangle = \sum_j \sum_k \alpha_{jk} |\varphi_j\rangle \otimes |\chi_k\rangle, \quad (\text{III.5})$$

où le produit  $|\varphi_j\rangle \otimes |\chi_k\rangle$  des vecteurs de base est usuellement noté  $|\varphi_j, \chi_k\rangle$ , voire  $|j, k\rangle$  si ce n'est pas ambigu. Dans cette approche, un produit tensoriel peut être vu comme la matrice  $[\alpha_{ij}]$ . Cette notion se généralise bien sûr aux bases continues en remplaçant l'une ou l'autre somme par une intégrale.

Le BELLAC, ch 11  
(pour info)

Ce postulat est l'une des deux plus importantes différences entre la physique classique et la physique quantique, car elle permet l'existence d'états dits « intriqués » (en anglais « entangled » states), dans lesquels figurent des corrélations spécifiquement quantiques. Plus spécifiquement, on appelle état « factorisable » ou état « produit tensoriel » un état dans lesquels l'équation (III.5) peut être mise sous la forme très particulière :

$$|\psi\rangle = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} |\varphi_i\rangle \otimes |\chi_j\rangle = \left( \sum_i a_i |\varphi_i\rangle \right) \otimes \left( \sum_j b_j |\chi_j\rangle \right) = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle,$$

c'est à dire des états qui appartiennent au produit cartésien  $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ . Comme cet ensemble est très petit devant  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ , l'immense majorité des états sont des états intriqués, dépourvus d'une telle décomposition.

COHEN-TANNOUDJI et al., § D<sub>IV</sub> LE BELLAC, § 2.5.13

**Exemple 1** L'exemple le plus simple est celui des états de Bell, obtenus en considérant de deux spins 1/2. Les deux espaces  $\mathcal{H}_{S1}$  et  $\mathcal{H}_{S2}$  sont des espaces de dimension 2, introduits dans le premier exemple du § III.1.2 b). En utilisant des indices pour identifier les deux spins (supposés discernables) on peut par exemple former les états :

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |1:\uparrow\rangle \otimes |2:\uparrow\rangle \pm |1:\downarrow\rangle \otimes |2:\downarrow\rangle \right) \quad \text{ou en abrégé} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle \pm |\downarrow\downarrow\rangle)$$

dont nous montrerons au chapitre IV qu'ils ne sont pas factorisables.

5. En dimension finie,  $\dim(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) = \dim(\mathcal{E}_1) \times \dim \mathcal{E}_2$ .

6. On peut voir  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$  comme l'ensemble des applications linéaires de  $\mathcal{E}'_1$  dans  $\mathcal{E}_2$ .

**Exemple 2** Les systèmes 1 et 2 ne sont pas nécessairement des systèmes physiques au sens propre, mais peuvent représenter aussi des degrés de liberté indépendants d'un même système. Ainsi si  $\mathcal{H}_x = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  est l'ensemble des fonctions d'onde décrivant une particule à 1 dimension, l'ensemble des fonctions d'onde à trois dimensions s'écrit  $\mathcal{H}_{3D} = \mathcal{H}_x \otimes \mathcal{H}_y \otimes \mathcal{H}_z$ . Cela se traduit ainsi : toute fonction  $\psi(x, y, z)$ , si elle n'est pas nécessairement de la forme  $\Xi(x)\Psi(y)Z(z)$  (fonction d'onde factorisée), elle s'écrit nécessairement sous la forme d'une somme de tels produits.

De même, si on veut décrire à la fois le mouvement d'une particule comme un électron et son degré de liberté de spin, on travaillera dans l'espace  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{3D} \otimes \mathcal{H}_S$ . En termes de fonction d'onde, on utilise parfois une notation « spineurs à deux composantes », dans laquelle l'état de spin est représenté par un vecteur-colonne à deux dimensions, ce qui permet d'écrire de façon équivalente :

$$|\Psi\rangle = \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) |\uparrow\rangle + \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) |\downarrow\rangle \quad \text{ou} \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \rho(\mathbf{r}) = |\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})|^2 + |\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})|^2$$

(où  $\rho$  désigne la densité de probabilité spatiale). Un état factorisé est alors le cas particulier où  $\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})$  et  $\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})$  sont proportionnels, ce qui donne :

$$\Psi = \alpha\psi(\mathbf{r}) |\uparrow\rangle + \beta\psi(\mathbf{r}) |\downarrow\rangle \quad \text{soit} \quad \Psi = \psi(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad p(\mathbf{r}) = (|\alpha|^2 + |\beta|^2) |\psi(\mathbf{r})|^2.$$

## III.2 Les grandeurs physiques

Les grandeurs physiques sont décrites par une classe d'opérateurs qui sont définis ici.

Les grandeurs physiques sont représentées par des « observables », c'est à dire des opérateurs linéaires agissant sur l'espace des états, qui sont auto-adjoints et diagonalisables.

Le terme « opérateurs » est ici synonyme de « endomorphisme », c'est à dire application linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ . L'ensemble de ces opérateurs forme une algèbre (non commutative) sur  $\mathbb{C}$  appelée  $GL(\mathcal{H})$ . L'ensemble des observables est un sous-ensemble de  $GL(\mathcal{H})$ , mais n'est pas un  $\mathbb{C}$ -e.v. ni une algèbre.

COHEN-TANNOUDJI  
et al., § F1

COHEN-TANNOUDJI  
et al., § IX.C

COHEN-TANNOUDJI  
et al., II.B.3, II.D,  
BII  
ASLANGUL, § 12.1.2  
et ch 14  
LE BELLAC, § 2.2,  
2.3 et 6.2

### III.2.1 Éléments de matrice

Si  $A$  est un endomorphisme de  $\mathcal{H}$ , on peut calculer le produit scalaire  $\langle u | (A|v) \rangle$  du bra  $\langle u |$  avec l'image de  $|v\rangle$  par  $A$ . Cette quantité est appelée « élément de matrice de  $A$  entre  $u$  et  $v$  ». Il s'écrit plus simplement  $\langle u | Av \rangle$ , provisoirement du moins. et nous montrerons ci-dessous qu'il peut aussi bien être noté  $\langle u | A | v \rangle$ .

Plus spécifiquement, si on dispose d'une base (supposée discrète pour simplifier les notations)  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ , on peut représenter  $A$  par sa matrice (éventuellement infinie) dans cette base, composée des éléments de matrice  $A_{ij} = \langle \varphi_i | A \varphi_j \rangle$ . Et la relation (III.3) s'étendra à  $A$  sous la forme :

$$A = \sum_{i,j} \langle \varphi_i | A \varphi_j \rangle | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | = \sum_{i,j} | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | A \varphi_j \rangle \langle \varphi_i | = \sum_i | A \varphi_j \rangle \langle \varphi_j |,$$

où la deuxième expression utilise la flexibilité de la notation de Dirac pour faire apparaître la relation de fermeture de la base  $\{\varphi_j\}$ . En l'utilisant, on obtient la troisième expression, dont le sens est très clair : chaque vecteur  $| \varphi_l \rangle$  (capturé par  $\langle \varphi_j |$ ) est remplacé par son image  $| A \varphi_j \rangle$ .

Dans le cas d'une base continue, on aura de façon similaire :

$$A = \int d\alpha d\alpha' \langle \alpha' | A \alpha \rangle |\alpha' \rangle \langle \alpha| = \int d\alpha |A \alpha \rangle \langle \alpha| ,$$

avec les mêmes observations que ci-dessus sur le rôle des dimensions.

### III.2.2 Opérateur adjoint et conjugaison hermitique

À ce stade, on aimerait bien pouvoir réécrire  $\langle u | Av \rangle = \langle u | A | v \rangle$ , ce qui sous-entend que  $A$  agit à droite sur  $|v\rangle$ , mais le fait de le détacher de  $|v\rangle$  ne sera univoque que si l'on peut aussi faire agir  $A$  (à droite) sur  $\langle u |$ , c'est à dire donner un sens à  $\langle u | A$ .

**Définition** En mathématiques, l'opérateur adjoint de  $A$ , noté  $A^\dagger$  ou plus simplement  $A^+$  (dague ou croix) est un endomorphisme de  $\mathcal{H}'$ .

Grâce à la symétrie entre  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{H}'$ , nous adoptons plutôt la définition suivante<sup>7</sup> :

$$\boxed{\langle A^\dagger v | u \rangle = \langle v | Au \rangle} \quad \text{ou de façon équivalente} \quad \boxed{\langle Au | v \rangle = \langle u | A^\dagger v \rangle}$$

pour tout couple de vecteur  $|u\rangle$  et  $|v\rangle$ . On notera que la combinaison de ces deux égalités implique que l'adjoint de l'adjoint redonne l'opérateur de départ :  $(A^\dagger)^\dagger = A$ .

De plus l'application  $A \mapsto A^\dagger$  est semi-linéaire.

Notons en passant qu'en dimension infinie, l'existence de l'adjoint est une question mathématiquement subtile, mais nous n'entrerons pas dans ces détails.

**Matrice de l'adjoint** Il est commun de caractériser cet adjoint par sa matrice dans une base quelconque, en fonction de celle de  $A$  dans la même base :

$$A_{ij} = \langle \varphi_i | A \varphi_j \rangle \quad \text{alors} \quad (A^\dagger)_{ij} = \langle \varphi_i | A^\dagger \varphi_j \rangle = \langle A \varphi_i | \varphi_j \rangle = \langle \varphi_i | A \varphi_j \rangle^* = A_{ji}^*,$$

ce qui signifie que la matrice de  $A^\dagger$  est la conjuguée de la transposée de celle de  $A$ .

En raison de la même propriété pour la transposée, on en déduit  $(A B)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ .

**Multiplication à droite** On peut alors poser que :

$$\boxed{\langle u | A = \langle A^\dagger u | ,}$$

c'est-à-dire que l'action à droite de  $A$  sur  $\langle u |$  donne le bra conjugué de  $|Au\rangle$ . Avec cette règle de calcul, on pourra écrire :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{action à gauche :} & \langle u | (A | v \rangle) = \langle u | Av \rangle \\ \text{action à droite :} & (\langle u | A) | u \rangle = \langle A^+ u | v \rangle \end{array} \right.$$

et comme ces quantités sont égales par définition, on peut en effet les noter  $\langle u | A | v \rangle$

**Conjugaison hermitique** On peut alors généraliser la notion d'adjoint en définissant comme suit ce que nous appellerons la conjugaison hermitique :

---

7. la seconde égalité se déduit de la première en utilisant la symétrie hermitienne :

$$\langle A^\dagger v | u \rangle = \langle v | Au \rangle \iff \langle A^\dagger v | u \rangle^* = \langle v | Au \rangle^* \iff \langle u | A^\dagger v \rangle = \langle Au | v \rangle .$$

$z \in \mathbb{C}$	$z^\dagger = z^*$
$ u\rangle \in \mathcal{H}, \langle v  \in \mathcal{H}'$	$ u\rangle^\dagger = \langle u , \langle v ^\dagger =  v\rangle$ et $( v\rangle\langle u )^\dagger =  u\rangle\langle v $
$A, B \in GL(\mathcal{H})$	$(A B)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
$ u\rangle \in \mathcal{H}, A \in GL(\mathcal{H})$	$(A u\rangle)^\dagger = \langle u A^\dagger$ et $(\langle u A)^\dagger = A^\dagger u\rangle$
$\langle u A v\rangle \in \mathbb{C}$	$\langle u A v\rangle^\dagger = \langle u A v\rangle^* = \langle v A^\dagger u\rangle$

ce qui complète l'ensemble des conventions définissant les « notations de Dirac ».

### III.2.3 Opérateurs auto-adjoints

#### III.2.3 a) Définition

Un opérateur auto-adjoint est un opérateur qui coïncide avec son adjoint.

Il est aussi de façon indifférente désigné comme opérateur « hermitique » ou hermitien<sup>8</sup>.

On note que le groupe linéaire  $GL(\mathcal{H})$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, et muni de la multiplication des opérateurs une  $\mathbb{C}$ -algèbre. Par contre, l'ensemble des opérateurs hermitiens *n'est pas* un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , mais seulement sur  $\mathbb{R}$ , car la multiplication d'un opérateur hermitien par un nombre non-réel est non-hermitien ; ce n'est pas non plus une algèbre, car le produit de deux opérateurs hermitiens n'est en général pas hermitien, en raison de la non-commutativité du produit des opérateurs.

#### III.2.3 b) Propriétés des opérateurs auto-adjoints

Un opérateur auto-adjoint acquiert de ce fait un bon nombre de propriétés :

1. Ses éléments diagonaux sont réels ;  $\langle u|A|u\rangle^* = \langle u|A^\dagger|u\rangle = \langle u|A|u\rangle$ .
2. Ses valeurs propres sont donc réelles ; si  $A|u\rangle = \lambda|u\rangle$  alors  $\langle u|A|u\rangle = \lambda \in \mathbb{R}$ .
3. Ses éléments non-diagonaux sont tels que  $A_{ij} = A_{ji}^*$ .
4. Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux : en effet si  $A|u_1\rangle = \lambda_1|u_1\rangle$  et  $A|u_2\rangle = \lambda_2|u_2\rangle$ , alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle u_1|A|u_2\rangle &= \lambda_2\langle u_1|u_2\rangle \quad \text{et} \quad \langle u_1|A^\dagger|u_2\rangle = \lambda_1\langle u_1|u_2\rangle \\ \Rightarrow 0 &= \langle u_1|A - A^\dagger|u_2\rangle = (\lambda_2 - \lambda_1)\langle u_1|u_2\rangle . \end{aligned}$$

et donc si  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ,  $\langle u_1|u_2\rangle = 0$ .

COHEN-TANNOUDJI  
et al., § II.D.2  
ASLANGUL, § 13.1,  
13.3  
LE BELLAC, § 6.3

#### III.2.3 c) Diagonalisation

- ◆ En dimension finie, un théorème élémentaire assure que la matrice peut être diagonalisée dans une base orthonormée, et si  $\{|\chi_i\rangle\}_{i=\{1,\dots,n\}}$  est cette base, et que les valeurs propres correspondantes sont  $\{\lambda_i\}_{i=\{1,\dots,n\}}$ , on peut alors écrire en utilisant la relation de fermeture :

$$A = \left( \sum_i |\chi_i\rangle\langle\chi_i| \right) A \left( \sum_i |\chi_j\rangle\langle\chi_j| \right) = \sum_{i,j} |\chi_i\rangle\langle\chi_j| \underbrace{\langle\chi_i|A|\chi_j\rangle}_{\lambda_i \delta_{ij}} = \sum_i \lambda_i |\chi_i\rangle\langle\chi_i| . \quad (\text{III.6})$$

Si le spectre est dégénéré, c'est-à-dire si le s.e.v. propre associé à  $\lambda$ ,  $\mathcal{F}_\lambda$ , est de dimension plus grande que 1, on remplacera chaque projecteur  $|\lambda\rangle\langle\lambda|$  par le projecteur sur  $\mathcal{F}_\lambda$  :

$$P_\lambda = \sum_\mu |\lambda, \mu\rangle\langle\lambda, \mu| .$$

8. En dimension infinie, les mathématiques font une distinction entre auto-adjoint et hermitique, mais ce n'est pas un problème en mécanique quantique

- ◆ En dimension infinie, la discussion mathématique est nettement plus élaborée. Comme nous le verrons ci-dessous dans le cas particulier des opérateurs  $x$  et  $p$ , le caractère auto-adjoint des opérateurs dépend des fonctions considérées. Il en résulte que certains opérateurs n'ont pas *stricto sensu* de vecteurs propres dans l'espace  $\mathcal{H}$  complet. C'est dans ce cas que s'introduisent des états non-normalisables, et un spectre ayant la puissance du continu. Par abus de langage, on dénomme néanmoins ces fonctions comme « vecteurs propres », on leur impose la relation orthonormalisation généralisée de la forme de (III.4), où l'étiquette  $\alpha$  est cette fois la « valeur propre » de  $A$ . Et on diagonalise alors l'opérateur auto-adjoint  $A$  sous la forme :

$$A = \int d\alpha \alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (\text{III.7})$$

- ◆ Bien sûr, si le spectre de  $A$  comporte une partie discrète et une partie continue (c'est souvent le cas), on ajoutera une somme discrète comme (III.6) et une somme continue comme (III.7).

### III.2.3 d) Représentations position et impulsion

COHEN-TANNOUDJI  
et al., § II.E, D<sub>II</sub>  
ASLANGUL, § 13.7,  
13.8  
LE BELLAC, ch 8

L'étude de l'ensemble de définition et du caractère auto-adjoint des opérateurs  $s$  et  $p$ , agissant en principe sur  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , conduit à définir une ensemble d'états physiques  $\mathcal{F}$  plus petit que  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . En effet, les fonctions d'ondes représentant des états physiques doivent être au moins  $C^2$  (sauf aux éventuelles discontinuités du potentiel) et tendre vers 0 plus rapidement que  $1/|x|$  à l'infini. Ces conditions restrictives assurent que les deux observables auront les bonnes propriétés (cf. App. E<sub>III</sub>).

Même si on ne veut pas entrer dans ces considérations mathématiques, il faudra admettre que ces opérateurs n'ont pas de vrais états propres, mais seulement des pseudovecteurs propres, qui forment un spectre continu, ne sont pas normalisables au sens strict<sup>9</sup> et, pris isolément, ne peuvent représenter un état physique. Leur utilisation en tant que base ou « représentation » est néanmoins indispensable, entre autres pour retrouver la mécanique ondulatoire dans le cadre du formalisme général. Nous admettrons les résultats suivants, dont la plupart sont établis dans l'appendice § F<sub>III</sub>.

- ◆ Les pseudo-valeurs propres de  $r$  forment un spectre continu non dégénéré, dont l'extension est  $\mathbb{R}^3$  en entier, et on note  $|r\rangle$  le pseudo-ket tel que  $r|r\rangle = r|r\rangle$ , ce qui signifie que les pseudo-vecteur-propres sont étiquetés par la valeur propre associée. On écrit les relations d'orthonormalisation, de fermeture et de décomposition spectrale de l'opérateur  $r$  :

$$\langle r|r'\rangle = \delta^{(3)}(r - r') , \quad \mathbb{1} = \int_{\mathbb{R}^3} |r\rangle\langle r| d^3r \quad \text{et} \quad r = \int_{\mathbb{R}^3} |r\rangle\langle r| r d^3r$$

- ◆ Il en est exactement de même pour  $p$  et on a :

$$\langle p|p'\rangle = \delta^{(3)}(p - p') , \quad \mathbb{1} = \int_{\mathbb{R}^3} |p\rangle\langle p| d^3p \quad \text{et} \quad p = \int_{\mathbb{R}^3} |p\rangle\langle p| p d^3p$$

- ◆ La représentation  $r$  des états redonne la fonction d'onde habituelle, et la représen-

9. L'ensemble  $\mathcal{F}$  des fonctions d'ondes physiques étant plus petit que  $\mathcal{H}$ , son dual topologique est plus grand que  $\mathcal{H}$  car il contient des distributions qui ne sont définies que pour des fonctions suffisamment régulières. On a ainsi  $\mathcal{F} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{F}'$ , et les pseudo-vecteurs propres sont alors définis par des bras, les pseudo-kets associés étant essentiellement une notation commode. Ces considérations font l'objet de la théorie des *rígged Hilbert spaces* (que l'on peut traduire par « espaces de Hilbert élargis ») que nous n'aborderons pas davantage dans ce cours.

tation  $\mathbf{p}$  sa transformée de Fourier, et on peut en déduire l'action des opérateurs :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle & \tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{p} | \psi \rangle \\ \langle \mathbf{r} | \mathbf{r} | \psi \rangle = \mathbf{r} \cdot \psi(\mathbf{r}) & \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \\ \langle \mathbf{p} | \mathbf{p} | \psi \rangle = \mathbf{p} \cdot \tilde{\psi}(\mathbf{p}) & \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} | \psi \rangle = +i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \mathbf{r}} \end{array}}$$

- ♦ Les « fonctions d'onde » des pseudo-vecteurs propres  $|\mathbf{r}\rangle$  en représentation  $\mathbf{r}$  et de  $|\mathbf{p}\rangle$  en représentation  $\mathbf{p}$  sont conformément à la relation d'orthonormalisation données par des « fonctions » delta. Celles de  $|\mathbf{r}\rangle$  en représentation  $\mathbf{p}$  et de  $|\mathbf{p}\rangle$  en représentation  $\mathbf{r}$  vérifient :

$$\boxed{\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}_{\mathbf{r}}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \mathbf{r} \rangle = \frac{e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}}$$

- ♦ la transformation de Fourier correspond à un simple changement de base, que l'on peut écrire (on a bien sûr une relation similaire pour la transformation inverse) :

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \mathbb{1} | \psi \rangle = \left\langle \mathbf{p} \left| \int |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| \, d^3\mathbf{r} \right| \psi \right\rangle = \int \frac{e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}/\hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \psi(\mathbf{r}) \, .$$

**Lien avec le commutateur** À partir de ce qui précède, on a, pour  $|\varphi\rangle$  quelconque :

$$\langle \mathbf{r} | [r_i, p_j] | \varphi \rangle = i\hbar \left( \frac{d}{dr_j} (r_i \langle \mathbf{r} | \varphi \rangle) - r_i \frac{d}{dr_j} (\langle \mathbf{r} | \varphi \rangle) \right) = i\hbar \frac{dr_i}{dr_j} \langle \mathbf{r} | \varphi \rangle = i \delta_{ij} \langle \mathbf{r} | \varphi \rangle \, .$$

ce qui établit les « relations de commutation canoniques » entre les composantes de  $\mathbf{r}$  et celles de  $\mathbf{p}$  :

$$[r_i, p_j] = r_i p_j - p_j r_i = i\hbar \delta_{ij} \mathbb{1} \, .$$

Conformément aux règles de quantification introduites au § III.2.4 a) ci-dessous, ces relations de commutation sont le prolongement direct des relations classiques entre crochets de Poisson, et sont les plus fondamentales. Ce sont elles qui permettent d'établir les résultats exposés ici, comme il est montré dans l'appendice § F<sub>III</sub>.

### III.2.4 Algèbre des opérateurs

#### III.2.4 a) Quantification canonique

COHEN-TANNOUDJI  
et al., § II.B.5

Lorsqu'on étudie le mouvement d'un système ayant un équivalent classique, et notamment celui d'une particule dotée d'une masse finie, on dispose d'un certain nombre de règles permettant d'en construire la version quantique. Cette méthode, dite quantification canonique, repose sur le formalisme hamiltonien, et la transposition des crochets de Poisson des grandeurs classiques en commutateurs des opérateurs quantiques correspondants. Les règles essentielles sont les suivantes :

1. Les crochets de Poisson canoniques des variables de position et d'impulsion, pour une particule à trois degrés de liberté, se transposent comme suit :

$$\begin{aligned} \{r_i, r_j\} &= 0 \rightarrow [r_i, r_j] = 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \rightarrow [p_i, p_j] = 0 \\ \{r_i, p_j\} &= \delta_{ij} \rightarrow [r_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \end{aligned}$$

2. Si une quantité physique  $\mathcal{A}$  est définie comme une fonction de l'espace des phases  $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ , sa version quantique s'obtiendra en remplaçant les variables classiques  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$  par leurs versions quantiques  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{p}$ , et en symétrisant l'opérateur ainsi obtenu pour assurer son hermiticité, soit :

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rightarrow A = \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + (\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p}))^\dagger \right)$$

Il en résulte que, bien souvent, une identité en termes de crochet de Poisson  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \mathcal{C}$  donnera dans l'espace des opérateurs  $[A, B] = i\hbar C$ , où  $C$  est une version quantique et symétrisée de  $\mathcal{C}$ .

### Exemples

- ◆ Un exemple simple et important est l'impulsion radiale définie en mécanique classique comme  $p_r = \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r$ , où  $\mathbf{u}_r$  est le vecteur unitaire radial. En mécanique quantique, l'ordre dans le produit scalaire est important, et on doit donc faire la demi-somme de  $\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p}$  et  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r$  :

$$p_r = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r)$$

- ◆ Un autre exemple important est celui du moment cinétique  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ . De façon générale, l'adjoint d'un produit vectoriel  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  est  $-\mathbf{B}^\dagger \wedge \mathbf{A}^\dagger$ . Mais dans le cas particulier de  $\mathbf{L}$ , outre l'hermiticité de  $\mathbf{r}$  et de  $\mathbf{p}$ , chaque composante comporte des produits d'une composante de  $\mathbf{r}$  avec une composante de  $\mathbf{p}$  sur un axe perpendiculaire, et donc ce produit particulier est commutatif :

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p} - \mathbf{p} \wedge \mathbf{r}) = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} = -\mathbf{p} \wedge \mathbf{r}.$$

- ◆ Dans certains calculs, on peut avoir besoin du vecteur  $\mathbf{r}^2 \mathbf{p}$ . On pourrait l'écrire  $\mathbf{r}^2 \mathbf{p}$  ou  $\mathbf{p} \mathbf{r}^2$ , lequel est visiblement l'adjoint du premier, mais aussi  $\sum_i r_i \mathbf{p} \mathbf{r}_i$ , qui lui, est déjà symétrique. Dans ce cas particulier, on a la relation :

$$\mathbf{r}^2 \mathbf{p} \rightarrow \frac{1}{2} (\mathbf{r}^2 \mathbf{p} + \mathbf{p} \mathbf{r}^2) = \sum_i r_i \mathbf{p} \mathbf{r}_i.$$

**Remarque** Le commutateur de deux opérateurs hermitiques  $A$  et  $B$  vérifie :

$$[A, B]^\dagger = (AB - BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB = [B, A] = -[A, B].$$

Un opérateur qui, comme ce commutateur, est l'opposé de son adjoint, est dit anti-hermitique. Il est immédiat de constater que si on le multiplie par  $\pm i$ , on obtient un opérateur hermitique.

#### III.2.4 b) Calcul opératorielle

La correspondance entre crochets de Poisson et commutateurs permet de simplifier les calculs de commutateurs qui sont constamment utilisés. Notamment les règles évidentes de dérivation sur les crochets de Poisson se transposent immédiatement<sup>10</sup> :

$$\{\mathbf{r}, f(\mathbf{r}, \mathbf{p})\} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \text{ et } \{\mathbf{p}, g(\mathbf{r}, \mathbf{p})\} = -\frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}} \rightarrow [\mathbf{r}, f(\mathbf{p})] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \text{ et } [\mathbf{p}, g(\mathbf{r})] = \frac{\hbar \partial g}{i \partial \mathbf{r}}.$$

---

10. Par contre, on n'a pas la généralisation complète du crochet : en règle générale,

$$\frac{1}{i\hbar} [f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), f(\mathbf{r}, \mathbf{p})] \neq \{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}}$$

Pour établir directement cette règle on peut utiliser les relations plus générales suivantes :

$$\begin{aligned} [AB, C] &= A[B, C] + [A, C]B, \\ [A, B^n] &= n[A, B]B^{n-1} \quad \text{si } [A, B] \text{ commute avec } A \text{ et avec } B, \end{aligned}$$

et supposer que les fonctions  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues, et peuvent donc être approchées par des polynômes.

On notera que le commutateur est distributif vis-à-vis des produits scalaires et vectoriels. Par exemple on peut calculer sans recourir à l'expression des composantes :

$$[\mathbf{L}, F(\mathbf{r})] = [\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}, F(\mathbf{r})] = \mathbf{r} \wedge [\mathbf{p}, F(\mathbf{r})] + \underbrace{[\mathbf{r}, F(\mathbf{r})]}_0 \wedge \mathbf{p} = -i\hbar \mathbf{r} \wedge \frac{\partial F(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}$$

De cette dernière équation, il résulte en particulier <sup>11</sup> que

$$[\mathbf{L}, \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}] = -i\hbar \mathbf{r} \wedge \mathbf{u}, \quad [\mathbf{L}, \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}] = i\hbar \mathbf{p} \wedge \mathbf{u} \quad \text{et} \quad [\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{L} \cdot \mathbf{v}] = i\hbar (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{L}$$

Ces relations seront utiles au chapitre V pour l'étude du mouvement dans un champ central.

### III.2.4 c) Opérateurs unitaires

Le spectre des observables joue un rôle important dans ce qui précède, et bien plus crucial encore dans les paragraphes suivants. Il est donc important d'étudier les opérateurs qui conservent ce spectre dans l'opération de conjugaison  $\mathrm{GL}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{H})$  définie, pour un opérateur  $S$  inversible quelconque par :

$$T_S : A \mapsto A' = S A S^{-1}. \quad (\text{III.8})$$

COHEN-TANNOUDJI  
et al., § C<sub>II</sub>  
LE BELLAC, § 6.3.2  
ASLANGUL, § 13.3

On sait que cette opération définit une relation de similitude entre  $A$  et  $A'$ , qui ont donc des spectres (ensemble des valeurs propres) identiques. Pour que les vecteurs propres aient les propriétés adéquates, il faut de plus imposer que  $A'$  soit une observable, et ce quelle que soit l'observable de départ  $A$ . On doit alors imposer à  $S$  la relation :

$$A' = A'^\dagger = (S A S^{-1})^\dagger = S^{-1\dagger} A^\dagger S^\dagger = S^{-1\dagger} A S^\dagger$$

et comme cela doit être vrai pour tout  $A$ , il s'ensuit que  $S^\dagger = S^{-1}$  (et donc  $S^{-1\dagger} = S$ ).

Cette relation est la définition des opérateurs unitaires. Ces opérateurs sont la généralisation pour un espace complexe de la notion d'opérateurs orthogonaux pour un espace euclidien réel. Ils représentent donc des isométries, et notamment transforment une base orthonormée en une autre base orthonormée. Vus comme des changements de base selon la relation (III.8), ils représentent dans le cadre quantique des changements d'observateur ou de point de vue, et jouent un rôle central dans l'étude de l'évolution temporelle, laquelle fait l'objet du paragraphe III.4 dans ce chapitre <sup>12</sup>.

Un opérateur unitaire  $S$  possède les propriétés suivantes :

- ◆ Deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
- ◆ Les valeurs propres sont des nombres complexes de module 1.

11. On pourrait les obtenir en utilisant le calcul tensoriel (en notations d'Einstein) :

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{r}] = -i\hbar \frac{\partial \varepsilon_{ikl} r_k p_l}{\partial r_j} r_k = -i\hbar \varepsilon_{ikl} r_k \frac{\partial p_l}{\partial p_j} = i\hbar \varepsilon_{ijl} r_k \text{ soit } [\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{r}] = i\hbar \mathbf{u} \wedge \mathbf{r} \text{ et de même } [\mathbf{L} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{p}] = i\hbar \mathbf{u} \wedge \mathbf{p}$$

12. Les transformations unitaires jouent vis à vis de la mécanique quantique le même rôle que celui des transformations canoniques pour la mécanique classique hamiltonienne.

- ◆ Comme toute opérateur normal <sup>13</sup>, il est diagonalisable en base orthonormée.

De façon très générale, si  $A$  est un opérateur hermitique, l'opérateur  $S = \exp(iA)$  est un opérateur unitaire <sup>14</sup>. Plus généralement, les opérateurs unitaires représentent des transformations liées aux propriétés de symétrie et invariances du système physique. A titre d'exemple fondamental,  $\mathbf{p}$  étant l'opérateur associé à l'invariance par translation de l'espace physique, il permet de construire l'opérateur de translation  $T(a) = \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{a}/\hbar)$ , qui translate les fonctions d'onde de  $\mathbf{a}$  (point de vue actif), ou les systèmes de coordonnées de  $-\mathbf{a}$  (point de vue passif). En effet :

$$[\mathbf{r}, T(\mathbf{a})] = i\hbar \frac{\partial T(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{a} T(\mathbf{a}) \quad \text{donc} \quad T(\mathbf{a})\mathbf{r}T^{-1}(\mathbf{a}) = \mathbf{r} - \mathbf{a} .$$

On peut aussi voir cela en décrivant l'action de  $T(a)$  le point de vue de la mécanique ondulatoire, en reconnaissant un développement de Taylor :

$$T(a)\psi(w) = \exp\left(-a\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \psi^{(n)}(x) = \psi(x-a) .$$

De la même façon, mais nous aurons l'occasion d'un revenir plus longuement, le moment cinétique  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$  permet de construire les opérateurs de rotation et le hamiltonien  $\mathsf{H}$  les translations dans le temps.

**Opérateurs Parité** Un autre exemple d'opérateur unitaire est « l'opérateur parité »  $\Pi$  qui représente une symétrie centrale. Il est défini par :

$$\Pi \mathbf{r} \Pi = -\mathbf{r} , \quad \Pi \mathbf{p} \Pi = -\mathbf{p} \quad \text{et donc} \quad \Pi \mathbf{L} \Pi = \mathbf{L} .$$

Comme toute symétrie, cet opérateur est involutif (c'est à vérifier  $\Pi^2 = \mathbb{1}$ ), et est à la fois unitaire et hermitique. Ses valeurs propres sont donc des nombres réels de module un, soit  $-1$  et  $1$ .

### III.2.4 d) Diagonalisation simultanée

Lorsque deux opérateurs ne commutent pas, il n'est pas possible trouver une base de vecteurs propres communs. En effet  $[A, B] \neq 0$  et que  $|u\rangle$  est tel que  $A|u\rangle = a|u\rangle$  et  $B|u\rangle = b|u\rangle$ , on a  $[A, B]|u\rangle = 0$ , ce qui est tout à fait possible pour un vecteur donné, mais si c'est le cas pour *tous* les vecteurs d'une base, on aboutit à la conclusion absurde que  $[A, B] = 0$ . Inversement, lorsque deux opérateurs commutent, ils peuvent être « simultanément diagonalisés », c'est-à-dire que l'on peut trouver une base de vecteurs propres communs, dans laquelle les deux opérateurs sont diagonaux. Cette propriété peut être démontrée simplement en dimension finie <sup>15</sup>, et nous admettrons que c'est aussi le cas en dimension infinie, même si les théorèmes mathématiques imposent des conditions spécifiques, de compacité ou de *vraie* diagonalisabilité.

Cette diagonalisation simultanée est indispensable chaque fois que l'on a des dégénérescences (c'est-à-dire des espaces propres de dimension supérieure à 1), car alors la donnée *d'une* valeur propre ne suffit pas à caractériser un état de façon univoque. Si les deux opérateurs  $A$  et  $B$  suffisent à préciser l'état, celui-ci pourra être noté de façon synthétique  $|a, b\rangle$  où  $a$  et  $b$  sont les valeurs propres respectivement associées à  $A$  et  $B$  pour ce vecteur.

COHEN-TANNOUDJI  
et al., § II.D.3a)  
ASLANGUL, § 13.5

### III.2.4 e) Notion d'ECOC

EN-TANNOUDJI  
, § II.D.3b)  
NGUL, § 12.1.3  
ELLAC, § 2.3.3

Si la donnée des valeurs propres de deux opérateurs ne suffit pas, on pourra ajouter autant d'observables supplémentaires que nécessaire, à condition que celles-ci commutent avec toutes les autres. Un ensemble minimal de tels opérateurs ( $A, B, \dots, Z$ ) permettant de caractériser de façon unique les états  $|a, b, \dots, z\rangle$  est appelé « Ensemble complet d'observables qui commutent » ou « ECOC » en abrégé.

**Exemples** Un exemple élémentaire est fourni par l'opérateur  $x^2$ . Ses sous-espaces propres sont de toute évidence de dimension 2, engendrés par  $|x\rangle$  et  $| - x\rangle$  pour chaque valeur propre  $\lambda = x^2$ . On peut alors introduire l'observable  $x$  lui-même, dont le signe permet de savoir si on a affaire à l'un ou à l'autre de ces deux états. On a bien sûr  $[x, x^2] = 0$ , et on écrira alors les états  $|x^2, \pm\rangle$  pour l'ECOC  $\{x^2, \text{sign}(x)\}$ .

Un autre choix possible est d'utiliser la parité  $\Pi$ , telle que  $[x^2, \Pi] = 0$ . On aura alors les deux états propres communs pair :  $(|x\rangle + | - x\rangle)/\sqrt{2}$  et impair :  $(|x\rangle - | - x\rangle)/\sqrt{2}$ . On peut écrire ces états  $|x^2, \pm 1\rangle$  pour l'ECOC  $\{x^2, \Pi\}$ . Notons qu'il ne suffit pas de donner les valeurs propres mais il faut préciser quel ECOC est utilisé.

## III.3 La mesure

### III.3.1 Les postulats

Lors de la mesure d'une grandeur  $A$ , sur un état  $|\psi\rangle$  normé donnés :

1. Les résultats possibles sont les valeurs propres (réelles) de  $A$ , et lors d'une mesure unique, il apparaît aléatoirement une seule des valeurs propres.
2. Chaque valeur propre  $a$  apparaît avec une probabilité<sup>16</sup>  $\mathcal{P}(a) = \langle\psi|P_a|\psi\rangle$ , où  $P_a$  le projecteur sur l'espace propre  $\mathcal{E}_a$  associé à la valeur  $a$ .
3. Après la mesure, l'état  $|\psi\rangle$  est projeté sur l'espace  $\mathcal{E}_a$  associé au résultat  $a$ , soit :

$$|\psi'\rangle \propto P_a |\psi\rangle$$

COHEN-TANNOUDJI  
et al., § III.B.3  
LE BELLAC, § 4.1.2  
ASLANGUL, § 13.1.3,  
13.14

Dans le cas où la valeur propre  $a$  est non dégénérée, le projecteur est simplement  $P_a = |a\rangle\langle a|$ , et en supposant  $|a\rangle$  normé, on a aussi  $\mathcal{P}(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2$  et  $|\psi'\rangle = |a\rangle$ .

Dans le cas contraire, si  $\{|a, i\rangle\}$  est une base (orthonormée) de l'espace  $\mathcal{E}_a$ , on a :

$$P_a = \sum_i |a, i\rangle\langle a, i|, \quad \mathcal{P}(a) = \sum_i |\langle a, i|\psi\rangle|^2 \quad \text{et} \quad |\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}(a)}} \sum_i \langle a, i|\psi\rangle |a, i\rangle.$$

Ces équations s'étendent assez naturellement au cas d'une base continue, si ce n'est bien sûr que l'on va obtenir un petit intervalle de valeurs propres, et la probabilité  $\mathcal{P}(a)$  est remplacée par une *densité* de probabilité :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a < x < a + da) &= p(a) da, \quad \text{où} \quad p(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2 \\ \text{et} \quad |\psi'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}(a < x < a + da)}} \int_a^{a+da} dx \langle x|\psi\rangle |x\rangle. \end{aligned}$$

On notera que ces notations sont cohérentes avec le fait que, compte tenu de la relation d'orthonormalisation généralisée, la dimension de  $|a\rangle$  est l'inverse de la racine de celle de  $a$ , et  $p(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2$  a donc bien de la dimension d'une densité en  $a$ . Bien sûr, dans un cas concret, l'instrument de mesure a une résolution finie, et on va donc obtenir un résultat dans un intervalle de largeur  $\delta a$ , et on devra sommer les probabilités associées aux intervalles infinitésimaux.

13. Un opérateur normal est un opérateur  $N$  tel que  $N^\dagger N = NN^\dagger$ .
14. La réciproque est vraie ; on en laisse la démonstration en exercice au lecteur.
15. Les sous-espaces propres de  $A$  sont stables par l'action de l'autre  $B$ . En vertu de la diagonalisabilité de  $A$ , on peut décomposer l'espace  $\mathcal{H}$  en somme directe orthogonale de ses sous-espaces propres :  $\mathcal{H} = \bigoplus_a \mathcal{E}_a$ . Il suffit alors de diagonaliser la restriction de  $B$  à chacun de ces sous-espaces.

### III.3.2 Contenu physique

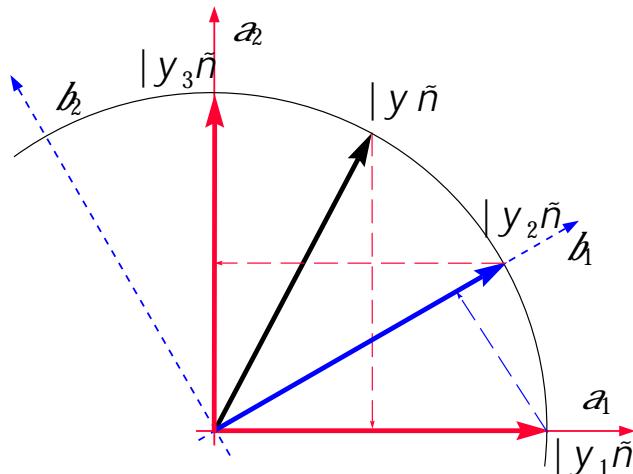
Ces postulats sont certainement ceux qui posent le plus question quant à l'interprétation de la physique quantique.

En raison du rôle important qu'elle joue, la quantité complexe  $\langle a|\psi \rangle$  est appelée « amplitude de probabilité » (par analogie à l'amplitude en optique, qu'il faut éléver au carré pour obtenir l'intensité).

Il est essentiel de bien voir ici que (i) le résultat d'une mesure n'est jamais certain (à moins qu'on ait déjà fait exactement la même un très court instant auparavant), ce qui heurte notre conception réaliste et déterministe, (ii) la mesure modifie l'état de l'objet mesuré, et cela d'une façon qui dépend du résultat obtenu pour la mesure !

Si une mesure a donné la valeur propre  $a$ , l'état quantique initial a été projeté en  $|\psi_1\rangle$  sur l'espace  $\mathcal{E}_a$ , et une mesure réitérée de la même observable donnera à nouveau le résultat  $a$ . Il est remarquable de si on a entre-temps mesuré une observable B incompatible, c'est-à-dire qui ne commute pas avec A. Ce n'est plus le cas. En effet cette mesure de B aura généralement projeté le ket en  $|\psi_2\rangle$  appartenant à un sev  $\mathcal{E}_b$  qui n'est ni parallèle ni orthogonal à  $\mathcal{E}_a$  et lors de la nouvelle mesure de A on pourra alors obtenir un autre résultat  $a'$ . Cette situation est illustrée en dimension 2 sur la figure III.1 où les états projetés sont représentés normalisés, comme l'indique leur appartenance au cercle unité.

Le caractère contre-intuitif de ces postulats, en ce sens qu'ils heurtent notre sens physique éduqué à la physique classique, est un point essentiel qui a fait longtemps débat, notamment à cause des oppositions d'Einstein ou de de Broglie. Le caractère aléatoire du résultat et le principe de projection du paquet d'onde ont donné lieu à bien des interprétations étranges comme la théorie des mondes multiples d'Everett, et à des théories tendant à les éliminer comme les théories à variables cachées<sup>17</sup>.



**Fig. III.1 – Illustration du postulat de projection du paquet d'onde, pour deux observables incompatibles A et B. Les axes propres de A sont en traits continus rouges, repérés par les valeurs propres  $a_1$  et  $a_2$ , tandis que ceux de B sont en tirets bleus et repérés par les valeurs propres  $b_1$  et  $b_2$ . L'état initial  $|\psi\rangle$  (en noir) est de direction arbitraire. Un première mesure de A donnant le résultats  $a_1$  projette le ket selon  $|\psi\rangle \mapsto |\psi_1\rangle$  (horizontal rouge). Un mesure de B donnant le résultats  $b_1$  projette l'état selon  $|\psi_1\rangle \mapsto |\psi_2\rangle$  sur l'axe correspondant (en bleu). Enfin une seconde mesure de A peut donner  $a_2$  et projette alors le ket selon  $|\psi_2\rangle \mapsto |\psi_3\rangle$  (vertical rouge).**

17. Bien sûr la théorie d'Everett est invérifiable, et les hypothèses de variables cachées ont été invalidées, notamment par les expériences d'Alain Aspect dans les années 1980.

### III.3.3 Exemples

**Spin 1/2** Plaçons nous dans l'espace  $\mathcal{H}_S$  et supposons que l'on mesure les composantes cartésiennes  $S_x$  et  $S_z$  du spin. On introduit les 3 matrices de Pauli, qui s'écrivent :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et on note  $\boldsymbol{\sigma}$  le vecteur dont les trois composantes sont  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . Nous admettrons que dans la base  $\{| \uparrow \rangle, | \downarrow \rangle\}$ , l'opérateur spin  $\mathbf{S}$  est représenté par  $\hbar \boldsymbol{\sigma}/2$ .

On vérifie sans peine que les valeurs propres des composantes de  $\mathbf{S}$  sont  $\pm \hbar/2$ , et que les projecteurs associés sont  $P_{\pm i} = (\mathbb{1} \pm \sigma_i)/2$  pour  $i \in (x, y, z)$ . Si l'état initial est de la forme  $|\psi\rangle = \alpha| \uparrow \rangle + \beta| \downarrow \rangle$ , les résultats de probabilités sont :

$$S_z : \begin{cases} \mathcal{P}(+z) = |\alpha|^2 & \rightarrow | \psi' \rangle = | \uparrow \rangle \\ \mathcal{P}(-z) = |\beta|^2 & \rightarrow | \psi' \rangle = | \downarrow \rangle \end{cases} \quad S_x : \begin{cases} \mathcal{P}(+x) = |\alpha + \beta|^2/2 & \rightarrow | \psi' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| \uparrow \rangle + | \downarrow \rangle) \\ \mathcal{P}(-x) = |\alpha - \beta|^2/2 & \rightarrow | \psi' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| \uparrow \rangle - | \downarrow \rangle) \end{cases}$$

Le point notable de ce résultat est que la mesure de  $S_z$  ne dépend que des modules des amplitudes  $\alpha$  et  $\beta$ , alors que celle de  $S_x$  implique de sommer des amplitudes avant de prendre le carré. De ce fait, le résultat dépend de la phase relative des amplitudes, ce qui est le mécanisme de base pour faire apparaître des interférences.

**Mesure de position** On se place dans  $\mathcal{H}_x$ , et on mesure  $x$  sur un paquet d'onde de largeur  $\Delta x$  et de fonction d'onde  $\varphi(x)$ . On suppose que l'appareil de mesure a une résolution  $\delta x$ , avec une fonction de réponse  $\eta(x)$  normée, c'est à dire que  $\int dx \eta(x) = \delta x$ . D'après ce qui précède, la densité  $p(x)$  est  $|\langle x | \varphi \rangle|^2 = |\varphi(x)|^2$ . En appliquant les formules précédentes, la probabilité de trouver  $x_0$  à  $\delta x$  près est :

$$\mathcal{P}(x_0 - \delta x/2 < x < x_0 + \delta x/2) = \int dx' f(x' - x_0) |\varphi(x')|^2.$$

Si  $\delta x$  est assez petit, c'est-à-dire  $\delta x \ll \Delta x$ , on peut négliger la variation de  $|\varphi(x)|^2$  sur l'étendue  $\delta x$ , d'où simplement<sup>18</sup> :

$$\mathcal{P}(x_0 - \delta x/2 < x < x_0 + \delta x/2) = \int |\varphi(x')|^2 \eta(x' - x_0) dx' \approx |\varphi(x_0)|^2 \underbrace{\int \eta(x' - x_0) dx'}_{\delta x} = |\varphi(x_0)|^2 \delta x,$$

qui est bien une quantité sans dimension, proportionnelle à l'ouverture  $\delta x$  du détecteur et à la densité de probabilité  $|\varphi(x_0)|^2$ .

**Mesure de la probabilité d'être dans un état** Il est fréquent que, suite à un processus aléatoire, on s'intéresse à la probabilité d'être dans un état ou un groupe d'états voisins. Cela ne semble pas être une mesure au sens usuel du terme. Toutefois, lors d'une « vraie » mesure, pour une valeur non-dégénérée, le postulat nous donne la probabilité de trouver  $a$ , qui peut être comprise comme celle d'être dans le « bon » état  $|a\rangle$ . Avec les règles générales, nous dirons que la probabilité d'être dans un groupe d'états  $\{|\varphi_i\rangle\}$  est celle de trouver la valeur propre 1 dans la mesure du projecteur<sup>19</sup>  $P = \sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ . Un

18. Dans le cas contraire il faut savoir si on a une incertitude  $\delta x$  classique, auquel cas on peut appliquer la formule précédente en sommant les probabilités des intervalles infinitésimaux, et on retrouve le résultat précédent, ou si on est en fait en train de mesurer non pas  $x$  mais une version « floutée » de celui-ci, qui pourrait s'écrire :

$$x = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x |\langle x | x \rangle| \rightarrow x_{\text{flou}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \eta(x' - x) x' |\langle x' | x' \rangle|,$$

auquel cas, la formule précédente n'est plus valable, car il va falloir sommer les amplitudes avant de prendre le module au carré, un peu comme on l'observe dans la mesure de  $S_x$  dans le cas du spin 1/2.

19. C'est bien un projecteur si la famille des états  $\{|\varphi_i\rangle\}$  a été choisie orthonormée.

COHEN-TANNOUDJI  
et al., § II.E.2b)

exemple important d'application est la notion de « fidélité » : dans une expérience fondée sur un protocole devant conduire à préparer un état « théorique » donné  $|\psi_0\rangle$ , la qualité de chaque réalisation expérimentale  $|\varphi_i\rangle$  est caractérisée par le nombre  $f = \mathcal{P}(|\psi_0\rangle) = |\langle\psi_0|\varphi_i\rangle|^2$ , ou sa valeur moyenne sur un grand nombre de réalisations.

### III.3.4 Moyenne et variance

Dans bien des cas, on s'intéresse davantage à la valeur moyenne des résultats de mesure, soit parce que l'on n'a expérimentalement accès qu'à celle-ci, soit parce que la mesure est réalisée un grand nombre de fois sur des systèmes identiques initialement préparés dans le même état.

En application directe du postulat, la valeur moyenne de  $A$  dans l'état  $|\psi\rangle$  s'écrit :

$$\langle A \rangle = \sum_a a \mathcal{P}(a) = \sum_a a \langle \psi | P_a | \psi \rangle = \left\langle \psi \left| \left( \sum_a a P_a \right) \right| \psi \right\rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle ,$$

où l'on a utilisé le caractère complet et orthogonal de la familles des  $\{P_a\}$ , c'est à dire le fait que  $P_a P_{a'} = 0$  si  $a \neq a'$  et  $\sum_a P_a = \mathbb{1}$ , c'est à dire en fait la diagonalisabilité de  $A$ . Comme la valeur moyenne dépend de  $|\psi\rangle$ , elle sera notée  $\langle A \rangle_\psi$  lorsqu'il peut y avoir une ambiguïté.

La valeur moyenne est évidemment réelle, puisque  $A$  est autoadjoint. On notera à cet égard que pour deux opérateurs autoadjoints ne commutant pas,  $\langle AB \rangle$  est le complexe conjugué de  $\langle BA \rangle$ , qui sont généralement complexes. En revanche la valeur moyenne de l'opérateur symétrisé  $(AB + BA)/2$  est bien réelle puisque cet opérateur est hermitique.

La valeur moyenne  $\langle A \rangle$  est en outre nécessairement comprise entre la plus faible valeur propre de  $A$  (si le spectre est borné inférieurement) et la plus élevée (si le spectre est borné supérieurement).

On peut alors utiliser les règles usuelles des probabilités pour calculer les moments centrés d'ordre plus élevé, et notamment la variance  $\text{var}(A)$  et l'écart-type  $\Delta A$  :

$$\text{var}(A) = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = (\Delta A)^2$$

En application du cas d'égalité du théorème de Cauchy-Schwarz,  $\text{var}(A)$  s'annule si et seulement si  $|\psi\rangle$  (non nul) est un vecteur propre de  $A$ , et la valeur propre est alors le nombre  $\langle A \rangle$ . On peut le voir de façon plus simple en notant que  $\text{var}(A) = \| (A - \langle A \rangle) |\psi\rangle \|^2 = 0$  implique que le ket  $(A - \langle A \rangle) |\psi\rangle$  soit nul, d'où le résultat.

*Exemple important :* La densité de probabilisé de présence  $\mathcal{P}(\mathbf{r}) = |\langle \mathbf{r} | \psi \rangle|^2$  est elle-même la valeur moyenne du projecteur  $|\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}|$ , où  $\mathbf{r}$  désigne un point d'observation particulier. De même, le courant de probabilité est aussi une valeur moyenne :

$$\mathcal{P}(\mathbf{r}) = \left\langle \psi \left| |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}| \right| \psi \right\rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(\mathbf{r}) = \langle \psi | \mathbf{J} | \psi \rangle \quad \text{où} \quad \mathbf{J} = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{p}}{m} |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}| + |\mathbf{r}\rangle\langle\mathbf{r}| \frac{\mathbf{p}}{m} \right) .$$

### III.3.5 Inégalités de Heisenberg

Au chapitre II nous avons introduit l'inégalité de Heisenberg comme résultant du caractère ondulatoire de la mécanique, et plus spécifiquement de la transformation de Fourier. Nous allons la reprendre ici dans un cadre algébrique plus général et établir rigoureusement la borne inférieure.

Considérons donc un état  $|\psi\rangle$  donné et deux opérateurs  $A$  et  $B$  ne commutant pas. On se convainc que,  $\langle A \rangle$  et  $\langle B \rangle$  étant des simples nombres réels,  $A' = A - \langle A \rangle$  et  $B' = B - \langle B \rangle$  sont deux opérateurs hermitiques, de moyenne nulle, tels que :

$$[A', B'] = [A, B] = iC \quad \text{où } C \text{ est hermitique, et} \quad \text{var}(A) = \langle A'^2 \rangle , \text{ var}(B) = \langle B'^2 \rangle$$

Évaluons alors, pour  $\lambda$  réel quelconque, la norme  $N(\lambda)$  définie par :

$$N^2(\lambda) = \|(\mathbf{A}' - i\lambda\mathbf{B}')\|^2 = \langle\psi|(\mathbf{A} + i\lambda\mathbf{B})(\mathbf{A}' - i\lambda\mathbf{B}')|\psi\rangle = \langle\mathbf{A}'^2\rangle \underbrace{-i\lambda\langle[\mathbf{A}', \mathbf{B}']\rangle}_{\lambda\langle\mathbf{C}\rangle} + \lambda^2\langle\mathbf{B}'^2\rangle$$

Cette norme étant réelle et positive, on en déduit que son discriminant est négatif, soit :

$$\langle\mathbf{C}\rangle^2 - 4\langle\mathbf{A}'^2\rangle\langle\mathbf{B}'^2\rangle \leqslant 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\Delta\mathbf{A}.\Delta\mathbf{B} \geqslant \frac{|\mathbf{[A, B]}|}{2}}.$$

Pour  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{p}$ , tels que  $[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = i\hbar\mathbb{1}$ , on obtient bien l'inégalité donnée au chapitre II.

**Cas d'égalité** Un cas intéressant est celui où l'inégalité est une égalité (« saturation » de l'inégalité). Un vecteur  $|\psi\rangle$  qui réalise ce minimum est appelé « état minimal » ou « état cohérent ». Cela correspond clairement au cas où le discriminant est nul, ce qui signifie qu'il existe un nombre réel  $\lambda_0$  pour lequel la norme  $N(\lambda)$  s'annule. Le vecteur  $|\psi\rangle$  doit donc satisfaire l'égalité :

$$\left((\mathbf{A} - \langle\mathbf{A}\rangle) - i\lambda_0(\mathbf{B} - \langle\mathbf{B}\rangle)\right)|\psi\rangle = 0.$$

Dans le cas de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{p}$ , en notant  $x_0 = \langle\mathbf{x}\rangle$ ,  $p_0 = \langle\mathbf{p}\rangle$ , cette équation s'écrit et en termes de fonction d'onde :

$$(x - x_0)\psi(x) - i\lambda_0\left(-\frac{\hbar}{i}\psi'(x) - p_0\psi(x)\right) = 0 \iff \frac{\psi'}{\psi} = -\frac{(x - x_0)}{\hbar\lambda_0} + i\frac{p_0}{\hbar}.$$

En supposant <sup>20</sup>  $\lambda_0 > 0$ , et en posant  $w = \sqrt{\hbar\lambda_0}$ , cette équation différentielle (linéaire du premier ordre à variables séparées) s'intègre en :

$$\psi(x) = A \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2w^2}\right) e^{ip_0x/\hbar}.$$

L'état cohérent est donc exactement le paquet d'onde gaussien que nous avons postulé au § II.4.4. Il vérifie  $\Delta\mathbf{x} = w/\sqrt{2}$  et  $\Delta\mathbf{p} = \sqrt{\hbar/2\lambda_0}$  et on a donc bien  $\Delta\mathbf{x} \times \Delta\mathbf{p} = \hbar/2$ .

### III.3.6 États intriqués et projection du paquet d'ondes

Le postulat relatif à la projection du paquet d'onde a des conséquences bien plus importantes que celles liées aux observables incompatibles relevées au §III.3.1. Si l'on considère un système de spin 1/2 préparés dans l'état non séparable (état de Bell) :

$$|\Phi\rangle = \frac{|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

Même si les deux spins sont très éloignés l'un de l'autre, et que deux opérateurs distants peuvent chacun mesurer le spin dont il dispose on a la prédiction intrigante : quelque soit le résultat obtenu par le premier opérateur, le second opérateur, même très distant devra obtenir le même résultat, car la première mesure projette l'état en  $|\uparrow\uparrow\rangle$  ou (exclusif) en  $|\downarrow\downarrow\rangle$ . Ce qui signifie que la projection du paquet d'onde pour le premier spin affecte de façon instantanée le second : la physique quantique et non-locale !

Des états intriqués de ce type sont à la base de la reformulation faite en 1951 par David BOHM du fameux paradoxe EPR ( Einstein, Podolsky, Rosen, 1935). C'est sur cette base que John BELL, en 1964, établit les inégalités éponymes permettant, selon qu'elles sont vérifiées ou violées, une vérification expérimentale de cette prédiction.

20. Dans le cas contraire, on obtient un paquet d'onde non normalisable.

## III.4 Évolution temporelle

### III.4.1 Hamiltonien

Le dernier postulat est celui qui décrit l'évolution temporelle. Nous allons en donner les deux formulations et montrer leur équivalence. On doit dans les deux cas utiliser le hamiltonien  $H$  du système. Lorsque ce dernier possède un équivalent classique (particule dans puits, moment magnétique dans un champ, etc.) on peut l'obtenir à partir du hamiltonien classique par la procédure de quantification canonique décrite au § III.2.4 a). Quand  $H$  est indépendant du temps, il représente l'énergie du système, mais ce n'est pas toujours le cas.

Ainsi pour un système mécanique, on obtiendra généralement un « hamiltonien standard », qui est la somme d'une forme quadratique positive en  $\mathbf{p}$  (énergie cinétique) et d'une fonction de  $\mathbf{r}$  (énergie potentielle) :

$$H(\mathbf{r}) = \sum_{ij} a_{ij} \mathbf{p}_i \mathbf{p}_j + V(\mathbf{r}) ,$$

où  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{r}$  peuvent être relatifs à plusieurs particules, et les coefficients  $a_{ij}$  sont liés aux masses des composantes du système.

Pour une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  dans un champ électromagnétique imposé de l'extérieur, décrit par les potentiels  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , on a :

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2m} + q\Phi(\mathbf{r}, t) .$$

Pour un spin, on aura souvent un couplage linéaire<sup>21</sup> de la forme  $\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}$ , mais on rencontre aussi des couplages d'ordre plus élevé, ou des hamiltoniens de la forme  $f(\mathbf{r}) \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  qui intervient dans la description du couplage spin-orbite dans un atome.

### III.4.2 Équation de Schrödinger

Dans le point de vue dit « de Schrödinger », le principe d'évolution est le suivant :

Les kets évoluent selon l'équation :  $i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$

et les opérateurs n'évoluent que s'ils dépendent explicitement du temps

Dans le cas le plus simple d'une particule dans un potentiel, on a ainsi :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}, t) \right) |\psi\rangle(t)$$

soit en termes de fonction d'onde :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \underbrace{\left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)}_{\Delta \psi} + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t) . \quad (\text{III.9})$$

Une propriété essentielle, qui est intimement liée à l'existence des états formés par combinaison linéaire, est la *linéarité*  $|\psi\rangle$  de l'équation de Schrödinger : si l'évolution de l'état initial  $|\varphi_1\rangle$  est donnée par  $|\psi_1\rangle(t)$  et de même pour  $|\varphi_2\rangle$  et  $|\psi_2\rangle(t)$ , alors l'évolution d'une combinaison linéaire de la forme  $|\Phi\rangle = \alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle$  à l'instant initial est donnée par  $|\Psi(t)\rangle = \alpha|\psi_1\rangle(t) + \beta|\psi_2\rangle(t)$ .

Lorsque le hamiltonien est constant (indépendant du temps), on peut simplifier cette équation en séparant la variable temps des variables d'espace. Comme nous l'avons vu au

21. C'est la seule forme possible pour un spin 1/2, car toute matrice  $2 \times 2$  hermitienne s'exprime comme une combinaison linéaire à coefficients réels des matrices Pauli et de l'identité.

chapitre II (§ II.2.4) on est conduit à rechercher les états « stationnaires » définis comme les états propres de l'observable  $H$ , vérifiant l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (\text{III.10})$$

où la valeur propre est l'énergie  $E$  de l'état considéré. L'évolution temporelle des ces états est alors de la forme simple  $|\psi\rangle(t) = e^{-iEt/\hbar} |\psi\rangle(0)$ , ce qui assure la caractère constant de  $|\langle r|\psi\rangle|^2$  ainsi que de nombreuses autres quantités comme nous le verrons plus loin. La détermination des états stationnaires, qui forment une base orthonormée  $\{|\varphi_j\rangle\}$ , fournit une solution formelle de l'équation de Schrödinger pour n'importe quel état initial  $|\psi\rangle$ , en utilisant la linéarité soulignée précédemment<sup>22</sup> :

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |\varphi_j\rangle \Rightarrow |\psi\rangle = \sum_j c_j e^{-iE_j t/\hbar} |\varphi_j\rangle. \quad (\text{III.11})$$

La détermination des états stationnaires est donc en principe suffisante pour connaître la dynamique de tout état, si du moins on est en mesure d'extraire la signification physique de la sommation au second membre de (III.11).

Toutefois, l'EDP indépendante du temps à laquelle se réduit l'équation aux valeurs propres (III.10) dans le cas du hamiltonien standard (III.9) est – sauf circonstances exceptionnelles – impossible à résoudre exactement de façon analytique. Grâce à la linéarité et à la forme relativement simple du laplacien, il est en revanche relativement aisément de le faire de façon numérique. Nous étudierons cependant quelques cas particuliers, importants pour leur contenu physique, où la résolution peut être faite exactement, notamment grâce à la simplification obtenue par la méthode de « séparation des variables », lorsqu'elle est possible.

Pour séparer les variables d'espace, on pourra utiliser les coordonnées cartésiennes si le potentiel est la somme deux (ou trois) potentiels dépendant chacun d'un jeu réduit de variables. C'est notamment le cas dans les « trous quantiques » de semi-conducteurs, où le potentiel ne confine les particules que dans une direction de l'espace (disons  $z$ )<sup>23</sup>. Le mouvement est alors décrit par le produit tensoriel d'un mouvement libre dans les directions  $x$  et  $y$  et d'un trou de potentiel 1D dans la direction  $z$ . De façon plus générale, on peut choisir l'un des 12 systèmes de coordonnées curvilignes pour lequel le laplacien peut être séparé, à condition que la symétrie du potentiel s'y prête aussi. C'est notamment le cas pour le mouvement d'une particule dans un potentiel central, où les coordonnées sphériques sont les plus adaptées, comme nous montrerons dans paragraphe ultérieur consacré à ce problème.

### III.4.3 Équation de Heisenberg

Dans le point de vue dit « de Heisenberg » le rôle des kets et des opérateurs est inversé :

Les opérateurs évoluent selon l'équation : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A, H] + \frac{\partial A}{\partial t}$
--

Les kets n'évoluent pas

Nous admettrons ici, et montrerons un peu plus loin (§ III.4.5) que cette forme du postulat d'évolution est strictement équivalente à celle fondée sur l'équation de Schrödinger.

Un intérêt évident de cette équation est qu'elle est le pendant exact de l'équation d'évolution des variables classiques en utilisant la correspondance  $\{ , \} \rightarrow [ , ]/i\hbar$  précédemment introduite. Elle permet souvent d'accéder à l'évolution des grandeurs physiques

22. Comme les autres, cette équation de généralise de façon évidente à un spectre continu ou mixte

23. Mais on sait aussi produire des situations de confinement à 2 dimensions (fils quantiques) ou à 3 dimensions, boîtes quantiques ou *quantum dots*.

de façon plus générale que si l'on fixe un état en particulier. Elle donne aussi une signification au calcul des différents commutateurs sur lesquels nous avons insisté au paragraphe précédent.

**États stationnaires** Les états stationnaires sont définis, comme précédemment, comme les états propres de l'opérateur  $\mathbf{H}$ . L'équation de Heisenberg nous indique qu'ils n'ont pas seulement une densité de probabilité  $\mathcal{P}(\mathbf{r})$  constante, mais que les valeurs moyennes de *tous* les opérateurs — sans dépendance explicite par rapport au temps — sont constantes. En effet si nous évaluons la valeur moyenne de l'équation de Heisenberg dans un état stationnaire  $|\varphi\rangle$  d'énergie  $E$ , en faisant  $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$ , on a :

$$\frac{d}{dt}\langle\varphi|\mathbf{A}|\varphi\rangle = \langle\varphi|\frac{d\mathbf{A}}{dt}|\varphi\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\varphi|\mathbf{A}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{A}|\varphi\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\varphi|\mathbf{A}E - E\mathbf{A}|\varphi\rangle = 0$$

Notons bien que nous avons ici utilisé l'herméticité de  $\mathbf{H}$  pour écrire  $\langle\varphi|\mathbf{H} = \langle\varphi|E$  et non  $\langle\varphi|\mathbf{H}^+ = \langle\varphi|E$  comme le vérifie un opérateur quelconque ; en revanche, l'éventuelle herméticité de  $\mathbf{A}$  ne joue aucun rôle.

On peut reprendre la même approche pour calculer l'évolution temporelle d'un élément de matrice non-diagonal de  $\mathbf{A}$  (avec toujours  $\partial\mathbf{A}/\partial t = 0$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\varphi_j|\mathbf{A}|\varphi_k\rangle &= \langle\varphi_j|\frac{d\mathbf{A}}{dt}|\varphi_k\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\varphi_j|\mathbf{A}\mathbf{H} - \mathbf{H}\mathbf{A}|\varphi_k\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\langle\varphi_j|\mathbf{A}E_k - E_j\mathbf{A}|\varphi_k\rangle = i\omega_{jk}\langle\varphi_j|\mathbf{A}|\varphi_k\rangle, \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

où  $\omega_{jk} = (E_j - E_k)/\hbar$  est la fréquence de Bohr entre les niveaux  $|\varphi_j\rangle$  et  $|\varphi_k\rangle$ , ce qui montre que  $\langle\varphi_j|\mathbf{A}|\varphi_k\rangle(t) = e^{i\omega_{jk}t}\langle\varphi_j|\mathbf{A}|\varphi_k\rangle(0)$ . Cette évolution temporelle est exactement celle que Heisenberg avait pressenti dès 1925 et formulée avec Pauli et Born sous le nom de « mécanique des matrices ». Cette formulation de la mécanique quantique est donc la solution de l'équation de Heisenberg dans la base particulière des états propres de  $\mathbf{H}$ <sup>24</sup>.

**Constantes du mouvement** Le commutateur présent dans l'équation de Heisenberg prévoit (pour des opérateurs indépendants du temps)  $\langle\mathbf{A}\rangle(t) = \text{Cste}$  pour deux types d'états : (i) les vecteurs propres de  $\mathbf{H}$  (états stationnaires) et (ii) états propres de  $\mathbf{A}$  (états ayant une valeur de  $\mathbf{A}$  bien définie, avec  $\Delta\mathbf{A} = 0$ ).

Pour un état quelconque  $|\psi\rangle$  hors de ces cas particuliers, la valeur moyenne de l'opérateur  $\langle\mathbf{A}\rangle(t)$  ne sera généralement pas constante, car  $|\psi\rangle$  peut avoir une amplitude non nulle sur des états stationnaires d'énergie différente, et la valeur moyenne implique alors des termes oscillants.

Il existe toutefois une exception notable : les observables  $\mathbf{A}$  qui commutent avec le hamiltonien  $\mathbf{H}$ . Si ces opérateurs ne dépendent pas explicitement du temps, ils sont strictement constants. Ces opérateurs qui n'évoluent au cours du temps sont appelés, comme en mécanique classique, « constantes du mouvement » ou « intégrales premières ». Dans le point de vue du paragraphe précédent, et en utilisant l'idée de la diagonalisation simultanée de  $\mathbf{H}$  et de la constante du mouvement  $\mathbf{A}$ , on constate que les termes qui oscillent à la fréquence de Bohr (cf. (III.12) ci-dessus) sont en fait identiquement nuls, car  $\mathbf{A}$  ne peu pas coupler pas des états d'énergies différentes.

En conséquence, la recherche d'un ECOC utile comportera généralement le hamiltonien, assorti d'un nombre suffisant de constantes du mouvement « compatibles » (c'est à dire commutant entre elles) et indépendantes. Pour une particule à 3D dépourvue de spin, le nombre de constantes additionnelles nécessaires est exactement 2.

24. Dans le point de vue de Schrödinger, on aurait  $|\varphi_k(t)\rangle = e^{-iE_k t/\hbar}|\varphi_k(0)\rangle$  et  $\langle\varphi_j(t)| = e^{iE_j t/\hbar}\langle\varphi_j(0)|$ , dont on déduit :

$$\langle\varphi_j(t)|\mathbf{A}|\varphi_k(t)\rangle = e^{iE_j t/\hbar}\langle\varphi_j(0)|\mathbf{A}|\varphi_k(0)\rangle e^{-iE_k t/\hbar} = e^{i\omega_{jk}t}\langle\varphi_j(0)|\mathbf{A}|\varphi_k(0)\rangle$$

qui donne exactement le même résultat.

### III.4.4 L'opérateur d'évolution

Nous revenons ici au point de vue de Schrödinger. La linéarité de l'équation de Schrödinger et le fait que l'évolution d'un état  $|\psi\rangle$  quelconque soit donnée par la transformation explicitée à l'équation (III.11) signifie que le passage de  $|\psi(0)\rangle$  à  $|\psi(t)\rangle$  est une application linéaire, ce qui permet d'écrire :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \quad \text{où } U(t, t_0) \text{ est l'opérateur d'évolution de } t_0 \text{ à } t. \quad (\text{III.13})$$

On remarquera la notation inusuelle avec l'instant final  $t$  à gauche et initial  $t_0$  à droite, qui permet de chaîner les opérateurs de façon naturelle sous la forme :

$$U(t, t_0) = U(t, t_1)U(t_1, t_0) \quad \text{pour } t \geq t_1 \geq t_0.$$

On peut se convaincre de diverses façons de ce que l'opérateur d'évolution  $U$  doit être *unitaire*. L'argument le plus simple et le plus fondamental porte sur la conservation de la probabilité, qui suppose que le produit hermitien soit conservé<sup>25</sup>.

On peut aussi l'établir mathématiquement en considérant l'équation d'évolution de  $U(t, t_0)$ , obtenue en reportant la définition (III.13) dans l'équation de Schrödinger (dérivation par rapport à l'instant final  $t$ ) :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = H U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

et comme l'égalité vectorielle doit être vérifiée quel que soit le ket initial  $|\psi(t_0)\rangle$ , on a l'identité entre opérateurs :

$$i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0). \quad (\text{III.14})$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire pour l'opérateur  $U$ . Si  $U(t)$  était un nombre complexe et  $H$  une constante réelle, on sait bien que la solution de  $i\hbar dU/dt = HU$  serait  $U(t) = U(t_0) \exp(-iH(t-t_0)/\hbar)$ , ou plus généralement  $U(t) = U(t_0) \exp\left(-i \int_{t_0}^t H(t') dt'/\hbar\right)$  si  $H$  dépend du temps.

Selon les circonstances, la généralisation aux opérateurs de ce résultat peut être vraie ou fausse :

- ♦ Si  $H$  est constant, en utilisant  $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ , on a effectivement :

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)\right) \quad \text{pour } H \text{ constant.}$$

Cela peut se vérifier en dérivant explicitement cette expression par rapport à  $t$ .

- ♦ Lorsque  $H$  dépend du temps, l'égalité :

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt'\right). \quad (\text{III.15})$$

ne sera vérifiée que si  $H(t')$  commute avec  $H(t)$  pour chaque couple  $(t, t')$ . C'est visiblement une condition suffisante, car on peut alors de placer dans la base commune de tous les  $H(t)$  et on obtient pour chaque coefficient diagonal une équation

25. Les autres arguments sont fondés soit sur les développements du § III.2.4 c) relatifs aux opérateurs unitaires (conservation du spectre et du caractère autoadjoint des opérateurs), soit sur la « micro-réversibilité de la mécanique quantique », c'est à dire le fait que l'évolution prédicta par l'équation de Schrödinger est invariante par renversement du temps ((en changeant  $i$  en  $-i$ ), c'est à dire en prenant le conjugué : on peut alors en déduire que  $U(t_0, t)$  qui est visiblement l'inverse de  $U(t, t_0)$ , est aussi obtenu par conjugaison hermitique de ce dernier.

différentielle linéaire scalaire avec un taux variable  $-iE_j(t)/\hbar$  dont la solution ligne par ligne donne bien l'expression (III.15) ci-dessus.<sup>26</sup>

En conclusion, l'ensemble des solutions du problème de l'évolution temporelle pour un hamiltonien donné est en principe contenu dans l'opérateur d'évolution correspondant. Toutefois la détermination exacte de celui-ci n'est possible que dans une classe relativement restreinte de problèmes, ceux où les vecteurs propres de  $\mathbf{H}$  ne dépendent pas du temps.

### III.4.5 Équivalence entre les points de vue de Schrödinger et de Heisenberg

*En première lecture, on pourra passer cette section, assez technique, en admettant le résultat, qui a d'ailleurs été montré indirectement au § III.4.3 en ce qui concerne les éléments de matrice, et sera vérifié, en ce qui concerne l'évolution des valeurs moyennes, au § III.4.6 ci-dessous, consacré au théorème de Ehrenfest.*

Nous avons indiqué sans justification que ces deux approches étaient équivalentes. Nous allons montrer ici qu'elles ne diffèrent en effet que par une transformation unitaire, en l'occurrence celle qui est décrite par l'opérateur d'évolution. Le point subtil dans cette étude est l'effet produit par une transformation unitaire dépendant du temps, qui induit une modification non-triviale des équations d'évolution. L'étude générale de ce problème est renvoyée en appendice (cf. G<sub>III</sub>) mais nous allons l'écrire ici dans le cas particulier qui nous intéresse.

Partant du point de vue de Schrödinger, impliquant un hamiltonien  $\mathbf{H}$ , nous transformons les états quantiques par l'application de l'adjoint de l'opérateur d'évolution :

$$|\psi(t)\rangle \rightarrow |\tilde{\psi}(t)\rangle = U(t, t_0)^\dagger |\psi(t)\rangle = U(t, t_0)^\dagger U(t, t_0) |\psi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle ,$$

ce qui a bien pour effet de rendre les kets indépendants du temps. Ce résultat est naturel, puisque  $U(t, t_0)^\dagger$  « efface » en quelque sorte l'évolution due à  $\mathbf{H}$ .

Pour que les prédictions physiques soient inchangées dans la transformation unitaire, il faut aussi transformer les observables. Cette transformation sera réalisée par la correspondance :

$$A \rightarrow \tilde{A}(t) = U(t, t_0)^\dagger A U(t, t_0) ,$$

qui conserve les valeurs moyennes car :

$$\langle \tilde{\psi} | \tilde{A}(t) | \tilde{\psi} \rangle = \langle \psi(t) | U(t, t_0) (U(t, t_0)^\dagger A U(t, t_0)) U(t, t_0)^\dagger | \psi(t) \rangle = \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle .$$

Pour l'étude des équations d'évolution, nous utiliserons notamment l'égalité :

$$i\hbar \frac{d}{dt} U^\dagger(t, t_0) = -U(t, t_0)^\dagger H ,$$

qui découle de (III.14) par simple conjugaison hermitique.

---

26. Pour montrer que cette condition de commutation est bien indispensable, on peut recourir à la solution formelle de (III.14) :

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') U(t') = \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') U(t') - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' H(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' H(t'') U(t'')$$

où la seconde égalité est obtenue en reportant la première dans elle-même (cette méthode récursive porte le nom de « développement de Dyson »). Dans le troisième terme, on voit que l'ordre compte puisque l'on a le produit  $H(t')H(t'')$  avec  $t_0 \leq t'' \leq t' \leq t$ , alors que l'exponentielle, à l'ordre 2 ferait apparaître :

$$\mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') - \frac{1}{2\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' H(t') \times \int_{t_0}^t dt'' H(t'')$$

sans condition d'ordre entre  $t'$  et  $t''$  (à l'ordre 2, il est cohérent de remplacer  $U(t'')$  par sa valeur initiale  $\mathbb{1}$ ).

En ce qui concerne l'évolution des kets transformés, on vérifie que comme attendu :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}(t)\rangle &= \left( i\hbar \frac{d}{dt} \mathbf{U}(t, t_0)^\dagger \right) |\psi(t)\rangle + \mathbf{U}(t, t_0)^\dagger \left( i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right) \\ &= -\mathbf{U}(t, t_0)^\dagger \mathbf{H} |\psi(t)\rangle + \mathbf{U}(t, t_0)^\dagger \mathbf{H} |\psi(t)\rangle = 0 . \end{aligned}$$

Pour les observables, on obtient :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{A}}(t) &= i\hbar \frac{d\mathbf{U}(t, t_0)^\dagger}{dt} \mathbf{A} \mathbf{U}(t, t_0) + i\hbar \mathbf{U}(t, t_0)^\dagger \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathbf{U}(t, t_0) + i\hbar \mathbf{U}(t, t_0)^\dagger \mathbf{A} \frac{d\mathbf{U}(t, t_0)}{dt} \quad (\text{III.16}) \\ &= \mathbf{U}(t, t_0)^\dagger \mathbf{H} \mathbf{U}(t, t_0) + i\hbar \mathbf{U}(t, t_0)^\dagger \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathbf{U}(t, t_0) - \mathbf{U}(t, t_0)^\dagger \mathbf{A} \mathbf{H} \mathbf{U}(t, t_0) \\ &= [\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{H}}] + i\hbar \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} , \end{aligned}$$

qui n'est autre que l'équation de Heisenberg pour les observables transformées (c'est-à-dire écrrites dans le point de vue de Heisenberg).

### III.4.6 Théorème de Ehrenfest

Un point clé de l'étude du mouvement quantique est l'équation d'évolution des valeurs moyennes. En prenant la valeur moyenne dans un état quantique quelconque décrit un ket  $|\psi\rangle$ , constant dans le point de vie de Heisenberg, nous obtenons directement les équations d'évolution dites de Ehrenfest :

$$\frac{d\langle \mathbf{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\mathbf{A}, \mathbf{H}] \rangle + \frac{\partial \langle \mathbf{A} \rangle}{\partial t} .$$

Bien sûr, le point de vie de Schrödinger conduit à la même équation, en appliquant les mêmes idées que celles conduisant à l'équation (III.16) ci-dessus<sup>27</sup>.

Si nous l'appliquons au cas du hamiltonien standard  $\mathbf{H} = \mathbf{p}^2/2m + V(\mathbf{r})$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d\langle \mathbf{r} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \mathbf{r}, \frac{\mathbf{p}}{2m} \right] = \frac{\langle \mathbf{p} \rangle}{m} , \\ \frac{d\langle \mathbf{p} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \mathbf{p}, V(\mathbf{r}) \right] = -\langle \nabla V(\mathbf{r}) \rangle . \end{cases}$$

Il est remarquable que ces équations soient très similaires aux équations du mouvement classique, et suggèrent que le centre du paquet d'onde  $\langle \mathbf{r} \rangle$  se déplacerait comme la particule classique. Mais ce n'est en fait le cas que si l'on peut identifier la force moyenne  $-\langle \nabla V(\mathbf{r}) \rangle$  à la force évaluée à la position moyenne, soit  $-\nabla V(\langle \mathbf{r} \rangle)$ .

Cette condition exigeante est réalisée dans deux situations :

- ◆ Un égalité stricte entre  $-\langle \nabla V(\mathbf{r}) \rangle$  et  $-\nabla V(\langle \mathbf{r} \rangle)$  est réalisée si la force est une fonction *linéaire* de la position, ce qui suppose un hamiltonien au plus quadratique en  $\mathbf{r}$ . Cette situation peut représenter un oscillateur harmonique, une particule dans un champ de gravitation uniforme, une particule chargée dans un champ magnétique uniforme, un moment magnétique couplé à un champ magnétique, etc...
- ◆ Un égalité approchée est aussi réalisée si  $V(\mathbf{r})$  et  $\nabla V(\mathbf{r})$  varient lentement à l'échelle caractéristique de la variation de la fonction d'onde, c'est à dire de l'extension de la fonction d'onde ou de la longueur d'onde de de Broglie. Cette situation est celle de la limite semi-classique de la mécanique quantique.

27. Dans le point de vue de Schrödinger, on a :

$$\frac{d\langle \mathbf{A} \rangle}{dt} = \underbrace{\left( \frac{d}{dt} \langle \psi | \right)}_{-1/i\hbar \langle \psi | \mathbf{H}} \mathbf{A} |\psi\rangle + \langle \psi | \mathbf{A} \underbrace{\left( \frac{d}{dt} |\psi\rangle \right)}_{1/i\hbar \mathbf{H} |\psi\rangle} + \langle \psi | \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} |\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle \psi | [\mathbf{A}, \mathbf{H}] |\psi\rangle + \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi | \mathbf{A} |\psi\rangle .$$

## III.5 Particules identiques

### III.5.1 Position du problème

En physique microscopique il arrive fréquemment que l'on ait affaire à un ensemble de particules identiques en tout point indiscernables (électrons, nucléons, atomes, etc.)<sup>28</sup>. Dans pareil cas, le hamiltonien  $H$  ne peut en aucun cas dépendre de façon différente des variables de position, impulsion ou spin d'une particule à l'autre. Il s'ensuit que le hamiltonien doit impérativement être invariant par les opérations de transposition de deux particules. Et par conséquent qu'il commute avec tout le groupe symétrique  $S(N)$  de permutations des  $N$  particules composant le système. Il doit être possible de diagonaliser simultanément  $H$  et chacune de ces transpositions (prises individuellement car en général elles ne commutent pas deux à deux). Comme une transposition est, de même que la parité, hermitique et involutive, ses valeurs propres sont  $\pm 1$ .

Pour fixer les idées, considérons un système de trois particules en interaction dont le hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2}{2m} + V(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|) + V(\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3\|) + V(\|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1\|)$$

Il est facile de voir que  $H$  est invariant par les 3 transpositions  $T_{ij}$  de deux indices, par les deux permutations circulaires  $\mathcal{P}_+ = (1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 1)$  et  $\mathcal{P}_- = (1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2)$  ainsi bien sûr qu'avec l'identité, soit les  $3! = 6$  permutations de  $S(3)$ .

Si on considère maintenant l'évolution d'un état qui est un vecteur propre de l'une quelconque de ces permutations, on voit que la valeur propre correspondante va se conserver. Soit par exemple un état qui est impair pour  $T_{12}$  va le rester au cours de l'évolution unitaire. Et s'il est par ailleurs pair par  $T_{23}$ , il va aussi conserver cette propriété, bien que  $T_{12}$  et  $T_{13}$  ne commutent pas<sup>29</sup>. Cet état sera donc impair aussi pour  $\mathcal{P}_+$  et pour  $\mathcal{P}_-$  et le restera au cours du temps.

### III.5.2 Postulat de symétrisation

C'est ici que s'introduit un nouveau postulat, venant infléchir ce que nous avions dit au § III.1.3, qui fait qu'un état tel que celui évoqué plus haut *n'existe pas* :

Lorsqu'un système est constitué de  $N$  systèmes indiscernables, l'espace de Hilbert des états physiques n'est pas  $\mathcal{E} = \bigotimes_{j=1}^N \mathcal{H}_j$ , mais est réduit à l'un des deux sous-espaces vectoriels formés des états :

- totalement symétriques, c'est à dire invariants par toutes les permutations de  $S(N)$
- totalement antisymétriques, c'est à dire impairs pour toutes les transpositions.

Dans le premier cas, les particules sont appelées des « bosons », car ils suivent la statistique de Bose-Einstein, et dans le second cas, elles sont appelées « fermions » car suivent la statistique de Fermi.

S'y ajoute une règle qui peut être démontrée dans la cadre que la théorie quantique relativiste (théorème spin-statistique, mais que nous prendrons comme un nouveau postulat) :

Les particules de spin entier sont des bosons, celles de spin demi-entier des fermions.

Ces deux nouveaux postulats appellent de nombreux commentaires :

- ◆ Ce postulat de résulte aucunement des considération du précédent paragraphe, lequel montre simplement que ce nouveau postulat est *compatible* avec l'équation de Schrödinger, si et seulement si le hamiltonien commute avec toutes les permutations, ce qui est une *exigence* évidente de l'indiscernabilité.

28. L'indiscernabilité suppose pour des photons qu'ils partagent la même fréquence, le même mode spatial, la même polarisation. Pour des particules matérielles, il ne faut pas qu'elles aient des sites de localisation spatiale assignés, car alors on pourrait les distinguer...

29. On vérifie de façon immédiate que  $\mathcal{T}_{23}\mathcal{T}_{12} = \mathcal{P}_+$  et  $\mathcal{T}_{12}\mathcal{T}_{23} = \mathcal{P}_-$ .

- ◆ Un état antisymétrique est impair pour toute transposition, et est donc pair pour les permutations paires, c'est à dire obtenues par le produit d'un nombre pair de transpositions.
- ◆ Toutes les particules matérielles « élémentaires » (leptons et quarks) ont un spin 1/2 et sont donc des fermions.
- ◆ Un assemblage stable de  $p$  bosons est toujours un boson, car son spin, somme de  $p$  spins entiers, est lui-même entier. *A contrario* un assemblage de  $p$  fermions est un fermion si  $p$  est impair et un boson si  $p$  est pair. Notons que cette règle montre que l'on ne peut pas échanger les rôles dans le théorème spin-statistique sans tomber sur une contradiction. Il en résulte une flopée de résultats d'une grande d'importance physique :
  - Les nucléons formé de 3 quarks sont des fermions, les mésons formé de 2 quarks sont des bosons
  - les atomes comptent  $Z$  protons,  $A-Z$  neutrons et  $Z$  électrons, soit  $A-Z+2Z$  particules de spin 1/2. Ce sont donc des bosons si leur nombre de neutrons  $A-Z$  est pair et des fermions s'il est impair. C'est notamment ce qui explique les propriétés fondamentalement différentes de l'hélium 4 qui est bosonique et de l'hélium 3 qui est fermionique.
  - Les lacunes d'électrons dans les semi-conducteurs, appelé « trous » ont le même spin 1/2 que l'électron manquant. Ils forment dans bien des cas des paires électrons-trous liés par l'interaction coulombienne, appelés « excitons » qui sont des bosons. Dans des cavités optiques, les excitons peuvent à leur tour former des états mixtes les associant avec des photons. Les quasi-particules ainsi formées, appelées « polaritons de cavités » sont des bosons car le photon, de spin 1, est aussi un boson.
  - Dans les supraconducteurs, l'interaction avec le réseau cristallin permet, à température suffisamment basse, de former des états liés de deux électrons, appelés « paires de Cooper ». Étant des bosons, ces paires peuvent subir une forme de condensation, laquelle donne lieu à la superfluidité du gaz d'électrons.
- ◆ Le principe d'exclusion de Pauli et les règles de Hund, qui sont à la base de la chimie, résultent directement du principe d'antisymétrisation pour les fermions, qui du coup explique l'organisation de la matières de l'échelle nanométrique jusqu'à l'échelles macroscopique. C'est notamment la raison principale pour laquelle la matière ne s'effondre pas totalement mais reste fortement lacunaire et relativement rigide.<sup>30</sup>

## III.6 Applications

### III.6.1 Évolution d'un paquet d'onde libre dans le point de vue de Heisenberg

Cette étude, présentée ici à une dimension, généralise à un paquet d'onde quelconque nombre de résultats obtenus pour un paquet d'onde gaussien. Elle permet aussi de mettre en évidence le caractère « chirpé » du paquet d'onde.

30. Bien qu'impliquant des contraintes conjointes sur des opérateurs qui ne commutent pas, les espaces symétriques et antisymétrique ne sont jamais vides. En dimension finie  $n$ , en utilisant le fait que tous les espaces  $\mathcal{H}_j$  sont identiques on peut considérer les bases identiques  $\{\varphi_k^j\}_{k=1 \dots n}$  des  $N$  espaces  $\mathcal{H}_j$ .

– les  $n$  kets de la forme  $\Psi_k = |\varphi_k^1\rangle \otimes |\varphi_k^2\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_k^N\rangle$  sont bien symétriques.  
– les  $n$  kets de la forme (déterminant de Slater) :

$$\Psi_k = \sum_{\sigma \in S(N)} \varepsilon(\sigma) |\varphi_k^{\sigma(1)}\rangle \otimes |\varphi_k^{\sigma(2)}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_k^{\sigma(N)}\rangle,$$

où  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ , sont bien antisymétriques.

Nous considérons un paquet d'onde à une dimension dont l'évolution est régie par le hamiltonien  $H = p^2/2m$ , pour lequel l'impulsion  $p$  est évidemment une constante du mouvement, ce qui permettra de noter simplement  $p$  l'opérateur  $p(t)$ . Les équations d'évolution de  $x$  et  $p$  et leur solutions sont élémentaires :

$$\frac{dp}{dt} = 0 \Rightarrow p = p(0) \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \Rightarrow x = x(0) + \frac{p}{m}t$$

Ceci permet de calculer les valeurs moyennes, purement classiques,  $\langle p \rangle(t) = \langle p \rangle = p_0$  et  $\langle x \rangle(t) = \langle x \rangle(0) + \frac{p_0}{m}t$ .

Ce qui nous intéresse ici, c'est l'évolution des dispersions  $\Delta x$  et  $\Delta p$ . Compte tenu de ce que  $p$  est une constante du mouvement,  $p^2$  et  $\Delta p$  sont eux aussi constants. Pour simplifier cette étude, nous allons utiliser les opérateurs  $x'(t) = x(t) - \langle x \rangle(t)$  et  $p' = p - \langle p \rangle$ . On a de façon évidente  $[x', p'] = [x, p] = i\hbar$ ,  $\langle x' \rangle(t) = 0$ ,  $\langle p' \rangle(t) = 0$  et  $\Delta x(t) = \langle x'^2 \rangle(t)$  et  $\Delta p = \langle p'^2 \rangle$ .

On peut alors réécrire les équations du mouvement en termes des nouvelles variables opérationnelles :

$$\frac{dp'}{dt} = 0 \Rightarrow p' = p - p_0 = \text{Cste} \quad \text{et} \quad \frac{dx'}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[x', H] + \frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{p}{m} - \frac{p_0}{m} = \frac{p'}{m}$$

On a alors pour les grandeurs quadratiques :

$$\begin{aligned} \frac{dx'^2}{dt} &= \frac{x'p' + p'x'}{m} \\ \frac{d}{dt} \frac{x'p' + p'x'}{m} &= 2 \left( \frac{p'^2}{m^2} - \frac{p_0 p'}{m^2} \right) \end{aligned}$$

Le terme intéressant est le terme de covariance  $(x'p' + p'x')/2$ . Selon la seconde équation :

$$\left\langle \frac{d}{dt} \frac{x'p' + p'x'}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{p'^2}{m^2} \right\rangle = \frac{\Delta p^2}{mr}$$

et c'est donc un fonction affine du temps, de pente positive. En choisissant l'origine des temps à l'instant où elle s'annule, on obtient :

$$\left\langle \frac{x'p' + p'x'}{m} \right\rangle = \frac{2\Delta p^2 t}{m^2} \Rightarrow \langle x'^2 \rangle(t) = \frac{\Delta p^2 t^2}{m^2} + \langle x'^2 \rangle(0) \Rightarrow \Delta x^2(t) = \frac{\Delta p^2 t^2}{m^2} + \Delta x^2(0).$$

On a donc établi avec des hypothèses minimales la loi d'élargissement énoncée au § II.4.3, et observée sur l'exemple explicite du § II.4.4.

**Interprétation** Ce calcul met surtout en évidence le fait que le paquet d'onde ne s'élargit pas toujours : il passe par sa valeur minimale à l'instant où les corrélations entre  $x$  et  $p$  s'annulent, ce que traduit la forme simple de la phase du paquet d'onde gaussien (II.11), par rapport à la forme générale (II.14). On passe alors d'un régime d'anti-corrélation où le paquet d'onde se contracte à un régime de corrélation positive où il s'élargit<sup>31</sup>.

Ces corrélations (pour  $t > 0$ ) et anti-corrélations (pour  $t < 0$ ) résultent du caractère non linéaire de la relation de dispersion  $\omega = \hbar k^2/2m$ . En effet, la vitesse de groupe  $v_g(k) = \hbar k/m$  étant plus grande pour les plus grandes valeurs de  $k$ , on prévoit que les composantes de  $k > p_0/m$  se déplacent plus vite que celles pour  $k < p_0/m$ . Cela donne un paquet d'onde avec du *chirp* (en français glissendo) où pour  $t > 0$ , la fréquence spatiale instantanée est plus grande à l'avant du paquet d'onde, comme montré sur la figure III.2.

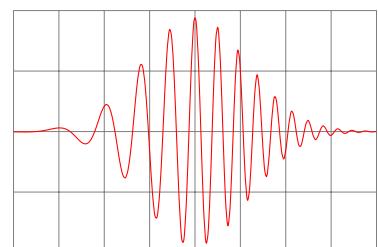


Fig. III.2 – Paquet d'onde chirpé

31. Ce comportement est très analogue à celui qu'on observe en optique avec un faisceau convergent, qui commence par se concentrer avant de s'élargir.

Si on part d'une situation où toutes les ondes sont en phase et il n'y a pas de corrélations, celles-ci vont apparaître du fait de cette différence de vitesse classique.<sup>32</sup>. L'élargissement est alors tout à fait analogue à l'étalement du peloton d'une course cycliste. Si on contraire on part d'une situation de corrélations négatives (les cyclistes les plus rapides sont placés à l'arrière du peloton), on s'attend à ce que ces corrélations s'annulent à un certain instant (celui où la dispersion  $\Delta x$  est minimal) avant de croître comme précédemment.

En définitive, ce comportement est tout à fait classique, à une exception près : en mécanique classique  $\Delta p$  et  $\Delta x(0)$  peuvent être pris arbitrairement petits indépendamment l'un de l'autre, alors qu'en mécanique quantique ils sont contraints par l'inégalité de Heisenberg, avec un  $\Delta p$  qui est au minimum de  $\hbar/2\Delta x(0)$ .

### III.6.2 Force de Lorentz

En partant du Hamiltonien d'une particule dans un champ électro-magnétique :

$$\mathsf{H} = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2m} + q\Phi(\mathbf{r}, t) ,$$

On a d'une part  $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{r}, \mathsf{H}] = \frac{1}{2mi\hbar} [\mathbf{r}, (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2] = \frac{\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{m} \neq \frac{\mathbf{p}}{m}$ .

En utilisant ce résultat, et l'identité  $\nabla(\mathbf{a}^2)/2 = \mathbf{a} \wedge \text{rot } \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{a}$ , on a d'autre part :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\mathbf{p}, \mathsf{H}] = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left( q\Phi(\mathbf{r}) + \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2}{2m} \right) = -q\nabla\Phi + q\mathbf{v} \wedge (\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) + q\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

Or, en développant le membre de gauche :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + q\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + q(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

et en rapprochant les deux, les termes en  $q\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  s'éliminent et il vient :

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \underbrace{\left( -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \nabla\Phi(\mathbf{r}, t) \right)}_{\mathbf{E}} + q\mathbf{v} \wedge \underbrace{\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}_{\mathbf{B}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) .$$

---

32. C'est cette indépendance initiale qui permet de sommer les variances  $\Delta x^2(0)$  et  $(\Delta pt/m)^2$ .



# IV – Problèmes à une dimension

## Sommaire

---

<b>IV.1 Problèmes à potentiel constant par morceaux</b> . . . . .	<b>71</b>
IV.1.1 Cadre général . . . . .	72
IV.1.1 a) Notations . . . . .	72
IV.1.1 b) Principe de raccordement . . . . .	72
IV.1.2 Marche de potentiel . . . . .	73
<b>IV.2 Puits de potentiel</b> . . . . .	<b>75</b>
IV.2.1 Notion de puits de potentiel . . . . .	75
IV.2.2 Puits de potentiel infini . . . . .	76
IV.2.3 Puits de potentiel fini . . . . .	76
IV.2.4 Puits de potentiel quelconque . . . . .	78
<b>IV.3 Effet tunnel</b> . . . . .	<b>80</b>
IV.3.1 Probabilité de franchissement . . . . .	80
IV.3.2 Exemples d'applications . . . . .	83
IV.3.2 a) Couplage tunnel entre deux puits . . . . .	83
IV.3.2 b) Théorie de Gamow de la radioactivité alpha . . . . .	88
IV.3.2 c) Le microscope à effet tunnel . . . . .	90

---

De nombreux problèmes peuvent être décomposés en produit tensoriel d'espace à un degré de liberté, ou plus généralement faire l'objet d'une séparation des variables ramenant le problème à une ou plusieurs équation de Schrödinger à 1 dimension. Ces problèmes sont l'occasion de mettre en évidence des conséquences importantes du comportement ondulatoire de la matière, lesquelles font l'objet de ce chapitre. Dans tout ce qui suit, nous nous intéressons donc à une particule de masse  $m$  dépourvue de spin, et dont les observables de position et d'impulsion à 1 dimension sont respectivement notées  $x$  et  $p$ , et évoluent sous l'effet du hamiltonien standard  $H = p^2/2m + V(x)$ .

## IV.1 Problèmes à potentiel constant par morceaux

Nous avons vu au § III.4.6 que le comportement quantique était superposable au comportement classique lorsque l'extension d'un paquet d'onde était grande devant l'échelle de variation du potentiel. Cette idée est approfondie et exploitée dans l'appendice § Kv. A l'opposé, une variation rapide du potentiel est susceptible de révéler des effets ondulatoires significatifs, ce qui justifie l'étude des potentiels dits « carrés », c'est à dire constants par morceaux. Une autre raison de ce choix est le fait que l'équation de Schrödinger stationnaire peut alors être résolue exactement. Une situation de ce type est, depuis quelques décennies, réalisée dans les hétérostructure de semi-conducteurs formée de une ou plusieurs jonctions entre matériaux de gap différent ; dans les échantillons produis par épitaxie par jets moléculaires (en anglais MBE) le gap, qui joue le rôle du potentiel, varie de plusieurs centaines de meV sur une distance correspondants quelques couches atomiques<sup>1</sup>. Enfin, cette approche se prête particulièrement bien à des analogies électromagnétiques, pour lesquelles les transitions abrupte entre matériaux homo-

---

1. Signalons au passage que la masse  $m$  est alors une masse effective qui peut être notablement différente de la masse  $m_e$  de l'électron « nu ». Par exemple, elle est de  $\sim 0,07 \times m_e$  dans l'arsénure de gallium (GaAs), le plus commun des alliages III-V

gènes d'indice différent donne lieu, après séparation de variables, à la même équation de Helmholtz et aux mêmes phénomènes.

### IV.1.1 Cadre général

#### IV.1.1 a) Notations

Nous supposons que l'axe des  $x$  est subdivisé en  $n > 1$  sections où le potentiel est constant (éventuellement infini). Ces sections sont délimitées par les  $n - 1$  valeurs  $x_1 < \dots < x_{n-1}$ , avec pour convention que la  $\ell$ -ième zone définie par  $x_{\ell-1} < x < x_\ell$ , hormis la zone n°1 qui est  $x \in ]-\infty, x_1[$ , et la zone n° $n$  qui est  $x \in ]x_{n-1}, +\infty[$ . Dans chaque zone, on notera  $V_\ell$  la valeur correspondante du potentiel, et  $\varphi_\ell$  l'expression mathématique de  $\varphi$  valable pour cette zone.

Dans chaque zone, l'équation de Schrödinger stationnaire se met sous la forme d'une équation différentielle ordinaire (EDO) du second ordre à coefficients constants :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi_\ell}{dx^2} + (V_\ell - E)\varphi(x) = 0 \quad \text{soit} \quad \varphi''(x) + k_\ell^2 \varphi = 0 \quad (a) \quad \text{ou} \quad \varphi''(x) - \kappa_\ell^2 \varphi = 0 \quad (b)$$

selon que :

$$\begin{cases} (a) & E > V_\ell \quad k_\ell = \sqrt{\frac{2m(E - V_\ell)}{\hbar}} \quad \text{zone « classiquement autorisée »}, \\ (b) & E < V_\ell \quad \kappa_\ell = \sqrt{\frac{2m(V_\ell - E)}{\hbar}} \quad \text{zone « classiquement interdite »}. \end{cases}$$

Les solutions correspondantes sont alors de la forme :

$$\begin{cases} (a) & E > V_\ell \quad \varphi_\ell(x) = A_\ell e^{ik_\ell x} + B_n e^{-ik_\ell x}, \\ (b) & E < V_\ell \quad \kappa_\ell \varphi_\ell(x) = A_\ell e^{-\kappa_\ell x} + B_n e^{\kappa_\ell x}. \end{cases}$$

Dans le cas (a), les solutions sont des fonctions oscillantes qui permettront toujours de former des paquets d'ondes normalisables. Comme nous l'avons discuté en détail au § II.4, les solutions de type (b) donnent lieu à des divergences inacceptables si on les retrouve dans *toutes* les sections. Ceci impose qu'il n'existe de solution physiquement acceptable que si  $E$  est supérieur au moins à la plus faible des valeurs de  $V_\ell$ . Pour simplifier, nous prendrons l'origine des énergies en ce point, et dans la zone correspondante on aura alors une solution oscillante avec  $E_\ell = \hbar^2 k_\ell^2 / 2m$ .

#### IV.1.1 b) Principe de raccordement

Lorsque le potentiel varie assez lentement et qu'il reste borné, la fonction d'onde d'onde d'un état stationnaire doit être continue, et même dérivable deux fois, sans quoi l'équation de Schrödinger stationnaire n'a plus de sens. En raisonnant par l'absurde, si la fonction d'onde était discontinue en un point  $x_0$ , elle s'écrirait comme une distribution  $\varphi(x) = f(x) + b \times Y(x - x_0)$  où  $Y$  est l'échelon de Heaviside, et  $b = \varphi(x_0^+) - \varphi(x_0^-)$  la valeur du saut. En dérivant cette égalité au sens des distributions,  $\varphi'$  comporterait un masse de Dirac  $b \delta(x - x_0)$  et  $\varphi''(x)$  un terme en  $\delta'(x - x_0)$ , ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle  $V$  est borné en ce point. De même  $\varphi'$  sera continu tant que le potentiel ne comportera pas de terme proportionnel<sup>2</sup> à  $\delta(x - x_0)$ .

On peut aussi voir cela comme résultant de ce que la discontinuité du potentiel est un modèle, approximant par simplicité un potentiel qui varie très vite tout en restant continu. Il en résulterait alors une variation extrêmement rapide de  $\psi''(x)$ , qui dans la

2. Cette dernière situation est un modèle possible dans la limite d'un potentiel très intense et de portée très faible, mais résulte d'une modélisation qui reste exclue de la présente étude.

limite où l'extension de la zone de transition est très étroite, peut être vu comme un saut, alors que  $\psi$  et  $\psi'$  n'ont pas le « temps » de varier significativement puisque  $\psi''$  reste fini.

Nous devons donc imposer la condition selon laquelle  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont continues aux points de transition  $\{x_\ell\}$ , alors que  $\varphi''$  sera discontinue, en raison de la discontinuité de  $V(x)$ . Il en résulte qu'en chaque point  $x_\ell$ , on aura les deux conditions<sup>3</sup> :

$$\varphi_{\ell-1}(x_\ell) = \varphi_\ell(x_\ell) \quad \text{et} \quad \varphi'_{\ell-1}(x_\ell) = \varphi'_\ell(x_\ell) .$$

Chacune de ces égalités implique les 4 coefficients  $A_{\ell-1}$ ,  $B_{\ell-1}$ ,  $A_\ell$  et  $B_\ell$  et est linéaire par rapport à ceux-ci. On obtient alors un système de deux équations à quatre variables. Ce système n'a bien sûr pas une unique solution, mais permet de déterminer :

- ♦ soit le couple  $(A_\ell, B_\ell)$  en fonction du couple  $(A_{\ell-1}, B_{\ell-1})$  ce qui permet de calculer tous les coefficients de proche en proche si  $(A_1, B_1)$  sont connus (méthode dite de la matrice de transfert).
- ♦ soit,  $(A_{\ell+1}, B_\ell)$  en fonction de  $A_\ell, B_{\ell-1}$  de proche en proche (méthode des coefficients de transmission et de réflexion).

Dans les deux cas, les conditions obtenues sont linéaires et homogènes, ce qui traduit le théorème bien connu selon lequel l'ensemble des solutions *mathématiques* d'une EDO linéaire du second ordre est un espace vectoriel de dimension 2. Comme nous verrons, l'ensemble des solutions physiquement acceptables peut être aussi de dimension 2, mais sera souvent de dimension 1 (cas des états liés) et parfois aussi réduit au seul vecteur nul, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun état stationnaire à l'énergie  $E$  considérée.

Il reste encore une indétermination liée à la norme de la fonction d'onde, qui peut être exprimée de façon générale en termes des dérivées logarithmiques<sup>4</sup>, mais par simplicité nous la traiterons au cas par cas.

### IV.1.2 Marche de potentiel

Supposons que l'on a une seule discontinuité en  $x_1 = 0$ , et que la zone n°1 soit celle où le potentiel est le plus bas. On peut alors distinguer deux cas, selon que  $E > V_1$  ou  $E < V_1$ .

**Cas  $E > V_1$**  On a des solutions oscillantes de part et d'autre de la marche, et l'absence d'onde évanescante ou divergente fait que l'espace des solution physiquement acceptables est bien de dimension 2. Il est toutefois usuel de modéliser ce qui arrive à une particule venant vers la marche depuis  $-\infty$ , qui peut être transmise ou être

---

3. On peut dès maintenant noter : vu que  $\varphi_{\ell-1}$  et  $\varphi_\ell$  sont tous deux définis à une constante d'intégration (multiplicative) près qui sera *in fine* définie par la condition de normalisation de  $\varphi$  (ou dans le cas non-normalisable, du courant associé) ces deux conditions sont équivalentes à l'unique condition de continuité de la dérivée logarithmique  $\varphi'/\varphi$ .

4. Pour prendre un exemple simple, notons  $\Psi_{\ell,\pm}(x)$  les solutions  $e^{\pm ik_\ell x}$  ou  $e^{\mp \kappa_\ell x}$  selon le cas. Fixons  $\ell = 2$ , et notons de plus  $u_\ell = \Psi_{\ell,+}(x_2)$  et  $u'_\ell = \Psi'_{\ell,+}(x_2)$  et de même pour  $\Psi_{\ell,-}$  avec la lettre  $v$ . Les équations de raccordement en  $x_2$  s'écrivent alors :

$$\begin{cases} A_1 u_1 + B_1 v_1 = A_2 u_2 + B_2 v_2 , \\ A_1 u'_1 + B_1 v'_1 = A_2 u'_2 + B_2 v'_2 , \end{cases} \iff \begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 & v_2 \\ u'_2 & v'_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u'_1 & v'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

Sans même calculer explicitement ce produit matriciel, on peut le multiplier par le produit  $(u_2 v_2)/(u_1 v_1)$ , et en distribuant les différents termes aux endroits appropriés on trouve :

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u'_2/u_2 & v'_2/v_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u'_1/u_1 & v'_1/v_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} ,$$

ce qui prouve que les conditions de raccordement s'expriment uniquement en termes de dérivées logarithmiques des solutions élémentaires. Ce résultat est absolument général, car il ne faut aucunement intervenir la forme exponentielle des solutions.

réfléchie. Cette modélisation introduit une condition aux limites additionnelle, l'absence d'onde entrante venant de  $+\infty$ , soit  $B_1 = 0$ , et réduit l'espace des solutions à une droite vectorielle. On a alors :

$$\begin{cases} A_1 + B_1 = A_1 \\ k_1(A_1 - B_1) = k_2(A_2 - B_2) \end{cases} \Rightarrow \frac{B_1}{A_1} = r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad \frac{A_2}{A_1} = t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2},$$

ce qui met en évidence les coefficients en amplitude  $r$  et  $t$  qui représentent respectivement la réflexion et la transmission, et qui sont réels.

Le point remarquable est que l'on a une onde réfléchie, là où en physique classique la particule serait entièrement transmise. Il n'y a toutefois pas lieu de s'en étonner outre mesure, puisque comme annoncé en préambule, on attend, pour des potentiels variant rapidement à l'échelle de la longueur d'onde de de Broglie, des effets quantiques notables.

On note par contre sans surprise que ces coefficients sont exactement ceux que l'on a en optique pour l'incidence normale, ou pour une incidence oblique, en polarisation TE (ou « S »), en remplaçant  $k_\ell$  par  $k_\ell \cos \theta_\ell$ , tant que  $\theta_\ell$  existe.

L'analyse finale doit être faite en termes du courant de probabilité. Dans les deux régions on a :

$$\begin{cases} J_1(x) = \frac{\hbar}{m} \Im(\varphi_1^* \nabla \varphi_1) \\ \quad = \frac{\hbar}{m} \Im \left( ik_1 |A_1|^2 - ik_1 |B_1|^2 + (A_1^* B_1 e^{-2ik_1 x} + c.c.) \right) \\ \quad = (|A_1|^2 - |B_1|^2) \frac{\hbar k_1}{m} \\ J_2(x) = \frac{\hbar}{m} \Im(\varphi_2 * \nabla \varphi_2) = |A_2|^2 \frac{\hbar k_2}{m} \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Ce qui permet d'interpréter l'onde dans la zone 1 comme la combinaison d'un flux incident (à la vitesse classique  $v_1 = \hbar k_1 / m$ ) avec une intensité  $|A_1|^2$  et d'un flux réfléchi de vitesse opposée et d'intensité  $|B_1|^2$ . On peut alors introduire le coefficient de réflexion en intensité  $\mathcal{R} = |B_1|^2 / |A_1|^2 = |r|^2$ , qui est bien sûr inférieur à 1. De même, dans la zone 2 on a un flux purement sortant, à la vitesse attendue  $\hbar k_2 / m$ , et d'intensité  $|A_2|^2$ . Le coefficient de transmission en probabilité  $\mathcal{T}$  est alors donné par le rapport des flux sortant et entrant :

$$\mathcal{T} = \frac{|A_2|^2 \hbar k_2 / m}{|A_1|^2 \hbar k_1 / m} = |t|^2 \frac{k_2}{k_1}.$$

Or la conservation de la probabilité pour un état stationnaire d'écrit  $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ , c'est à dire à une dimension  $dJ/dx = 0$ . On peut en déduire la relation  $|A_1|^2(1-\mathcal{R}) k_0 = |A_1|^2 |t|^2 k_1$  soit, comme attendu,  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ .

**Cas  $E < V_1$**  On a alors des ondes divergente et évanescante dans la zone 2. Comme la zone classiquement interdite s'étend jusqu'à  $+\infty$ , la solution ne sera physiquement acceptable que si l'onde y est purement évanescante, ce qui introduit à nouveau la condition à la limite  $B_1 = 0$ , mais pour une raison tout à fait différente. En reprenant les conditions de raccordement, on obtient les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude :

$$r = \frac{k_1 - i\kappa_2}{k_1 + i\kappa_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2k_1}{k_1 + i\kappa_2}. \quad (\text{IV.2})$$

Ces équations sont à nouveau analogues aux coefficients de Fresnel de l'optique

lorsque on dépasse l'angle d'incidence critique pour la réflexion totale<sup>5</sup>. On sait que dans ces conditions la composante tangentielle  $k_{\parallel} = k_1 \sin \theta_1$  est conservée, et qu'il y a dans le milieu 2 (le moins réfringent) une onde évanescante de la forme  $e^{ik_{\parallel}/y - \kappa_2 x}$ . La décroissance exponentielle de cette onde évanescante est donnée par le paramètre  $\kappa_2$  tel que  $(k_{\parallel})^2 - \kappa_2^2 = k_2^2$  (avec  $k_1 = n_1 \omega/c$  et  $k_2 = n_2 \omega/c$ ) pour satisfaire la relation de dispersion dans le milieu 2. Ici, la dimension  $y$  n'existe pas et la détermination de  $\kappa_2$  est légèrement différente, mais la structure des équations de raccordement étant identique, on obtient les mêmes expressions pour  $r$  et  $t$ .

Il est remarquable que le coefficient  $r$  soit le rapport de deux quantités conjuguées, et est donc de module 1. Un calcul analogue à celui de  $J_1$  dans (IV.1) donne à nouveau dans la zone 1 la somme des deux flux entrant et sortant de rapport  $\mathcal{R} = |r|^2$ , qui est cette fois égal à 1 : c'est la réflexion totale ! Le calcul du courant  $J_2(x)$  dans la zone 2 est plus subtil et plus intéressant. En raison de la dépendance exponentielle *réelle*,  $\varphi_2^*$  est en phase avec  $\nabla \varphi_2 = -\kappa_2 \varphi_2$ , et donc leur produit est réel, ce qui donne lieu à un courant nul dans la zone 2. Cela à correspond à  $\mathcal{T} = 0$ , et on obtient à nouveau  $\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1$ .

L'effet quantique remarquable est ici d'une part l'existence de l'onde évanescante, c'est à dire que le caractère ondulatoire permet à la particule de pénétrer légèrement dans la zone où son énergie cinétique est négative, mais pendant un temps très bref. Associé à l'existence de cette onde évanescante, se trouve l'existence d'un déphasage, tant pour l'onde de la zone 1, qui est bien une onde purement stationnaire mais qui n'a pas de nœud sur l'interface, que pour l'onde évanescante de la zone 2. Une étude de la dynamique montrerait que ce déphasage est bien associé au « retard » à la réflexion que prend la particule à explorer la zone 2.

## IV.2 Puits de potentiel

### IV.2.1 Notion de puits de potentiel

On a un « puits de potentiel » s'il existe une zone (ou plusieurs) où le potentiel  $V(x)$  est inférieur à ses valeurs dans les zones extrêmes. Cette configuration permet en principe d'avoir des états liés, qui sont caractérisés par le fait que  $\langle x \rangle$  est un nombre fini, et que  $\langle p \rangle = 0$ . Si nous prenons l'origine des énergies au fond du puits (valeur minimale de  $V$ ), que supposons que les deux zones extrêmes (où  $|x| \rightarrow \infty$ ) ont le même potentiel  $V_0 > 0$ , il est envisageable de trouver des états stationnaires d'énergie  $0 < E < V_0$ , dont la zone classiquement autorisée est bornée de part et d'autre par des zones classiquement interdites, ce qui fait que de tels états ont une extension spatiale limitée. Cette situation impose toutefois d'avoir une onde purement évanescante (c'est à dire se comportant comme  $e^{-\kappa|x|}$ ) de chaque côté, ce qui ne sera possible que pour certaines valeurs particulières de  $E$  : c'est là l'origine de la quantification de l'énergie des états liés, qui résulte donc des conditions aux limites.

Au contraire, pour les états d'énergie  $E > V_0$ , les solutions dans les zones externes sont oscillantes, et la zone classiquement autorisée s'étend jusqu'à l'infini. On obtiendra à coup sûr au moins une solution, et généralement deux dans le cas considéré ici. Les états correspondants sont appelés « états libres » ou « états de diffusion ».

---

5. Une prétendue analogie avec l'effet de peau sur un conducteur est erronée, car dans l'effet de peau, l'onde est en  $\exp(\frac{1+i}{\sqrt{2}}kx)$ , ce qui fait que sa phase évolue avec la profondeur de pénétration. Cela qui se traduit notamment par une composante normale non-nulle du vecteur de Poynting, nécessaire pour entretenir le courant ohmique dans le milieu. Au contraire, comme va le voir ci-dessous, l'onde évanescante ne transporte aucun courant.

### IV.2.2 Puits de potentiel infini

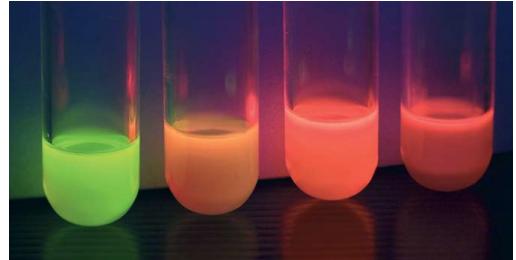
Dans une modélisation simplifiée au maximum, on peut considérer la situation où la particule est strictement confinée sur la zone  $x \in [0, L]$ . Ce confinement est assuré en supposant que le potentiel  $V$  prend des valeurs infinies sur les zones  $x < 0$  et  $x > L$ . Dans la zone  $x \in [0, L]$ , les règles générales du § IV.1.1 a) s'appliquent et la fonction d'onde  $\varphi$  de l'état stationnaire d'énergie  $E$  est donc de la forme  $\varphi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ , ou ici, plus commodément,  $\varphi(x) = C \sin(kx) + D \cos(kx)$ , avec  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ .

Le raisonnement du § IV.1.1 b) ci-dessus conduisant à la continuité de la fonction d'onde est ici pris en défaut : un potentiel non-borné autorise une discontinuité de la dérivée première  $\varphi'$  de la fonction d'onde. Seule subsiste la condition de continuité de la fonction d'onde. Comme la particule ne peut pas pénétrer dans les zones de potentiel infini, le fonction d'onde y est nécessairement nulle. Par continuité, on aura donc les conditions aux limites  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ .

Avec l'expression de  $\varphi$  introduite plus haut, ces conditions aux limites imposent  $D = 0$  et  $C \sin(kL) = 0$ . Cela signifie que l'on n'aura de solution non-nulle que pour certaines valeurs de  $k$  telles que  $kL = \ell \times \pi$  où  $\ell \in \mathbb{Z}$ , ou encore  $k_\ell = \ell \times \pi/L$ . Les solutions obtenues avec  $\ell$  et  $-\ell$  sont clairement identiques, et la solution avec  $\ell = 0$  est identiquement nulle. On doit donc prendre  $\ell > 0$ . Il en résulte que l'on n'a d'état stationnaire que pour les énergie quantifiées  $E_\ell = \ell^2 \hbar^2 \pi^2 / 20L^2$  avec  $\ell \in \mathbb{N}^*$ .

Du point de vue physique, cela correspond à un nombre  $\ell$  entier de demi-longueur d'onde (de de Broglie) dans la longueur  $L$ . Il s'agit donc d'une condition d'obtention d'une onde stationnaire, exactement comme pour un Fabry-Perot plan avec des miroirs parfaits ou comme pour une corde vibrante. L'entier  $\ell$ , qui est le nombre d'extrema locaux, est alors l'ordre d'interférence.

On constate que même l'état fondamental possède une énergie strictement positive, qui est une énergie cinétique, résultant du confinement. Cette énergie en  $1/L^2$  est appelée « énergie de confinement ». On peut la voir aussi comme un conséquence de l'inégalité de Heisenberg : la particule étant confinée sur une longueurs  $L$ , on a  $\Delta x \sim L$  (en fait  $\Delta x = 0,218 L$ ), et donc  $p^2 = \Delta p^2 \geq \hbar^2/L^2$ . Cette énergie de confinement, que l'on retrouve aussi dans un puits fini, joue un rôle important dans la physique des états liés. Notamment dans des nanostructures de semiconducteurs, l'énergie de recombinaison électron-trou n'est pas égale au gap, mais augmentée de l'énergie de confinement, ce qui permet d'en contrôler la longueur d'onde d'émission en changeant leur taille.



**Fig. IV.1 – Suspensions colloïdales de nanocristaux de semi-conducteurs (alliages II-IV) de tailles différentes.**

### IV.2.3 Puits de potentiel fini

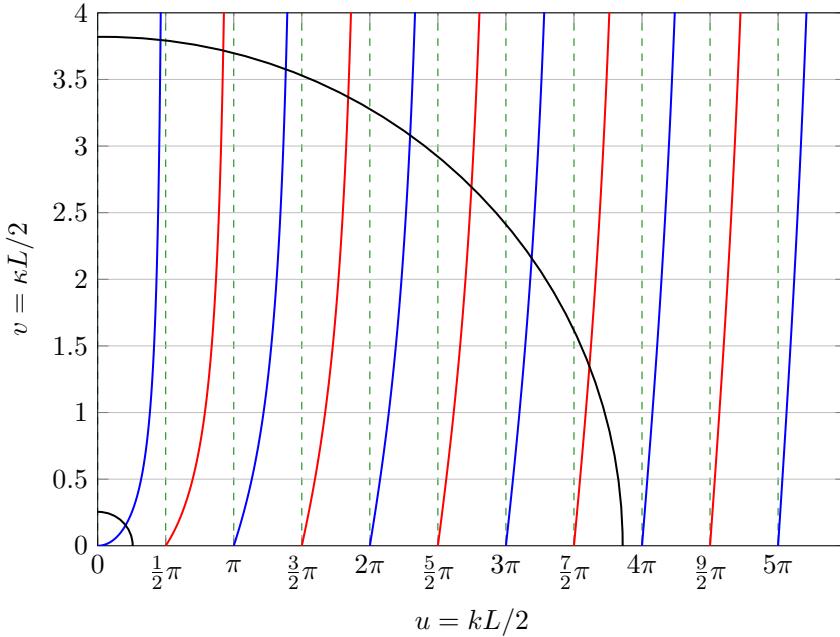
Nous considérons ici le puits de potentiel ainsi défini :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < L/2 , \\ V_0 > 0 & \text{si } |x| > L/2 , \end{cases}$$

et nous définissons le paramètre  $K_0$  tel que  $V_0 = \hbar^2 K_0^2 / 2m$ . Nous avons ici choisi l'origine au centre du puits. Ainsi le potentiel commute avec l'opérateur parité  $\Pi$  ( $V(x) = V(-x)$ ), ce qui permet de diagonaliser simultanément  $H$  et  $\Pi$ , c'est à dire de rechercher des états stationnaires qui sont soit pairs, soit impairs.

Nous cherchons des états liés, c'est à dire des états stationnaires d'énergie  $E < V_0$  et nous posons  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  et  $V_0 - E = \hbar^2 \kappa^2 / 2m$ . Nous aurons dans la zone  $[-L/2, L/2]$

une fonction  $\varphi_2(x) = A \cos(kx)$  pour les états pairs et  $\varphi_2(x) = A \sin(kx)$  pour les états impairs. Dans les deux zones classiquement interdites, pour avoir des ondes purement évanescentes, on aura  $\varphi_{1,3}(x) = B e^{-\kappa|x|}$  pour les états pairs et  $\varphi_{1,3}(x) = \text{sign}(x) B e^{-\kappa|x|}$  pour les états impairs.



**Fig. IV.2 –** Solution graphique pour le puits fini symétrique. En bleu la fonction  $u \tan(u)$  pour les états pairs, et en rouge la fonction  $-u \cotan(u)$  pour les états impairs. En pointillés verts les asymptotes verticales des deux fonctions. En noir, deux cercles correspondant à des valeurs de  $W = 0.8$  et  $W = 12$

Les conditions de raccordement sont alors :

$$\begin{array}{lll} x_1 = -L/2 & \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1) , & \varphi'_1(x_1) = \varphi'_2(x_1) , \\ x_2 = +L/2 & \varphi_2(x_2) = \varphi_3(x_2) , & \varphi'_2(x_2) = \varphi'_3(x_2) , \end{array}$$

On constate aisément que, en raison de la parité ou imparité des fonctions d'onde, les équations de raccordement en  $-L/2$  et  $+L/2$  sont identiques, et il vient :

$$\text{Pairs : } \begin{cases} A \cos(kL/2) = B e^{-\kappa L/2} \\ -kA \sin(kL/2) = -\kappa B e^{\kappa L/2} \end{cases} \quad \text{Impairs : } \begin{cases} A \sin(kL/2) = B e^{-\kappa L/2} \\ kA \cos(kL/2) = -\kappa B e^{\kappa L/2} \end{cases}$$

Dans les deux cas, on obtient deux équations qui ne fixent que le rapport  $B/A$  et qui ne sont compatibles que si l'on impose la continuité de la dérivée logarithmique  $\varphi'/\varphi$ , soit :

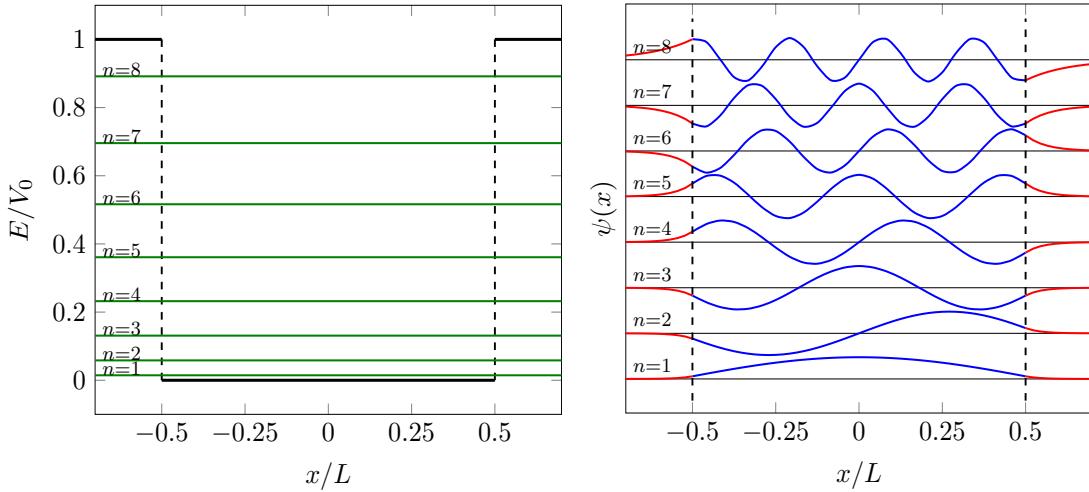
$$\text{États pairs : } k \tan(kL/2) = \kappa \quad \text{États impairs : } -k \cotan(kL/2) = \kappa .$$

Ces équations transcendantes ne peuvent être résolues exactement. Il est toutefois possible de les résoudre de façon graphique. Pour cela, multiplions les deux équations par  $L/2$ , ce qui fait apparaître les paramètres  $u = kL/2$  et  $v = \kappa L/2$ . Ces deux paramètres ne sont pas indépendants car on a  $V_0 = E + (V_0 - E)$  soit  $K^2 = k^2 + \kappa^2$  et donc  $v = \sqrt{W^2 - u^2}$  où l'on a posé  $W = KL/2$ . Les deux équations sont donc réduites à :

$$\text{Pairs : } u \tan(u) = \sqrt{W^2 - u^2} \quad \text{Impairs : } -u \cotan(u) = \sqrt{W^2 - u^2} , \quad (\text{IV.3})$$

et la résolution graphique se fera donc en cherchant l'intersection du graphe du membre de gauche avec celui du membre de droite, qui est un quart de cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $W$ .

On peut déduire de cette figure un certain nombre d'informations intéressantes :



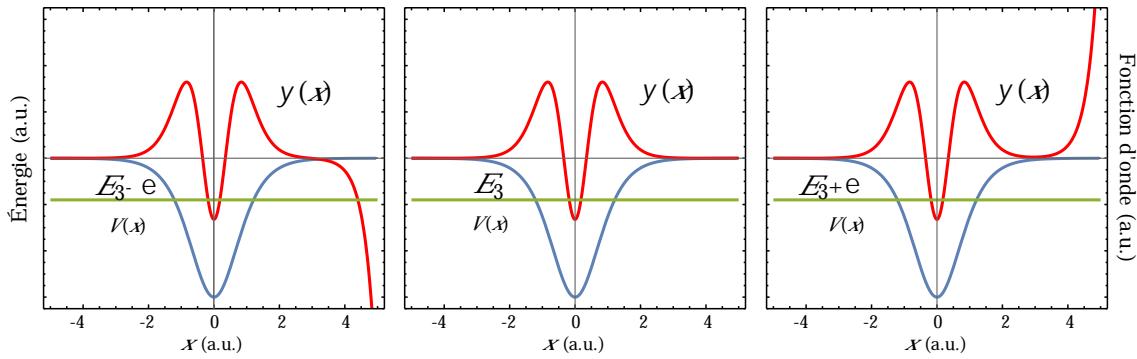
**Fig. IV.3** – États stationnaires du puits fini pour  $W = 12$ , possédant 8 états liés. A gauche, on a tracé le potentiel et les énergies, dont on note le caractère non équidistant. A droite, le tracé des fonctions d'onde où l'on voit graduellement croître l'importance de l'onde évanescante lorsque l'énergie augmente.

1. Il existe bien un jeu de valeurs discrètes de  $u$  et donc de  $E$ . L'ensemble des solutions pour chaque valeur autorisée est de dimension 1 (pas de dégénérescence, puisque qu'on un seul rapport  $B/A$  pour un  $k$  donné).
2. Pour les valeurs autorisées, on peut rendre les fonctions d'onde réelles.
3. Les modes liés sont alternativement pair et impairs lorsqu'on augmente  $u$  c'est dire l'énergie  $E$ .
4. L'état fondamental est un état pair, dépourvu de noeud (énergie cinétique minimale). Même si  $L$  ou  $V_0$  sont très petits, cet état existe toujours.
5. Le nombre  $N$  de modes liés est lié à  $W$  par la formule  $N = \mathbb{E}(\frac{2}{\pi}W) + 1$  où  $\mathbb{E}$  désigne la partie entière.
6. Pour les modes d'ordre le plus faible (c'est à dire tels que  $u \ll W$  et  $n \ll N$ ) les valeurs de  $u_n$  sont quasiment sur l'asymptote, ce qui correspond à  $u_n \approx n \times \pi/2$  (pour  $n$  entier petit devant  $N$ ), soit  $k_n \approx n \times \pi/L$  et on retrouve donc dans cette limite les valeurs de  $u_n$  et de  $E_n$  des états du puits infini. Plus précisément :
  - ◆ Les valeurs de  $u_n$  sont légèrement inférieures à celles  $u_n^\infty$  du puits infini. Cela tient à ce que les modes réels ont une extension effective  $L^*$  légèrement plus grande que  $L$  en raison de leur pénétration dans la zone classiquement interdite.
  - ◆ On peut pour ces états assimiler le cercle à sa tangente  $v = W$ , et approcher les fonctions de  $u$  dans (IV.3) au voisinages de leurs pôles par  $u/(n\pi/2 - u)$ , ce qui conduit à une approximation  $u_n \approx u_n^\infty \times (1 - 1/W)$ .
  - ◆ On constate, la limite  $W \rightarrow \infty$ , que l'épaisseur  $\kappa^{-1} \propto v^{1-}$  de l'épaisseur de l'onde de évanescante tend vers zéro, et que la valeur relative de l'onde aux point  $x = \pm L/2$  tend vers zéro, ce qui valide *a posteriori* les conditions aux limites utilisées plus haut pour le puits de potentiel infini.

#### IV.2.4 Puits de potentiel quelconque

La plupart des propriétés que nous avons observées dans la cas du puits fini se retrouvent pour le puits de potentiel *non-constant* le plus général :

6. Potentiel défini par  $V(x) = -\lambda(\lambda + 1)/\cosh^2(x)$ , dont les énergies propres sont, pour  $\lambda$  entier, de la forme  $E_n = -n^2/2$  où  $n = \{1, 2, \dots, \lambda\}$ . URL sur wikipedia :[https://en.wikipedia.org/wiki/P%C3%BCschl%E2%80%93Teller\\_potential](https://en.wikipedia.org/wiki/P%C3%BCschl%E2%80%93Teller_potential)



**Fig. IV.4 – Condition de quantification pour le potentiel de Pöschl–Teller<sup>6</sup>, montrant la divergence exponentielle de la fonction d'onde pour une énergie  $\varepsilon$  légèrement inférieure (à gauche) ou légèrement supérieure (à droite) de  $\varepsilon = 10^{-4}$  à l'énergie  $E_3 = -9/2$  de l'état  $n = 3$  représenté au centre.**

- ◆ Si le potentiel n'a pas de maximum local, Les états liés ont une l'énergie comprise entre le minimum du potentiel  $V_{\min}$  et sa valeur asymptotique  $V_\infty$  pour  $|x| \rightarrow \infty$ .
- ◆ La zone classiquement autorisée est délimitées par les deux points où l'énergie cinétique  $E - V(x)$  s'annule, appelés « points de retournement ».
- ◆ Les fonctions propres sont oscillantes entre les points de retournement, et sont évanescante (c'est-à-dire varient qualitativement comme une exponentielle réelle croissante ou décroissante dans la zone classiquement interdite. L'oscillation dans la zone classiquement permise peut être vue comme résultant de interférence entre deux ondes progressives contrapropageantes qui sont réfléchies aux points de retournement.
- ◆ L'ensemble des solutions *mathématiques* est *a priori* de dimension 2 pour chaque valeur de  $E \in ]V_{\min}, V_\infty[$ .
- ◆ La quantification résulte des conditions aux limites : l'imposition d'une onde évanescante d'un coté du puits fixe la phase de l'oscillation et ramène à 1 la dimension de l'espace des solutions. En général, après propagation à travers le puits de potentiel, la phase obtenue ne permet pas de se connecter à une onde purement évanescante de l'autre coté. Ce comportement est illustré sur la figure IV.4 (pour un potentiel dont les solutions sont connues) en imposant la dérivée logarithmique en un point de la zone classiquement interdite à gauche et en observant sa valeur à droite. Ainsi l'ensemble des solutions physiquement acceptables est-il généralement réduit à la fonction nulle, sauf dans des cas particuliers discrets qui apparaissent successivement lorsque le nombre d'oscillations entre les deux point de retournement augmente de 1/2 ( à la profondeur de l'onde évanescante près).
- ◆ L'ensemble des solutions de l'équation de Schrödinger stationnaire est, pour chaque valeur autorisée, de dimension 1 (pas de dégénérescence). Il en résulte que l'on peut choisir des fonctions d'onde réelles. En effet si  $\varphi$  vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire et n'est pas réelle, alors sa conjuguée  $\varphi^*$  aussi, ainsi que les deux fonctions réelles  $\varphi_r = (\varphi + \varphi^*)/2$  et que  $\varphi_i = (\varphi - \varphi^*)/2i$ . En aucun cas ces deux fonctions ne peuvent être nulles en même temps, car on aurait  $\varphi = 0$ . On peut alors prendre l'une ou l'autre de ces fonctions (elles sont proportionnelles).
- ◆ Si le potentiel est pair, le hamiltonien aussi, et on peut diagonaliser simultanément  $H$  et  $\Pi$ , c'est à dire chercher séparément les fonctions d'onde propres paires et impaires (dont les énergies sont alternées). L'état fondamental sera toujours un état pair. En effet un état impair qui possède forcément un zéro au centre, et présente donc davantage d'oscillations. L'état pair, avec un seul maximum, est donc celui dont l'énergie cinétique est la plus faible et est donc le plus profondément lié.

- ◆ Nous ne l'avons pas signalé pour le puits fini, mais la propriété suivante est tout à fait générale : si on classe les énergies propres en sens croissant et que leur attribue un numéro  $n$  entier, en partant de  $n = 1$  pour l'état fondamental, alors :
  - L'état  $\varphi_n$  possède  $n$  extrema et  $n - 1$  zéros, avec un unique extremum entre deux zéros, et inversement.
  - Soient  $\{z_1^{(n)}, \dots, z_{n-1}^{(n)}\}$  l'ensemble ordonné de  $n - 1$  zéros de  $\varphi_n$  ; si l'état lié  $\varphi_{n+1}$  existe, alors il possède un zéro dans chacun des intervalles  $]z_p^{(n)}, z_{p+1}^{(n)}[$ , ainsi que deux autres zéros, l'un inférieur à  $z_p^{(n)}$  et l'autre supérieur  $z_{n-1}^{(n)}[$  (On dit que les zéros sont alternés). Il existe aussi une propriété similaire pour les extrema.

- ◆ Tout puits de potentiel, *s'il est purement attractif*, possède au moins un état lié.

La plupart de ces propriétés peuvent être démontrées en étudiant les propriétés du wronskien<sup>7</sup> et des dérivées logarithmiques. Cela sort cependant du cadre de ce cours.

Il existe toutefois des situations plus complexes, dans lesquelles il existe plus d'une zone classiquement autorisées, et plus de deux points de rebroussement. On doit alors considérer l'effet qui tunnel qui peut coupler les états liés de deux régions autorisées voisines mais non-adjacentes et qui résulte de des ondes évanescentes dans la région classiquement interdite qui les sépare. Dans la section suivante, nous allons dans un premier temps étudier l'effet tunnel général entre deux régions semi-infinies et nous reviendrons ensuite au cas typique et physiquement important du « double puits ».

## IV.3 Effet tunnel

### IV.3.1 Probabilité de franchissement

Pour mettre en évidence l'effet tunnel, on considère un problème de potentiel « carré » à trois zones, où les zones 1 et 3 ont (pour simplifier) le même potentiel, choisi comme origine des énergies. La zone centrale, où le potentiel est  $V_0 = \hbar^2 K^2 / 2m > 0$ , est délimitée par les valeurs  $x_1 = 0$  et  $x_2 = a > 0$  et constitue la « barrière de potentiel ». Les états stationnaires l'énergie  $E > V_0$  sont des états de diffusion, qui présentent des résonances de transmission liées aux réflexions sur les flans de la barrière de potentiel, mais nous ne les étudierons pas ici.

Notons dès maintenant que la prétendue analogie avec l'effet de peau dans conducteur est *fausse* (pour plusieurs raisons relatives à la structure de l'onde). L'analogie électromagnétique correcte est avec la « réflexion totale interne frustrée » qui est présentée dans l'appendice J<sub>IV</sub>.

**Équations de raccordement** Nous nous concentrerons sur les états d'énergie  $E \in ]0, V_0[$ . Dans les zones 1 et 3 on a des solutions oscillantes avec  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ , et dans la barrière des exponentielles réelles de paramètre  $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ . Contrairement au cas de la marche de potentiel du § IV.1.2, il n'y a plus de raison d'éliminer l'onde exponentiellement croissante, et on doit donc garder dans la zone 2 la forme générale  $\varphi_2(x) = A_2 e^{-\kappa x} + B_2 e^{\kappa x}$ .

En prenant l'origine des ondes de la zone 3 sur la seconde interface, on peut écrire les 4 relations de continuité :

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2 + B_2 & A_2 e^{-\kappa a} + B_2 e^{\kappa a} &= A_3 + B_3 , \\ ik(A_1 - B_1) &= -\kappa(A_2 - B_2) & -\kappa(A_2 e^{-\kappa a} - B_2 e^{\kappa a}) &= ik(A_3 - B_3) . \end{aligned}$$

---

7. Le wronskien de deux fonctions  $W(\varphi_1, \varphi_2)$  est le déterminant  $\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi'_1 & \varphi'_2 \end{vmatrix}$ . Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  représentent des états stationnaires, on a  $W'(\varphi_1, \varphi_2) = (E_1 - E_2) \varphi_1, \varphi_2 \times 2m/\hbar^2$ .

Ce que nous cherchons à résoudre est un problème de diffusion d'une onde entrante  $A_1 e^{ikx}$ . Nous pouvons alors imposer  $B_3 = 0$ , et introduire les coefficients de réflexion  $r_B = B_1/A_1$  et de transmission  $t_B = A_3/A_1$ . On peut alors tout diviser par  $A_1$  en faisant apparaître  $a_2 = A_2/A_1$  et  $b_2 = B_2/A_1$ . En introduisant les abréviations  $\eta = e^{\kappa a}$  et  $q = -ik/\kappa$ , ces équations prennent la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ q & -q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \eta^{-1} & \eta \\ \eta^{-1} & -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_B \\ qt_B \end{bmatrix} .$$

Nous pouvons exprimer  $(a_2, b_2)$  en fonction de  $r_B$  d'une part et de  $t_B$  d'autre part, afin de les éliminer :

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+q & 1-q \\ 1-q & 1+q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r_B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta & \eta \\ \eta^{-1} & -\eta^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_B \\ qt_B \end{bmatrix} , \quad (\text{IV.4})$$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} (1+q) + (1-q)r_B = \eta(1+q)t_B \\ (1-q) + (1+q)r_B = \eta^{-1}(1-q)t_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_B + r^* \eta t_B = r^* \\ r_B + r\eta^{-1}t_B = r \end{cases} ,$$

où l'on a reconnu le coefficient de réflexion de la marche  $r = (q-1)/(q+1)$  établi plus haut (cf (IV.2)) et son conjugué  $r^* = 1/r = (q+1)/(q-1)$ . Si on résout enfin en  $t_B$  et  $r_B$ , on obtient :

$$t_B = \frac{r - r^*}{r\eta^{-1} - r^*\eta} \quad \text{et} \quad r_B = \frac{\eta^{-1} - \eta}{r\eta^{-1} - r^*\eta} .$$

Ces expressions relativement simples sont satisfaisantes, notamment parce que :

- ♦ si  $a \rightarrow 0$ , on a  $\eta \rightarrow 1$  et donc  $t_B \rightarrow 1$  et  $r_B \rightarrow 0$ , comme on attend en l'absence de barrière. ;
- ♦ à l'opposé, si  $V_0$  ou  $a$  deviennent très grands,  $\eta \rightarrow +\infty$ , et donc  $t_B$  tend vers zéro, et  $r_B \sim 1/r^* = r$ , ce qui correspond à la marche simple comme si l'onde évanescante ne sondait pas l'épaisseur de la barrière.

En outre on a (en utilisant  $|r|^2 = 1$ ) :

$$|r_B|^2 + |t_B|^2 = \frac{|(r - r^*)|^2 + |\eta^{-1} - \eta|^2}{(r\eta^{-1} - r^*\eta)(r^*\eta^{-1} - r\eta)} = \frac{(2 - r^2 - r^{*2}) + (\eta^2 + \eta^{-2} - 2)}{\eta^{-2} + \eta^2 - r^2 - r^{*2}} = 1 .$$

La situation qui nous intéresse est ici la situation intermédiaire dans laquelle  $|t_B|$ , bien que petit, n'est pas totalement négligeable. Le courant de probabilité qui résulte de la transmission « sous » la barrière de potentiel, lorsqu'on le calcule dans la zone 3, est évidemment  $|A_3|\hbar k/m$ . Le coefficient de transmission  $\mathcal{T} = |A_3|^2/|A_0|^2 = |t_B|^2$ , qui représente la probabilité de passage s'écrit (en utilisant  $r = ((k^2 - \kappa^2) - i(2k\kappa))/K^2$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \left| \frac{2i \Im(r)}{2\Re(r)\sinh(\kappa a) + 2i\Im(r)\cosh(\kappa a)} \right|^2 = \frac{\Im(r)^2}{\Re(r)^2 \sinh(\kappa a)^2 + \Im(r)^2 (1 + \sinh(\kappa a)^2)} \\ &= \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{\Re(r)^2}{\Im(r)^2}\right) \sinh(\kappa a)^2} = \frac{1}{1 + \frac{K^2}{4k^2\kappa^2} \sinh(\kappa a)^2} . \end{aligned}$$

Dans la limite, souvent réalisée, dite de « barrière épaisse », où  $\kappa a$  est assez grand, le « sinh » domine les autres termes et on peut approcher  $\mathcal{T}$  par :

$$\mathcal{T} \approx \frac{16k^2\kappa^2}{K^2} \exp(-2\kappa a) . \quad (\text{IV.5})$$

Cette expression possède une interprétation relativement simple : l'amplitude de probabilité de l'onde évanescence d'un bord de la barrière à l'autre est en  $e^{-\kappa a}$  et donc

la probabilité associée est en  $e^{-2\kappa a}$ . Plus précisément, si on imagine la transmission en  $x = 0$  qui donne une onde évanescante avec un coefficient de transmission en amplitude  $t_0$  établi § IV.1.2 (équation (IV.2)), la propagation exponentielle de cette onde  $x = 0$  à  $x = a$  et sa transmission en  $x = 0$  dont le coefficient de transmission en amplitude  $t_a$  est aiment établi, on obtient :

$$\mathcal{T} \approx |t_a e^{-\kappa a} t_0|^2 = \left| \frac{2i\kappa}{i\kappa + k} e^{-\kappa a} \frac{2k}{k + i\kappa} \right|^2 = \frac{16k^2\kappa^2}{K^2} e^{-2\kappa a}.$$

**Courant : rôle de l'onde anti-évanescante** Toutefois cette interprétation semble suggérer que l'onde croissante ne joue aucun rôle, ce qui n'est pas vrai. On peut s'en douter en se souvenant que l'onde évanescante prise isolément ne contient aucun courant de probabilité. Pour pousser l'analyse nous pouvons chercher à évaluer le courant  $J_2$  dans la barrière, c'est à dire en utilisant l'expression de  $\varphi_2$ .

On a ainsi :

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \frac{\hbar}{m} \Im(\varphi_2^*(x) \nabla \varphi_2(x)) \\ &= \frac{\hbar}{m} \Im((A_2^* e^{-\kappa x} + B_2^* e^{\kappa x})(-\kappa A_2 e^{-\kappa x} + \kappa B_2 e^{\kappa x})) \\ &= \frac{\hbar}{m} \Im((A_2^* e^{-\kappa x})(\kappa B_2 e^{\kappa x}) - (B_2^* e^{\kappa x})(\kappa A_2 e^{-\kappa x})) \\ &= \frac{2\hbar\kappa}{m} |A_0|^2 \Im(a_2^* b_2) \end{aligned}$$

où on a pu éliminer les deux termes en  $|A_2|^2$  et  $|B_2|^2$ , car ils étant réels, ils sont précisément associés à l'absence de courant dans une onde purement évanescante. De plus les termes qui restent ont la propriété remarquable de faire disparaître la dépendance en  $x$ , ce qui est requis puisque ce courant doit être constant.

Pour aller plus loin, il fait revenir aux équations (IV.4) pour déterminer les coefficients  $a_2$  et  $b_2$  dans la barrière. On obtient ainsi  $a_2 = \eta(1+q)t_B/2$  et  $b_2 = \eta^{-1}(1-q)t_B/2$ . Il vient alors, en utilisant le fait que  $q$  est imaginaire et donc  $(1+q^*) = (1-q)$  :

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \frac{2\hbar\kappa}{m} |A_0|^2 \frac{1}{4} \Im(\eta(1+q^*)t_B^* \times \eta^{-1}(1-q)t_B) \\ &= \frac{\hbar\kappa}{2m} |t_B|^2 |A_0|^2 \Im((1-q)^2) = \frac{\hbar\kappa}{2m} |t_B|^2 |A_0|^2 \Im(-2q) = \frac{\hbar\kappa}{m} |t_B|^2 |A_0|^2 \end{aligned}$$

qui est exactement le résultat attendu. Il apparaît ainsi que c'est le terme croisé entre les deux ondes évanescante et anti-évanescante qui a toutes les caractéristiques pour assurer le courant de probabilité : indépendance vis à vis de  $x$  et déphasage en  $a_2$  et  $b_2$  permettant que  $\Im(a_2^* b_2)$  soit non nul<sup>8</sup>.

**Ordres de grandeur** La longueur caractéristique de décroissance de l'onde évanescante pour un métal est en général donnée par son potentiel d'extraction, souvent note  $\Phi$  et qui est de l'ordre de quelques eV (variable selon la force de la liaison). Avec  $\Phi = 1$  eV, on obtient  $d_T = 1/(2\kappa) = (\hbar^2/8m\Phi)^{1/2} \approx 0.1$  nl.

---

8. On peut même aller plus loin en utilisant les expressions ci-dessus pour écrire :

$$\varphi_2(x) = a_2 e^{-\kappa x} + b_2 e^{\kappa x} \propto e^{-\kappa(x-a)} + \frac{1-q}{1+q} e^{\kappa(x-a)} = e^{-\kappa(x-a)} - r e^{\kappa(x-a)},$$

ce qui montre que l'amplitude de l'onde anti-évanescante, avec un rapport  $-r = (i\kappa - k)/(i\kappa + k)$  qui est exactement un coefficient de Fresnel, complexe, pour la *réflexion de l'onde évanescante* sur l'interface  $x = a$ . L'onde anti-évanescante, qui est nécessaire pour assurer un courant de probabilité, peut donc être interprétée comme une onde évanescante réfléchie.

**Généralisation** On peut utiliser la forme exponentielle plus simple pour étendre le domaine de validité des formules précédentes pour obtenir un ordre de grandeur raisonnable de la transmission tunnel (en fait du facteur exponentiel, le préfacteur étant plus délicat à évaluer) dans le cas où le potentiel de la barrière n'est pas constant.

**Limite de la barrière épaisse** Si la largeur  $a$  de la zone classiquement interdite (c'est-à-dire la largeur de la barrière à franchir) est très grande devant l'ordre de grandeur de  $\kappa^{-1}$ , on peut utiliser la limite exponentielle, c'est à dire la formule (IV.5). On admet que la barrière peut être décomposée en tranches de largeur  $\delta x$  dont chacune est une « micro-barrière », telle que  $V(x)$  soit « à peu près constant » sur la distance  $\delta x$ , que  $\delta x$  est assez grand pour être encore dans le domaine de la barrière épaisse. On postule enfin que la transmission totale est le produit des transmissions successives des micro-barrières on obtient :

$$\mathcal{T} \approx \prod_i e^{-2\kappa_i \delta x_i} = \exp \left( -2 \sum_i \kappa_i \delta x_i \right) \approx \exp \left( -2 \int_0^a \kappa(x) dx \right) \quad \text{où} \quad \kappa(x) = \sqrt{\frac{2m(V(x)-E)}{\hbar^2}} .$$

Cette approche a un côté paradoxal, et les hypothèses sont un peu étrange car elles négligent le rôle de l'onde réfléchie sur chaque marche...

**Limite semi-classique : approximation WKB** Dans la limite semi-classique (où le potentiel varie lentement à l'échelle de la longueur d'onde de de Broglie, ou ici  $\kappa^{-1}$  qui en tient lieu (soit  $\kappa'/\kappa^2 \ll 1$ ), la fonction d'onde peut être approchée par une exponentielle dont l'argument est l'action divisée par  $\hbar$  (cf. Appendice KV), aussi bien dans la zone classiquement autorisée que dans la zone classiquement interdite (mais loin des points de rebroussement où  $\kappa'/\kappa^2$  diverge). Ici il s'agit bien sûr d'une action généralisée au cas où elle est imaginaire :

$$\mathcal{S} = \int^x p(x) dx = i \int \hbar \kappa(x) dx .$$

Cette méthode conduit à exactement la même expression que ci-dessus mais lui fournit un fondement plus ferme, tout en précisant la limite de validité de l'approximation faite. Elle peut aussi fournir dans une analyse relativement délicate, la valeur à donner à la constante en préfacteur devant l'exponentielle.

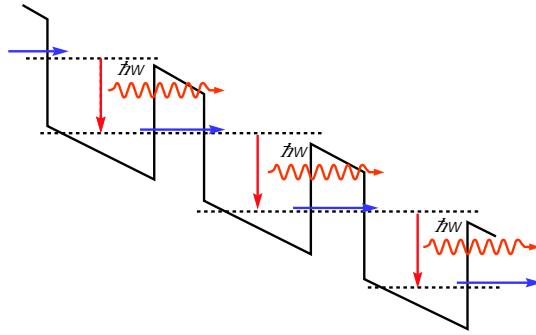
### IV.3.2 Exemples d'applications

La liste des situations dans lesquelles l'effet tunnel joue un rôle important est considérable. Nous étudions ci-dessous les applications importantes (i) au couplage de deux puits de potentiels, (ii) à la radioactivité  $\alpha$ , et (iii) au microscope à effet tunnel (STM).

Parmi celles que nous ne traiterons pas, on peut mentionner notamment l'extension de (i) aux systèmes de  $N > 2$  puits de potentiel, qui s'applique notamment aux molécules et à la théorie des bandes dans les solides, et celle de (ii) à l'ionisation des atomes en champ électrique, ou d'autres systèmes métastables. Dans le domaines des applications concrètes, on peut citer outre le STM, les diodes laser à cascade quantique (QCL), et les jonctions Josephson dans les supraconducteurs, etc.

#### IV.3.2 a) Couplage tunnel entre deux puits

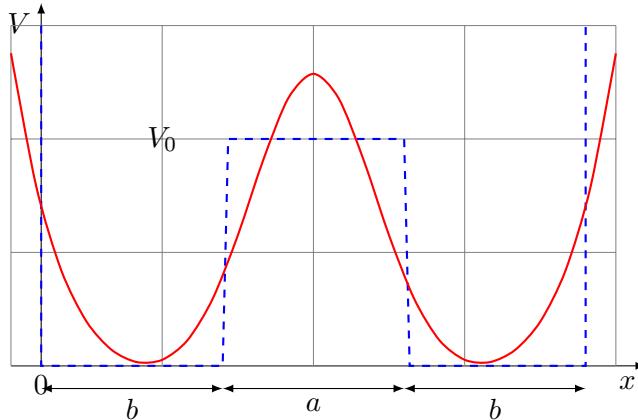
Lorsque un système présente un paysage énergétique comportant deux puits de potentiels adjacents, comme représenté par la courbe rouge sur la figure IV.6, la physique classique prédit, pour une énergie inférieure à la hauteur de la barrière qui les sépare, deux orbites distinctes et indépendantes. Au contraire en physique quantique, l'existence de l'effet tunnel prévoit que ces deux puits – dans la mesure où la barrière n'est pas trop haute ou trop large – communiquer et que par conséquent faudra considérer des états stationnaires qui occupent l'ensemble des deux puits. En effet, si on prépare un



**Fig. IV.5 –** Version simplifiée du principe de la diode à cascade quantique (QCL). Le trait noir continu présente le potentiel effectif vu par les électrons de conduction dans un multipuits quantique de semi-conducteur, polarisé en champ électrique. L'électron transite entre deux niveaux (quasi-)discrets des puits quantique (traits pointillés noir et flèches descendantes rouges) en émettant un photon. Grâce au champ électrique, le niveau fondamental est résonnant avec le niveau excité du puits voisin, et peut y accéder grâce à l'effet tunnel (flèche horizontale bleue).

état initialement localisé dans le puits de gauche, il va, par effet tunnel, « fuir » vers celui de droite et inversement.

Ce problème peut être traité de façon approchée en introduisant un potentiel constant par morceaux comme celui tracé en bleu sur la figure IV.6, et en considérant que l'effet tunnel est suffisamment faible pour être traité comme un terme correctif – bien que crucial – à la situation où les deux puits seraient isolés.



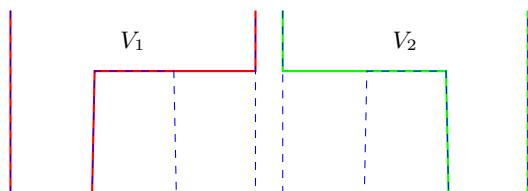
**Fig. IV.6 –** Exemple de double puits (trait continu rouge) et modélisation par un potentiel constant par morceaux (tirets bleus). Les paramètres caractéristiques : largeur des puits  $b$ , largeur de la barrière  $a$  et hauteur de celle-ci,  $V_0$  sont repérés sur la figure.

Pour étudier indépendamment le puits de gauche (défini par  $x \in [0, b]$ ) et le puits de droite (défini par  $x \in [b + a, 2b + a]$ ), nous allons dans un premier temps remplacer le potentiel modèle  $V(x)$  par deux potentiels  $V_1$  et  $V_2$  ne comportant qu'un seul puits, et nous désignerons par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les fonctions d'onde correspondant à l'état fondamental de ces deux puits. Les potentiels  $V_1$  et  $V_2$  sont définis par :

$$V_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ V_0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

$$V_2(x) = \begin{cases} V_0 & \text{si } x < b + a \\ 0 & \text{si } x > b + a \end{cases}$$

et ils sont représentés schématiquement sur la figure IV.7 ci-contre.



**Fig. IV.7 –** Potentiels avec puits à gauche et à droite

Dans le modèle puits adopté, l'utilisation de barrières infinies en  $x = 0$  et en  $x = 2b+a$  permet de réutiliser certains des résultats obtenus précédemment sur les puits fini et infini. Notamment, les conditions d'annulation  $\varphi_1(0) = 0$  et  $\varphi_2(2b+a) = 0$  sont à rapprocher du zéro central que l'on a pour les états impairs, et on pourra donc utiliser la fonction *sinus* pour la partie oscillante des modes. En revanche, cela introduit aussi une nouvelle condition, à savoir  $\varphi_1(2b+a) = \varphi_2(0) = 0$ , ce qui conduira à utiliser – en principe – la fonction *sinus hyperbolique* au lieu d'une simple exponentielle.

Pour l'étude de  $\varphi_1$ , on peut donc écrire :

$$\varphi_{1,I}(x) = A \sin(kx) \quad \text{et} \quad \varphi_{1,II}(x) = B \sinh(\kappa(2b+a-x))$$

avec les expressions usuelles de  $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ ,  $\kappa = \sqrt{2m(V_0-E)/\hbar^2}$  et  $K_0^2 = 2mV_0/\hbar^2 = k^2 + \kappa^2$ . La condition de raccordement, exprimée en termes des dérivées logarithmiques s'écrit ici :

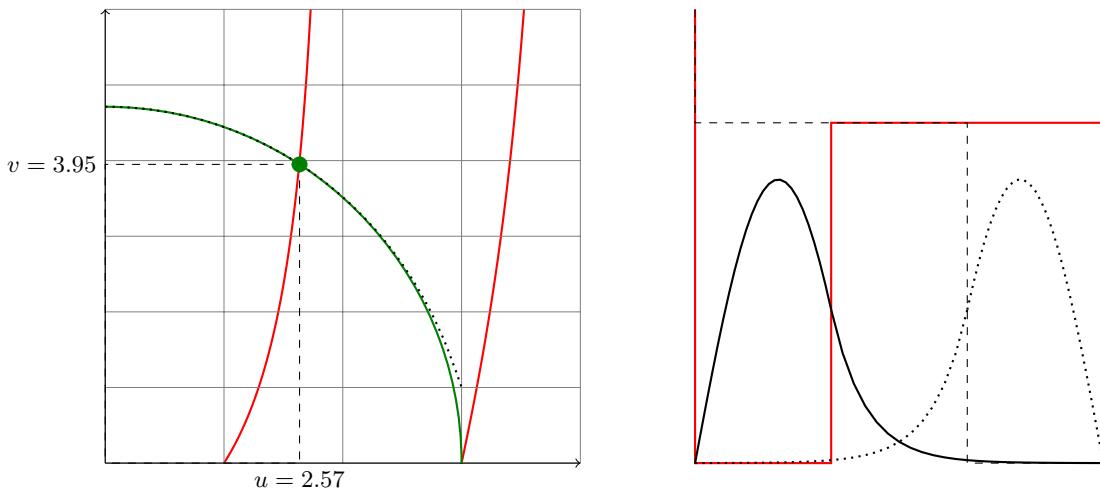
$$k \cotan(kb) = -\kappa \cotan h(\kappa(b+a)) \Rightarrow -k \cotan h(kb) \approx \kappa \quad (\text{IV.6})$$

car le régime dans lequel on se place permet de supposer que  $\cotan h(\kappa(b+a))$  a atteint sa valeur asymptotique 1, et cela indique qu'il n'y a alors plus de nécessité de faire jouer un rôle décisif à la condition d'annulation au bord de l'onde évanescente. Pour déterminer les valeurs de  $k$  et de  $\kappa$ , nous reprenons la méthode du § IV.2.3 relatif au puits fini.

*Pour tous les exemples numériques et les graphes qui suivent dans cette section nous nous plaçons dans le régime où les puits  $V_{1,2}$  sont au seuil d'avoir un second mode, ce qui correspond à  $W = K_0 b = 3\pi/2$  et nous nous concentrerons sur l'état fondamental. Nous supposons aussi par simplicité  $a = b$  pour que les recouvrements des deux fonctions d'ondes ne soit pas trop petits, mais les résultats physiques sont plus généraux et s'étendent notamment dans le régime le plus fréquent où  $e^{-\kappa a}$  est notablement plus faible.*

En multipliant l'équation (IV.6) par  $b$ , on est conduit à rechercher la première intersection de la courbe de  $-u \cotan(u)$  avec celle de  $v = \sqrt{W^2 - u^2}$  (coincem pour les états impairs de § IV.2.3).

Il n'est bien sûr pas nécessaire de reprendre l'étude pour  $\varphi_2$ , puisque le problème est entièrement symétrique autour du centre du puits,  $x_0 = b + a/2$ , ce qui nous a permis de tracer l'allure des modes  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sur la figure IV.8.



**Fig. IV.8** – À gauche, résolution graphique de l'équation de raccordement (IV.6), indiquant la valeur des paramètres  $u = kb$  et  $v = \kappa b$  pour  $W = K_0 b = 5\pi/2$  (l'axe horizontal est gradué en multiples de  $\pi/2$ ). À droite forme des modes  $\varphi_1(x)$  (et  $\varphi_2(x)$  en pointillés) et rappel des potentiel  $V_1(x)$  et  $V_2(x)$  (en unités arbitraires).

La suite de la démarche consiste à exprimer la matrice de la restriction  $H = p^2/2m + V(x)$  à l'espace engendré par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  (car les autres états sont trop éloignés en énergie

pour entrer en ligne de compte) et en rechercher les éléments propres. Toutefois on observe immédiatement que les deux états  $\varphi_{1,2}$  ainsi obtenus se recouvrent et ne sont clairement pas orthogonaux. Dans le cas présent, pour  $a = b$ , une fois les états normés, on trouve que  $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \approx 1\%$ . Aussi avant d'étudier l'énergie il est utile (et même indispensable) de transformer les vecteurs de base (que nous supposeront normés (avec  $A \approx \sqrt{2/b}$ , comme pour le puis infini) pour avoir une baser orthonormée. Afin de conserver la symétrie, plutôt que de garder  $\varphi_1$  et modifier  $\varphi_2$  (ou le contraire) il est préférable d'écrire la matrice  $Q$  de la forme quadratique  $\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle$  et de faire le changement de base qui la réduit à la matrice identité. Cette matrice, nécessairement hermitienne et ici réelle symétrique, s'écrit en posant  $q = \langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle$  :

$$Q = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q \\ q & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{de vecteurs propres } |\psi_{\pm}\rangle = \frac{|\varphi_1\rangle \pm |\varphi_2\rangle}{N_{\pm}}$$

où  $N_{\pm} = \sqrt{2(1 \pm q)}$  assure la normalisation, et on vérifie immédiatement que ces deux vecteurs sont orthogonaux.

On aurait pu obtenir ces mêmes vecteurs en considérant que la « parité » du hamiltonien  $H$  (par rapport à  $x_0$ ) permet de diagonaliser simultanément les deux opérateurs<sup>9</sup>, et que l'on doit donc considérer des états pairs et impairs, c'est à dire des combinaisons linéaires symétrique et antisymétrique de  $|\varphi_1\rangle$  et  $|\varphi_2\rangle$ , soit exactement  $|\psi_+\rangle$  et  $|\psi_-\rangle$ .

Ces deux états simplifient en outre la recherche des énergies, puisque par construction ils vérifient  $\langle \psi_{\pm} | H | \psi_{\mp} \rangle = 0$ , et on peut en déduire que les deux nouvelles énergies sont données simplement par  $E_{\pm} = \langle \psi_{\pm} | H | \psi_{\pm} \rangle$ , soit en utilisant  $H_1 |\varphi_1\rangle = E |\varphi_1\rangle$ , le caractère réel des fonctions et la symétrie :

$$\begin{aligned} E_{\pm} &= \frac{1}{N_{\pm}^2} (2\langle \varphi_1 | H | \varphi_1 \rangle \pm 2\langle \varphi_1 | H | \varphi_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{1 \pm \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle} (\langle \varphi_1 | H_1 + V - V_1 | \varphi_1 \rangle \pm \langle \varphi_1 | H_1 + V - V_1 | \varphi_2 \rangle) \\ &= \frac{1}{1 \pm \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle} + (E \pm E\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle + \langle \varphi_1 | V - V_1 | \varphi_1 \rangle \pm \langle \varphi_1 | V - V_1 | \varphi_2 \rangle). \end{aligned}$$

On observe que les termes dépendant de  $E$  font l'objet d'une simplification évidente. De plus, compte tenu de ce que  $V - V_1$  n'est non-nul que dans le puits de droite, où il constant égal à  $-V_0$ , on peut l'écrire  $V - V_1 = -V_0 \chi_2$ , où l'on a introduit la fonction caractéristique  $\chi_2$  du second puits<sup>10</sup>. Il vient alors :

$$E_{\pm} = E + \frac{-V_0 \langle \varphi_1 | \chi_2 | \varphi_1 \rangle \mp V_0 \langle \varphi_1 | \chi_2 | \varphi_2 \rangle}{1 \pm \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle} \tag{IV.7}$$

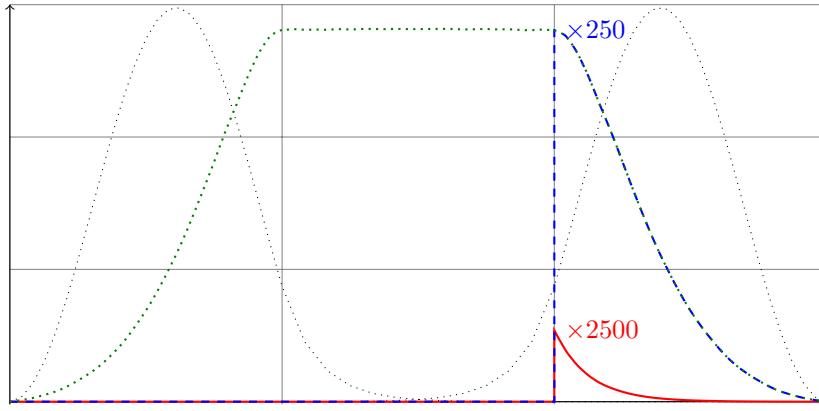
et il reste donc à évaluer les trois intégrales  $\langle \varphi_1 | \chi_2 | \varphi_1 \rangle$ ,  $\langle \varphi_1 | \chi_2 | \varphi_2 \rangle$  et  $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle$  où le graphe des fonctions à intégrer est représenté sur la figure IV.9.

On constate sans peine que la partie de  $\varphi_1^2$  qui est dans zone du puits de droite est extrêmement petite : son intégrale est essentiellement de l'ordre de  $e^{-2\kappa a}/\kappa b$ . Celle de  $\varphi_1 \times \varphi_2$ , bien que petite, est bien plus grande que la précédente, et son intégrale est de l'ordre de  $\kappa e^{-\kappa a}/K_0 b$ ; de la même façon,  $\langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle$ , puisqu'elle fait aussi intervenir le produit  $\varphi_1 \times \varphi_2$  a la même dépendance en  $e^{-\kappa a}$ .

Si on reporte ces ordres de grandeur relatifs dans l'expression (IV.7) des énergies, on peut (i) négliger le termes du second ordre (c'est-à-dire en  $e^{-2\kappa a}$ ), qui ne représente qu'un changement infime de l'énergie moyenne, (ii) négliger au dénominateur le terme  $\propto e^{-\kappa a}$  qui n'apporte pas de physique particulière et peut de toute façon être absorbé

9. Ici il ne s'agit pas exactement de la parité  $\Pi$ , puisque le centre de symétrie est en  $x_0 = b + a/2$  et pas en zéro, mais plutôt la « symétrie »  $\Pi + 2x_0 \mathbb{1}$

10. C'est par définition la fonction valant 1 sur le second puits (ici  $x \in [b + a, 2b + a]$ ) et 0 en dehors.



**Fig. IV.9 – Fonctions à intégrer pour le calcul des éléments de matrice :**

- pour  $\langle \varphi_1 | \chi_2 | \varphi_1 \rangle$ , multipliée par 2500, en trait continu rouge,
  - pour  $\langle \varphi_1 | \chi_2 | \varphi_2 \rangle$ , multipliées 250, en tirets bleus.
  - pour  $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle$ , multipliées 250, en pointillés verts.
- En pointillés noirs, rappel des fonctions  $\varphi_1^2$  et  $\varphi_2^2$ , sans facteur multiplicatif.

dans une redéfinition de la constante  $V_0$ . Mais il faut conserver le terme du premier ordre au numérateur, ce qui donne enfin :

$$E_{\pm} = E \mp V_0 \langle \varphi_1 | \chi_2 | \varphi_2 \rangle .$$

On obtient ainsi une scission du niveau d'énergie fondamental, qui est dégénéré en l'absence de couplage tunnel, en deux niveaux séparés par une différence d'énergie  $\Delta E = 2\hbar\Omega$  qui varie en  $e^{-\kappa a}$  (et pas en  $e^{-2\kappa a}$  comme la transmission tunnel, car il s'agit d'un effet d'interférence). De plus, comme  $V_0$  est positif (même si on tient compte du dénominateur en  $1 \pm \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle$  qui est lui-même positif), on observe que c'est l'état symétrique  $|\psi_+\rangle$  qui est le nouvel état fondamental, ce qui est attendu car l'état antisymétrique  $|\psi_-\rangle$  possède un nœud en  $x_0$  et possède donc une énergie cinétique (très légèrement) supérieure.

Si on écrit maintenant l'évolution temporelle d'un système préparé initialement dans un état  $|\psi(0)\rangle = \alpha|\psi_+\rangle + \beta|\psi_-\rangle$  on a :

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \alpha e^{-iE_+t/\hbar} |\psi_+\rangle + \beta e^{-iE_-t/\hbar} |\psi_-\rangle \\ &= e^{-iEt/\hbar} (\alpha e^{-i\Omega t/2} |\psi_+\rangle + \beta e^{+i\Omega t/2} |\psi_-\rangle) \end{aligned}$$

La probabilité d'être dans l'état  $|\varphi_1\rangle$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(t) &= |\langle \varphi_1 | \psi(t) \rangle|^2 = \left| \alpha e^{-i\Omega t/2} \langle \varphi_1 | \psi_+ \rangle + \beta e^{+i\Omega t/2} \langle \varphi_1 | \psi_- \rangle \right|^2 \\ &\approx \left| \frac{\alpha e^{-i\Omega t/2} + \beta e^{+i\Omega t/2}}{\sqrt{2}} \right|^2 \end{aligned}$$

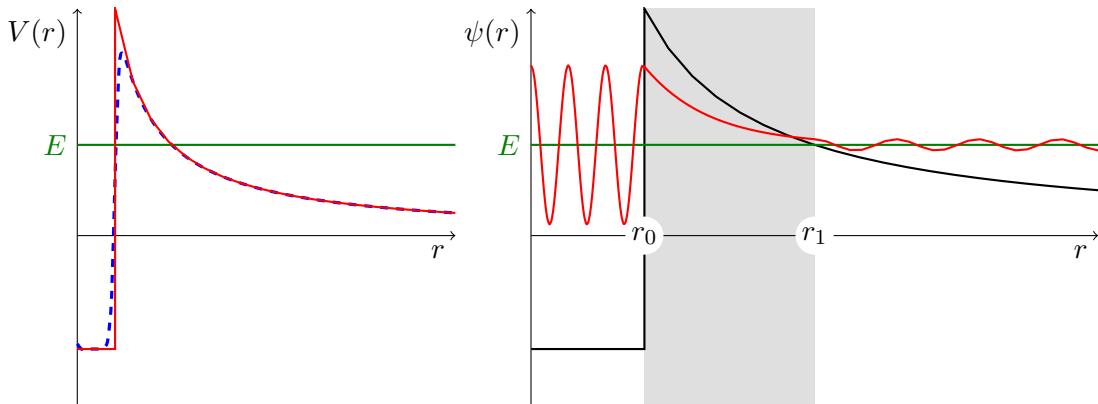
Si  $\alpha = 1$  ou  $\beta = 1$  cette quantité est constante, ce qui est caractéristique d'un état stationnaire. Si au contraire on a  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ , c'est à dire que l'on a préparé le système dans l'état  $|\psi(0)\rangle = (|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle)/\sqrt{2} = |\varphi_1\rangle$ , alors on a :

$$\mathcal{P}_1(t) = \left| \frac{e^{-i\Omega t/2} + e^{+i\Omega t/2}}{2} \right|^2 = \cos^2(\Omega t/2) = \frac{1 + \cos(\Omega t)}{2} \quad \text{et de même} \quad \mathcal{P}_2(t) = \frac{1 - \cos(\Omega t)}{2} .$$

Ce qui montre que le système oscille entre l'état  $|\varphi_1\rangle$  et l'état  $|\varphi_2\rangle$  à la nouvelle fréquence de Bohr  $\Omega = V_0 \langle \varphi_1 | \chi_2 | \varphi_2 \rangle / \hbar$ . Si on calcule le taux de fuite  $\eta$  de l'état  $|\varphi_1\rangle$  vers l'état l'état  $|\varphi_2\rangle$  en regardant les résultats précédents à des temps courts devant la période  $T = 2\pi/\Omega$ , on obtient  $\eta \sim \frac{\Omega^2 t^2}{4}$  ce qui prouve que ce taux dépend de  $a$  comme  $\Omega^2$ , c'est-à-dire comme  $\langle \varphi_1 | \chi_2 | \varphi_2 \rangle^2$ , et donc en  $e^{-2\kappa a}$  comme le coefficient de transmission tunnel<sup>11</sup>.

11. Notons que ce modèle simplifié permet une résolution exacte, tirant parti de la parité du potentiel, ce

### IV.3.2 b) Théorie de Gamow de la radioactivité $\alpha$



**Fig. IV.10** – À gauche, potentiel vu par la particule  $\alpha$  (en tirets un potentiel physique, en rouge celui du modèle de Gamow). A droite, allure de la fonction d'onde dans ce modèle.

La loi de GEIGER et NUTTALL relative au temps de vie des noyaux lourds qui se désintègrent par émission  $\alpha$ , porte le nom des auteurs qui l'ont publiée en 1911 dans un article fameux[41]. Il s'agissait alors d'une loi phénoménologique qui a été interprétée en 1928, dans le cadre quantique, par G. GAMOW[42].

Dans le modèle de Gamow, on suppose que la particule  $\alpha$  qui est émise par le noyau radioactif qui se désintègre est préformée dans le noyau. Tant qu'elle est au contact de celui-ci, elle subit l'interaction forte qui la confine étroitement. Si elle s'en éloigne un peu, l'interaction forte s'évanouit, et la particule  $\alpha$  est soumise au potentiel coulombien répulsif du noyau fils, qui est très élevé car la distance de transition est de l'ordre de quelques dizaines de femtomètres. Ce potentiel, qui a la forme qualitative de la courbe en tirets bleus sur la figure IV.10 sera modélisé par celui de la courbe rouge. Il n'est guère nécessaire de connaître le détail du mouvement dans le puits (mal connu en 1928) de l'interaction forte, car pour le calcul de la transition tunnel, seule compte l'énergie, qui est mesurée de l'extérieur.

En supposant que le problème est essentiellement à une dimension, le taux de transition tunnel est de l'ordre de  $\Omega(E) \exp(-2 \int_{r_0}^{r_1} \kappa(r) dr)$ , où les bornes de l'intégrale sont les points de rebroussement, intérieur  $r_0$  et extérieur  $r_1$ , et où  $\Omega$  est la fréquence de Bohr dans le noyau. Le potentiel entre  $r_0$  et  $r_1$  (en au delà de  $r_1$ ) est à une très bonne approximation près le potentiel coulombien qui s'écrit, en notant  $Z_\alpha = 2$  et  $Z_D$  les numéros atomiques de la particule  $\alpha$  et du noyau fils ( $D=\text{decay}$ )

$$V(r) = \frac{K}{r} \quad \text{ou} \quad K = \frac{q^2 Z_\alpha Z_D}{4\pi\epsilon_0}$$

---

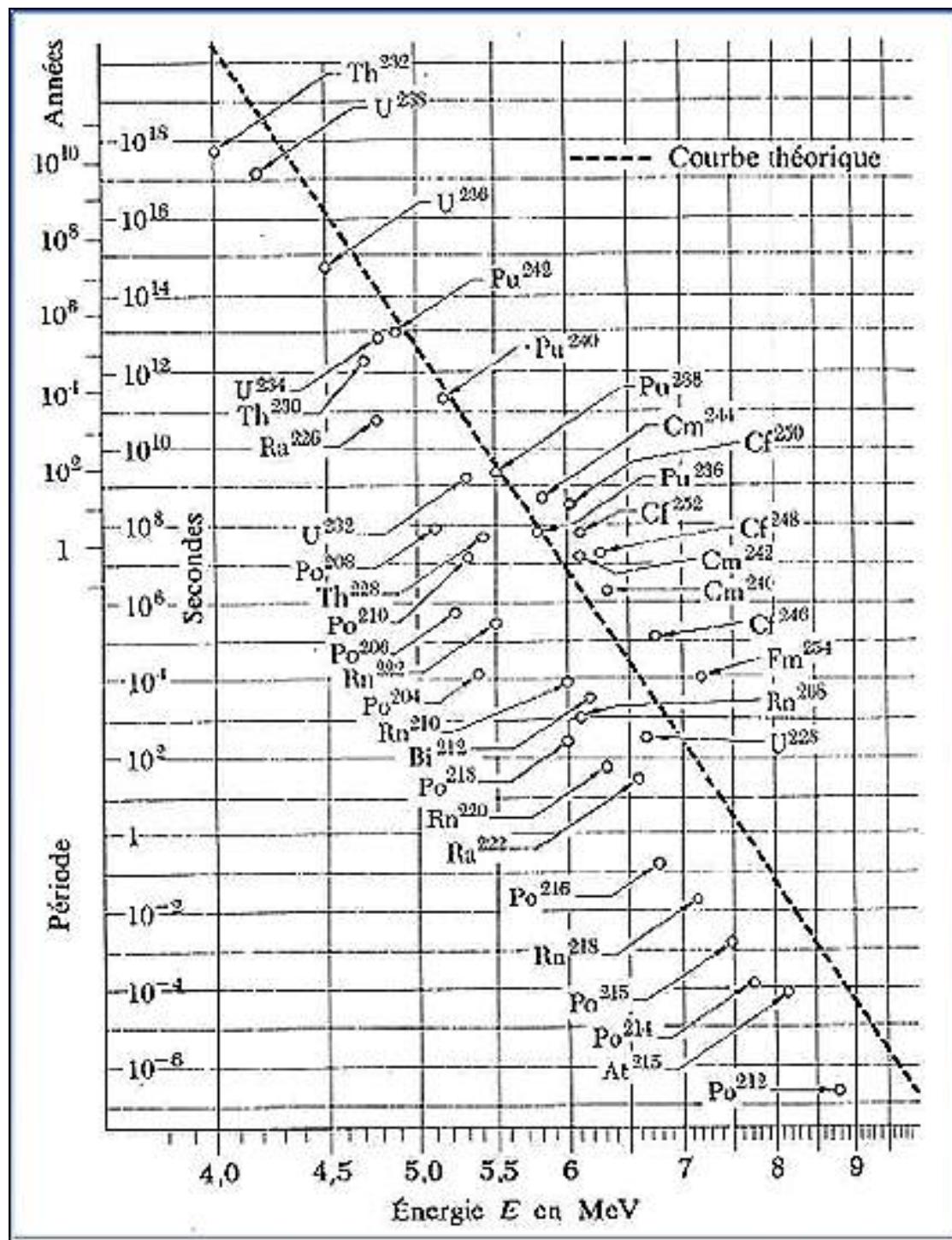
qui permet d'écrire l'onde dans la barrière sous la forme d'un *cosinus hyperbolique* pour les états pairs et d'un *sinus hyperbolique* pour les états impairs, avec toujours des ondes en *sinus* dans les deux régions classiquement autorisées. Les équations de raccordement prennent alors la forme :

$$\text{Pairs : } -k \cotan(kb) = \kappa \tanh(\kappa a/2) \quad \text{Impairs : } -k \cotan(kb) = \kappa \coth(\kappa a/2).$$

L'équation relative aux états impairs est très proche de celle que nous avions obtenue dans la modélisation du potentiel  $V_1$ , et pour laquelle nous avions supposé que  $\cotanh(\kappa(b+a))$  était de l'ordre de 1. Dans le même esprit, on a ici  $\coth(\kappa a/2) \approx \tanh(\kappa a/2) \approx 1$ , mais si on les identifie, on va trouver les mêmes  $k$  et  $\kappa$  pour les deux parités. C'est ce qui est attendu puisque cette approximation revient à négliger le couplage tunnel, et on a alors deux états dégénérés. Si on prend cette valeur commune comme référence, on peut alors tenir compte de la différence  $(\coth(\kappa a/2) - \tanh(\kappa a/2)) \approx 4e^{-\kappa a}$ . On voit ainsi que la différence de  $k$  entre états pairs et impairs est proportionnelle à  $e^{-\kappa a}$ , et il en est de même pour leur énergie, et c'est précisément ce que nous avons obtenu ci-dessus.

[41] H. GEIGER & J. NUTTALL ; «The ranges of the  $\alpha$  particles from various radioactive substances and a relation between range and period of transformation» ; *Phi. Mag.* **22**, p. 613–621 (1911).

[42] G. GAMOW ; «Zur Quantentheorie des Atomkernes» ; *Z. Physik* **51**, p. 204–212 (1928).

Fig. IV.11 – Tracé de  $\ln(\Gamma)$  en fonction de  $1/\sqrt{E}$ .

Le point extérieur  $r_1$  est caractérisé par l'annulation de l'énergie cinétique, soit :

$$E = V(r_1) \Rightarrow r_1 = \frac{K}{E}$$

et l'exposant  $\mathcal{I}$  s'écrit alors<sup>12</sup> :

$$\mathcal{I} = 2 \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{2M}{\hbar^2} \left( \frac{K}{r} - \frac{K}{r_1} \right)} dr = \frac{2r_1 \sqrt{2ME}}{\hbar} \underbrace{\int_{r_0}^1 \sqrt{\frac{1}{u} - 1} du}_{I(r_0/r_1)} = \frac{2K}{\hbar} \sqrt{\frac{2M}{E}} \left( \arccos \left( \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \right) - \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}} \right)$$

Comme  $E = Mv^2/2$ , la racine dans le dernier terme de cette équation est simplement  $2/v$ . De plus,

$$\Omega(E) \approx \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dn} \approx \frac{dE}{dI} \approx \frac{v}{2r_0} = \frac{q}{2r_0} \sqrt{\frac{2E}{Mq^2}}$$

Nous pouvons observer que  $r_0/r_1$  étant extrêmement petit, on a donc  $\arccos(\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}) \approx \pi/2 - \sqrt{\frac{r_0}{r_1}}$ , et il vient pour finir :

$$\Gamma = \frac{q}{r_0} \sqrt{\frac{2E}{Mq^2}} \exp \left( -2\pi \frac{K}{\hbar v} + \frac{1}{\hbar} \sqrt{32KM}r_0 \right)$$

et donc on obtient la loi attendue :

$$\ln(\Gamma) = \ln(\Omega) + \frac{1}{\hbar} \sqrt{32KM}r_0 - 2\pi \frac{K/\hbar}{v} = a(Z) - \frac{b}{\sqrt{E}}$$

Les mesures expérimentales sont données sur la figure IV.11. Il y a visiblement des effets correctifs à ce modèle, mais la loi est globalement vérifiée, et cela sur 24 ordres de grandeur!!!!

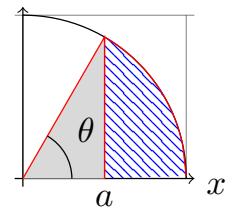
#### IV.3.2 c) Le microscope à effet tunnel

---

*A venir*

---

12.  $I(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{1}{u} - 1} du = \int_x^1 \sqrt{\frac{1-u}{u}} du \xrightarrow{u=v^2} 2 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1-v^2} dv$  et cette intégrale est une classique. On peut l'obtenir de façon géométrique en considérant le cercle unité : l'aire recherchée est l'aire hachurée, qui est l'aire  $\theta/2$  du secteur d'angle  $\theta = \arccos(a)$  moins celle du triangle grisé qui s'écrit  $\cos \theta \sin \theta/2 = a\sqrt{1-a^2}/2$ . D'où  $I(x) = \arccos(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\sqrt{1-x}$



# V – Quantification du moment cinétique

## Sommaire

---

<b>V.1 Théorie générale</b>	91
V.1.1 Introduction	91
V.1.2 Construction de la base standard	92
V.1.2 a) Choix d'un ECOC	92
V.1.2 b) Opérateurs d'échelle	92
V.1.2 c) Valeurs possibles de $\lambda$ et $\mu$	93
V.1.2 d) Résultat	94
<b>V.2 Application au spin 1/2</b>	94
V.2.1 Base standard et matrices de Pauli	94
<b>V.3 Harmoniques sphériques</b>	95
V.3.1 Contexte : particule dans un potentiel central	95
V.3.2 Définitions et propriétés	96
V.3.2 a) Définition des harmonique sphériques	96
V.3.2 b) Propriétés	96
V.3.2 c) Exemples	98
<b>V.4 L'atome d'hydrogène</b>	98
V.4.1 Retour sur le potentiel central	98
V.4.1 a) Équation radiale générale	98
V.4.1 b) Formes asymptotiques	99
V.4.2 Équation radiale pour l'atome d'hydrogène	100
V.4.2 a) Changements de fonction	100
V.4.2 b) Comportement asymptotique et quantification	101
V.4.2 c) Conséquences	101
V.4.3 Récapitulation	102
V.4.4 Effet d'entraînement du noyau	102

---

## V.1 Théorie générale

### V.1.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre III que le moment cinétique orbital  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$  d'une particule satisfait aux relations de commutation<sup>1</sup> :

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \mathbf{L}_k$$

Les crochets de Poisson des variables classiques correspondantes satisfont exactement aux mêmes relations ( $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k$ ). En fait ces relations ne dépendent pas de la nature du moment cinétique, mais découlent de ce que  $\mathbf{L}$  est le générateur des rotations (pour la particule sans spin), et elles reflètent donc simplement la structure du groupe  $SO_3$ . Le moment cinétique  $\mathbf{S}$  propre d'un électron ou d'un noyau, appelé spin, obéit aux mêmes lois, ainsi que la somme  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$  dans un atome.

1. Que l'on peut aussi écrire  $[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = i\hbar \mathbf{L}_3$  en ajoutant que cette relation est invariante par permutation circulaire des indices (1, 2, 3), ou encore sous forme condensée  $\mathbf{L} \wedge \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L}$

Nous appellerons donc « moment cinétique » toute observable vectorielle  $\mathbf{J}$  dont les composantes satisfont à ces relations de commutation. L'objet de ce chapitre est de construire une base d'états, dite « base standard », satisfaisant un certain nombre de propriétés communes découlant simplement de ces relations de commutation. Dans second temps nous appliquerons plus spécifiquement ces méthodes générales au moment cinétique *orbital* afin de mettre en évidence les fonctions d'onde associées. Enfin, nous utiliserons ces résultats pour étudier les propriétés générales du mouvement à force centrale, et plus spécifiquement le cas de l'atome d'hydrogène.

### V.1.2 Construction de la base standard

#### V.1.2 a) Choix d'un ECOC

Il n'est pas possible de diagonaliser simultanément les trois composantes (ni même deux d'entre elles) en raison de leur non-commutation. En revanche, il est aisément de voir que l'observable  $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  commute avec les trois composantes de  $\mathbf{J}$  (on dit alors que  $\mathbf{J}^2$  est une observable « scalaire »)<sup>2</sup>. Une base standard est une base qui diagonalise simultanément  $\mathbf{J}^2$  et la projection de  $\mathbf{J}$  sur un axe quelconque, que nous pouvons toujours définir comme l'axe  $z$  d'un repère orthonormé. Cet axe sera appelé « axe de quantification » ; dans les applications il sera souvent imposé par la symétrie moindre du hamiltonien, qui peut par exemple n'avoir qu'une symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ . Nous allons donc rechercher des bases de diagonalisation simultanée de  $\mathbf{J}^2$  et  $J_z$  dont les valeurs propres respectives seront notées<sup>3</sup>  $\lambda(\lambda+1)\hbar^2$  et  $\mu\hbar$ .

Le choix d'une telle base ne suffit généralement pas à fixer un unique vecteur d'état caractérisé par les deux valeurs propres. C'est notamment le cas pour une particule matérielle, pour laquelle il faut généralement spécifier une troisième observable relative à son mouvement, et le cas échéant des variables de spin. Il faut former un ECOC, c'est à dire choisir, parmi les variables dynamiques possibles, un groupe de variables qui commutent entre elles ainsi qu'avec  $\mathbf{J}^2$  et  $J_z$ . Nous noterons l'ensemble de ces variables sous la forme générique  $K$ , associées à un ensemble de nombres quantiques  $k$ . Nous allons alors étudier la diagonalisation simultanée de  $\mathbf{J}^2$  et  $J_z$  dans un sous-espace  $\mathcal{E}_k$  associé à une valeur de  $k$ .

Les états recherchés peuvent être représentés par l'ensemble de valeurs propres qui les caractérisent, et peuvent être notés  $|k, \lambda(\lambda+1)\hbar^2, \mu\hbar\rangle$ , ou plus simplement  $|k, \lambda, \mu\rangle$ . Nous allons établir ci-dessous que  $2\lambda$  et  $2\mu$  sont donnés par des entiers vérifiant un certain nombre de conditions.

Notons que chacun des opérateurs  $J_i^2$  est un opérateur positif, et comme  $\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ , on a  $\mathbf{J}^2 \geq J_z^2 \geq 0$ . Cela assure que les valeurs propres de  $\mathbf{J}^2$  peuvent effectivement être écrites  $\lambda(\lambda+1)\hbar^2$  avec  $\lambda$  réel positif ou nul<sup>4</sup>. On en déduit que les nombres  $\lambda$  et  $\mu$  vérifient  $\mu^2 \leq \lambda(\lambda+1)$  soit  $-\sqrt{\lambda(\lambda+1)} \leq \mu \leq \sqrt{\lambda(\lambda+1)}$  et donc *a fortiori* :

$$-(\lambda + \frac{1}{2}) \leq \mu \leq (\lambda + \frac{1}{2}) \quad (\text{V.1})$$

#### V.1.2 b) Opérateurs d'échelle

Il est utile pour ce qui suit de remplacer les opérateurs  $J_x$  et  $J_y$  par les deux opérateurs :

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad \text{et} \quad J_- = J_+^\dagger = J_x - iJ_y$$

2. On a en effet  $[J_i J_j, J_k] = J_i [J_j, J_k] + [J_i, J_k] J_j = i\hbar \varepsilon_{ijk} (J_i J_k + J_k J_i)$  ce commutateur est la contraction du tenseur antisymétrique  $\varepsilon_{ijk}$  avec le tenseur symétrique qui figure dans la parenthèse. Le résultat est donc nul.

3. Le choix de  $\lambda^2\hbar^2$  serait bien plus naturel que  $\lambda(\lambda+1)\hbar^2$ , mais il conduit à des calculs nettement plus compliqués, pour aboutir au même résultat.

4. Tout réel positif ou nul  $x$  se met sous la forme  $\lambda(\lambda+1)$  en posant  $\lambda = \sqrt{x + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \geq 0$

$$\begin{array}{c}
 \xleftarrow{\hspace{1cm}} \quad k = 0 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \xleftarrow{\hspace{1cm}} \quad k = 1 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}}
 \end{array}
 \\
 \mathbf{J}_z = \left( \begin{array}{c|cc|ccc|c|cc|ccc}
 0 & & & & & & & & & & & \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & 0 & & & & & & & & & \\
 & 0 & -\frac{1}{2} & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & -1 & & & & & & \\
 \hline
 & & & \frac{1}{2} & 0 & & & & & & & \\
 & & & 0 & -\frac{1}{2} & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & -1 & & & & \\
 \hline
 & & & & & & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & & \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & & 
 \end{array} \right)$$

**Fig. V.1** – Exemple de structure de la matrice  $\mathbf{J}_z$  en supposant qu'il existe deux valeurs de  $k$ , et que  $k = 0$  corresponde à  $j = 0, 1/2$  et  $1$ , et  $k = 1$  à  $j = 1/2, 1$  et  $3/2$ . Les éléments non remplis sont tous égaux à zéro.

qui sont appelés « opérateurs d'échelle » pour des raisons qui apparaîtront bientôt. On prouve aisément les relations :

$$\mathbf{J}_{\pm}\mathbf{J}_{\mp} = \mathbf{J}_x^2 + \mathbf{J}_x^2 \pm \hbar\mathbf{J}_z = \mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_z^2 \pm \hbar\mathbf{J}_z \quad \text{et} \quad [\mathbf{J}_+, \mathbf{J}_-] = 2\hbar\mathbf{J}_z \quad (\text{V.2})$$

Les opérateurs  $\mathbf{J}^2$ ,  $\mathbf{J}_z$  et  $\mathbf{J}_{\pm}$  vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_{\pm}] = 0 \quad (\text{V.3a})$$

$$[\mathbf{J}_z, \mathbf{J}_{\pm}] = \pm\hbar\mathbf{J}_z \quad (\text{V.3b})$$

Considérons alors un vecteur quelconque  $|k, \lambda, \mu\rangle$  donné. La relation (V.3a) permet d'affirmer que le vecteur  $|\psi_+\rangle = \mathbf{J}_+|k, \lambda, \mu\rangle$  vérifie  $\mathbf{J}^2|\psi_+\rangle = \lambda(\lambda+1)\hbar^2|\psi_+\rangle$ , c'est à dire que  $\lambda$  est inchangé, et (V.3b) permet de montrer que  $\mathbf{J}_z|\psi_+\rangle = (\mu+1)\hbar|\psi_+\rangle$ . Cela signifie que  $|\psi_+\rangle$  est proportionnel au vecteur  $|k, \lambda, \mu+1\rangle$ , s'il existe<sup>5</sup>. De même, le vecteur  $|\psi_-\rangle = \mathbf{J}_-|k, \lambda, \mu\rangle$  est proportionnel au vecteur  $|k, \lambda, \mu-1\rangle$ , s'il existe. Les opérateurs d'échelle font donc augmenter ou diminuer d'une unité la valeur de  $\mu$ , comme s'ils faisaient gravir ou descendre les barreaux d'une échelle, d'où leur nom.

### V.1.2 c) Valeurs possibles de $\lambda$ et $\mu$

L'application réitérée de  $\mathbf{J}_+$  permet semble-t-il d'augmenter  $\mu$  indéfiniment à  $\lambda$  constant (et inversement avec  $\mathbf{J}_-$ ), ce qui (dans les deux cas) est en contradiction avec le fait que  $|\mu|$  soit borné, comme indiqué par (V.1). Cette contradiction n'en est plus une si il se trouve que l'échelle soit limitée en hauteur, c'est-à-dire qu'arrivé au dernier barreau on ne puisse plus monter avec  $\mathbf{J}_+$ , et que sur un autre barreau on ne puisse plus descendre avec  $\mathbf{J}_+$ . En pratique, la seule façon d'interrompre l'échelle est que les vecteurs  $|\psi_{\pm}\rangle$ , qui vérifient dans tous les cas  $\mathbf{J}_z|\psi_{\pm}\rangle = (\mu \pm 1)|\psi_{\pm}\rangle$ , soient nuls. Pour étudier cette condition, nous allons calculer la norme des vecteur  $\mathbf{J}_{\pm}|k, \lambda, \mu\rangle$ . En utilisant (V.2) on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_{\pm}^2(\mu) &= \|\mathbf{J}_{\pm}|k, \lambda, \mu\rangle\|^2 = \langle k, \lambda, \mu | \mathbf{J}_{\mp} \mathbf{J}_{\pm} | k, \lambda, \mu \rangle \\
 &= \langle k, \lambda, \mu | \mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_z^2 \pm \hbar\mathbf{J}_z | k, \lambda, \mu \rangle = (\lambda(\lambda+1) - \mu^2 \pm \mu)\hbar^2 \langle k, \lambda, \mu | k, \lambda, \mu \rangle .
 \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

5. C'est ici qu'intervient le fait que la donnée de  $k$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  détermine un ket unique (à un facteur multiplicatif près) et que  $\mathbf{J}_{\pm}$  commute avec  $\mathbf{J}^2$  et  $\mathbf{K}$ .

les valeurs extrémales de  $\mu$  sont alors telles que  $\mathcal{N}_+^2(\mu_{\max}) = 0$  et de  $\mathcal{N}_-^2(\mu_{\min}) = 0$ , soit

$$\mu_{\min}(\mu_{\min} - 1) = \mu_{\max}(\mu_{\max} + 1) = \lambda(\lambda + 1)$$

Chacune de ces deux équations possède deux solutions réelles, dont une seule acceptable car elle est dans l'intervalle  $[-(\lambda + \frac{1}{2}), (\lambda + \frac{1}{2})]$ . On obtient ainsi les valeurs  $\mu_{\max} = -\mu_{\min} = \lambda$ .

On en déduit que les états extrêmes en  $J_z$  sont de la forme  $|k, \lambda, \lambda\rangle$  et  $|k, \lambda, -\lambda\rangle$ . On doit en outre pouvoir passer de  $|k, \lambda, -\lambda\rangle$  à  $|k, \lambda, \lambda\rangle$  en appliquant un certain nombre de fois l'opérateur  $J_+$ . En d'autres termes, il doit exister un entier naturel  $n$  tel que  $(J_{\pm})^n |k, \lambda, \mp\lambda\rangle \propto |k, \lambda, \pm\lambda\rangle$ . On peut alors en déduire que  $n = 2\lambda \in \mathbb{N}$ , ce qui signifie de  $\lambda$  est soit un entier, soit un demi-entier, positif ou nul. Comme  $\mu$  prend les valeurs extrêmes  $\pm\lambda$ , on en déduit que  $\mu$  est entier ou demi-entier en même temps que  $\lambda$ , et que  $-\lambda \leq \mu \leq \lambda$ .

### V.1.2 d) Résultat

En définitive, on a établi qu'une base qui vérifie l'ensemble des conditions imposées par les conditions de commutation et la positivité des  $J_i^2$  est caractérisée par un nombre entier ou demi-entier  $j = n/2$  (avec  $\lambda = j$ ) tel que la base recherchée doit composée des  $2j + 1$  états :

$$|k, j, -j\rangle \quad |k, j, -j + 1\rangle, \quad \dots \quad |k, j, m\rangle \quad \dots \quad |k, j, j\rangle$$

avec  $m$  entier ou demi-entier, variant par pas de 1, de  $-j$  à  $j$ , vérifiant  $J^2 |k, j, m\rangle = j(j + 1)\hbar^2$  et  $J_z |k, j, m\rangle = m\hbar |k, j, m\rangle$ . Compte tenu de (V.4), et en n'introduisant pas de facteurs de phase superflu, ces vecteurs sont en outre liés par les conditions<sup>6</sup> :

$$J_{\pm} |k, j, m\rangle = \hbar \sqrt{j(j + 1) - m(m \pm 1)} |k, j, m \pm 1\rangle \quad \text{pour } m \in \{-j, \dots, j\},$$

étant entendu que si  $m = \pm j$ , la racine carrée s'annule, et donc le ket obtenu aussi, ce qui ne nécessite donc pas de considérer  $|k, j, \pm(j + 1)\rangle$  qui n'existe pas. Notons tout de même que le choix de phase fait ici est lié à la direction choisie pour l'axe  $x$  : une rotation dans le plan  $x-y$  autour de  $z$  d'un angle  $\theta$  induit un déphasage de  $e^{im\theta}$  sur les vecteurs de la base standard.

Bien sûr, dans le cas le plus général, rien ne fixe la valeur de  $j$ , et l'espace  $\mathcal{E}_k$  serait alors décomposé en une somme directe de « multiplicités » (sev) de moment  $j$  bien définies. Toutefois, nous avons supposé que l'ajout de  $k$  suffisait pour avoir un ECOC, ce qui implique que dans chaque  $\mathcal{E}_k$ , une valeur de  $j$  apparaît au plus une fois.

La structure ainsi mise en évidence donne par exemple à la matrice de  $J_z$  la forme représentée par l'équation de la figure V.1.

## V.2 Application au spin 1/2

### V.2.1 Base standard et matrices de Pauli

La notion de spin 1/2, généralement noté  $\mathbf{S}$ , fait référence à une situation où le nombre  $j$  prend la valeur non-nulle minimale  $j = 1/2$ . On a alors un espace à  $2j + 1 = 2$  dimensions, engendré par les deux états  $|_{\frac{1}{2}}, +\frac{1}{2}\rangle$  et  $|_{\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}\rangle$ , qui sont vecteurs propres de l'observable  $\mathbf{S}^2$  avec la valeur propre  $j(j + 1)\hbar^2 = 3/4\hbar^2$ , et de  $S_z$  avec les valeurs propres  $+\hbar/2$  et  $-\hbar/2$  respectivement. Ces états sont souvent notés  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$ , ou  $|\uparrow\rangle$  et  $|\downarrow\rangle$ , ou encore  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$  en informations quantique.

---

6. Ces conditions sont les plus simples permettant que les ket soient normés en accord avec (V.4).

Dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ , les trois composantes  $S_i$  sont représentées par les trois matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ce qui est généralement exprimé soit la forme  $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$  où  $\boldsymbol{\sigma}$  est un opérateur vectoriel dont les composantes sont  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$ .

Ces matrices de Pauli peuvent être construites en observant que  $\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$  ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, et que dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  les opérateurs  $S_{\pm}$  s'écrivent simplement :

$$S_+ = \hbar |+\rangle\langle -| = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_- = \hbar |-\rangle\langle +| = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

d'où

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles vérifient de nombreuses relations utiles, qui peuvent être condensées en :

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i \varepsilon_{ijk} \sigma_k.$$

et qui sont d'un intérêt particulier notamment parce que le système le plus simple en mécanique quantique est le « système à deux niveaux », lequel peut toujours être décrit comme un spin 1/2.

## V.3 Harmoniques sphériques

Le cas particulier du moment cinétique orbital est d'une importance cruciale pour la structure des atomes, des noyaux atomiques et des molécules, ou l'étude des collisions.. Nous allons étudier ici les conséquences de la théorie générale et les particularités de ce moment cinétique. Nous esquisserons ensuite la description des fonctions d'ondes correspondant à la base standard.

### V.3.1 Contexte : particule dans un potentiel central

La situation physique la plus courante dans laquelle dans laquelle la quantification du moment cinétique intervient est celle d'une particule en mouvement dans un potentiel  $V(\mathbf{r})$  « central », c'est-à-dire qui ne dépend que de  $\mathbf{r}$  que par l'intermédiaire de sa norme  $r = \|\mathbf{r}\|$  et pas de sa direction. Dans ce cas, comme en mécanique classique, le moment cinétique est une « constante du mouvement », c'est à dire que les trois composantes de  $\mathbf{L}$  commutent avec la hamiltonien standard  $H = \mathbf{p}^2/2m + V(\|\mathbf{r}\|)$ , et il sera possible de diagonaliser simultanément  $H$ ,  $\mathbf{L}^2$  et  $L_z$ , qui forment un ECOC si on ne tient pas compte du spin.

Dans cette situation, pour déterminer les états stationnaires de  $H$ , on peut écrire l'équation de Schrödinger stationnaire en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , en utilisant  $\mathbf{p}^2 = -\hbar^2 \Delta$ , ce qui donne :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{\mathcal{L}\psi}{r^2} \right) + V(r)\psi = E\psi \quad \text{où} \quad \mathcal{L}\psi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

### V.3.2 Définitions et propriétés

#### V.3.2 a) Définition des harmonique sphériques

On peut montrer que le terme purement angulaire  $-\hbar^2 \mathcal{L}$  est simplement le résultat de l'action de  $\mathbf{L}^2$  sur  $\psi$  et que le terme  $-\hbar^2 / \sin^2 \theta \partial^2 \psi / \partial \varphi^2$  qu'il contient n'est autre que la contribution de  $\mathcal{L}_z^2 = (-i\hbar / \sin \theta \partial / \partial \varphi)^2$ . La séparation des variables  $r$  et  $(\theta, \varphi)$  permet ainsi de se ramener d'une part à une équation purement angulaire, et d'autre par à une équation différentielle radiale sur laquelle nous reviendrons au § V.4.1. On est ainsi conduit à rechercher les fonctions angulaires, notées  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ , qui sont des fonctions propres communes de  $\mathbf{L}^2$  et de  $\mathcal{L}_z$ , qui sont appelées « harmoniques sphériques ». *Attention* : ces fonctions ne sont absolument pas « harmoniques », puisque leur laplacien est, par définition, non-nul.

En tant que fonctions propres de  $\mathbf{L}^2$  et de  $\mathcal{L}_z$ , elles vérifient les deux relations :

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{L}_z}{\hbar} Y_\ell^m &= -i \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \varphi} = m Y_\ell^m \\ \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2} Y_\ell^m &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_\ell^m}{\partial \varphi^2} = \ell(\ell + 1) Y_\ell^m\end{aligned}$$

#### V.3.2 b) Propriétés

En cherchant des solutions à variables séparées  $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \Theta_\ell^m(\theta) \times \Phi_m(\varphi)$ , on est conduit aux deux équations :

$$\frac{d\Phi_m}{d\varphi} = im \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta_\ell^m}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta_\ell^m = \ell(\ell + 1) \Theta_\ell^m ,$$

où  $\ell$  et  $m$  sont à priori des entiers ou demi-entiers tels que  $\ell \geq 0$  et  $m \in \{-\ell, -\ell+1, \dots, \ell\}$ . Toutefois, l'équation relative à  $\Phi_m$  s'intègre immédiatement en  $\Phi_m(\varphi) = A e^{im\varphi}$ , et comme on doit avoir  $\Phi_m(\varphi + 2\pi) = \Phi_m(\varphi)$  pour que la fonction d'onde soit univaluée, on est conduit à restreindre  $m$  à des valeurs entières. Par conséquent,  $\ell$  est lui-même entier.

Pour déterminer les fonctions  $\Theta_\ell^m$ , plutôt que de chercher à résoudre l'équation du second ordre donnée ci-dessus, on peut utiliser le résultat général, selon lequel  $\mathcal{L}_+ |\ell, \ell\rangle = 0$ . Or, comme le donne un calcul pénible mais sans réelle difficulté, l'action des opérateurs d'échelle en représentation position s'écrit :

$$\mathcal{L}_\pm \psi = \hbar e^{\pm i\varphi} \left( \pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cotan \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \psi .$$

Il s'ensuit que  $\Theta_\ell^m$  soit vérifier l'équation :

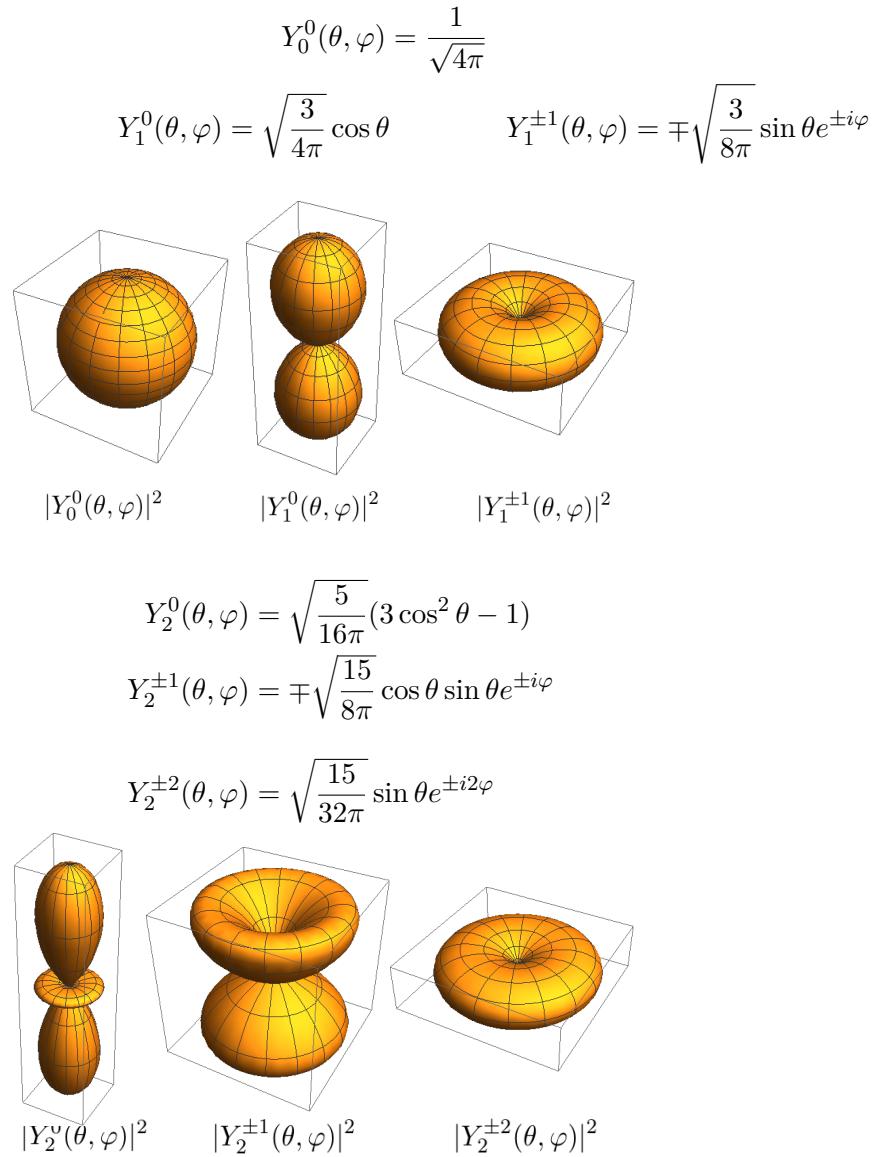
$$\frac{d\Theta}{d\theta} - \ell \cotan \theta \Theta = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{d\Theta}{\Theta} = \ell \cotan \theta d\theta = \ell \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta} \quad \Rightarrow \quad \Theta_\ell^m = B (\sin \theta)^\ell$$

En appliquant de même  $\mathcal{L}_- |\ell, -\ell\rangle = 0$ , on obtiendrait la même expression pour  $\Theta_\ell^{-\ell}$ . On peut alors déterminer les fonctions  $\Theta_\ell^m$  pour  $-\ell < m < \ell$  par application successive des l'opérateur  $\mathcal{L}_\pm$ , avec les récurrences :

$$\begin{aligned}\Theta_\ell^{m-1} &= -\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m-1)}} \left( \frac{d}{d\theta} + m \cotan \theta \right) \Theta_\ell^m , \\ \Theta_\ell^{m+1} &= +\frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)-m(m+1)}} \left( \frac{d}{d\theta} - m \cotan \theta \right) \Theta_\ell^m .\end{aligned}$$

En définitive, les harmoniques sphériques sont de la forme :

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = A_\ell^m P_\ell^{|m|}(\cos \theta) (\sin \theta)^{|m|} e^{im\varphi}$$



**Fig. V.2 – Expression et forme polaire des premières harmoniques sphériques**

où  $P_\ell^{|m|}$  est un polynôme de degré  $\ell - |m|$ , appelé « fonction de Legendre associée », et  $A_\ell^m$  un coefficient de normalisation défini par la condition :  $\int |Y_\ell^m|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 1$ . Notons en passant que  $P_\ell^0$  est le polynôme de Legendre usuel.

On démontre de plus que  $Y_\ell^m$  possède la parité de  $\ell$ , et comme l'opération de parité  $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$  se traduit pour les angles par  $(\theta, \varphi) \mapsto (\pi - \theta, \varphi + \pi)$ , on a  $Y_\ell^m((\pi - \theta, \varphi + \pi)) = (-1)^\ell Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ .

Enfin, les harmoniques sphériques forment une base hilbertienne (infinie mais discrète) de l'espace des fonctions de carré sommable sur la sphère unité, dont les relations d'orthogonalité et de fermeture s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \langle \ell, m | \ell', m' \rangle &= \iint Y_\ell^{m*}(\theta, \varphi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \\ \sum_{\ell,m} Y_\ell^m(\theta, \varphi) Y_\ell^{m*}(\theta', \varphi') &= \delta(\cos \theta - \cos \theta') \delta(\varphi - \varphi') \end{aligned}$$

### V.3.2 c) Exemples

On donne sur la figure V.2 l'expression des premières harmoniques sphériques et une représentation polaire de la densité de probabilité associée  $|Y_\ell^m|^2$ .

## V.4 L'atome d'hydrogène

### V.4.1 Retour sur le potentiel central

#### V.4.1 a) Équation radiale générale

Au § V.3.1 nous avions écrit l'énergie cinétique :

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{\mathcal{L}\psi}{r^2} \right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}\psi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

et nous avons étudié ci-dessus le terme  $\mathcal{L}\psi$  dont nous avions affirmé (sans démonstration) qu'il était proportionnel à  $\mathbf{L}^2$ . Nous ne reviendrons pas sur cette justification qui est un peu technique, mais dont le résultat sous forme opératorielle est particulièrement simple :  $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}_r^2 + \mathbf{L}^2/r^2$ , où  $\mathbf{p}_r$  est l'impulsion radiale que nous avions introduite au § III.2.4 a). On notera que les deux opérateurs  $\mathbf{L}^2$  et  $r^2$  commutent, ce qui donne un sens univoque à leur rapport.

Avec cette identité, on a donc :

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} \psi$$

et il en résulte que la diagonalisation simultanée de  $\mathbf{H}$  et de  $\mathbf{L}$  et  $L_z$  se fait en cherchant les fonctions d'onde des états stationnaires la forme  $\psi(r, \theta, \varphi) = \mathcal{R}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ . Ce qui conduit pour  $\mathcal{R}$  à l'équation différentielle ordinaire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (r \mathcal{R}) - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) \mathcal{R}(r) = E \mathcal{R}(r) . \quad (\text{V.5})$$

On peut alors se débarrasser de la forme compliquée de la dérivée radiale (c'est  $\mathbf{p}_r^2$ ) en posant  $u(r) = r\mathcal{R}$ , ce qui donne

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + V_\ell(r) u = E u \quad \text{où} \quad V_\ell(r) = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} + V(r) .$$

Cette équation est une équation de Schrödinger (stationnaire) pour un problème à une dimension, pour lequel la fonction d'onde serait  $u$  et faisant apparaître un potentiel effectif dépendant de  $\ell$  :  $V_{\text{eff}} = V_\ell(r)$ , qui est la somme du vrai potentiel central  $V(r)$

et d'un terme répulsif appelé « barrière centrifuge », lequel résulte de la conservation du moment cinétique.

Dans le cas d'un potentiel central attractif quelconque, la somme de ces deux termes fera apparaître un puits de potentiel présentant un minimum au voisinage duquel on peut chercher un ou plusieurs, voire une infinité de niveaux liés. Comme le potentiel effectif dépend de  $\ell$ , on s'attend à retrouver des énergies de la forme  $E = E(\ell, k)$ , c'est à dire dépendant à la fois de  $\ell$  via la forme du potentiel  $V_\ell$  et du nombre quantique radial  $k$  qui vient de la numérotation à partir de 1 des états propres du puits de potentiel  $V_\ell$ .

Pou ce qui suit, il sera utile de réécrire l'équation (V.5) en la multipliant par  $-2m/\hbar^2$ , et si on se limite aux états liés ( $E < 0$ ), en introduisant la constante (encore inconnue)  $\kappa = \sqrt{-2mE/\hbar^2}$ . On obtient ainsi :

$$u''(r) + \left( -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} V(r) - \kappa^2 \right) u(r) = 0 . \quad (\text{V.6})$$

Notons que  $\psi(\mathbf{r})$  doit être de carré localement sommable au voisinage de l'origine, ce qui requiert que  $r^2|\psi^2(r)| \propto u^2(r)$  soit fini ou au moins ne diverge pas plus vite que  $1/r$ . Nous allons voir qu'en fait la condition au limite en 0 est  $u(0) = 0$ , qui est d'ailleurs la conditions pour que  $\psi_r$  soit hermitique. De façon plus élémentaire, le fait que  $r$  doive rester positif ou nul se traduit par une barrière de potentiel infinie pour  $r < 0$ , laquelle impose en effet  $u(r_0) = 0$ .

#### V.4.1 b) Formes asymptotiques

**Cas  $r \rightarrow \infty$**  Dans la limite où  $r \rightarrow \infty$ , il est tentant de considérer que le terme centrifuge et le potentiel sont négligeables, devant l'énergie  $E$ , et on obtient

$$u''(r) - \kappa^2 u(r) \approx 0$$

ce qui conduit à  $u(x) \approx Ae^{-\kappa r} + Be^{\kappa r}$ , dans laquelle on voudrait, pour éviter une divergence non-sommable, ne conserver que la forme évanescante en  $e^{-\kappa r}$ .

**Cas  $r \rightarrow 0$**  A l'inverse, pour  $r \rightarrow 0$ , c'est le terme centrifuge qui domine (au moins si  $\ell > 0$ ) les termes contenant l'énergie ou le potentiel  $V(r)$ , et l'on a :

$$u''(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u(r) \approx 0$$

Si l'on cherche une solution à cette équation sous la forme d'une loi de puissance  $u(r) = r^\alpha$ , on en déduit la condition  $\alpha(\alpha - 1) = (\ell + 1)\ell$ , dont les solutions sont  $\alpha = \ell + 1$  ou  $\alpha = -\ell$ , et dont seule la première convient. En effet la seconde donnerait  $\psi = Y_\ell^m / r^{\ell+1}$  n'est pas de laplacien nul (il est nul en  $r$  fini mais singulier<sup>7</sup> en  $r = 0$ , et n'est pas non plus de carré sommable. On en déduit que pour  $r \rightarrow 0$ , la fonction,  $u(r)$  est de l'ordre de  $u^{\ell+1}$ , et donc vérifie effectivement  $u(0) = 0$ , même si  $\ell = 0$ .

Il résulte cette analyse que l'on aura bien dans tous les cas un onde évanescante de part et d'autre de la région classiquement autorisée.

Néanmoins il y a peu de potentiels pour lesquels une solution analytique explicite complète de l'équation (V.5) peut être obtenue. Nous allons, dans ce qui suit nous intéresser à l'atome d'hydrogène, ou plus généralement au potentiel central en  $V(r) \propto 1/r$ .

7. Plus précisément  $\Delta\psi$  implique des dérivées  $\ell$ -ièmes de la distribution de Dirac  $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ .

### V.4.2 Équation radiale pour l'atome d'hydrogène

Si on note  $K$  la constante de force<sup>8</sup>  $K = Ze^2/4\pi\varepsilon_0$ , on a  $V(r) = -K/r$ . Dans ce qui suit nous prendrons  $Z = 1$  et le cas d'un atome hydrogénoidé de  $Z > 1$  s'obtiendra simplement en multipliant les valeurs de  $K$  par  $Z$  (énergies en  $Z^2$ , rayon de Bohr en  $1/Z$ ).

Nous considérons donc l'équation (V.6) dans laquelle on a reporté l'expression du potentiel, en notant que l'expression  $2mV(r)/\hbar^2$  fait apparaître le rayon de Bohr  $a_0 = \hbar^2/mK$ , on a :

$$u''(r) + \left( -\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2}{a_0 r} - \kappa^2 \right) u(r) = 0.$$

Nous allons résoudre cette équation par la « méthode polynomiale », qui est une méthode relativement générale qu'il est utile de connaître.

Notons que l'on pourrait adimensionner en introduisant  $\rho = r/a_0$ , mais ce n'est pas indispensable, et il est utile de pouvoir s'appuyer sur l'homogénéité des expressions manipulées.

#### V.4.2 a) Changements de fonction

On cherche  $u(x) = v(x) e^{-\kappa x}$  ce qui donne pour  $v$  :

$$v''(x) - 2\kappa v'(x) + \left( \frac{2}{a_0 r} - \frac{(\ell+1)}{r^2} \right) v(x) = 0$$

On cherche ensuite  $v = w(r) r^{\ell+1}$ ; en reportant et simplifiant par  $r^{\ell-1}$ , on obtient :

$$r^2 w(r) + 2\left((\ell+1)r - \kappa r^2\right) w'(r) + 2\left(\frac{1}{a_0} - (\ell+1)\kappa\right) r w(r) = 0$$

Il est alors possible de chercher la forme de  $w(r)$  comme une série entière :

$$w(r) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p r^p \quad \text{avec} \quad c_0 \neq 0$$

En reportant on obtient :

$$\underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} p(p-1) c_p r^p}_{\text{ordre } r^2} + 2(\ell+1) \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} p c_p r^p}_{\text{ordre } r} - 2\kappa \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} p c_p r^{p+1}}_{\text{ordre } r^2} + 2\left(\frac{1}{a_0} - (\ell+1)\kappa\right) \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} c_p r^{p+1}}_{\text{ordre } r} = 0$$

Le terme d'ordre le plus bas dans cette équation est d'ordre 1, et son coefficient est  $2(\ell+1)c_1 + 2\left(\frac{1}{a_0} - (\ell+1)\kappa\right)c_0$  et on peut en déduire l'expression de  $c_1$  en fonction de  $c_0$ . De même le coefficient de  $r^2$  vaut  $2(2\ell+3)c_2 + 2\left(\frac{1}{a_0} - (\ell+2)\kappa\right)c_1$ , qui donne  $c_2$  en fonction de  $c_1$ . Soit :

$$c_1 = -2 \frac{\frac{1}{a_0} - (\ell+1)\kappa}{2\ell+2} c_0 \quad \text{et} \quad c_2 = -2 \frac{\frac{1}{a_0} - (\ell+2)\kappa}{2(2\ell+3)} c_1 \quad (\text{V.7})$$

En ré-indexant les deux derniers termes ( $p \rightarrow q = p+1$ ), et en regroupant on obtient :

$$\sum_{q=1}^{\infty} \left( q(q+2\ell+1) c_q + 2\left(\frac{1}{a_0} - (\ell+q)\kappa\right) c_{q-1} \right) r^q = 0 \quad (\text{V.8})$$

qui doit être identiquement nul, d'où la relation de récurrence :

$$c_q = -\frac{2\left(\frac{1}{a_0} - (\ell+q)\kappa\right)}{q(q+2\ell+1)} c_{q-1},$$

dont celles de l'équation (V.7) sont visiblement des cas particuliers.

---

8. Cette constante est souvent notée simplement  $Ze^2$  car  $4\pi\varepsilon_0 = 1$  dans le systèmes d'unités CGS utilisé aux États-unis

#### V.4.2 b) Comportement asymptotique et quantification

Cette relation de récurrence nous donne *a priori* tous les termes de la série. Il faut cependant regarder quel est son comportement. Pour cela on peut considérer la forme asymptotique pour  $p \rightarrow \infty$  de :

$$\frac{c_q}{c_{q-1}} = -\frac{2(\frac{1}{a_0} - (\ell + q)\kappa)}{q(q + 2\ell + 1)} \sim \frac{2\kappa}{q} \rightarrow 0 \quad (\text{V.9})$$

ce qui prouve la série est absolument convergente (critère de d'Alembert).

En outre, son comportement pour  $r$  grand ne saurait différer beaucoup de celle qui vérifie exactement :

$$\frac{a_q}{a_{q-1}} = \frac{2\kappa}{q} \Rightarrow a_q = \frac{(2\kappa)^q}{q!} a_0 ,$$

ce qui correspond à  $e^{2\kappa r}$  qui, multiplié par  $e^{-\kappa r}$ , redonne  $e^{+\kappa r}$  que nous pensions avoir éliminé !

Il y a toutefois une parade : la série peut n'être qu'un polynôme si la récurrence s'interrompt à un moment donné. Ce sera le cas si le numérateur de (V.9) vient à s'annuler en un certain rang  $q_0$  car les coefficients d'ordre  $q \geq q_0$  seront alors tous nuls. On en déduit qu'il doit exister un certain  $q_0 \geq 1$  tel que  $c_{q_0} = 0$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{a_0} - (\ell + q)\kappa = 0$ , soit  $\kappa = 1/(\ell + q_0)a_0$ . De cette condition, on déduit :

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m} \times \left( \frac{1}{(\ell + q_0)a_0} \right)^2 = -\frac{mK^2}{2\hbar^2} \times \frac{1}{(\ell + q_0)^2} \quad \text{avec } \ell \geq 0 \quad \text{et } q_0 \geq 1.$$

Cette énergie est visiblement une fonction croissante de  $q_0$  et celui-ci est donc exactement le nombre quantique radial  $k$  pour la valeur de  $\ell$  considérée.

Le point remarquable est que l'énergie  $E_{\ell,k}$  ne dépend pas individuellement de  $\ell$  et de  $k$ , mais seulement de leur somme. De ce fait, on introduit le nombre quantique principal  $n = \ell + k$ , qui est un entier non nul, tel que  $E = -E_0/2n^2$ , où  $E_0 = mK^2/\hbar^2$  est l'échelle d'énergie obtenue par l'analyse dimensionnelle au chapitre I. C'est ce que l'on appelle parfois la dégénérescence « accidentelle » de l'atome d'hydrogène, par opposition à la dégénérescence « essentielle » selon laquelle l'énergie dépend de  $\ell$  mais pas de  $m$ . Cette dénomination est impropre car cette dégénérescence n'est en fait pas du tout accidentelle, mais résulte la haute symétrie<sup>9</sup> du problème du champ en  $1/r$ . En mécanique classique cette symétrie se manifeste par le fait que les orbites soient fermées, ce qui signifie que la fréquence du mouvement radial coïncide avec celle des angles  $\theta$  et  $\varphi$  (c'est la définition classique de la dégénérescence).

#### V.4.2 c) Conséquences

**Forme des fonctions d'onde** D'après l'équation (V.8), le degré du polynôme  $w(x)$  est visiblement  $k - 1$ , et  $u(r)$  est alors de la forme :

$$u(r) \propto r^{\ell+1} P_{\ell,k}(r) e^{-\kappa_n a} \quad \text{avec } \kappa_n = 1/na_0 ,$$

ce qui donne un degré total en  $r$  égal à  $\ell + 1 + (k - 1) = n$ , et le terme de plus bas degré est  $\ell + 1$  ce qui fait que hors de  $r = 0$  la fonction  $u$  s'annule  $n - (l + 1) = k - 1$  fois.

On montre enfin, mais c'est hors de la portée de ce cours, que le polynôme  $P_{\ell,k}$  vérifie :

$$P_{\ell,k}(r) \propto L_{k-1}^{2\ell+1} \left( \frac{2r}{na_0} \right)$$

où les  $L_n^\alpha$  sont les « polynômes de Laguerre généralisés » ou « associés ».

9. Elle peut être mise en évidence en constatant qu'une quantité conservée spécifique est le vecteur de Laplace ou de Runge–Lenz  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \wedge \mathbf{p}/mK + \mathbf{u}_r$ , et en l'utilisant pour exhiber un groupe de symétrie qui n'est plus  $\text{SO}_3$  (rotations à trois dimensions de l'espace ordinaire) mais  $\text{SO}_4$  (rotations à 4 dimensions).

**Niveaux d'énergie et dégénérescence** L'énergie étant de la forme  $E = -E_0/2n^2$ , on peut en déduire qu'il existe une infinité de niveaux d'énergie correspondant à des états liés, qui sont de moins en moins liés et de plus en plus serrés lorsque  $n$  augmente (les états de  $n$  élevé sont dits « états de Rydberg »). Ils ne forment cependant pas une base complète, car il y aussi une infinité continue d'états « libres » (aussi appelés « états de diffusion ») d'énergie positive.

On peut aussi en déduire que chaque potentiel  $V_\ell$  possède une infinité de niveaux indexés par un nombre quantique radial  $k$  variant de 1 à  $\infty$ , qui ont tous des énergies différentes  $E_{\ell,k}$ , la plus basse étant  $-E_0/2(\ell+1)^2$ .

Si maintenant on classe les états par leur niveau d'énergie, il y a un nombre fini d'états par valeurs de  $n$ . On doit en effet considérer les valeurs de  $\ell$  qui vérifient  $\ell+k=n$  avec  $k \geq 1$ , soit  $\ell = 0, \dots, n-1$ . Ainsi une énergie donnée, par exemple pour  $n=4$ , sera obtenue pour le premier niveau du potentiel  $V_3$ , le 2<sup>e</sup> de  $V_2$ , le 3<sup>e</sup> de  $V_1$  et le 4<sup>e</sup> de  $V_0$ . Pour obtenir la dégénérescence du niveau  $n$  on doit donc calculer :

$$g_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} 2\ell + 1 = 2 \times \left( \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \right) + n = 2 \times \frac{n(n-1)}{2} + n = n^2 .$$

Ainsi le niveau fondamental  $n=1$  est-il simplement dégénéré ( $\ell=m=0, k=1$ ), tandis que le niveau de  $n=2$  contient l'état  $|n=2, \ell=m=0\rangle$  appelé état 2s, et le trois états  $n=2, \ell=1, m=-1, 0, 1$ .

#### V.4.3 Récapitulation

- ◆ Les états stationnaires liés de l'hydrogène (sans spin) sont décrits par les trois nombres quantiques entiers et notés  $|n, \ell, m\rangle$  où :
  - le nombre quantique principal  $n \geq 1$  est tel que  $E_n = -E_0/2n^2$  ;
  - les nombres quantiques angulaires  $\ell \in [0, n-1]$  (polaire) et  $m \in [-\ell, \ell]$  (azimutal ou magnétique) sont tels que

$$\mathbf{L}^2 |n, \ell, m\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2 |n, \ell, m\rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{L}_z |n, \ell, m\rangle = m\hbar |n, \ell, m\rangle .$$

- ◆ les fonctions d'ondes sont de la forme générale :

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \langle r, \theta, \varphi | n, l, m \rangle = A_{nlm} Y_\ell^m(\theta, \varphi) r^\ell P_{n,l}(r) e^{-r/a_0}$$

- ◆ Les niveaux d'énergie sont  $n^2$  fois dégénérés.
- ◆ les premiers états sont explicitement donnés par :

$$\begin{aligned} \psi_{100} &= \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} && \text{non nul en } r=0 \\ \psi_{200} &= \frac{1}{\sqrt{8\pi a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/2a_0} && \text{non nul en } r=0 \\ \psi_{210} &= \frac{1}{\sqrt{32\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \cos \theta \\ \psi_{21\pm 1} &= \frac{1}{\sqrt{64\pi a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} \sin \theta e^{\pm i\varphi} \end{aligned}$$

#### V.4.4 Effet d'entraînement du noyau

Toute la théorie des § V.3.1 et § V.4.1 a été faite en supposant que le centre de force était fixé à l'origine alors que c'est en fait le noyau atomique qui ne saurait rester immobile car il n'est pas rigoureusement le centre d'inertie de l'atome.

La solution de ce problème en mécanique quantique est la même qu'en mécanique classique : on doit effectuer la transformation dite « de Jacobi » en introduisant les variables du centre de masse et celles de la particule réduite :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 & \mathbf{R} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 & \mathbf{p} &= \frac{\mathbf{p}_1/m_1 - \mathbf{p} - 2/m_2}{1/m_1 + 1/m_2}\end{aligned}$$

qui vérifient les conditions d'indépendance et de conjugaison :

$$[\mathbf{R}_i, \mathbf{r}] = [\mathbf{R}_i, \mathbf{p}_j] = [\mathbf{P}_i, \mathbf{p}_j] = [\mathbf{P}_i, \mathbf{r}_j] = 0 \quad [\mathbf{R}_i, \mathbf{P}_j] = [\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_j] = i\hbar \mathbb{1}$$

et la séparation du moment cinétique et du hamiltonien :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{p}_2 &= \mathbf{R} \wedge \mathbf{P} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \\ H &= \frac{\mathbf{p}_1^2}{m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{m_2} + V(\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|) = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(\|\mathbf{r}\|),\end{aligned}$$

avec  $M = m_1 + m_2$  et  $\mu^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$ . Ce qui fait que toute l'étude effectuée est celle du mouvement relatif, et les résultats corrects s'obtiennent en remplaçant la masse notée  $m$  par la masse réduite  $\mu = m_e(1 + m_e/M_N)$  (où  $m_e$  et  $M_N$  sont respectivement les masses de l'électron et du noyau. Le décalage relatif (vers le rouge) sur l'énergie et les longueurs d'onde vaut respectivement 0.549 %, 0.274 % pour H, D et He<sup>+</sup>, ce qui compte tenu que la finesse des raies et de la précision des mesures spectroscopiques, est aisément observable.



# Appendices

## Sommaire

---

<b>A<sub>II</sub></b>	<b>Limite classique de l'équation de Schrödinger</b>	<b>A-105</b>
A <sub>II.1</sub>	L'approximation des courtes longueurs d'onde	A-105
A <sub>II.2</sub>	L'équation de Hamilton-Jacobi	A-106
A <sub>II.3</sub>	Variables action-angle et ancienne théorie des quanta	A-107
<b>B<sub>II</sub></b>	<b>Caractère complexe de la fonction d'onde</b>	<b>A-108</b>
<b>C<sub>II</sub></b>	<b>Limite paraxiale de l'optique</b>	<b>A-108</b>
<b>D<sub>II</sub></b>	<b>L'intégrale gaussienne complexe</b>	<b>A-109</b>
<b>E<sub>III</sub></b>	<b>Ensemble de définition et hermiticité de <math>\mathbf{x}</math> et <math>\mathbf{p}</math></b>	<b>A-111</b>
<b>F<sub>III</sub></b>	<b>Représentations position et impulsion</b>	<b>A-113</b>
F <sub>III.1</sub>	Base propres de $\mathbf{x}$	A-113
F <sub>III.1</sub> a)	Utilisation de l'opérateur de translation	A-113
F <sub>III.1</sub> b)	Représentation position et action de $\mathbf{x}$	A-113
F <sub>III.1</sub> c)	Orthonormalité de la base propres de $\mathbf{x}$	A-113
F <sub>III.1</sub> d)	Action de $\mathbf{p}$ en représentation position	A-114
F <sub>III.2</sub>	Base propre de $\mathbf{p}$	A-114
F <sub>III.2</sub> a)	Vecteurs propres	A-114
F <sub>III.2</sub> b)	Symétrie entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{p}$	A-114
<b>G<sub>III</sub></b>	<b>Transformations unitaires dépendant du temps</b>	<b>A-114</b>
G <sub>III.1</sub>	Transformations unitaires	A-114
G <sub>III.2</sub>	Transformations unitaires dépendant du temps	A-115
G <sub>III.3</sub>	Représentation intermédiaire	A-115
G <sub>III.4</sub>	Représentation d'interaction	A-115
G <sub>III.5</sub>	Perturbations dépendant du temps	A-116
<b>H<sub>III</sub></b>	<b>Spin fictif</b>	<b>A-116</b>
H <sub>III.1</sub>	Les matrices de Pauli	A-116
H <sub>III.2</sub>	Représentation par un spin fictif	A-118
H <sub>III.3</sub>	Interaction avec une onde électromagnétique	A-119
<b>I<sub>III</sub></b>	<b>Approximation adiabatique</b>	<b>A-124</b>
I <sub>III.1</sub>	Position du problème	A-124
I <sub>III.2</sub>	Approche classique	A-124
I <sub>III.3</sub>	Théorème adiabatique quantique	A-127
<b>J<sub>IV</sub></b>	<b>Réflexion totale interne frustrée</b>	<b>A-129</b>
<b>K<sub>V</sub></b>	<b>Approximation WKB</b>	<b>A-130</b>
K <sub>V.1</sub>	Position du problème	A-130
K <sub>V.2</sub>	Solution semi-classique	A-131
K <sub>V.3</sub>	La divergence sommable des amplitudes	A-133
K <sub>V.4</sub>	Les conditions de raccordement	A-134
K <sub>V.5</sub>	La condition de retour en phase	A-135

---

## APPENDICES DU CHAPITRE II

### **A<sub>II</sub>** Limite classique de l'équation de Schrödinger

#### **A<sub>II.1</sub>** L'approximation des courtes longueurs d'onde

L'exploration de la limite classique de l'équation de Schrödinger repose sur l'idée qu'il existe deux échelles de longueur très différentes permettent de faire des approximations.

Plus précisément, nous allons supposer que, grâce à la petitesse de  $\hbar$ , lorsque l'action devient grande, l'échelle de longueur de la variation de la phase (à savoir  $\lambda_{dB} = \hbar/p$ ) devient très petite devant les autres échelles de variation du problème. En d'autres termes, la phase tourne très vite avant que l'amplitude ait le temps de changer significativement.

Nous allons utiliser cette idée physique dans les paragraphes qui suivent.

## A<sub>II</sub>.2 L'équation de Hamilton-Jacobi

Écrivons la fonction d'onde sous la forme  $\psi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A}(\mathbf{r}, t) \exp(i\mathcal{S}/\hbar)$  où les fonctions amplitude  $\mathcal{A}$  et phase  $\mathcal{S}$  sont des fonctions *réelles*, qui varient toutes les deux aux échelles macroscopiques. Nous pouvons reporter cette expression dans l'équation de Schrödinger pour obtenir, après simplification par  $e^{i\mathcal{S}/\hbar}$  :

$$i\hbar \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \Delta \mathcal{A} + 2 \frac{i}{\hbar} \nabla \mathcal{S} \cdot \nabla \mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{\hbar^2} (\nabla \mathcal{S})^2 + \frac{i}{\hbar} \mathcal{A} \Delta \mathcal{S} \right) + V(\mathbf{r}) \mathcal{A} .$$

Grâce au caractère réel de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{S}$  nous pouvons séparer les parties réelle et imaginaire de cette équation, ce qui donne :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \left( \frac{\nabla \mathcal{S}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \mathcal{A}}{\mathcal{A}} \quad (\text{A}_{\text{II}.2})$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \nabla \mathcal{S} \cdot \nabla \mathcal{A} + \mathcal{A} \Delta \mathcal{S} \right) = 0 \quad (\text{A}_{\text{II}.3})$$

où la première équation a été divisée par  $\mathcal{A}$  et la seconde par  $\hbar$ .

On note que l'ordre de grandeur du membre de droite de la première est de d'ordre de  $(\hbar/L)^2$  où  $L \approx \mathcal{A}/\nabla \mathcal{A}$  est l'échelle (lente) de variation de  $\mathcal{A}$ . On peut l'écrire  $(\hbar/\lambda)^2 (\lambda/L)^2$  où  $(\hbar/\lambda) \approx p \approx \|\nabla \mathcal{S}\|$ , ce qui le rend  $(\lambda/L)^2$  plus petit que le membre de gauche. Aussi, il est assez légitime de le négliger à la limite où  $\lambda_{dB}/L \rightarrow 0$  dans le cadre duquel nous nous sommes placés. L'équation aux dérivées partielles (sur  $\mathcal{S}$  seul) ainsi obtenue est exactement l'équation de Hamilton-Jacobi de la mécanique classique :

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -\mathcal{H}(\mathbf{r}, \nabla \mathcal{S}) .$$

Cette équation décrit l'évolution spatio-temporelle de la « fonction principale de Hamilton »  $S$ . Il s'agit de l'action, définie non plus comme une fonction d'un chemin arbitraire, mais comme une fonction de la position en espace et en temps de l'extrémité du chemin, celui-ci étant choisi extrémal<sup>1</sup>. En faisant le lien avec le point de vue de Feynman, il est satisfaisant de constater que, à la limite des courtes longueurs d'onde, la phase  $\mathcal{S}$  de la fonction d'onde coïncide avec l'action classique.

En ce qui concerne la seconde équation, si on la multiplie par  $2\mathcal{A}$ , on peut la mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{A}^2}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \mathcal{A}^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 ,$$

qui n'est autre qu'une version de la conservation de la densité de probabilité  $\rho = \mathcal{A}^2 = |\psi|^2$  avec un courant dont l'expression classique est  $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$  où  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m = \nabla S$ .

1. La description de la mécanique classique par l'équation de Hamilton-Jacobi est une formulation entièrement équivalente à celle de Hamilton, de Lagrange ou de Newton. Elle est formulée utilisant la différentielle  $dS = \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} - \mathcal{H} dt$ , qui indique que  $\partial S / \partial t = -\mathcal{H}$  et  $\nabla S = \mathbf{p}$ . On peut alors écrire  $\partial S / \partial t = -\mathcal{H}(\mathbf{r}, \nabla S)$ , dans lequel  $\mathbf{p}$  a été remplacé par  $\nabla S$ .

### AII.3 Variables action-angle et ancienne théorie des quanta

L'analyse des problèmes mécaniques dans le cadre hamiltonien fait jouer un rôle spécifique à une transformation canonique engendrée par la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (ou plus exactement sa version stationnaire). Cette transformation permet d'avoir des « nouvelles impulsions »  $\{J_i\}$  constantes, un hamiltonien  $\mathcal{H}(\{J_i\})$  qui dépend seulement ces impulsions et des « nouvelles positions »  $w_i$  qui précessent à une fréquence constante  $\Omega_i = \partial\mathcal{H}/\partial J_i$ . Ces variables  $(J_i, w_i)$  sont dénommées variables « action-angle ».

Lorsque le problème peut être séparé en plusieurs problèmes à une dimension (particule 1D, ou champ central par exemple) la variable d'action peut être calculée en considérant :

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \quad \text{portant sur une période du mouvement dans la direction } i, \quad (\text{AII.4})$$

qui, comme son nom l'indique, a bien sûr la dimension d'une action. Par exemple :

**Oscillateur harmonique 1D** de pulsation  $\Omega$ , de hamiltonien  $\mathcal{H} = p^2/2m + m\Omega^2x^2/2$ , la variable d'action  $J$  est simplement :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dx = \frac{1}{2\pi} \oint p \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{p^2}{m} dt = \frac{1}{2\pi} \oint \mathcal{H} dt = \frac{\mathcal{H}}{2\pi} \oint dt = \frac{\mathcal{H}}{\Omega}$$

et la variable d'angle est  $w = \arctan(m\Omega x/p)$ .

**Mouvement circulaire** de fréquence constante  $\Omega$ , de rayon  $a$ . L'impulsion s'écrit  $p = ma\Omega$  et donc :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p dx = \frac{1}{2\pi} \oint ma\Omega dx = \frac{ma\Omega}{2\pi} \oint dx = \frac{ma\Omega}{2\pi} \times (2\pi a) = ma^2\Omega = L$$

où  $L$  est le moment cinétique de rotation. La variable d'angle est alors simplement l'angle géométrique de rotation.

La première tentative de théorie quantique, développée notamment par Bohr et Sommerfeld dans les années 1913-1925 et maintenant dénommée « ancienne théorie des quanta », postule que **les variables d'action sont quantifiées** ne pouvant prendre que des **valeurs multiples (entiers) de  $\hbar$**  (condition dite de Bohr-Wilson-Sommerfeld). C'est cette formulation qui, en son temps, a permis de résoudre de nombreux problèmes posés par la structure atomique. c'est pour cela que le modèle de Bohr est le plus souvent présenté comme fondé sur la quantification du moment cinétique  $L$ . De même, pour l'oscillateur harmonique, si  $J = \mathcal{H}/\Omega$  est un multiple entier de  $\hbar$ , c'est que l'énergie  $E = \mathcal{H}$  est un multiple entier de  $\hbar\Omega$ , ce qui va dans le sens des hypothèses de Planck et Einstein sur la quantification de l'énergie du rayonnement.

Les variables d'action possèdent en outre une propriété remarquable mise en évidence au tout début du 20<sup>e</sup> siècle : ce sont des **invariants adiabatiques**. Cela signifie qu'en cas de modification *très lente* (à l'échelle de  $1/\Omega$ ) des paramètres du système (comme la fréquence  $\Omega$  ou le rayon de l'orbite circulaire) les variables d'action restent constantes. Par exemple si on considère un pendule pesant dans la limite harmonique et que l'on raccourcit graduellement la ficelle, la fréquence  $\Omega$  et l'énergie d'oscillation  $E$  vont varier, mais leur rapport  $J = E/\Omega$  va rester constant. Cette propriété est bien sûr essentielle pour assurer la cohérence de l'hypothèse de quantification des variables d'action : une variable quantifiée doit rester constante au cours d'une évolution lente, puisque son évolution est par hypothèse discontinue.

## B<sub>II</sub> Caractère complexe de la fonction d'onde

D'un point de vue physique, l'hypothèse selon laquelle la fonction d'onde contient toute l'information possible sur la particule est incompatible avec un formalisme complètement réel. Il suffit par exemple de considérer l'onde plane complexe  $\psi \propto e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t}$ . Si on considère son expression complexe, elle est caractérisée par une densité de probabilité  $p(\mathbf{r})$  uniformément égale à 1, et un vecteur d'onde bien défini  $\mathbf{k}$ , qui représente un mouvement dans cette direction, en accord avec le postulat pré-quantique de de Broglie  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ . En revanche sa partie réelle (comme sa partie imaginaire) donnerait une structuration périodique de la densité de probabilité avec une répartition des nœuds qui dépend de la vitesse, ce qui est fort peu compatible avec le caractère homogène de l'état considéré, et surtout deux valeurs opposées possibles pour l'impulsion  $\mathbf{p} = \pm \hbar \mathbf{k}$ . Les deux situations obtenues sont très dissemblables et l'interprétation physique de  $p(\mathbf{r}, t) = |\psi|^2$ , avec  $\psi$  complexe, est bien plus cohérente – donc plausible – que celle où on aurait  $p(\mathbf{r}, t) = \Re(\psi(\mathbf{r}))^2$  ou  $\Im(\psi(\mathbf{r}))^2$ .

On peut aussi arguer, de façon complémentaire, qu'une onde en physique est généralement caractérisée par deux champs réels conjugués, comme les champ électrique et magnétique pour les ondes électromagnétiques ou la pression et la vitesse pour une onde acoustique, etc., dont la variation temporelle de l'une résulte de la variation spatiale de l'autre, et inversement. Une onde décrite par un seul champ réel ne posséderait donc pas les caractéristiques physiques nécessaires à la propagation d'une onde, alors qu'une onde complexe permet de faire jouer ces rôles aux parties réelle et imaginaire de  $\psi$ , qui sont couplées par l'équation d'évolution. Ainsi en séparant la partie réelle et la partie imaginaire de  $\psi$  sous la forme  $\psi(x) = u(x) + i v(x)$ , l'équation de Schrödinger est équivalente aux deux équations différentielles réelles couplées :

$$\hbar \frac{\partial u}{\partial t} = \mathsf{H} v \quad \text{et} \quad \hbar \frac{\partial v}{\partial t} = -\mathsf{H} u$$

Une troisième justification tient à la structure de l'équation de Schrödinger : l'hypothèse selon laquelle la fonction d'onde contient toute l'information possible sur la particule exige que cette équation soit du premier ordre par rapport au temps. Dans ce contexte, si tous les termes étaient réels, la dépendance temporelle serait donnée par des exponentielles réelles, ce qui est incompatible avec la conservation de la probabilité, et avec la micro-réversibilité nécessaire.

## C<sub>II</sub> Limite paraxiale de l'optique

Il est intéressant et utile à divers titres de montrer que l'on peut arriver à une équation de Schrödinger, dans un autre contexte que celui de la mécanique quantique. Nous montrons ici que l'optique électromagnétique, à la limite paraxiale, est régie par une équation de Schrödinger, dont les solutions sont aussi celles que l'on obtient en utilisant le développement paraxial du principe de Huygens-Fresnel (diffraction de Fresnel).

Pour ce faire nous considérons l'équation de Helmholtz vectorielle à laquelle satisfait le champ électrique complexe :  $\Delta \mathbf{E} + (\frac{\omega}{c})^2 \mathbf{E} = \mathbf{0}$ . Comme il est d'usage, à la limite paraxiale on peut supposer que  $\mathbf{E}$  est dirigé selon un vecteur perpendiculaire à l'axe optique qui restera constant, ce qui permet de réduire cette équation vectorielle à l'équation de Helmholtz scalaire :

$$\boxed{\Delta E + (\frac{\omega}{c})^2 E = 0 ,} \tag{C<sub>II</sub>.5}$$

dans laquelle  $c$  est la vitesse de la lumière dans le milieu supposé homogène ici, et on notera  $k = \omega/c$  le vecteur d'onde associé, et  $\lambda = \lambda/2\pi = 1/k$ .

Dans le cas strictement axial, la solution est de la forme  $E(x, y, z) = A e^{ikz}$ , et on peut donc chercher une solution de la forme  $E(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{ikz}$  dans laquelle

$\psi$  est une amplitude, qui prend en compte notamment une limitation de l'extension du faisceau. Cette amplitude doit être *lentement variable*, à l'échelle de  $\lambda$  notamment parce que la vitesse relative de variation  $(\partial\psi/\partial x)/\psi$  (ou  $(\partial\psi/\partial y)/\psi$ ) est analogue à une composante transverse du vecteur d'onde, faible devant  $k$  par hypothèse. De même une valeur importante de  $(\partial\psi/\partial z)/\psi$  introduirait des vecteurs d'onde qui s'écartent du cadre étudié. Nous noterons  $K$  la vitesse de variation typique de  $\psi$  et supposant que  $K \ll k$ .

Si on reporte l'expression de  $E$  dans l'équation (C<sub>II.5</sub>), on obtient, après simplification par  $e^{ikz}$  :

$$\Delta\psi + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} - k^2\psi + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = \Delta_T\psi + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0,$$

en utilisant  $k = \omega/c$  et en scindant le laplacien en sa partie transverse  $\Delta_T = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  et sa partie axiale  $\partial^2/\partial z^2$ .

Si nous comparons maintenant l'ordre de grandeur des deux termes en  $z$ , nous voyons que le terme de dérivée première est de l'ordre de  $kK\psi$  alors que celui impliquant la dérivée seconde est de l'ordre de  $d'\text{ordre } K^2\psi$ , et peut donc être négligé devant le précédent. En ce qui concerne le laplacien transverse, il est a priori aussi d'ordre  $K^2\psi$  et il serait tentant de le négliger, mais alors toute dépendance en  $x$  ou  $y$  disparaît et l'équation se réduit à  $\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0$  qui, au mieux, redonne l'onde plane purement axiale. Il est donc intéressant de conserver ce terme en dépit d'une apparente incohérence. Nous en obtiendrons une validation a posteriori en faisant apparaître une troisième échelle de longueur qui justifie ce choix. Si nous multiplions alors cette équation par  $\lambda^2$  et divisons par 2, il vient :

$$i\lambda\frac{\partial}{\partial z}\psi = -\frac{\lambda^2}{2}\Delta_T\psi.$$

Cette équation a exactement la forme de l'équation de Schrödinger décrivant l'évolution d'une particule libre à deux dimensions, en remplaçant l'évolution temporelle par l'évolution spatiale le long de l'axe optique, au prix de la substitution de  $\hbar$  par  $\lambda$ , et de  $m = 1$  (ouf, pas de masse en optique!).

Cette analogie formelle permet un certain nombre d'interprétations intéressantes. Notamment elle permet d'interpréter le calcul de la propagation du paquet d'onde gaussien en termes de faisceaux gaussiens, et ainsi de préciser un certain nombre de propriétés des cavités laser.

## D<sub>II</sub> L'intégrale gaussienne complexe

Nous présentons ici la méthode de calcul de l'intégrale complexe :

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\alpha\frac{(u-i\beta)^2}{2}\right) du = I(\alpha, 0) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}$$

(D<sub>II.6</sub>)

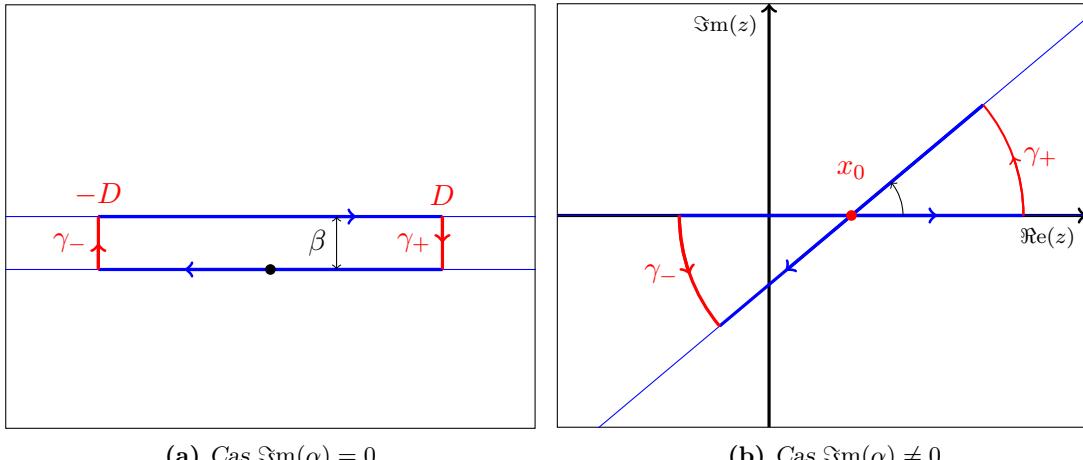
où  $\alpha$  est un nombre complexe de partie réelle strictement positive, et  $\beta$  un nombre complexe quelconque.

La condition sur  $\alpha$  assure que l'exponentielle tende vers 0 quand  $u$  tend vers  $\pm\infty$ , sans quoi l'intégrale n'est pas convergente. Dans le cas particulier où  $\Re(\alpha) = 0$ , l'intégrale n'est pas absolument convergente, mais on peut néanmoins appliquer la même formule en prenant la limite, *au sens des distributions*, du cas  $\Re(\alpha) \rightarrow 0^+$ .

Notons en premier lieu que l'on peut se limiter, sans perte de généralité, au cas où  $\beta$  est réel, car la partie imaginaire de  $\beta$  introduit un simple décalage réel sur  $u$  dans (D<sub>II.6</sub>), qui n'a pas d'effet sur l'intégrale.

En introduisant la racine carrée de  $\alpha$  qui est de partie réelle positive, notée  $A = \sqrt{\alpha}$ , on peut mettre  $I(\alpha, \beta)$  sous la forme d'une intégrale complexe :

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\gamma_1} \exp(-(AZ)^2/2) dZ = \frac{1}{A} \int_{\gamma_2} e^{-z^2/2} dz,$$



**Fig. D<sub>II</sub>.1** – Chemins complexes fermés utilisés pour se ramener à une intégrale réelle : en rouges les portions  $\gamma_{\pm}$  dont la valeur tend vers zéro lorsque  $D$  tend vers l'infini; en bleu les chemins dont les valeurs limites sont exactement opposées.

où la première intégration est faite sur la droite complexe  $\gamma_1 = \{Z \in \mathbb{R} - i\beta\}$ , et la seconde sur la droite complexe  $\gamma_2 = \{z = A(\mathbb{R} - i\beta)\}$ , qui est inclinée par rapport à l'axe réel d'un angle  $\theta = \arg(A) = \arg(\alpha)/2 \in [-\pi/4, \pi/4]$ , et passe par le point d'affixe  $z_\beta = -iA\beta$  (en noir sur les figures D<sub>II.1a</sub> et D<sub>II.1b</sub>).

Or la fonction  $z \mapsto \exp(-z^2/2)$  est analytique (et dépourvue de pôle) sur  $\mathbb{C}$  entier. Toute intégrale sur un chemin fermé comportant un segment de  $\mathbb{R}$  et un segment de  $\gamma_2$  sera donc nulle. Cela permet de ramener l'intégration sur une droite dans le plan complexe à une intégration sur  $\mathbb{R}$ , dont résultat est connu.

On distingue alors deux cas : (i)  $\alpha \in \mathbb{R}$  soit  $\theta = 0$ , et (ii)  $\alpha \notin \mathbb{R}$  et  $|\theta| \in ]0, \pi/4]$ .

- (i) La droite  $\gamma_2 = \mathbb{R} - i\beta$  est parallèle à l'axe réel. On considère alors le rectangle (cf Fig. D<sub>II.1a</sub>) formé du segment  $[-D, D]$  de l'axe réel et du segment  $S(D)$  qui est la portion correspondante de  $\gamma_2$  déduite par translation de  $-i\beta$ , tracés en bleu sur la Fig. D<sub>II.1a</sub>. Les cotés latéraux du rectangle sont les segments de droite  $\gamma_{\pm} = \{z \in \mathbb{C}/z = \pm D - is\beta, s \in [0, 1]\}$  (en rouge sur la figure).

On peut alors majorer la contribution de  $\gamma_{\pm}$  comme suit :

$$\left| \int_{\gamma_{\pm}} e^{-z^2/2} dz \right| = \left| \int_0^1 e^{-\frac{(D-i\beta s)^2}{2}} \beta ds \right| \leq |\beta| \int_0^1 \underbrace{\left| e^{-\frac{(D-i\beta s)^2}{2}} \right|}_{e^{-\frac{D^2-\beta^2 s^2}{2}}} ds = |\beta| e^{-\frac{D^2}{2}} \int_0^1 e^{\frac{\beta^2 s^2}{2}} ds .$$

L'intégrale restante étant finie, on constate que ces quantités tendent bien vers 0 lorsque  $D$  tend vers l'infini. En tenant compte de l'orientation des chemins, il s'ensuit que

$$\lim_{D \rightarrow \infty} \left( \int_{-D}^D e^{-x^2/2} dx - \int_{S_D} e^{-z^2/2} dz \right) = 0 ,$$

et comme la limite du premier terme est  $\sqrt{2\pi}$  et celle du second est  $\int_{\gamma_2} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{\alpha} I(\alpha, \beta)$ , on en déduit la formule (D<sub>II.6</sub>).

- (ii) Si  $\theta \neq 0$ , les deux droites se coupent au point d'affixe  $x_0 = \beta/\sin\theta \in \mathbb{R}$ . On considère alors le secteur délimité par le segments réel  $[-D + x_0, D + x_0]$  et le segment  $S_D$  de  $\gamma_2$  défini par :  $S_D = \{z \in \mathbb{C}/z = x_0 + Ds e^{i\theta}, s \in [-1, 1]\}$  (cf Fig. D<sub>II.1b</sub>). On peut refermer ce chemin par les arcs de cercle, centrés sur  $x_0$ , qui joignent les extrémités de ces segments, et sont de la forme  $\gamma_{\pm} = \{z \in \mathbb{C}/z = x_0 \pm D e^{is\theta}, s \in [0, 1]\}$ . Montrons que la contribution de ces arcs de cercle tend vers 0 lorsque  $D \rightarrow \infty$ .

On peut tout d'abord faire un changement de variables  $z - x_0 \mapsto z$ , ce qui élimine  $x_0$  dans les arc de cercle, qui sont dès lors centrés à l'origine et non plus en  $x_0$ , et la fonction dans l'intégrale devient donc  $e^{(z+x_0)^2/2}$ .

Ensuite, pour étudier les limites nécessaires, nous avons besoin d'une majoration de  $|e^{(z+x_0)^2/2}|$ , pour  $z = De^{is\theta}$ . Nous pouvons pour cela utiliser la relation  $|\exp(x)| = \exp(|\operatorname{Re}(x)|)$ , qui donne ici :

$$\operatorname{Re}((De^{is\theta} + x_0)^2) = D^2 \cos(2s\theta) + x_0^2 + 2x_0 D \cos(s\theta) \geq D^2 \cos(2s\theta) - 2D|x_0|$$

et donc  $|e^{-(z+x_0)^2/2}| \leq e^{D|x_0|} e^{-\frac{D^2 \cos(2s\theta)}{2}}$

Tant que les chemins considérés sont tels que  $\cos(2s\theta)$  est borné inférieurement par un réel positif, on pourra conclure, car l'exponentielle quadratique en  $D$  décroît assez vite. C'est ici principalement que la condition  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  est nécessaire, et on voit aussi en quoi le cas limite  $\operatorname{Re}(\alpha) = 0$  est particulier. En effet, cette condition  $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$  implique que  $2\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$  et donc  $2s\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . Sur cet intervalle, la fonction  $\cos(2s\theta)$  est bien positive et on a de plus  $\cos(2s\theta) \geq \cos(2\theta)$ , ce qui fournit une majoration de  $|e^{-(z+x_0)^2/2}|$  sur les arcs de cercle indépendante de  $s$ . Nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_\pm} e^{-z^2/2} dz \right| &= D|\theta| \left| \int_0^1 e^{-\frac{(De^{is\theta}+x_0)^2}{2}} ds \right| \\ &\leq D|\theta| \int_0^1 |e^{-\frac{(z-x_0)^2}{2}}| ds \leq D|\theta| e^{D|x_0|} e^{-\frac{D^2 \cos(2\theta)}{2}}, \end{aligned}$$

et comme  $\cos(2\theta) > 0$ , cette quantité tend bien vers zéro lorsque  $D \rightarrow \infty$ , d'où le résultat.

### APPENDICES DU CHAPITRE III

## E<sub>III</sub> Ensemble de définition et hermiticité de x et p

Ces deux opérateurs  $x$  et  $p$  agissent en principe sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  des fonctions d'onde de carré sommable décrivant une particule à une dimension, mais nous allons voir que c'est un peu plus subtil que cela.

**Position** L'opérateur position  $x$  est représenté dans cet espace par la simple multiplication par  $x$ . Il est immédiat de constater que  $x$  n'est pas un endomorphisme de  $L^2(\mathbb{R})$ , puisque les fonctions  $\varphi$  de  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  qui décroissent à l'infini comme  $1/|x|$  ont un module carré sommable à l'infini, mais la fonction  $x\varphi(x)$  n'est alors pas sommable au voisinage de l'infini. L'ensemble de définition de  $x$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{H}$ , ce qui indique que son dual topologique est plus grand que  $\mathcal{H}'$ .

Le caractère auto-adjoint de  $x$  s'écrit simplement :

$$\langle f | x g \rangle = \int dx f^*(x) (x g(x)) = \int dx (x f^*(x)) g(x) = \langle x f | g \rangle,$$

qui résulte simplement du caractère réel de  $x$ . Toutefois cette égalité n'a de sens que si  $x f^*(x) g(x)$  est effectivement sommable, ce qui montre bien la dysmétrie entre bras et kets : si  $x g(x)$  est dans  $\mathcal{H}$ , alors tout  $\langle f | \in \mathcal{H}'$  peut agir sur le ket  $x |g\rangle$ . *A contrario* si on prend un bra  $\langle f | \in \mathcal{H}'$  et qu'on le multiplie à droite par  $x$ , on obtient un bra qui ne peut agir sur  $\mathcal{H}$  en entier mais seulement sur le s.e.v. qui est l'ensemble de définition de l'opérateur  $x$ .

Enfin l'équation aux valeurs propres  $x\varphi(x) = \lambda\varphi(x)$  n'admet comme solution que la distribution de Dirac  $\delta_\lambda(c)$ , plus simplement notée  $\delta(x - \lambda)$ . Cette dernière n'est pas une fonction, et *a fortiori* la « fonction »  $\delta$  n'est pas de carré sommable. Ainsi  $x$  admet

seulement des pseudo-vecteurs propres. Ils sont notés simplement  $|x\rangle$  (où  $x$  est la valeur propre  $\lambda$ ), dont la fonction d'onde est parfaitement localisée au point d'abscisse  $x$ , et les bras correspondants  $\langle x|$ .

On postule alors les relations orthonormalisation et de fermeture<sup>2</sup> et la décomposition spectrale de  $\mathbf{x}$  :

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x') , \quad \mathbb{1} = \int dx |x\rangle\langle x| \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} dx x |x\rangle\langle x| .$$

Pour tout état dont la fonction d'onde est continue, cela s'explique en :

$$\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle = \int dx' \delta(x - x') \varphi(x') \quad \text{et} \quad \langle x|\mathbf{x}|\varphi\rangle = x \langle x|\varphi\rangle .$$

**Impulsion** L'opérateur impulsion  $\mathbf{p}$  est représenté par l'opérateur différentiel  $\frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$ , lequel n'est clairement défini que pour des fonctions dérivables. Le caractère auto-adjoint de  $\mathbf{p}$  se montre à l'aide d'une intégration par parties :

$$\langle f|\mathbf{p}g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f^*(x) \frac{\hbar}{i} g'(x) dx = \frac{\hbar}{i} \left( [f^*g]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'^*(x) g(x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\hbar}{i} f'(x) \right)^* g(x) dx = \langle \mathbf{p}f|g\rangle ,$$

où la première dernière égalité suppose que la fonction  $g$  soit dérivable, et la dernière que le « terme de surface » satisfasse :

$$[f^*g]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} [f^*g]_a^b = 0 .$$

Cela montre que  $\mathbf{p}$  n'est autoadjoint que pour les fonctions dérivables et dont le module carré tend vers 0 pour  $x \rightarrow \pm\infty$ , ce qui n'est clairement pas le cas de toutes les fonctions de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , dérivables ou non.

L'équation aux valeurs propres  $\mathbf{p}\varphi(x) = \mu\varphi(x)$  donne des solutions en  $e^{i\mu x/\hbar}$ , qui de même que pour  $\mathbf{x}$ , ne correspond pas à des fonctions<sup>3</sup> de  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Les pseudo-vecteurs propres sont notés  $|p\rangle$  où  $p$  est la valeur propre  $\mu$  et on peut écrire, comme pour  $\mathbf{x}$  :

$$\langle p|p'\rangle = \delta(p - p') , \quad \mathbb{1} = \int dp |p\rangle\langle p| \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}} dp p |p\rangle\langle p| .$$

et en termes de fonction d'onde :

$$\tilde{\varphi}(p) = \langle p|\varphi\rangle = \int dp' \delta(p - p') \varphi(p') \quad \text{et} \quad \langle p|\mathbf{p}|\varphi\rangle = p \langle x|\varphi\rangle .$$

Bien sûr la connexion avec  $\mathbf{x}$  est faite en utilisant  $\langle x|p\rangle = e^{ipx/\hbar}/\sqrt{2\pi\hbar}$  et

$$\langle p|p'\rangle = \left\langle p \middle| \left( \int dx |x\rangle\langle x| \right) |p'\rangle \right\rangle = \int dx \langle p|x\rangle\langle x|p'\rangle = \int \frac{e^{i(p'-p)/\hbar}}{2\pi\hbar} = \delta(p' - p) ,$$

et la transformée de Fourier, qui est un simple changement de base :

$$\tilde{\varphi}(p) = \langle p|\psi\rangle = \left\langle p \middle| \left( \int dx |x\rangle\langle x| \right) |\psi\rangle \right\rangle = \int dx \langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(x) .$$

2. On vérifie aisément que  $\langle x_1|x_2\rangle = \overline{\int dx \delta(x - x_1)\delta(x - x_2)} = \delta(x_1 - x_2)$ .

3. La fonction d'onde des états  $|p\rangle$  ne vérifie même pas la condition sur la limite de  $[f^*g]_a^b$  qui rend  $\mathbf{p}$  autoadjoint.

## F<sub>III</sub> Construction des bases position et impulsion

Dans le chapitre II, et dans celui-ci nous avons postulé l'existence des base continue  $\{|r\rangle\}$  et  $\{|p\rangle\}$  pour construire les représentations position et impulsion. Nous avons de plus admis que dans la représentation position,  $x$  était une simple multiplication par  $x$ , et que  $p_{sf}$  était donné par l'opérateur différentiel  $-i\hbar\nabla$ . L'objet de ce paragraphe est de reconstituer cela dans le cadre formel des postulats exposés dans ce chapitre.

Pour cela, nous allons nous placer à une dimension<sup>4</sup>, et utiliser exclusivement la relation de commutation canonique  $[x, p] = i\hbar\mathbb{1}$ .

### F<sub>III.1</sub> Base propres de $x$

Il nous faut tout de même supposer aussi qu'il existe au moins un vecteur propre de  $x$ , par exemple le ket  $|\psi_0\rangle$  tel que  $x|\psi_0\rangle = 0$  (vecteur nul), qui est le vecteur  $|0\rangle$  de la représentation position.

#### F<sub>III.1 a)</sub> Utilisation de l'opérateur de translation

Les autres vecteurs de base s'obtiennent en utilisant l'opérateur de translation  $T_a = e^{-ip a/\hbar}$ . En effet, en utilisant la relation de commutation, pour tout réel  $a$  :

$$[x, e^{-ip a/\hbar}] = i\hbar \frac{\partial e^{ip a/\hbar}}{\partial p} = a e^{ip a/\hbar} \Rightarrow x e^{-ip a/\hbar} = e^{-ip a/\hbar} (x + a) ,$$

ce qui indique que le ket  $|\psi_a\rangle = e^{-ip a/\hbar} |\psi_0\rangle$  vérifie :

$$x |\psi_a\rangle = x e^{-ip a/\hbar} |\psi_0\rangle = e^{-ip a/\hbar} (x + a) |\psi_0\rangle = e^{-ip a/\hbar} a |\psi_0\rangle = a |\psi_a\rangle$$

et ce ket constitue donc un vecteur propre de  $x$  de valeur propre  $a$ , c'est à dire le vecteur  $|a\rangle$  de la représentation position. Ce dont on déduit que l'ensemble des vecteurs propres de  $x$  est  $\mathbb{R}$  entier. Si on admet en outre que  $|\psi_0\rangle$  était non dégénéré (pas d'autre ket propre linéairement indépendant pour la valeur propre 0), alors il en est de même pour tous les autres vecteurs propres.

#### F<sub>III.1 b)</sub> Représentation position et action de $x$

On définit alors la fonction d'onde en représentation position du ket  $|\varphi\rangle$  par la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}/\varphi(x) = \langle x|\varphi\rangle$ . L'action de l'opérateur  $x$  est alors donnée par l'équation  $\langle x|x|\varphi\rangle = (\langle x|b|\varphi\rangle) = x\langle x|\varphi\rangle$  ce qui montre, comme attendu, que la fonction d'onde associée à  $x|\varphi\rangle$  est  $x \times \varphi(x)$ .

#### F<sub>III.1 c)</sub> Orthonormalité de la base propres de $x$

Si on applique les règles générales relatives aux bases continues, on doit donc avoir  $\langle x'|x\rangle = \delta(x' - x)$ . Il est clair que l'on doit avoir  $0 \neq x' \neq x$ , car les deux kets sont alors des vecteurs propres d'un opérateur hermitique associés à des valeurs propres distinctes. Pour obtenir l'identité exacte, on peut passer par les fonctions d'onde. En effet, la fonction d'onde associée au ket  $|x'\rangle$  vérifie  $(x - x')\psi_{x'}(x) = 0$ . On sait que la solution d'une telle équation est, en terme de distribution,  $\psi_{x'}(x) = K\delta(x - x')$ . Par conservation de norme par l'opérateur unitaire de translation, on peut admettre que la constante  $K$  est la même pour tous les kets  $|\psi_{x'}\rangle$ , et la fixer égale à 1. On a donc bien  $\langle x|\psi_{x'}\rangle = \langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$ . On vérifie enfin la relation de fermeture  $\int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle\langle x| = \mathbb{1}$ , puisqu'elle s'écrit aussi  $|\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \langle x|\varphi\rangle|x\rangle$ , soit en termes de fonction d'onde  $\varphi(x') = \int_{\mathbb{R}} dx \langle x|\varphi\rangle\langle x'|x\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \varphi(x)\delta(x' - x)$ , qui est la définition de la distribution  $\delta$ .

4. la généralisation à 3 dimensions (voire  $3N$  si on a affaire à  $N$  particules) est immédiate par produit tensoriel.

### F<sub>III.1</sub> d) Action de $\mathbf{p}$ en représentation position

L'action de  $\mathbf{p}$  s'obtient via la limite infinitésimale de l'opérateur de translation. On a pour un ket  $|\varphi\rangle$  quelconque et  $a \in \mathbb{R}$  :

$$\langle x|\mathsf{T}_a|\varphi\rangle = \langle x-a|\varphi\rangle = \varphi(x-a) \Rightarrow \varphi(x)-\varphi(a-a) = \langle x|(\mathbb{1}-\mathsf{T}_a)|\varphi\rangle = \frac{ia}{\hbar}\langle x|\mathbf{p}|\varphi\rangle + \mathcal{O}(a^2)$$

et en divisant par  $a$  et prenant ensuite la limite  $a \rightarrow 0$ , on obtient  $i\hbar\langle x|\mathbf{p}|\varphi\rangle = \varphi'(x)$ , qui est bien cohérent avec la représentation  $\mathbf{p} \rightarrow -i/\hbar d/dx$ .

### F<sub>III.2</sub> Base propre de $\mathbf{p}$

#### F<sub>III.2 a)</sub> Vecteurs propres

On construit les vecteurs propres propres de  $\mathbf{p}$  en formant les combinaisons linéaires de kets propre de  $\mathbf{x}$  de la forme :

$$|\Psi_p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} |x\rangle \quad \text{tels que} \quad \Psi_p(x) = \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}}, \quad \Psi'_p(x) = \frac{ip}{\hbar} \Psi'_p(x).$$

La dernière égalité montre que  $|\Psi_p\rangle$  est le vecteur propre de  $\mathbf{p}$  avec la valeur propre  $p$ .

La relation d'orthonormalité généralisée s'obtient immédiatement en écrivant :

$$\langle p'|p\rangle = \int dx \langle p'|x\rangle \langle x|p\rangle = \int dx \frac{e^{i(p-p')x/\hbar}}{2\pi} = \delta(p-p')$$

et la relation de fermeture :

$$\begin{aligned} \int dp |p\rangle \langle p| &= \left( \int dx |x\rangle \langle x| \right) \left( \int dp |p\rangle \langle p| \right) \left( \int dx' |x'\rangle \langle x'| \right) \\ &= \iint dx dx' \left( \int dp \frac{e^{ip(x-x')/\hbar}}{2\pi\hbar} \right) |x\rangle \langle x'| = \iint dx dx' \delta(x-x') |x\rangle \langle x'| = \int dx |x\rangle \langle x| \end{aligned}$$

#### F<sub>III.2 b)</sub> Symétrie entre $\mathbf{x}$ et $\mathbf{p}$

On peut vérifier sans peine que, en représentation impulsion,  $\mathbf{p}$  est une multiplication par  $p$ , l'action de  $\mathbf{x}$  s'écrit  $+i\hbar d/dp$ , et que  $|p\rangle = \exp(+ix(p-p')/\hbar) |p\rangle$ , et enfin que :

$$|x\rangle = \int_{\mathbb{R}} dp \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} |p\rangle$$

## G<sub>III</sub> Transformations unitaires dépendant du temps

### G<sub>III.1</sub> Transformations unitaires

Lorsque cela s'y prête, qu'il s'agisse de simplifier la résolution d'un problème ou de faire émerger une image physique, on peut décider de faire une transformation unitaire, à l'aide un opérateurs unitaire  $S$ .

L'état quantique n'est alors plus représenté par le ket  $|\psi\rangle$  mais par son image par  $S$ , soit  $|\psi\rangle \mapsto |\tilde{\psi}\rangle = S|\psi\rangle$ . Pour conserver les prédictions physiques, comme les valeurs moyennes des opérateurs hermitiques par exemple, il faut aussi transformer les observables :

$$A \mapsto \tilde{A} = SAS^\dagger \quad \text{en sorte que} \quad \langle \tilde{\psi}|\tilde{A}|\tilde{\psi}\rangle = \langle \psi|S^\dagger S A S^\dagger S|\psi\rangle = \langle \psi|A|\psi\rangle.$$

Lorsque l'opérateur unitaire  $S$  est indépendant du temps, l'équation de Schrödinger n'est pas modifiée, et l'évolution de  $|\tilde{\psi}\rangle$  est simplement régie par le hamiltonien transformé  $\tilde{H}$ .

### G<sub>III.2</sub> Transformations unitaires dépendant du temps

Au contraire, si  $S$  dépend du temps, on doit réécrire l'équation d'évolution :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}\rangle = i\hbar \frac{dS}{dt} |\psi\rangle + S H |\psi\rangle = (\tilde{H} + K) |\tilde{\psi}\rangle \quad \text{où} \quad K = i\hbar \dot{S} S^\dagger.$$

On observe que puisque  $SS^\dagger = \mathbb{1}$ , on a  $\dot{S} S^\dagger + S \dot{S}^\dagger = 0$ , qui est la somme de deux opérateurs adjoints l'un de l'autre, ce qui montre que  $\dot{S} S^\dagger$  est anti-hermitique, et donc  $K$  est hermitique. Il en résulte que l'évolution des états quantiques est désormais régie par le nouveau hamiltonien :

$$H' = \tilde{H} + K.$$

Dans cette opération, les observables, si elles étaient constantes, sont maintenant dépendantes du temps, et on doit écrire :

$$\frac{d}{dt} \tilde{A} = \dot{S} A S^\dagger + S A \dot{S}^\dagger + S \frac{\partial A}{\partial t} S^\dagger = \dot{S} S^\dagger \tilde{A} + \tilde{A} S \dot{S}^\dagger + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{A}, -K] + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t}$$

ce qui montre que les observables évoluent avec un « hamiltonien » différent de celui qui gouverne l'évolution des kets<sup>5</sup>.

Ce résultat général s'applique pour élaborer le formalisme de la « représentation intermédiaire », décrite dans le prochain paragraphe.

### G<sub>III.3</sub> Représentation intermédiaire

Supposons que le hamiltonien du système considéré soit la somme  $H = H_1 + H_2$ , et que l'on connaisse l'opérateur d'évolution  $U_1$  associé à  $H_1$ , défini par  $i\hbar \dot{U}_1 = H_1 U_1$ . Posons alors  $S = U_1^+$ , tel que notamment  $i\hbar \dot{U}_1^\dagger = U_1^+ H_1$ , qui a pour effet de retrancher l'effet de  $H_1$ . Un calcul élémentaire montre alors que  $K = -H_1$ , ce qui conduit aux équations d'évolutions dans la nouvelle représentation :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}\rangle = \tilde{H}_2 |\tilde{\psi}\rangle \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \tilde{A} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{A}, H_1] + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial t}.$$

On constate que la transformation a bien supprimé la contribution de  $H_1$  à l'évolution des états, et l'a reportée exactement sur les observables.

Ce résultat n'est pas totalement inattendu : en effet, si  $H$  coïncide avec  $H_1$ , on obtient des kets qui n'évoluent plus et toute l'évolution est reportée sur les observables. On retrouve dans ce cas particulier le passage du point de vue de Schrödinger à celui de Heisenberg. Mais cette dichotomie de  $H$  étant totalement arbitraire, elle peut être utilisée de différentes façons.

### G<sub>III.4</sub> Représentation d'interaction

Une application importante de la représentation intermédiaire, est la représentation d'interaction. Elle s'applique lorsque que l'on a affaire à un hamiltonien  $H_0$ , dont les états propres sont supposés connus, et auquel on ajoute une perturbation  $V$ , qui couple les états propres de  $H_0$ .

La représentation d'interaction est la représentation intermédiaire dans laquelle le hamiltonien  $H_0$  joue le rôle de  $H_1$  dans l'étude générale, c'est à dire celui dont l'action est déportée sur les observables. De ce fait,  $H_0$  ne figure plus dans  $H'$ , les kets ne varient plus que sous l'effet de  $V$  (ou plutôt de  $\tilde{V}$ ). Ceci peut se comprendre en considérant que  $U_0^\dagger$  efface en permanence l'évolution due à  $H_0$ , en ne laissant subsister que celle due à  $V$ .

5. Les opérateurs d'évolution ne sont pas des observables, et leur évolution est différente. Plus précisément, on aura dans le nouveau point de vue  $U'(t_0, t) = S(t)U(t_0, t)S^\dagger(t_0)$ , dont on calcule sans peine qu'il évolue selon  $i\hbar \dot{U}' = H'U'$ , c'est à dire avec le même hamiltonien que les kets

On a alors l'équation de Schrödinger pour les kets ou l'opérateur d'évolution :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}\rangle = \tilde{V} |\tilde{\psi}\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad i\hbar \frac{dU'}{dt} |\tilde{\psi}\rangle = \tilde{V} U'(t) |\tilde{\psi}\rangle$$

Dans certaines situations, cette nouvelle formulation de l'équation de Schrödinger permet une résolution, exacte ou approchée, qui n'était initialement impossible ou malaisée.

### G<sub>III</sub>.5 Perturbations dépendant du temps

Un exemple de résolution approchée est la méthode des perturbations dépendantes (ou pas) du temps, au premier ordre. Dans ce cadre on peut écrire formellement :

$$U'(t) = \mathbb{1} + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \tilde{V}(t') U'(t') dt' .$$

En supposant que  $V$  est assez petit pour ne pas modifier de façon dramatique les états propres de  $H_0$  et les énergies associées, et pour des temps assez courts, on peut au second membre remplacer  $U'(t')$  par sa valeur initiale  $U'(0) = \mathbb{1}$ . En prenant alors l'élément de matrice de cette égalité entre deux états propres distincts de  $H_0$ , on obtient la probabilité de transition :

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = |\langle f | U'(t) | i \rangle|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t V_{fi}(t') e^{i\omega_{fi} t'} dt' \right|^2 \quad \text{où} \quad V_{fi} = \langle f | V | i \rangle .$$

Cette équation établit que l'amplitude de transition est proportionnelle à la transformée de Fourier de  $V$ , évaluée à la fréquence de Bohr  $\omega_{fi}$  de la transition considérée. Cela indique que seules contribuent réellement les composantes fréquentielles de  $V_{fi}$  proches de la résonance, définie comme la situation où la phase  $\omega_{fi}t$  compense le mieux possible la variation temporelle de  $V$ . Hors résonance, la phase tourne rapidement et va brouiller les contributions des différents instants  $t'$  et cela d'autant plus efficacement que  $t$  est grand. On retrouve par ce raisonnement qualitatif le fait que la transformée de Fourier est d'autant plus étroite que la fonction initiale est large ce qui permet de retrouver, dans une approche élémentaire, la relation d'incertitude temps-énergie  $\Delta E \times \Delta t \geq \hbar/2$ .

## H<sub>III</sub> Formalisme du spin fictif

### H<sub>III</sub>.1 Les matrices de Pauli

**Définition** Les matrices de Pauli<sup>6</sup> sont les trois matrices de  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$  suivantes :

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (\text{HIII.1})$$

Ces trois matrices seront souvent représentées comme un vecteur  $\sigma$  et on remplace couramment  $(x, y, z)$  par  $(1, 2, 3)$ .

#### Propriétés générales

- (a) Ces matrices sont visiblement hermitiennes, unitaires et involutives, donc unitaires. Elles sont de plus de trace nulle et de déterminant  $-1$ .
- (b) Elles forment avec  $\mathbb{1}$  une base du  $\mathbb{C}$ -ev  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ .

6. L'article fondamental sur l'hypothèse du spin est : W. Pauli Jr, « Zur Frage der theoretischen Deutung der Satelliten einiger Spektrallinien und ihrer Beeinflussung durch magnetische Felder », Naturwissenschaften **12** p. 741 (1924) doi :10.1007/BF01504828, mais le formalisme des spineurs et les matrices de Pauli sont introduits dans l'article : W. Pauli Jr, « Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons », Z. Physik **43**, p. 601 (1927) doi :10.1007/BF01397326

- (c) Elles forment  $\mathbb{1}$  une base une base du  $\mathbb{R}$ -ev des matrices hermitiennes de  $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ .  
(d) Elles vérifient les relations, pour  $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$  :

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} \mathbb{1} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad \text{en convention d'Einstein,}$$

- (e) Il en résulte les relations de commutation<sup>7</sup> :

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

- (f) Il en résulte que les matrices  $S_i = \hbar\sigma_i/2$  vérifient les relations de commutation caractéristique d'un « moment cinétique » (le terme anglais “angular momentum” est sans doute préférable) et donc que  $\mathbf{S}$  est un moment cinétique au sens élémentaire de la mécanique quantique. On dit alors que ce « spin  $\frac{1}{2}$  » définit une représentation irréductible en dimension 2 du groupe des rotations  $SO(3)$ .

**Conséquences utiles** Pour décrire les états quantiques du spin, on introduit en général les états propres de  $\sigma_z$  notés  $|\pm\rangle$  selon que la valeur propre de  $\sigma_z$  est  $\pm 1$ , c'est à dire que celle de  $S_z$  est  $\pm\hbar/2$ . On dite que le spin est « up » pour  $+1$  et « down » pour  $-1$ . Les matrices  $\sigma_i$  sont alors comprises comme la représentations de  $\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{S}/\hbar$  dans la base  $(|+\rangle, |-\rangle)$ .

- ◆ La relation sur le produit (d) s'écrit encore :

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  peuvent être des vecteurs ordinaires ou des opérateurs.

- ◆ Il résulte de (c) et de (d) que toute matrice hermitienne de taille  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{M}$  peut s'écrire, façon unique :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}(a\mathbb{1} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad \text{avec} \quad p_i = \text{tr}(\mathbf{M} \sigma_i)$$

dans lequel  $\mathbf{p}$  est un vecteur réel de  $\mathbb{R}^3$ . Le vecteur  $\mathbf{p}$  est tel que  $\det(\mathbf{M}) = (\alpha^2 - \|\mathbf{p}\|^2)/4$ . Il est dans certains contextes appelé « vecteur de Bloch ».

- ◆ Il résulte de ce qui précède que la composante de  $\boldsymbol{\sigma}$  dans une direction arbitraire repérée par le vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ , notée  $\sigma_u = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}$ , partagent avec les matrices de (H<sub>III.1</sub>) la propriété d'être de trace nulle et de déterminant  $-1$ . Et donc d'avoir pour valeurs propres  $+1$  et  $-1$ .

C'est aussi évident si on utilise les angles sphériques  $(\theta, \varphi)$  de  $\mathbf{u}$  et que l'on écrit la matrice, dans la base  $(|+\rangle, |-\rangle)$  :

$$\sigma_{\theta, \varphi} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{i\varphi} \\ \sin \theta e^{-i\varphi} & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

- ◆ La diagonalisation de  $\sigma_u$  est aisément réalisée à l'aide des projecteurs sur les espaces propres  $P_{\pm} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \pm \mathbb{1})$ , soit :

$$P_+ = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta/2 & \sin \theta/2 \cos \theta/2 e^{-i\varphi} \\ \sin \theta/2 \cos \theta/2 e^{i\varphi} & \sin^2 \theta/2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P_- = \begin{bmatrix} -\sin^2 \theta/2 & \sin \theta/2 \cos \theta/2 e^{-i\varphi} \\ \sin \theta/2 \cos \theta/2 e^{i\varphi} & -\cos^2 \theta/2 \end{bmatrix}$$

dont les colonnes donnent les vecteurs propres, définis à un facteur multiplicatif près :

$$|+\rangle_{\theta, \varphi} = \cos(\theta/2) |+\rangle + \sin(\theta/2) e^{i\varphi} |-\rangle \quad \text{et} \quad |-\rangle_{\theta, \varphi} = -\sin(\theta/2) |+\rangle + \cos(\theta/2) e^{i\varphi} |-\rangle \quad (\text{H}_{\text{III.2}})$$

7. Ce qui implique mathématiquement que les trois matrices  $i\sigma_i/2$  sont les générateurs du groupe de Lie  $su(2)$ , groupe de recouvrement de  $so(3)$ .

- ♦ Il résulte de cette écriture que tout état quantique  $|\psi\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$  est un état propre de  $\sigma \cdot u$  où  $u = \langle \sigma \rangle$

$$|\psi\rangle = e^{i\alpha} \sqrt{|a|^2 + |b|^2} \left( \underbrace{\frac{|a|}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |+\rangle}_{\cos(\theta/2)} + \underbrace{\frac{|b|e^{i(\beta-\alpha)}}{\sqrt{|a|^2 + |b|^2}} |-\rangle}_{\sin(\theta/2)e^{i\varphi}} \right) \quad \text{où } \alpha = \arg(a), \beta = \arg(b)$$

et (en supposant le ket  $|\psi\rangle$  normé (soit  $|a|^2 + |b|^2$ ) :

$$\langle \sigma_i \rangle = \begin{cases} x : & 2 \operatorname{Re}(a^*b) = 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \cos(\varphi) = \sin(\theta) \cos(\varphi) = u_x \\ z : & 2 \operatorname{Im}(a^*b) = 2 \cos(\theta/2) \sin(\theta/2) \sin(\varphi) = \sin(\theta) \sin(\varphi) = u_y \\ z : & |a|^2 b|^2 = \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2) = \cos(\theta) = u_z \end{cases}$$

Cette dernière propriété donne un sens univoque à l'expression «  $S$  pointe dans telle direction  $u$  » : cela signifie que  $\langle S \rangle$  est dans la direction de  $u$  et en même temps que  $|\psi\rangle$  est un vecteur propre de  $S \cdot u$  avec la valeur propre  $+\hbar/2$ .

Par la même occasion, on peut associer, de façon unique, à un état de spin défini à une multiplication près, un vecteur de Bloch  $p = \langle \sigma \rangle$  qui est continué sur la sphère unité. Sur cette « sphère de Bloch » Les états  $|\pm\rangle$  sont représentés respectivement par les pôles Nord et Sud ( $u_+ = u_z$  et  $u_- = -u_z$ , tandis que les vecteurs  $u_x$  et  $u_y$  correspondent au états :

$$p = u_x : \quad |+\rangle_x = \frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad p = u_y : \quad |+\rangle_i = \frac{|+\rangle + i|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

**Opérateur de rotation** Un dernier résultat utile est l'écriture explicite de l'opérateur de Rotation  $R(\alpha)$  où  $\alpha = \alpha u$  dans lequel  $\alpha$  est l'angle de de rotation et  $u$  le vecteur unitaire directeur de l'axe (orienté) de la rotation.

Conformément à la théorie générale du moment cinétique, et en utilisant les résultats qui précédent, on a, en distinguant dans le développement les termes pairs avec  $n = 2p$  et les termes impair avec  $n = 2p + 1$  :

$$\begin{aligned} R(\alpha) &= \exp\left(\frac{iS \cdot \alpha}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{i\sigma \cdot \alpha}{2}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p ((\sigma \cdot \alpha/2)^2)^p}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} i(\sigma \cdot u) \frac{(-1)^p ((\sigma \cdot \alpha/2)^2)^p (\alpha/2)}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\alpha/2 \mathbb{1})^{2p}}{(2p)!} + i(\sigma \cdot u) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\alpha/2 \mathbb{1})^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \cos(\alpha/2) \mathbb{1} + i \sin(\alpha/2) \sigma \cdot u \end{aligned}$$

## H<sub>III.2</sub> Représentation par un spin fictif

Un système à deux niveaux, hormis le cas d'un spin réel, apparaît lorsqu'on peut considérer isolément deux états parce qu'ils sont d'énergies voisines très voisines (en regard des autres fréquences de Bohr), ou qu'ils sont soumis à une perturbation sinusoïdale proche de résonance pour eux seulement. L'idée clé de la présente modélisation est la propriété (c) du § H<sub>III.1</sub> : le hamiltonienne est nécessairement de la forme  $H = \Omega \cdot S$ .

Soient  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  les deux états considérés, d'énergies  $E_a$  et  $E_b$ . nous supposerons sans perte de généralité que  $E_a \geq E_b$  et donc de que la fréquence de Bohr  $\omega_{ab} = (E_a - E_b)/\hbar$  est positive. On peut alors écrire le hamiltonien dans la base  $(|a\rangle, |b\rangle)$  :

$$H_0 = \begin{bmatrix} E_a & 0 \\ 0 & E_b \end{bmatrix} = \frac{E_a + E_b}{2} \mathbb{1} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \omega_{ab} & 0 \\ 0 & -\omega_{ab} \end{bmatrix} = \frac{E_a + E_b}{2} \mathbb{1} + \frac{\hbar}{2} \sigma \cdot \Omega_0 \quad \text{où } \Omega_0 = \omega_{ab} u_z .$$

Si on décide d'éliminer le terme scalaire, sans influence sur la dynamique, en posant  $E_a + E_b = 0$ , il est donc formellement identique à celui d'un spin  $S$  couplé à un champ magnétique (fictif) de direction  $z$  et dont les états propres selon cet axe seraient :  $|+\rangle = |a\rangle$  et  $|-\rangle = |b\rangle$ .

On peut définir les 3 composantes du spin fictif  $S$  en écrivant les opérateurs dont la représentation dans la base  $(|a\rangle, |b\rangle)$  soient aux matrices de Pauli :

$$\sigma_z \leftrightarrow |a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|, \quad \sigma_x \leftrightarrow |a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle a|, \quad \sigma_y \leftrightarrow i(|a\rangle\langle b| - |b\rangle\langle a|) \quad \text{et} \quad \mathbb{1} = |a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|,$$

Dans cette approche, une perturbation non-diagonale s'écritra :

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} 0 & V_{ab}^* \\ V_{ab} & 0 \end{bmatrix} = \Re(V_{ab})\sigma_x + \Im(V_{ab})\sigma_y = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{S} & (\text{H}_{\text{III}.3}) \\ \text{où } \boldsymbol{\omega}_1 &= \frac{2}{\hbar}(\Re(V_{ab}) \mathbf{u}_x + \Im(V_{ab}) \mathbf{u}_y). \end{aligned}$$

Il convient de noter que comme la phase des états  $a$  et  $b$  est arbitraire, si  $V_{ab}$  est constant, on peut toujours se ramener au cas où il est réel, ce qui revient à annuler la composante  $y$  de  $\boldsymbol{\omega}_1$ . Cela revient simplement à utiliser l'invariance par rotation autour de  $z$  pour aligner l'axe des  $x$  sur la direction de  $\boldsymbol{\omega}_1$ .

Il en résulte que le hamiltonien total se met sous la forme  $H = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S}$  où  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_1$ . Les équation du mouvement (dans le point de vue de Heisenberg) sont de la forme :

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\mathbf{S}, \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S}] = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{S}$$

identique à l'équation classique, et donc par linéarité  $\langle S \rangle$  vérifie la même équation.

Dans la cas où  $\boldsymbol{\Omega}$  est constant :

- ◆ On peut écrire les états stationnaires comme les états propres de  $\mathbf{S}$  dans la direction de  $\boldsymbol{\Omega}$ , c'est à dire sous la forme (H<sub>III.2</sub>) avec  $\theta = \arccos(\Omega_0/\Omega)$  et  $\varphi = 0$ , avec des énergies de  $\pm\hbar\Omega/2$  (avec  $\Omega = \|\boldsymbol{\Omega}\| = \sqrt{\Omega^2 + \omega_1^2}$ ).
- ◆ On peut écrire l'opérateur d'évolution  $U(t) = \exp(-i\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{S} t/\hbar)$  qui n'est autre que l'opérateur de rotation  $R(-\boldsymbol{\Omega}t)$  que l'on peut calculer conformément au § H<sub>III.1</sub>, en utilisant le vecteur directeur de luxe de la rotation  $\mathbf{u} = \Omega_0/\Omega \mathbf{u}_z + \omega_1/\Omega \mathbf{u}_x$ . On en déduit l'évolution de n'importe quel état initial, et notamment des états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} |a\rangle(t) = \left( \cos(\Omega t/2) - i \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right) |a\rangle - i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin(\Omega t/2) |b\rangle \\ |b\rangle(t) = \left( \cos(\Omega t/2) + i \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin(\Omega t/2) \right) |a\rangle - i \frac{\omega_1}{\Omega} \sin(\Omega t/2) |a\rangle \end{array} \right.$$

Le problème qui reste à résoudre est celui dans lequel  $\boldsymbol{\Omega}$  n'est pas constant et notamment celui où le système est soumis à une perturbation  $V$  qui varie de façon sinusoïdale, comme à chaque fois où l'on veut prendre ne compte un couplage avec une onde électromagnétique.

### H<sub>III.3</sub> Interaction avec une onde électromagnétique

Considérons le système décrit par les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  soumis à une onde électromagnétique de fréquence angulaire  $\omega \sim \Omega_0$ .

**Modélisation** Si l'opérateur  $r$  ou  $p$  impliqué dans le couplage  $W$  au champ de cette onde a un élément de matrice non-nul entre les deux niveaux, on pourra représenter l'interaction sous la forme d'un « champ magnétique fictif » transverse<sup>8</sup> :

$$\omega_1 = \frac{W_{ab}}{\hbar} \mathbf{u}_x \quad \text{tel que} \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{u}_x \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = (\Omega_0 \mathbf{u}_z + 2 \omega_1 \cos(\omega t) \mathbf{u}_x) \cdot \mathbf{S} \quad (\text{H}_{\text{III}.4})$$

Nous avons comme précédemment supposé que  $W_{ab}$  était réel (ce qui correspond à choix arbitraire de l'axe des  $x$ , ou de la phase des états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ ) et le choix de l'évolution en  $\cos(\omega t)$  est une hypothèse simplificatrice sans conséquence physique notable.

Le problème qui se pose dans ce modèle tient à ce que le caractère variable du hamiltonien ne permet pas d'écrire l'opérateur d'évolution comme une simple exponentielle ainsi que nous l'avons fait au paragraphe précédent.

**Approximation de l'onde tournante** Explicitons l'équation satisfaite par  $|\psi\rangle$  pour en déduire celle de ses coefficients base  $(|a\rangle, |b\rangle)c_{\pm}(t)$ . Il vient successivement :

$$|\psi(t)\rangle = c_+ e^{-i\Omega_0 t/2} |+\rangle + c_- e^{-i\Omega_0 t/2} |-\rangle \quad (\text{H}_{\text{III}.5a})$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = i\hbar (\dot{c}_+ - i\frac{\Omega_0}{2} c_+) |+\rangle + i\hbar (\dot{c}_- + i\frac{\Omega_0}{2} c_-) |-\rangle = \mathbf{H} |\psi\rangle \quad (\text{H}_{\text{III}.5b})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i \dot{c}_+ = 2\omega_1 \cos(\omega t) e^{-i\Omega_0 t} c_- = \omega_1 (e^{+i(\omega-\Omega_0)t} + e^{-i(\omega+\Omega_0)t}) c_- \\ i \dot{c}_- = 2\omega_1 \cos(\omega t) e^{+i\Omega_0 t} c_+ = \omega_1 (e^{-i(\omega-\Omega_0)t} + e^{+i(\omega+\Omega_0)t}) c_+ \end{cases} \quad (\text{H}_{\text{III}.5c})$$

Nous avons sur la première ligne (H<sub>III.5a</sub>) incorporé dans les coefficients  $c_{\pm}$  l'évolution « libre », c'est à dire celle qu'on aurait en l'absence de l'onde ( $\omega_1 = 0$ ). Cette méthode (représentation d'interaction) permet que dans le système (H<sub>III.5c</sub>) l'évolution résulte purement du couplage. Ce système d'équations couplées fait intervenir au membre de droite la somme d'une exponentielle de fréquence  $\pm(\Omega_0 - \omega)$ , à variation lente, et d'une autre de fréquence  $\pm(\Omega_0 + \omega)$ . Comme on a assurément  $|\Omega_0 - \omega| \ll \omega \simeq \Omega_0$ , le terme rapide n'aura pas d'effet notable sur la dynamique, hormis des ondulations de moyenne nulle sur l'évolution plus lente induite par le terme faisant intervenir le désaccord de résonance  $\Delta\omega = \Omega_0 - \omega$ .

Nous allons donc négliger des deux exponentielles à rotation rapide, ce qui est un exemple d'approximation séculaire, de même nature que celle qui, généralement, a permis de restreindre le système étudié à deux niveaux. Toutefois, dans le contexte présent, cette approximation acquiert une signification géométrique très éclairante. Nous allons donc négliger des deux exponentielles à rotation rapide, ce qui est un exemple d'approximation séculaire, de même nature que celle qui, généralement, a permis de restreindre le système étudié à deux niveaux. Toutefois, dans le contexte présent, cette approximation acquiert une signification géométrique très éclairante.

En suivant la démarche inverse des équations (H<sub>III.5</sub>), nous pouvons montrer que négliger ces termes revient à remplacer le hamiltonien (H<sub>III.4</sub>) par le suivant, dit « à l'approximation de l'onde tournante » (“Rotating Wave Approximation”) :

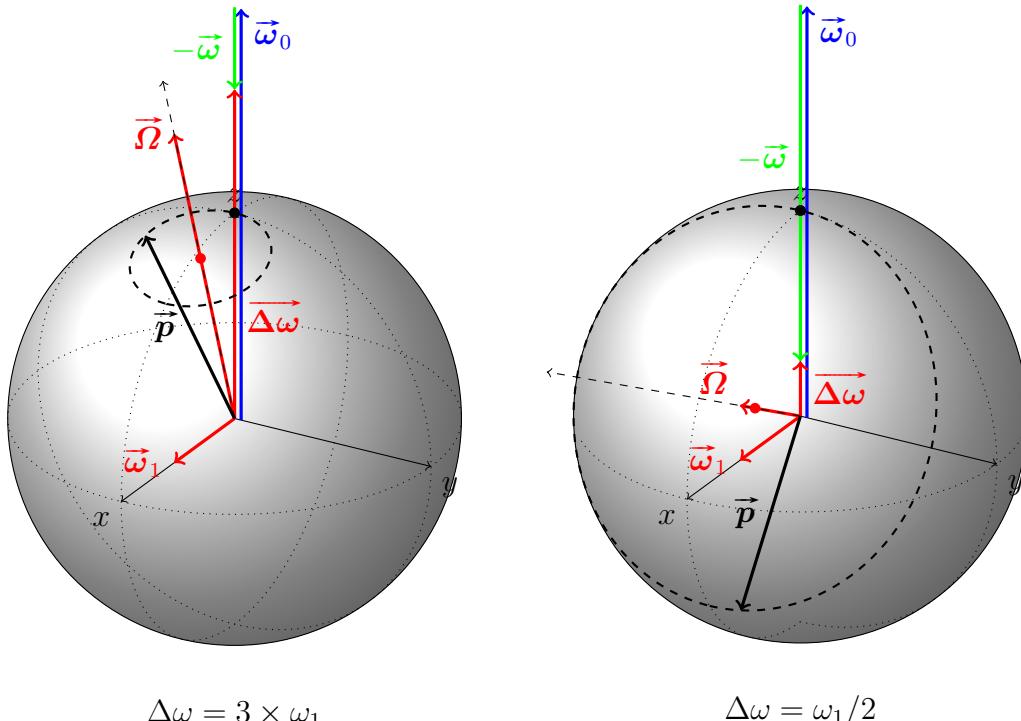
$$\mathbf{H}_{\text{RWA}} = \left( \Omega_0 \mathbf{u}_z + \underbrace{\omega_1 (\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t) \mathbf{u}_y)}_{\omega_1} \right) \cdot \mathbf{S} ,$$

dans lequel le champ magnétique fictif associé à l'onde est maintenant un champ de module  $\omega_1$  tournant autour de l'axe  $z$  à la fréquence  $\omega$ .

8. Noter que nous avons introduit un facteur 2 par rapport à l'équation (H<sub>III.3</sub>) pour des raisons qui apparaîtront bientôt.

On peut en effet vérifier que le champ oscillant initial  $2\omega_1 \cos(\omega t)$  est la somme de deux champs de module  $\omega_1$  tournant en sens inverse dans le plan  $xy$  :  $\omega_{\pm} = \omega_1 (\cos(\omega t) \mathbf{u}_x \pm \sin(\omega t) \mathbf{u}_y)$ . Compte tenu du fait que le spin précessé naturellement à la fréquence  $\Omega_0 \simeq \omega$  autour de l'axe  $z$ , la composante correspondant à  $\omega_+$  accompagne le spin dans son mouvement libre et pourra avoir un effet notable, alors celle correspondants à  $\omega_-$  tourne dans le sens contraire et son effet se moyennera donc très vite à zéro.

Ce hamiltonien est toujours dépendant du temps si  $\Delta\omega \neq 0$  mais nous allons voir que l'approximation de l'onde tournante permet maintenant de se ramener à un hamiltonien indépendant du temps.



**Fig. H<sub>III</sub>.1** – La sphère de Bloch et les différents vecteurs rotations impliqués dans le problème dans le référentiel tournant : en bleu  $\omega_0$ , en vert  $-\omega$ , en rouge  $\omega_1$ ,  $\Delta\omega$  et leur somme  $\Omega$ . Sur la sphère, le point noir au « pôle nord représente l'état initial  $|+\rangle$ , et le cercle en tirets la trajectoire du vecteur de Bloch (figuré en noir) centré sur le point rouge. En pointillés, figurent les grands cercles suivants : équateur (plan  $xy$ ), méridien dans le plan  $xz$  (dans lequel sont les vecteurs  $\omega$  et  $\Omega$ ) et méridien dans le plan  $yz$ .

**Passage dans le référentiel tournant** Revenons aux équations ((H<sub>III.5</sub>c)) dans laquelle la seconde exponentielle exponentielle a été supprimée conformément au § ss-rwa ci-dessus. Elles font apparaître la fréquence  $\pm(\omega - \Omega_0)$ , dont le  $\omega$  vient de l'onde, et le  $\Omega_0$  du choix que nous avions fait en (H<sub>III.5a</sub>) pour éliminer l'évolution libre. Ce choix était alors naturel mais en fait arbitraire, et il est possible de revenir dessus en utilisant  $\omega$  à la place, c'est à dire en remplaçant (H<sub>III.5a</sub>) par :

$$|\psi(t)\rangle = c_+ e^{-i\omega t/2} |+\rangle + c_- e^{-i\omega t/2} |-\rangle \quad (\text{H}_{\text{III}.5d})$$

et donc (H<sub>III.5c</sub>) par :

$$\begin{cases} i \dot{c}_+ = \omega_1 (1 + e^{-2i\omega t}) c_- \\ i \dot{c}_- = \omega_1 (1 + e^{+2i\omega t}) c_+ \end{cases} \quad (\text{H}_{\text{III}.5c'})$$

sur laquelle on peut toujours négliger l'exponentielle qui reste au second membre, ce qui conduit à un second membre constant. Les équations ainsi obtenues peuvent être

combinées pour former deux EDO du second ordre à coefficients constants qui sont aisément résolues.

Pour prolonger notre interprétation formelle grâce à l'analogie avec le spin, il est important de souligner que cette opération correspond en fait à un passage dans le référentiel tournant à la fréquence  $\omega$  autour de  $z$ . Ce changement de référentiel a deux effets : il immobilise la composante importante du champ alternatif, mais aussi introduit un *terme correctif* constant  $-\omega \mathbf{u}_z$  dans le hamiltonien.

En effet, on rappelle qu'en mécanique quantique, un changement de « point de vue » (dont un changement de référentiel est un cas particulier), est décrit par un opérateur unitaire  $U$  en posant :

$$|\tilde{\psi}\rangle = U |\psi\rangle \quad \text{et} \quad \tilde{A} = U A U^+$$

ce qui permet de conserver le caractère hermitien des opérateurs  $A$  ainsi que leurs valeurs propres et donc toutes les prédictions physiques. Lorsque  $U$  est indépendant du temps, le nouveau hamiltonienne est naturellement  $\tilde{H}$ . Si en revanche  $U$  dépend du temps, l'examen de l'équation de Schrödinger montre que le hamiltonien est modifié comme suit :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\tilde{\psi}\rangle = i\hbar U H |\psi\rangle + \dot{U} |\psi\rangle d\omega = (\tilde{H} |\tilde{\psi}\rangle + i\hbar \dot{U} U^+) |\tilde{\psi}\rangle \Rightarrow H' = \tilde{H} + i\hbar \dot{U} U^+ = \tilde{H} - i\hbar U \dot{U}^+$$

Dans le cas d'un référentiel tournant à  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $U(t)$  est l'opérateur de rotation d'angle  $-\boldsymbol{\omega} t$  soit :

$$U = \exp(i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} t / \hbar) \Rightarrow \dot{U} = i\hbar \left( \frac{i}{\hbar} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) U \Rightarrow H = \tilde{H} - \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} .$$

On vérifie au passage que si  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}_z$  :

$$\left( \mathbb{1} + \frac{i}{\hbar} J_z \omega dt \right) J_x \left( \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} J_z \omega dt \right) = J_x + \frac{i}{\hbar} [J_z, J_x] \omega dt + \mathcal{O}(dt^2) \approx J_x - \omega dt J_y$$

ce qui confirme que  $\tilde{J}_x = \cos(\omega t) J_x - \sin(\omega t) J_y$  et de même  $\tilde{J}_y U^+ = \cos(\omega t) J_y + \sin(\omega t) J_x$ .

En utilisant la théorie générale des transformations unitaires qui est rappelée ci-dessus, on obtient dans le référentiel tournant le hamiltonien<sup>9</sup> :

$$H' = \left( (\Omega_0 - \omega) \mathbf{u}_z + \omega_1 \mathbf{u}_x \right) \cdot \mathbf{S} . \quad (\text{III.6})$$

En termes géométriques cela signifie que le vecteur  $\boldsymbol{\Omega}_0$  associé à la précession libre est réduit de la quantité  $-\boldsymbol{\omega}$ , comme on peut le voir sur la figure [III.1](#). Cela permet que la vecteur rotation total  $\boldsymbol{\Omega}$  (dans la grande parenthèse de l'équation [\(III.6\)](#)) fasse aisément un angle proche de  $\pi/2$  avec l'axe  $z$  : il suffit de  $|\Delta\omega| \ll \omega_1$  ainsi que c'est exactement le cas à résonance (c'est-à-dire pour  $\Delta\omega = 0$ ). C'est ce qui permet que la probabilité de retournement du spin soit la plus importante possible.

Pour calculer l'état final du système il conviendrait en principe de revenir dans le référentiel « du laboratoire » en appliquant la rotation inverse de celle qui nous a permis de rendre le hamiltonien constant. Toutefois, cette rotation d'axe  $z$  de modifie que la *phase* des coefficients de la  $|\psi\rangle$  dans la base  $|\pm\rangle$ , et si l'on s'intéresse seulement à la probabilité de transition de l'état  $|+\rangle$  à l'état  $|-\rangle$  elle n'a pas d'effet.

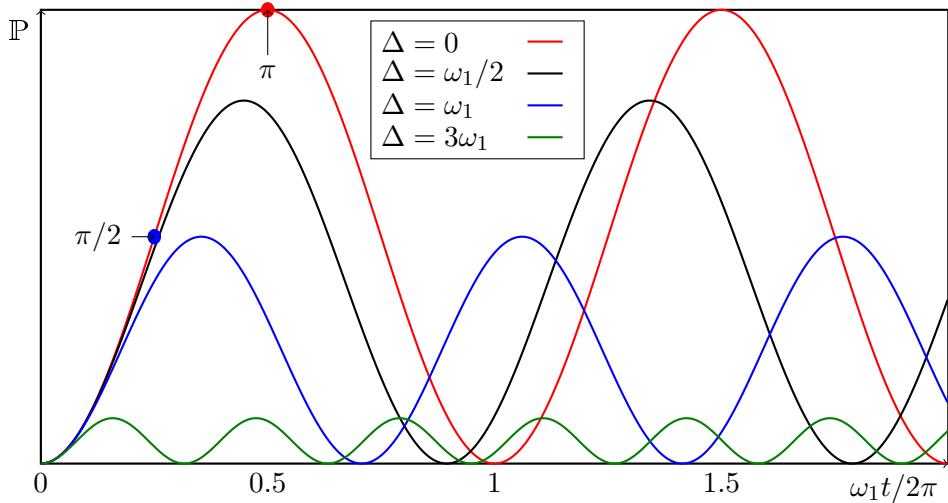
On obtient ainsi l'expression exacte (à l'approximation de l'onde tournante) de l'oscillation de Rabi à et hors résonance :

$$\mathbb{P}_{+-} = |\langle + | \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} | - \rangle|^2 \sin^2(\Omega t/2) = \frac{\omega_1^2}{(\Omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2} \sin^2(\sqrt{(\Omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2} t/2)$$

On appelle  $\Omega$  la « fréquence de Rabi », qui se réduit à  $\omega_1$  à résonance. On peut vérifier que le comportement aux temps courts donne  $\mathbb{P}_{+-} \approx (\omega_1 t/2)^2$ , qui coïncide avec le résultat lorsqu'on utilise un traitement perturbatif au premier ordre.

Cette probabilité est tracée sur la figure [III.2](#). De façon générale, l'oscillation est d'autant plus rapide et de faible amplitude lorsque l'on s'écarte de résonance. L'amplitude

9. Si on avait utilisé  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  au lieu de  $\cos(\omega t)$  dans [\(III.4\)](#), sa composante horizontale serait simplement dirigée selon le vecteur d'azimut  $\varphi_0$  dans le plan  $xy$ .



**Fig. H<sub>III</sub>.2** – Tracé de la probabilité  $P$  de la transition  $|+\rangle \rightarrow |-\rangle$  en fonction du temps, a-dimensionné par  $\omega_1$ , pour 3 valeurs du désaccord désaccords  $\Delta = \Omega_0 - \omega$ . Les points repèrent les instants correspondant à une impulsion  $\pi$  ou  $\pi/2$ .

suit une loi lorentzienne en fonction du désaccord  $\Omega_0 - \omega$ . Il est toutefois remarquable que la largeur de la courbe de résonance  $2\omega_1$  soit alors donnée par la valeur du couplage, alors que si on prend en compte le temps de vie fini des niveaux  $\tau$ , on obtient une lorentzienne de largeur  $\delta\omega = \Gamma = 2\pi/\tau$ . Le résultat général, lorsque le couplage résonant sélectionne deux niveaux, dont l'un au moins peut se désexciter vers un continuum, donne une courbe de résonance lorentzienne dont la largeur est la somme d'un terme lié à la relaxation  $\Gamma$  et d'un terme lié à l'importance du couplage. Comme le paramètre  $\Gamma$  est très généralement constant, on observera, pour  $\omega_1 \ll \Gamma$  la largeur naturelle du niveau. Si on augmente l'intensité de l'onde incidente pour avoir un taux de transfert plus important, on peut entrer dans le régime pour  $\omega_1 \gtrsim \Gamma$ , où la largeur est augmentée « par effet de puissance ».

Le comportement observé à grand désaccord de résonance est une confirmation *a posteriori* des approximations que nous avons faites pour éliminer tous les termes non résonants de l'équation de Schrödinger, et en même temps nous donne un indications sur les limitations de la méthode conduisant à isoler deux niveaux : si on est assez loin de résonance aussi sur ce couple de niveaux, le taux de transition sera peut-être plus important sur un autre couple, ou bien négligeable sur toutes les transitions.

**Applications** Il est visible que si l'on est assez proche de résonance, on peut choisir le temps d'interaction ou l'intensité de la perturbation pour obtenir une probabilité de 1 ou de 1/2 :

- ◆ Dans le premier cas, appelé « *impulsion  $\pi$*  », il faut être exactement à résonance de façon que  $\Omega = \omega_1$  soit horizontal et le temps d'interaction  $T_\pi$  est alors tel que  $\omega_1 T_\pi = \pi$ , représenté par le point rouge sur la figure H<sub>III</sub>.2. L'utilité de l'impulsion  $\pi$  tient à ce qu'elle rend possible un transfert *total* de population d'un niveau vers l'autre, alors qu'un processus incohérent permettrait au plus d'obtenir des populations égales dans les deux niveaux.
- ◆ Dans le second cas, appelé « *impulsion  $\pi/2$*  », il suffit que  $\omega_1 > |\Delta\omega|$  pour que l'angle de  $\Omega$  avec l'axe  $z$  excède  $\pi/4$  et que la trajectoire de  $S$  coupe le plan équatorial. La durée  $T_{\pi/2}$  est alors telle dépendante du rapport  $|\Delta\omega|/\omega_1$ , mais vaut  $T_\pi/2$  si on est à résonance. L'impulsion  $\pi/2$  est utilisée en RMN pour mesurer le temps de cohérence des niveaux, et surtout pour la méthode spectroscopique des « champs séparés » (dite méthode de Ramsey) sur laquelle repose le principe des horloges atomiques.

## I<sub>III</sub> Approximation adiabatique

Cet appendice porte sur des problèmes où le hamiltonien du système dépend du temps de façon non triviale, et où l'opérateur d'évolution n'est donc pas donné de façon exacte par l'expression (III.15), ni ne peut être analysée par une approche perturbative. Le cas le plus intéressant et le plus simple est celui où le hamiltonien varie de façon extrêmement lente (limite adiabatique).

### I<sub>III.1</sub> Position du problème

Nous supposons que le hamiltonien  $H(t)$  varie dans sa globalité via le changement d'un paramètre « extérieur », qui peut être contrôlé par un « opérateur » classique, ou bien par l'intermédiaire de la dynamique quantique d'un autre système. Un exemple important est celui d'un champ extérieur qui ajoute une perturbation dont l'importance ou la structure varie dans le temps, mais la situation considérée est bien plus générale. Deux exemples typiques de ce problème sont la dynamique d'un spin dans un champ magnétique de direction variable, et celle d'un oscillateur harmonique dont on fait varier la fréquence.

### I<sub>III.2</sub> Approche classique

Nous commençons par l'étude d'un problème classique relativement élémentaire, qui nous permettra d'introduire la plupart des idées importantes. Nous généraliseront alors ce résultat pour introduire sommairement les résultats généraux.

**Pendule pesant** Un pendule pesant simple constitué d'une masse  $m$  suspendue dans le champ de pesanteur  $g$  à une tige ou une corde, de masse négligeable et de longueur  $\ell$ . Pour une évolution dans un plan, ce système peut être paramétrisé par l'angle orienté  $\theta$  séparant la direction de la corde la verticale. Cela permet d'écrire l'énergie mécanique du système, et l'équation de Newton qui s'en déduit, sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0. \quad (\text{III.7})$$

Le problème, soumis par Ehrenfest au congrès de Solvay en 1911 est le suivant : si la corde est suspendue à un anneau, et qu'un opérateur extérieur tire doucement sur la corde, que se passe-t-il ? La longueur de la corde va varier, il doit donc en résulter une variation de la fréquence des oscillations (à la limite harmonique où  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\omega = \sqrt{g/\ell}$ ), ainsi qu'une variation de l'énergie, mais quelle corrélation existe-t-il entre celles-ci ?

**Puissance fournie** La variation de l'énergie peut être obtenue en évaluant la puissance fournie par la seule force qui travaille, à savoir la tension du fil. Dans le cadre du mouvement propre décrit par les équations (I<sub>III.7</sub>), cette tension est dirigée le long du fil vers le point d'ancrage, et son intensité s'écrit :

$$\mathcal{T} = mg \cos \theta + m\ell\dot{\theta}^2$$

qui peut être interprétée disant que, pour que le mouvement soit un mouvement circulaire de rayon  $\ell$ , le fil doit compenser la composante radiale du poids (premier terme) et la pseudo-force centrifuge (second terme).

La puissance fournie par l'opérateur, associée à cette force, est simplement  $\mathcal{P} = -\mathcal{T}\dot{\ell}$ , et elle donne la variation de l'énergie, soit :

$$\frac{dE}{dt} = -(mg \cos \theta + m\ell\dot{\theta}^2) \frac{d\ell}{dt}.$$

Cette équation exacte est bien connue pour donner lieu à la résonance paramétrique (problème de la balançoire) si  $\ell$ , et donc  $\dot{\ell}$ , sont périodiques de période  $T/2$ .

**Approximation séculaire** Mais la situation qui nous intéresse ici est celle où  $\ell$  varie lentement à l'échelle de la période  $T$  des oscillations libres, c'est à dire si  $\dot{\ell}$  est petit et peut de surcroît être considéré comme constant à cette échelle de temps. On retrouve ici un raisonnement qui était déjà celui de l'approximation séculaire : puisque  $E$  est constant pour  $\ell$  constant, et que  $\dot{\ell}$  est petit,  $dE/dt$  peut être remplacé par sa valeur moyenne à l'échelle de  $T$ , celle-ci étant calculée à  $\ell$  constant.

On obtient ainsi, en utilisant explicitement le fait que  $E$  est conservé à l'échelle de  $T$  :

$$\frac{dE}{dt} \approx -\langle mg \cos \theta + m\ell \dot{\theta}^2 \rangle \frac{d\ell}{dt} = \left( -\frac{2E}{\ell} + 3mg \langle 1 - \cos \theta \rangle - mg \right) \frac{d\ell}{dt}.$$

Il est à noter que le troisième terme, rend compte de l'augmentation triviale de l'énergie potentielle de repos, et doit être éliminé si on s'intéresse exclusivement à l'énergie  $E'$  des oscillations<sup>10</sup>. Néanmoins, dans le cas général, la valeur moyenne  $\langle 1 - \cos \theta \rangle$  n'a pas d'expression simple et il est difficile de conclure.

**Invariant adiabatique** En revanche, si nous nous plaçons maintenant dans le régime harmonique, nous avons  $mg \langle 1 - \cos \theta \rangle = mg \langle \theta^2 \rangle / 2 = E'/2\ell$  en raison du théorème du viriel, et il vient :

$$\frac{dE'}{dt} \approx -\frac{E'}{2} \frac{\dot{\ell}}{\ell} = E' \frac{\dot{\omega}}{\omega} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{E'}{\omega} \right) = 0.$$

Nous avons ainsi pu établir par un raisonnement simple que, si  $\ell$  varie assez lentement, les variations de  $E'$  et de  $\omega$  sont telles que la quantité  $I = E'/\omega$  reste constante.

La condition  $\dot{\ell} \times T \gg 1$  caractérise le régime d'évolution *adiabatique* et la quantité  $I = E'/\omega$  est appelée *l'invariant adiabatique* de l'oscillateur harmonique<sup>11</sup>. Notons que si c'était la masse  $m$  qui variait lentement, le calcul serait un peu plus délicat, mais le résultat serait rigoureusement le même.

**Généralisation** De façon plus générale, si on a un hamiltonien  $\mathcal{H}(q, p, \lambda(t))$ , où  $\lambda$  est le paramètre variable, et  $\mathcal{H}$  ne dépendant pas explicitement du temps, qui donne lieu à un mouvement oscillant, on pourra toujours écrire :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \dot{\lambda}$$

et en utilisant à la fois l'approximation séculaire et les équations du mouvement à  $\lambda$  constant, l'équation d'évolution :

$$\frac{dE}{dt} = \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} \right\rangle \frac{d\lambda}{dt} = F(\mathcal{H}, \lambda) \frac{d\lambda}{dt}.$$

Plus précisément, en utilisant la définition de moyenne temporelle,  $dt = dq/\dot{q} = dq/\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$  :

$$F(\mathcal{H}, \lambda) = \frac{\oint \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} / \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dq}{\oint 1 / \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dq} = -\frac{\oint \frac{\partial P}{\partial \lambda} dq}{\oint \frac{\partial P}{\partial E} dq}$$

10. Dans  $E'$  l'énergie potentielle  $-mgl \cos \theta$  est remplacée par  $mgl(1 - \cos \theta)$ .

11. Dans le cas non-harmonique, on aurait tout de même pu exprimer  $3mg \langle 1 - \cos \theta \rangle$  comme une fonction de  $U(E')/\ell$ , et que l'on aurait obtenu de façon similaire une équation  $\dot{E}'/(U(E') - 2E') = \dot{\ell}/\ell$  et donc une combinaison de  $E'$  et de  $\ell$  qui est conservée, généralisant à ce cas techniquement plus compliqué l'existence d'un invariant adiabatique

La deuxième égalité, non triviale, résulte des équations du mouvement libre, qui se font à à  $E$  et  $\lambda$  constant. Dans cette situation  $p$  peut être vu comme une fonction de  $P(q, E, \lambda)$ , et on a :

$$dE = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} dp + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} dq + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} d\lambda \Rightarrow dp = \underbrace{1 / \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}}_{\partial P / \partial E} dE - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} / \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}}_{\partial P / \partial q} dq - \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} / \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}}_{\partial P / \partial \lambda} d\lambda.$$

Il vient alors :

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle \oint \frac{\partial P}{\partial E} dq + \frac{d\lambda}{dt} \oint \frac{\partial P}{\partial \lambda} dq = \oint \left( \frac{\partial P}{\partial E} \left\langle \frac{\partial E}{\partial \lambda} \right\rangle + \frac{\partial P}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \right) dq = 2\pi \frac{dI}{dt} = 0.$$

où l'on a reconnu la dérivée de la quantité  $I$  appelée *variable d'action* :

$$I(E, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \oint P(q, E, \lambda) dq = \frac{1}{2\pi} \oint p dq. \quad (\text{III.8})$$

Ce calcul un peu formel montre que la variable d'action d'un système mécanique périodique (oscillation ou rotation) à un degré de liberté est un invariant adiabatique. Il est aisément de montrer que l'intégrale curviligne est aussi la surface intérieure à la « trajectoire » dans le plan de phase  $(q, p)$ .

Pour un oscillateur harmonique, on a  $E = p^2/2m + m\omega^2q^2/2$ , ce qui définit une trajectoire elliptique dans le plan de phase. Comme la surface une ellipse est  $\pi ab$  où  $a$  et  $b$  sont les demi-axes, on calcule ici  $a = \sqrt{2mE}$  et  $b = \sqrt{2E/m}/\omega$  et donc  $I = (\pi ab)/2\pi = E/\omega$  : on retrouve le résultat de paragraphes précédents.

### Variables action-angle

Dans le cas plus général d'un système à  $d$  degrés de liberté, il est parfois possible (essentiellement dans le cas où l'équation de Hamilton-Jacobi est séparable) de définir  $d$  variables d'action analogues à (III.8), dont la dimension est effectivement celle d'une action.. Ces variables d'action  $\{J_i\}$  peuvent être prises comme nouvelles impulsions dans une transformation canonique. Les variables conjuguées sont alors des variables sans dimension, qui varient de  $2\pi$  sur une période, et sont donc appelées « variables d'angle », notées  $\{w_i\}$ .

Le point important est que le hamiltonien ne dépend alors plus des « positions »  $\{w_i\}$ , et on a donc  $\mathcal{H}' = E(\{J_i\})$ , ce qui assure (1) que les variables d'actions sont constantes (2) que les variables d'angles évoluent linéairement avec le temps, avec une vitesse angulaire :

$$\Omega_i = \frac{dw_i}{dt} = \frac{\partial E}{\partial J_i}.$$

L'intérêt de cette généralisation est multiple :

- ◆ D'une part il fournit une paramétrisation idéale (dite « canonique ») de la surface de l'espace des phases où a lieu le mouvement (en règle générale un tore à  $d$  dimension défini par la valeur des  $d$  variables d'action, que l'on parcourt en faisant défiler les variables d'angle).
- ◆ D'autre part, si le système dépend d'un paramètre  $\lambda$ , et qu'on induit une variation adiabatique de  $\lambda$ , c'est à dire telle que  $\forall i \dot{\lambda}/\lambda \ll \Omega_i$ , on peut montrer (à grand renfort de transformations canoniques) que les  $d$  variables d'action sont des invariants adiabatiques.
- ◆ Enfin, ces variables d'action sont les grandeurs quantifiées dans la première théorie quantique (dite aujourd'hui « ancienne théorie des quanta ») développée par Bohr, Wilson, et Sommerfeld dans les années 1913-1920. Cette théorie prescrivait que les variables d'action devaient prendre une valeur quantifiée : un multiple entier

ou demi-entier le  $\hbar$ . Les variables d'angles sont alors indéterminées, mais leurs fréquences d'évolution sont alors les  $\Omega_i = \partial E / \partial J_i$ , plus ou moins équivalentes aux fréquences de Bohr  $\omega_i = \Delta E / \Delta(n\hbar)$ .

Les deux derniers énoncés sont évidemment indissociables : il serait absurde de donner des valeurs discrètes à des grandeurs dynamiques si une évolution douce du système ne permettait pas de les conserver.

### I<sub>III.3</sub> Théorème adiabatique quantique

La détermination de l'opérateur d'évolution d'un système dont le hamiltonien dépend du temps et ne vérifie pas la condition  $[\mathbf{H}(t_1), \mathbf{H}(t_2)]$  est un problème compliqué, comme nous l'avons montré au chapitre III.

Cependant, dans le cas adiabatique, où la variation de  $\mathbf{H}$  est lente, les résultats classiques que nous venons de présenter possèdent un analogue exact dans le domaine quantique. Les idées physiques et la démarche mathématique sont très similaires : si le hamiltonien varie assez lentement à l'échelle des fréquences propres, soit ici les fréquences de Bohr du système, il existe certaines quantités dont la vitesse de variation, s'annule en moyenne, dès lors qu'on peut calculer cette moyenne sur une période suffisante de mouvement non perturbé.

Nous allons dans appliquer ces idées directement sur les états quantiques, en nous plaçant dans le point de vie de Schrödinger. Le théorème adiabatique stipule qu'un système préparé dans un état stationnaire à l'instant initial se trouve à chaque instant ultérieur dans un nouvel état stationnaire de  $\mathbf{H}(t)$ , que se déduit de l'état initial par continuité. Il fournit en outre une information sur sa phase, que nous préciserons ci-dessous.

Nous nous plaçons pour simplifier dans le cadre un peu restrictif, où le système quantique décrit par le hamiltonien  $\mathbf{H}(t)$  possède, pour chaque valeur de  $t$  une base complète d'état discrets et non dégénérés. Les états stationnaires  $|\psi_k(t)\rangle$  et les énergies correspondantes  $E_k(t)$  sont supposées être des fonctions continûment dérivables de  $t$ , et on suppose que les niveaux ne se croisent jamais, et sont numérotés par leur ordre, c'est à dire  $\forall t \quad E_1(t) < E_2(t) < \dots < E_k(t) < E_{k+1}(t) < \dots$

Les états  $|\psi_k(t)\rangle$  vérifient en outre la propriété :

$$\mathbf{H}(t)|\psi_n(t)\rangle = E_n(t)|\psi_n(t)\rangle \Rightarrow (\dot{\mathbf{H}} - \dot{E}_n)|\psi_n\rangle + (\mathbf{H} - E_n)|\dot{\psi}_n\rangle \Rightarrow \forall k \neq n, \langle \psi_k | \dot{\psi}_n \rangle = \frac{\langle \psi_k | \dot{\mathbf{H}} | \psi_n \rangle}{E_k - E_n}$$

Le point de départ est une décomposition de l'état  $|\psi(t)\rangle$  sur la base des états propres instantanés du hamiltonien :

$$|\psi(t)\rangle = \sum_k c_k(t) e^{-i\varphi_k(t)} |\psi_k(t)\rangle \quad \text{où} \quad \varphi_k(t) = \int_0^t E_k(t')/\hbar dt'$$

L'équation de Schrödinger s'écrit alors :

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = i\hbar \sum_k (\dot{c}_k - ie_k \dot{\varphi}_k) e^{-i\varphi_k} |\psi_k\rangle + c_k e^{-i\varphi_k} |\dot{\psi}_k\rangle = \sum_k E_k c_k e^{-i\varphi_k} |\psi_k(t)\rangle$$

d'où, après simplification, et projection sur une composante :

$$\dot{c}_k = - \sum_n c_n e^{-i(\varphi_n - \varphi_k)} \langle \psi_k | \dot{\psi}_n \rangle = -c_k \langle \psi_k | \dot{\psi}_k \rangle - \sum_{n \neq k} c_n e^{-i(\varphi_n - \varphi_k)} \frac{\langle \psi_k | \dot{\mathbf{H}} | \psi_n \rangle}{E_k - E_n} \quad (\text{III.9})$$

On peut alors supposer que si  $\dot{\mathbf{H}}$  est assez petit devant les différences d'énergie, la fraction sera petite, voire négligeable. Mais surtout, si la fraction varie lentement à l'échelle

des fréquences de Bohr instantanées, à l'approximation séculaire le terme  $e^{-i(\varphi_n - \varphi_k)}$  entraîne l'annulation des termes correspondants. Ceci fait disparaître les termes de couplage entre les  $\psi_k$  car ils oscillent plus vite que  $\mathbf{H}$  ne varie. On reste donc avec :

$$\forall k, \quad \dot{c}_k = -c_k \langle \psi_k | \dot{\psi}_k \rangle \quad \text{où de plus} \quad \langle \psi_k | \dot{\psi}_k \rangle + \langle \dot{\psi}_k | \psi_k \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \psi_k | \dot{\psi}_k \rangle \in i\mathbb{R}$$

Il en résulte que :

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_k(0)\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = \exp(-i\varphi_k(t)) \exp(i\gamma_k(t)) |\psi_k(t)\rangle$$

où

$$\varphi_k(t) = \int_0^t E_k(t')/\hbar dt' \quad \text{et} \quad \gamma_k(t) = \int_0^t \Im \langle \psi_k | \dot{\psi}_k \rangle dt'.$$

On a donc montré que l'état final est l'état stationnaire déduit par continuité de l'état initial, et que la phase contient deux contributions : la phase dite « dynamique », correspondant à l'intégrale de l'énergie — c'est à dire à l'expression généralement abusive évoquée en introduction de ce paragraphe — et une phase dite « géométrique » qui vient de la structure de  $|\dot{\psi}_k\rangle$ , c'est à dire de la façon dont tournent les axes propres de  $\mathbf{H}$ .

Cette phase géométrique donne lieu à des considérations intéressantes pour des  $\mathbf{H}(t)$  périodiques (phase de Berry), mais présente relativement peu d'intérêt en ce qui nous concerne. La phase dynamique est elle plus importante, non pas tant par ses conséquences physiques, mais parce que c'est sa présence qui permet d'éliminer les termes de couplage dans (I<sub>III.9</sub>).

## APPENDICES DU CHAPITRE IV

**J<sub>IV</sub> Réflexion totale interne frustrée**

Bien que connu depuis Fresnel, ce phénomène a été redécouvert lors de la création de la mécanique quantique, d'où son nom le plus fréquent de « effet tunnel optique ».

Le cadre général est celui des ondes électromagnétiques planes progressives monochromatiques de fréquence  $\omega = c k_0$  qui se propagent dans des milieux linéaires isotropes. Ici, deux milieux semi-infinis d'indices  $n_1 = n_3$  sont séparés par une tranche d'indice  $n_2 < n_1$ . On prend les axes  $x$  et  $y$  dans le plan des deux interfaces, définis par les plans  $z = 0$  et  $z = g$ .

On considère une onde « incidente » dans le milieu 1 avec un vecteur d'onde  $\mathbf{k}_1$  dans le plan  $x-z$  avec un angle d'incidence  $\theta = (\mathbf{u}_z, \mathbf{k}_1)$ . On suppose que l'onde est polarisée linéairement dans la direction de l'axe  $y$  (incidence TE), dans la géométrie représentée sur la figure J<sub>IV.1</sub>.

On peut donc écrire son champ complexe sous la forme  $\mathcal{E}_{\text{in}} = \mathcal{E}_0 \exp(i(k_{1\parallel} x + k_{1\perp} z)) \mathbf{u}_y$ , avec  $k_{1\parallel} = n_1 k_0 \sin \theta$  et  $k_{1\perp} = n_1 k_0 \cos \theta$ . De ce fait, l'équation de Helmholtz devient scalaire et se réduit aux relations de dispersion  $\mathbf{k}_i^2 = n_i^2 k_0^2$  pour  $i = 1, 2, 3$ . De plus les relations de passage se ramènent à la continuité de  $\mathcal{E}_y$  et de sa dérivée.

Elles ne seront satisfaites sur le premier interface qu'en supposant qu'il existe deux ondes « sortantes », l'une réfléchie vers le milieu 1 (vecteur d'onde  $\mathbf{k}'_1$ ), l'autre transmise vers le milieu 2 (vecteur d'onde  $\mathbf{k}_2$ ), vérifiant les conditions de Snell-Descartes, dont notamment la conservation de  $k_{1\parallel}$ . Compte tenu de la relation de dispersion, ces vecteurs d'onde s'écrivent :

$$\mathbf{k}_1 = \begin{pmatrix} k_{1\parallel} \\ 0 \\ k_{1\perp} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}'_1 = \begin{pmatrix} k_{1\parallel} \\ 0 \\ -k_{1\perp} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{pmatrix} k_{1\parallel} \\ 0 \\ k_0 \sqrt{n_2^2 k_0^2 - k_{1\parallel}^2} \end{pmatrix}$$

Tant que  $k_{1\parallel}$  est plus petit que  $n_2 k_0$ , c'est à dire tant que  $\sin \theta < \sin \theta_c = n_2/n_1$  (définissant l'angle critique de réflexion totale interne) on peut trouver  $k_{2\perp}$  réel pour satisfaire ces relations.

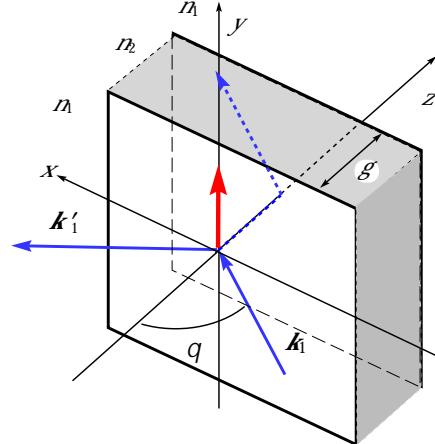
Le cas qui nous intéresse est celui où au contraire  $\theta$  est supérieur à l'angle critique, et donc  $k_{2\perp}$  est imaginaire. On a alors dans le milieu 2 une onde évanescente dans la direction  $z$ , de taux de décroissance :

$$\kappa_2 = k_0 \sqrt{(n_1 \sin \theta)^2 - n_2^2}$$

Notons que toutes les ondes sont proportionnelles à  $e^{ik_{1\parallel}x}$  qui ne joue plus aucun rôle.

Tout ceci vaut pour  $e^{-\kappa_2 g} \ll 1$ . Dans le cas contraire, on doit considérer le second interface, sur lequel prennent naissance une onde « anti-évanescante » en  $e^{\kappa_2 x}$  dans le milieu 2 et une onde transmise en  $e^{ik_{1\perp}z}$  dans le milieu 3. C'est cette onde transmise à travers le gap  $g$  par les ondes « évanescante » et « anti-évanescante » qui donne lieu à la « frustration » de la réflexion totale interne.

Même si les valeurs de  $k_{2\perp}$  et  $\kappa_2$  résultent d'un autre effet que dans le cas quantique, le problème ainsi posé est *exactement* l'analogue du problème quantique de la réflexion/transmission sur une barrière carrée dans le cas où  $E < V$ .



**Fig. J<sub>IV.1</sub> – Géométrie de la réflexion totale interne frustrée**

## APPENDICES DU CHAPITRE V

## K<sub>V</sub> Approximation WKB

Nous allons dans ce paragraphe reprendre l'analyse de la limite de l'équation de Schrödinger aux courtes longueurs d'ondes (de de Broglie), esquissée au § A<sub>II</sub>, dans un cadre un peu différent. Cette étude va nous permettre d'obtenir une expression approchée des fonctions d'onde des états stationnaires, puis de légitimer (dans une version un peu améliorée) l'hypothèse de quantification des variables d'action, et enfin nous fournir une nouvelle approche sur l'effet tunnel, qui fera l'objet du paragraphe suivant.

### K<sub>V.1</sub> Position du problème

- ◆ Nous nous restreignons à des problèmes à une dimension, qui peuvent résulter d'un confinement concret à une dimension, ou de la séparations de variables quand elle est possible (le laplacien est séparable dans 12 systèmes de coordonnées curvilignes orthogonales, il suffit de choisir celui qui respecte les symétrie du potentiel, s'il existe).
- ◆ Nous nous intéressons plus spécifiquement aux états stationnaires liés, qui ont une énergie inférieure aux limites du potentiel pour  $x \rightarrow \pm\infty$ . Il ont alors une extension spatiale finie, délimitée dans le problème classique par les « points de rebroussement » où l'énergie cinétique s'annule.

Dans ce cadre, l'équation de Schrödinger stationnaire d'énergie  $E$  de met de façon très générale sous la forme :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi(x) = 0. \quad (\text{Kv.1})$$

Nous savons que si le potentiel est contant par morceaux, dans chaque section on a des solutions oscillantes ou évanescentes :

$$\begin{cases} \psi(x) \propto e^{\pm ikx} & \text{où } k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V)} \quad \text{si } E > V(x) \\ \psi(x) \propto e^{\pm \kappa x} & \text{où } \kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V - E)} \quad \text{si } E < V(x) \end{cases} \quad (\text{I})$$

Les deux domaines ainsi mis en évidence sont dits « région classiquement autorisée » pour (I) et « région classiquement interdite » pour () (voir Fig. Kv.1).

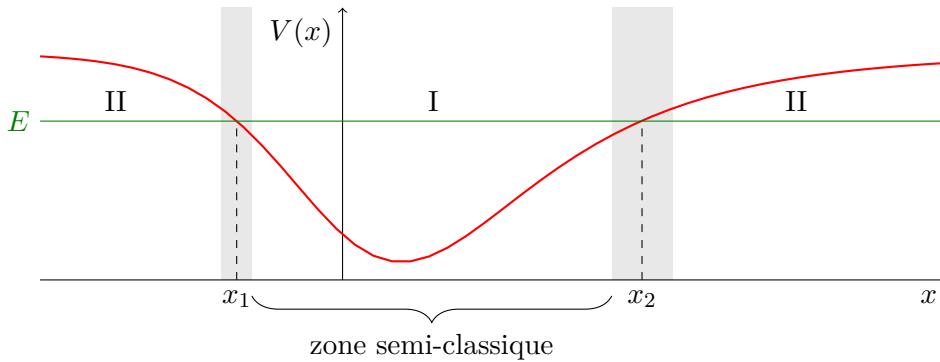
Cela conduit dans le cas général à définir un vecteur d'onde *local* :

$$k(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))} \quad \text{si } E > V(x) \quad \text{ou} \quad \kappa(x) = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V(x) - E)} \quad \text{si } E < V(x), \quad (\text{Kv.2})$$

tels que (Kv.1) se mette sous la forme

$$(I) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + (k(x)^2)\psi(x) = 0, \quad \text{ou} \quad (II) \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} - \kappa(x)^2\psi(x) = 0 \quad (\text{Kv.3})$$

Peut-on alors utiliser la solution précédente en utilisant, à la place du  $k$  constant, le vecteur d'onde local ? Cela sera raisonnable si  $k(x)$  (ou  $\kappa(x)$ ) varient « assez lentement ». L'échelle correspondante est naturellement celle qui correspond à la variation de  $\psi$  sous l'effet de  $k(x)$  c'est à dire  $\lambda_{dB}(x) = 1/k(x)$ . En d'autre termes, il faut que  $k(x)$  (ou  $\kappa(x)$ ) soit assez grand pour que le déphasage (ou l'amortissement) induit soit important avant que  $k(x)$  (ou  $\kappa(x)$ ) ait varié de façon notable. Les deux échelles de longueurs sont donc  $\lambda_{dB}(x) = 1/k(x)$  et  $L = k(x)/k'(x)$ . Si  $\lambda_{dB}(x) \ll L$ , c'est à dire  $k'(x) \ll k(x)^2$ ,



**Fig. KV.1** – Vue du puits de potentiel et des zones caractéristiques. La zone classiquement autorisée (I) est comprise entre les deux points de rebroussement  $x_1$  et  $x_2$ , et la zone classiquement interdite (II) est à l'extérieur. Les rectangles grisés représentent les voisinages de  $x_1$  et  $x_2$  où l'approximation semi-classique cesse d'être valide.

la solution ainsi obtenue sera une bonne approximation. Pour des états d'assez grande énergie, cette condition sera aisément réalisée près du fond du puits.

Toutefois, elle sera fatallement violée lorsqu'on s'approche des points de rebroussement car alors  $k(x)$  (ou  $\kappa(x)$ ) tend vers zéro alors que sa dérivée diverge. Plus précisément : au voisinage d'un point de rebroussement  $x_0$ ,  $k(x) \propto \sqrt{x - x_0}$ , donc  $k'(x) \propto 1/\sqrt{x - x_0}$  et donc le « petit paramètre »  $k'/k^2$  diverge comme  $(x - x_0)^{-3/2}$ .

## KV.2 Solution semi-classique

Pour aller plus loin, nous allons maintenant écrire la fonction d'onde sous la forme  $\psi = \exp(iS/\hbar)$  en laissant la possibilité à  $S$  de prendre des valeurs complexes pour rendre compte de la possible variation de l'amplitude (et les ondes évanescentes). Si on reporte cette expression dans les équations (KV.3), on obtient :

$$\begin{cases} (S')^2 = \hbar^2 k^2 + i\hbar S'' & \text{(I)} \\ (S')^2 = -\hbar^2 \kappa^2 + i\hbar S'' & \text{(II)} \end{cases} \quad (\text{KV.4})$$

La première de ces équations est le pendant unidimensionnel de l'équation (AII.2) du paragraphe précédent. Elle comporte au second membre le terme  $\hbar k(x)$  qui compte tenu de la définition (KV.2) de  $k(x)$  est exactement le  $p(x)$  de la mécanique classique. Comme nous l'avons détaillé, le terme  $\hbar S'' \approx \hbar^2 k'$  est le « petit paramètre » du problème en se sens qu'il est supposé très petit devant le  $\hbar^2 k^2$  auquel il s'ajoute. Il est donc possible de résoudre cette équation par approximations successives.

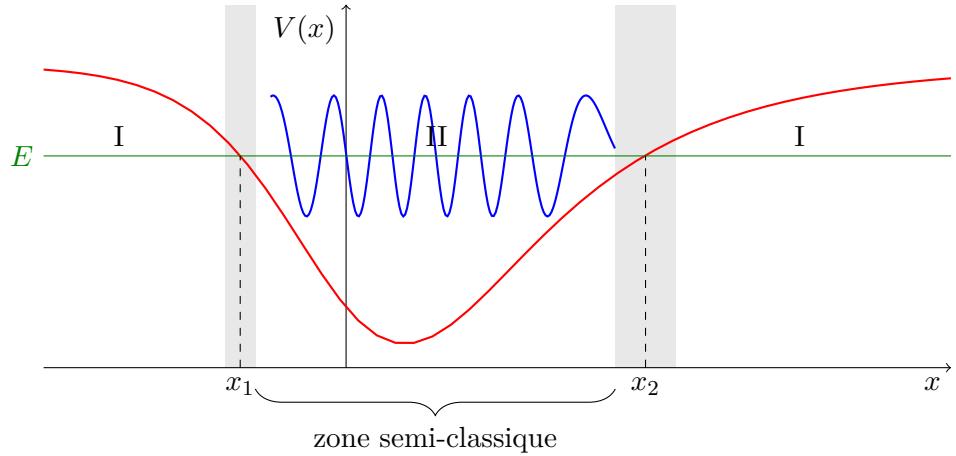
Même si l'interprétation classique n'est plus possible, la discussion mathématique est la même pour la seconde équation de (KV.4).

- ◆ A l'ordre zéro, nous pouvons négliger le terme en  $k'$  ou  $\kappa'$  et en déduire la première approximation :

$$\begin{cases} S_0(x) = \int^x \hbar k(\xi) \, d\xi \Rightarrow \psi(x) \propto e^{\pm i \int^x k(\xi) \, d\xi} & \text{(I)} \\ S_0(x) = \pm i \int^x \hbar \kappa(\xi) \, d\xi \Rightarrow \psi(x) \propto e^{\mp i \int^x \kappa(\xi) \, d\xi} & \text{(II)} \end{cases}$$

On se reportera à la Fig. KV.2 pour observer la forme possible d'une solution dans le domaine classiquement autorisé.

- ◆ A l'ordre 1, nous devons reprendre l'équation en remplaçant  $S''(x)$  par  $S_0''(x)$ . Cela



**Fig. KV.2** – Vue du puits de potentiel avec une solution d’ordre zéro pour la zone classiquement autorisée. On a tracé (en bleu) le sinus de la phase, avec un décalage pour mettre l’origine sur la ligne verte de l’énergie.

donne :

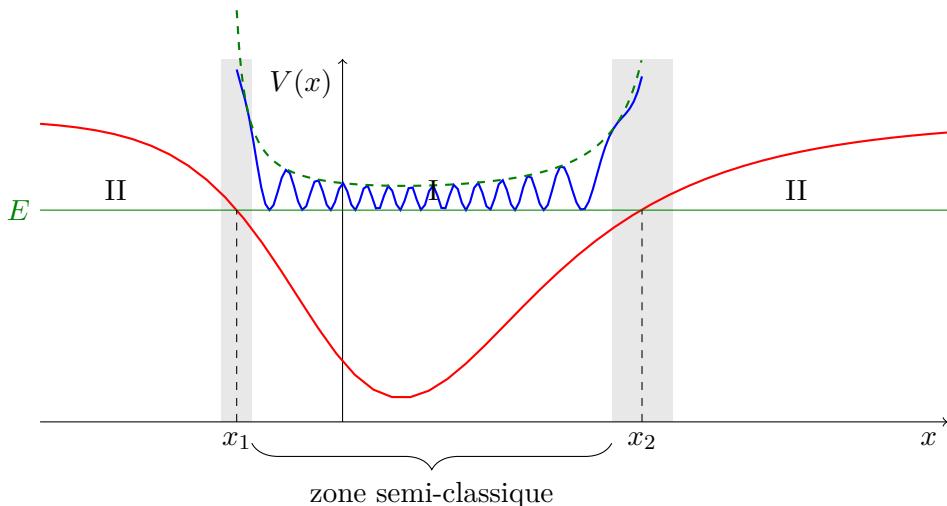
$$S_1'(x) = \pm \sqrt{\hbar^2 k^2(s) + i\hbar S_0''(x)} = \pm \hbar k \left(1 + i \frac{k'(x)}{k^2}\right)^{1/2} \approx \pm \hbar k + \frac{i\hbar}{2} \frac{k'}{k} \quad (\text{I})$$

$$S_1'(x) = \pm \sqrt{-\hbar^2 \kappa^2(s) + i\hbar S_0''(x)} = \pm i\hbar \kappa \left(1 \pm \frac{\kappa'(x)}{\kappa^2}\right)^{1/2} \approx \pm i\hbar \kappa + \frac{i\hbar}{2} \frac{\kappa'}{\kappa} \quad (\text{II})$$

On constate que les termes correctif ont une structure similaire et sont tous deux imaginaires, ce qui va donner un terme d’amplitude. En primitivant  $\int f'/2f dx = \ln(\sqrt{|x|})$  et en reportant dans  $\psi(x) = e^{iS/\hbar}$  on obtient ainsi la solution d’ordre dite WKB ou BKW<sup>12</sup> :

$$\begin{cases} S_0(x) = \int^x \hbar k(\xi) d\xi \Rightarrow \psi(x) \propto \frac{e^{\pm i \int^x k(\xi) d\xi}}{\sqrt{k(x)}} & (\text{I}) \\ S_0(x) = \pm i \int^x \hbar \kappa(\xi) d\xi \Rightarrow \psi(x) \propto \frac{e^{\mp i \int^x \kappa(\xi) d\xi}}{\sqrt{\kappa(x)}} & (\text{II}) \end{cases} \quad (\text{KV.5})$$

12. Brillouin, Kramers, Wentzel



**Fig. KV.3** – Vue du puits de potentiel avec une solution d’ordre un pour la zone classiquement autorisée. On a tracé (en bleu) le carré du sinus de la phase, et en vert pointillé l’enveloppe en  $1/k(x)$ .

### KV.3 La divergence sommable des amplitudes

La solution ainsi obtenue dans chacune des deux zones pose à priori un problème : le facteur d’enveloppe obtenu à l’ordre 1 diverge au niveau des points de rebroussement, comme c’est clairement visible sur la formule (KV.5) et comme on peut le voir sur la figure KV.3. Cette divergence, qui n’est bien sûr pas physique, n’est toutefois pas un problème conceptuel, dont nous allons voir ici la signification.

- ◆ En premier lieu, il n’est pas surprenant qu’on obtienne un comportement inattendu en ces points puisque que l’approximation utilisée est par construction invalide dans un voisinage de ces points.
- ◆ En second lieu, la dépendance en  $1/\sqrt{k(x)}$ , donc en  $(x - x_0)^{-1/4}$  de la fonction d’onde donne lieu à une dépendante en  $(x - x_0)^{-1/2}$  de la densité de probabilité, qui a le bon goût d’être *sommable*, et il est donc envisageable de normaliser la fonction d’onde ainsi construite, ce qui est assez satisfaisant.
- ◆ En troisième lieu, elle correspond en réalité à un comportement *classique* ! En effet, si on calcule le temps passé par la particule classique en chaque point du domaine classiquement autorisé lors de son oscillation entre les deux points de rebroussements, on s’attend à ce que ce temps soit inversement proportionnel à la vitesse au point considéré. Plis précisément, le temps passé pour aller de  $x$  à  $x + dx$  d’écrit  $dt = dx/v = (m/\hbar) dx/p(x)$ . Le temps total de l’oscillation s’écrit alors par la formule classique :

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} dt = \frac{2m}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{k(x)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{2m(E - V(x))}}$$

Dans cette approche, la divergence de la fonction d’onde est simplement une réminiscence de ce que la particule classique voit sa vitesse s’annuler au niveau des points de rebroussement...

Il résulte de cette étude que la fonction d’onde obtenue à l’approximation WKB est le produit d’une onde stationnaire (superposition des signes + et - dans la solution (KV.5)) dont la phase est l’action classique, et d’une enveloppe qui traduit la densité de présence de la particule quantique lors de son mouvement périodique. Mais aucun de ces ingrédients ne nous fournit encore de condition de quantification, dont nous allons voir qu’elle résulte de l’existence des ondes évanescentes dans les zones « classiquement » interdites

#### Kv.4 Les conditions de raccordement

Le caractère fondamentalement ondulatoire de la fonction d'onde se traduit bien sûr par l'établissement d'une onde *stationnaire* dans la région classiquement autorisée, mais aussi par l'apparition d'une onde *évanescante* dans la région classiquement interdite. Comme c'est bien connu, cette onde évanescante doit de raccorder à l'onde stationnaire de façon à ce que l'on n'ait de chaque côté qu'une onde purement évanescante, qui décroît lorsqu'on pénètre plus avant dans la zone interdite, et pas une onde divergente.

On rappelle que la fonction d'onde est bien sûr continue (et de dérivée continue) lorsqu'on franchit le point de rebroussement. La singularité de l'approximation WKB nous le masque puisqu'il est dans le domaine où la fonction d'onde de de Broglie varie trop vite. Il convient donc d'étudier le raccordement en chacun ces points en sortant de l'approximation en question.

Par souci de simplicité, nous allons nous concentrer sur un point de rebroussement  $x_0$  tel que la région classiquement autorisée est le domaine  $x < x_0$  et la région interdite correspond à  $x > x_0$ . Du point de vue mathématique, nous savons que pour  $x$  respectivement assez petit devant  $x_0$  et assez grand devant  $x_0$ , le fontiuon d'onde est bien approximée par

$$\psi_I(x) = \frac{A e^{i \int k dx} + B e^{-i \int k dx}}{\sqrt{k}} \quad \text{et} \quad \psi_{II}(x) = \frac{A' e^{\int \kappa dx} + B' e^{-\int \kappa dx}}{\sqrt{\kappa}} \quad (\text{Kv.6})$$

et il nous faut établir les relations entre  $(A, B)$  et  $(A', B')$ . ou plus précisément, nous cherchons les conditions sur  $(A, B)$  pour assurer que  $A' = 0$ .

Puisque nous nous intéressons au domaine où  $k$  et  $\kappa$  varient trop vite, il faut se concentrer sur ce qui les fait varier, à savoir le caractère variable du potentiel. En conséquence une solution simple consiste à remplacer ce dernier par sa tangente au point de rebroussement. Cela limite bien sûr la validité de notre approche à des situations où cette approximation est valable, et plus précisément à des transitions bien nettes entre les deux régions, en sorte que les domaines de validité de l'approximation linéaire et de l'approximation WKB se recouvrent.

Dans ce cadre nous pouvons écrire  $V(x) - E = \alpha(x - x_0)$  avec  $\alpha > 0$  pour avoir  $V > E$  lorsque  $x > x_0$ . L'équation de Schrödinger (Kv.1) s'écrit alors :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{2m\alpha}{\hbar^2}(x - x_0)\psi(x) = 0$$

et à l'aide du changement de variable  $x \rightarrow y = (x - x_0)/a$  avec  $a = (2m\alpha/\hbar^2)^{1/3}$ , on obtient :

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} - y \psi(y) = 0 .$$

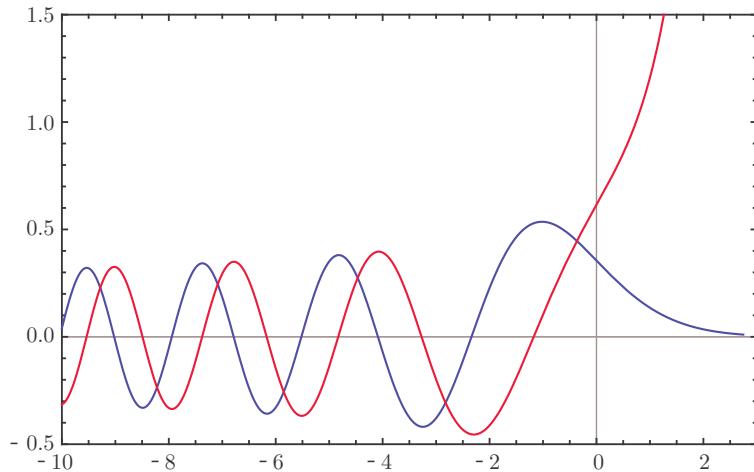
Cette équation, dite « équation d'Airy », possède deux solutions linéairement indépendantes notées  $\text{Ai}(y)$  et  $\text{Bi}(y)$ , respectivement nommées fonction d'Airy de première et seconde espèce<sup>13 14</sup>. Elles possèdent toutes deux un point d'inflexion en  $y = 0$  et sont caractérisées par leurs comportements asymptotiques<sup>15</sup> pour  $y \rightarrow \pm\infty$  :

$$\begin{aligned} \text{Ai}(y) &\approx \frac{\sin(\frac{2}{3}|y|^{3/2} + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}|y|^{1/4}} \quad \text{pour } y \rightarrow -\infty, & \text{Ai}(y) &\approx \frac{\exp(-\frac{2}{3}y^{3/2})}{2\sqrt{\pi}y^{1/4}} \quad \text{pour } y \rightarrow +\infty. \\ \text{Bi}(y) &\approx \frac{\cos(\frac{2}{3}|y|^{3/2} + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{\pi}|y|^{1/4}} \quad \text{pour } y \rightarrow -\infty, & \text{Bi}(y) &\approx \frac{\exp(\frac{2}{3}y^{3/2})}{\sqrt{\pi}y^{1/4}} \quad \text{pour } y \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (\text{Kv.7})$$

13. A ne pas confondre avec le « tache d'Airy » qui désigne la figure de diffraction à l'infini d'une ouverture circulaire, ni la « courbe d'Airy » qui décrit la transmission d'un étalon Fabry-Perot à faces parallèles.

14. Abramowitz and Stegun. « *Handbook of Mathematical Functions* », § 10.4

15. Ces approximations sont déjà très précises dès que  $x \notin [-5, 1]$



**Fig. KV.4 – Fonctions d’Airy : Ai en rouge et Bi en bleu.**

dont on note avec satisfaction que ces formes sont exactement de la forme prévue par l’équation (KV.5) avec  $k = (-y)^{1/2}$  ou  $\kappa = y^{1/2}$ , ce qui fait bien le lien avec les développements précédents.

Le point essentiel est toutefois le comportement de  $\text{Ai}(y)$  qui réalise la condition recherchée de solution *purement évanescante* pour  $y > 0$ . Comme on l’observe aussi bien sur la figure KV.4 que sur les formules (KV.7), ces fonctions sont en *quadrature de phase* dans la partie oscillante, et c’est donc la phase relative entre l’onde progressive vers la droite et celle vers la gauche qui sélectionne le comportement évanescant ou divergent.

On notera que :

- ◆ Les états considérés ici (état stationnaires liés à 1D) ont un courant de probabilité nul en tout point<sup>16</sup>.
- ◆ Si on calcule le courant  $J$  associé à  $\psi_I(x)$  donné par (KV.6), on trouve  $J(x) = (|A|^2 - |B|^2)\hbar k(x)/m$ , dont on déduit que  $|A|^2 = |B|^2$  et comme  $\psi_{II}(x)$  est défini à une phase (globale) près, on peut le supposer réel.
- ◆ Il en résulte que  $\psi_I(x)$  s’écrit de façon plus appropriée :

$$\psi_{II}(x) = \frac{C \cos\left(\int^x k(\xi) d\xi + \varphi\right) + D \sin\left(\int^x k(\xi) d\xi + \varphi\right)}{\sqrt{k(x)}} , \quad (\text{KV.8})$$

où  $C, D \in \mathbb{R}$  et  $\varphi$  sont arbitraires.

Munis de cette expression, en la rapprochant des formes asymptotiques (KV.7), on voit qu’il faut choisir  $\varphi = \pi/4$  et que la condition d’annulation de l’onde divergente s’écrit alors simplement  $C = 0$ .

## KV.5 La condition de retour en phase

L’obtention de cette condition nous permet de comprendre ce qui se passe au niveau du point de raccordement. La mécanique classique donne lieu à une réflexion totale en ce point, ce qui dans une description ondulatoire donnerait lieu à un déphasage de  $\pm\pi$  à la réflexion ; c’est ce que l’on écrit lorsqu’on a une barrière de potentiel infini. En réalité, l’existence de l’onde évanescante se traduit par une certaine pénétration dans la

16. Les états stationnaires vérifient  $\partial\rho/\partial t = 0$  et donc  $\text{div } \mathbf{J} = \partial J/\partial x = 0$ , c’est à dire que le courant  $J(x)$  est constant, et il s’annule forcément dans la région classiquement interdite au delà de la portée de l’onde évanescante.

zone classiquement interdite, qui modifie cette condition de phase et la remplace par un déphasage de  $\pi/2$ .

En effet, si l'on réécrit la fonction d'onde  $\psi_{\text{II}}(x)$ , avec  $C = 0$ , donnée par (Kv.8) sous la forme de deux ondes contrapropageantes, on obtient :

$$\begin{aligned}\psi_{\text{I}}(x) &= D \frac{\sin\left(\int^x k(\xi) d\xi + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{k(x)}} = D \frac{\cos\left(\int^x k(\xi) d\xi - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{k(x)}} \\ &= \frac{D e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{k(x)}} \left( e^{i \int^x k(\xi) d\xi} + e^{+i\pi/2} \times e^{-i \int^x k(\xi) d\xi} \right)\end{aligned}$$

Revenons maintenant à la situation générique où nous avons deux points de rebroussement  $x_1 < x_2$ , en supposons que nous pouvons utiliser la solution WKB dans les zones classiquement autorisées, hormis les voisinages de  $x_1$  et  $x_2$  où la méthode précédente s'applique.

Pour évaluer la phase accumulée au cours d'une oscillation entre les points tournants, sommes alors amenés à préciser la borne inférieure des intégrales que nous avons omises jusqu'ici. Même si l'approximation WKB n'est pas valable dans les zones proches des points de rebroussement, ce qu'elle prédit au niveau de la phase s'applique jusqu'à eux, et le défaut qu'elle comporte est compensé par le déphasage de  $\pi/2$  que nous venons de mettre en évidence.

Il en résulte que la variation de la phase  $\Phi$  sur un aller-retour s'écrit

$$\Delta\Phi = \int_{x_1}^{x_2} k(x) dx + \frac{\pi}{2} + \int_{x_2}^{x_1} (-k(x)) dx + \frac{\pi}{2} = \oint k(x) dx + \pi,$$

où les deux intégrales représentent le déphasage par propagation aller et retour, et terme  $\pi$  la somme des déphasages à la réflexion, successivement en  $x_2$  puis en  $x_1$ .

La condition d'existence d'un état stationnaire est alors simplement une condition d'interférence constrictive, qui requiert que :

$$\frac{\Delta\Phi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \oint k(x) dx + \frac{1}{2} = m \in \mathbb{N}^*.$$

En multipliant cette équation par  $\hbar$ , on reconnaît dans le premier terme la variable d'action  $J$  définie par (A<sub>II.4</sub>) au § A<sub>II.3</sub>, ce qui donne la condition de quantification WKB (avec  $n = m - 1$ ) :

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p(x) dx = (n + \frac{1}{2})\hbar \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

Cette condition de quantification est très semblable à celle de la théorie de Bohr-Wilson-Sommerfeld, à la différence du  $1/2$  qui traduit le déphasage additionnel. Elle s'applique étonnamment bien à *l'oscillateur harmonique*, pour lequel elle donne (par hasard !) le résultat exact.

**Application à l'atome d'hydrogène** Pour l'atome d'hydrogène (sans spin), la conservation du moment cinétique  $\mathbf{L}$  (ou plus exactement de sa projection  $M$  sur un axe et de son carré  $L^2$ ) permet de séparer les équations de Schrödinger et de Hamilton-Jacobi écrites en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  en trois équations à une dimension<sup>17</sup>.

Le cas de  $J_\varphi$  est un cas particulier, qui est très simple mais sort du cadre qui précède. Dans la mesure où  $\varphi$  est cyclique, l'énergie ne dépend ni de  $\varphi$  ni de  $M$ , et les équations de Schrödinger et de Hamilton-Jacobi partielles sont simplement :

$$d^2\Phi/d\varphi^2 + M^2 \Phi = 0 \quad \text{et} \quad (\partial S_\varphi / \partial \varphi)^2 = M^2$$

17. Compte tenu de l'expression de  $\psi(\mathbf{r}) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ , en termes de l'action, H-J se sépare en posant  $S(r, \theta, \varphi) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\varphi(\varphi)$ .

qui sont du type « potentiel constant », avec simplement des conditions aux limites périodiques au lieu de points de rebroussement, ce qui fait que le 1/2 de l'équation (KV.9) n'a pas lieu d'être, et on a simplement  $J_\varphi = M = m\hbar$  où  $m \in \mathbb{Z}$ .

Pour la coordonnée  $\theta$ , on a les équations partielles<sup>18</sup> :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{M^2}{\sin^2 \theta} = L^2 \quad \text{et} \quad \left( \frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 + \frac{M^2}{\sin^2 \theta} = L^2 ,$$

dans lequel  $M^2 / \sin^2 \theta$  joue le rôle du potentiel et  $L^2$  le rôle de l'énergie. En passant sur le calcul de  $J_\theta$  dont l'intérêt est purement mathématique, il vient :

$$J_\theta = L - |M| = (n_\theta + \frac{1}{2})\hbar \quad \text{d'où} \quad L^2 = (n_\theta + |m| + \frac{1}{2})^2 \hbar^2 \quad \text{noté} \quad L^2 = (\ell + \frac{1}{2})^2 \hbar^2 , \quad (\text{KV.9})$$

qui est très proche du résultat exact  $L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$ , puisque pour  $\ell$  assez grand  $(\ell + \frac{1}{2})^2 = \ell(\ell+1) + \frac{1}{4} \approx \ell(\ell+1)$ .

Enfin les équations partielles radiales s'écrivent :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR) + \frac{L^2}{r^2} - \frac{K}{r} = E \quad \text{et} \quad \frac{1}{2m} \left( \frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r} = E$$

dont la variable d'action, tout calcul fait, vérifie :

$$J_r = \sqrt{\frac{mK^2}{-2E}} - L = (n_r + \frac{1}{2})\hbar \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{mK^2}{2(J_r + J_\theta + J_\varphi)} = -\frac{mK^2}{2\hbar^2(n_r + \ell + 1)}$$

qui est à nouveau le résultat exact, avec le « nombre quantique principal »  $n = n_r + \ell + 1 \in \mathbb{N}^*$ .

---

18. On peut aussi reformuler l'équation de Schrödinger avec la variable  $u = \cos \theta$ , qui donne

$$-\frac{d^2\Theta}{du^2} + \frac{M^2}{1-u^2} = L^2 .$$



# Bibliographie

- C. ASLANGUL ; *Mécanique quantique : Tome 1, Fondements et premières applications* (De Boeck, Bruxelles) ; ISBN 978-2-8041-5509-4.
- B. CAGNAC, L. TCHANG-BRILLET, J.-C. PEBAY-PYROULA ; *Physique atomique - 1. Atomes et rayonnement : interactions électromagnétiques* ; 2<sup>e</sup> édition (Dunod, Paris) ; ISBN 978-2-10-049228-2.
- C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, F. LALOË ; *Mécanique quantique I* (Editions Hermann, Paris) ; ISBN 978-2-7056-6074-1.
- C. COHEN-TANNOUDJI, B. DIU, F. LALOË ; *Mécanique quantique II* (Editions Hermann, Paris) ; ISBN 978-2-7056-6121-2.
- R. FEYNMAN ; *Tome 3, Mécaniques quantique* ; LES COURS DE PHYSIQUE DE FEYNMAN (InterEditions, Paris) ; ISBN 978-2-7296-0030-3.
- M. LE BELLAC ; *Physique quantique : Tome 1, Fondements* ; 3<sup>e</sup> édition (EDP Sciences, Les Ulis, France) ; ISBN 978-2-7598-0803-8; préface de Laloë, Franck and Cohen-Tannoudji, Claude.