Universidade Federal do Ceará

Campus Quixadá
Curso de Sistemas de Informação

OBTENDO O NÚMERO DE GRUNDY DE GRADES PARCIAIS

Projeto de Pesquisa

Bruno da Silva Pinho

Orientador:
Prof. Me. Arthur Rodrigues Araruna

Co-Orientador:
Prof. Me. Anderson Lemos da Silva

Quixadá
Junho, 2019

Bruno da Silva Pinho

OBTENDO O NÚMERO DE GRUNDY DE GRADES PARCIAIS

Aprovada em: __/__/____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Me. Arthur Rodrigues Araruna
(Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Me. Anderson Lemos da Silva
(Co-Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Wladimir Araujo Tavares
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Me. Paulo Henrique Macedo de Araujo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Grafos são estruturas abstratas bastante úteis na modelagem e representação de diversos tipos de problemas. Um problema bastante antigo e conhecido em Teoria dos Grafos é o problema de Coloração de Grafos (GAMA *et al.*, 2016).

A coloração de um grafo consiste em uma atribuição de cores aos seus vértices. Quando pede-se que vértices vizinhos tenham cores diferentes, chamamos essa atribuição de coloração própria. Esse problema se originou a partir do problema de coloração de mapas, que consistia em utilizar o menor número de cores para se colorir regiões de um mapa, tal que regiões que faziam fronteiras entre si possuíssem cores diferentes.

De modo geral, a coloração de grafos pode modelar problemas onde necessitamos que objetos conflitantes não estejam no mesmo grupo. Na modelagem, os vértices representam objetos, e as arestas representam os conflitos existentes entre os objetos (SILVA *et al.*, 2016). De acordo com Silva *et al.* (2016) diversos problemas podem ser modelados como problemas de coloração, tais como problemas de grade de horários de professores, alocação de tempo e frequência em sistemas de comunicação, alocação de registradores em um processador, controle de fluxo aéreo, dentre outros, possuindo assim um ramo bastante extenso de aplicações.

Uma forma de se obter uma coloração de um grafo é utilizando o Algoritmo Guloso de Coloração. Esse algoritmo considera que cada cor seja representada por um número natural, e considerando os vértices numa ordem dada como entrada, atribui a cada vértice a menor cor que esteja disponível. A menor quantidade de cores que esse algoritmo atribui é igual ao número cromático. Do ponto de vista contrário, olhando para a maior quantidade de cores que esse algoritmo consegue atribuir a um grafo, temos o que é chamado de número de Grundy, também denominado de número cromático guloso. Uma coloração obtida por esse algoritmo onde usamos o máximo de cores possível é chamada de coloração de Grundy.

De acordo com Effantin e Kheddouci (2007), existe uma aplicação para o número de Grundy na arquitetura de multiprocessadores. Por exemplo, suponha que há um conjunto de processos de tal forma que um processo P_i poderia ser computado se os processos $P_1, P_2, ..., P_{i-1}$ já estiverem computados. Tal regra em processos pode ser modelada por uma coloração de Grundy.

Para algumas classes de grafos já se conhece o número de Grundy, como por exemplo os grafos bipartidos completos que, de acordo com Effantin e Kheddouci (2007), possuem o número de Grundy igual a 2. Para outras classes conhecemos apenas limites para esse número.

Em outros casos é difícil de se determinar o número de Grundy. Um exemplo é mostrado em Sampaio (2012), onde é provado que encontrar o número de Grundy de um grafo cordal é um problema *NP*-difícil.

Uma classe de grafos bem conhecida para a qual sabemos determinar o número de Grundy facilmente é a das grades. Effantin e Kheddouci (2007) mostraram um resultado que nos permite derivar uma forma de obter esse número em tempo polinomial. Entretanto, os critérios utilizados para a análise sobre esses grafos não são suficientes para resolvermos o problema para seus subgrafos, que são chamados de grades parciais.

Isso posto, neste trabalho, vamos nos dedicar a estudar uma forma eficaz de se obter o número de Grundy para grades parciais.

O restante deste trabalho está organizado como segue. A Seção 2 apresenta notações e definições utilizadas ao longo do projeto. Na Seção 3 são apresentados alguns trabalhos relacionados. Os objetivos do trabalho são apresentados na Seção 4. A Seção 5 apresenta os procedimentos metodológicos do trabalho.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção apresentaremos conceitos e definições de Teoria dos Grafos que são necessários para compreensão deste projeto. Esses conceitos são primordialmente advindos de Bondy, Murty *et al.* (1976) e West *et al.* (1996), que o leitor é encorajado a consultar caso necessite.

2.1 Grafos

Consideramos um grafo simples $G = (V, E)$, ao qual nos referimos neste texto apenas por *grafo*, como um par de conjuntos finitos denotados por $V(G)$ e $E(G)$, em que $E(G)$ é dado por pares não-ordenados $\{u, v\}$ de elementos distintos $u, v \in V(G)$.

Se $u \in V(G)$ o chamamos *vértice*. Se $\{u, v\} \in E(G)$ o chamamos de *aresta*. Também nos referimos a $\{u, v\}$ apenas por uv. Além disso, se uv é uma aresta, dizemos que os vértices u e v são suas *extremidades* e que eles são *adjacentes* entre si. Se um grafo possui apenas um único vértice o chamamos de grafo *trivial*. A *vizinhança* de um vértice v, denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a v.

O *grau de um vértice* v, $d_G(v)$, é o número de arestas incidentes a v em G. Denotamos por $\delta(G)$ e $\Delta(G)$ o menor e o maior valor de grau entre os vértices de G, respectivamente.

Dizemos que um grafo H é um *subgrafo* de G, denotado por $H \subseteq G$ se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$.

A *ordem* de um grafo G, denotada por $n(G)$, é o seu número de vértices, e seu *tamanho* denotado por $e(G)$, é o seu número de arestas.

Um *caminho* P é um grafo tal que seus vértices podem ser ordenados de forma que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles são consecutivos nessa ordem. Sabemos que $|E(P)| = |V(P)| - 1$ (WEST *et al.*, 1996).

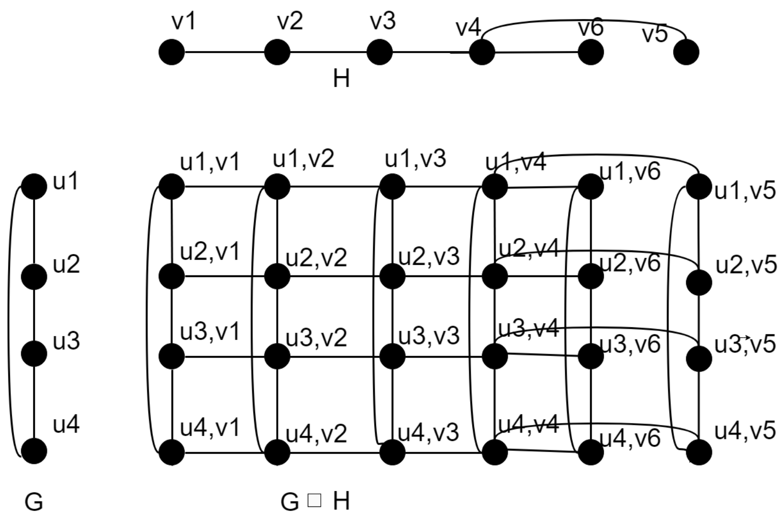
Um *ciclo* C é um grafo em que o número de vértices e de arestas é o mesmo e cujos vértices podem ser dispostos em ordem circular de forma que dois vértices são adjacentes se, e somente se, são consecutivos nessa ordem.

Um grafo G é *bipartido* se ele for trivial ou se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos X e Y tais que toda aresta de G tem uma extremidade em X e outra em Y. Dessa forma, X e Y são *conjuntos independentes*, nome dado para um conjunto de vértices que não têm arestas entre si. Sabemos ques um grafo é bipartido, se e somente se, não possui ciclos de tamanho ímpar (WEST *et al.*, 1996).

2.2 Produto cartesiano de grafos

Sejam os grafos $G = (V_1, E_1)$ e $H = (V_2, E_2)$ tais que $\{u_1, ..., u_n\}$ são os vértices de G e $\{v_1, ..., v_n\}$ são os vértices de H. O *produto cartesiano* entre G e H, denotado por $G \,\square\, H$, é o grafo com o conjunto de vértices $V = V_1 \times V_2$, com (u_i, v_j) adjacente a (u_l, v_p) sempre que u_i é adjacente a u_l em G e $v_j = v_p$ em H ou $u_i = u_l$ em G e v_j é adjacente a v_p em H (SOUZA, 2016). A Figura 1 mostra o produto cartesiano entre dois grafos G e H.

Figura 1 – Produto cartesiano $G \square H$

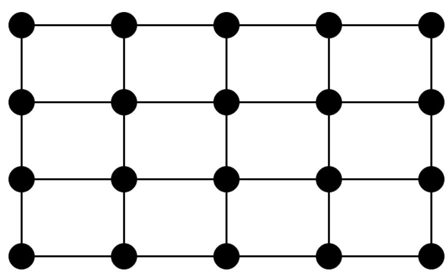


Fonte: Elaborada pelo Autor

2.2.1 Grade

Uma *grade* é um grafo $G_{m,n}$ definido como o produto cartesiano de dois caminhos P_m e P_n, de forma que $G_{m,n} = (P_m \square P_n)$. A Figura 2 representa um exemplo de uma grade formada por dois caminhos P_4 e P_5.

Figura 2 – Grade $G_{4,5} = (P_4 \square P_5)$

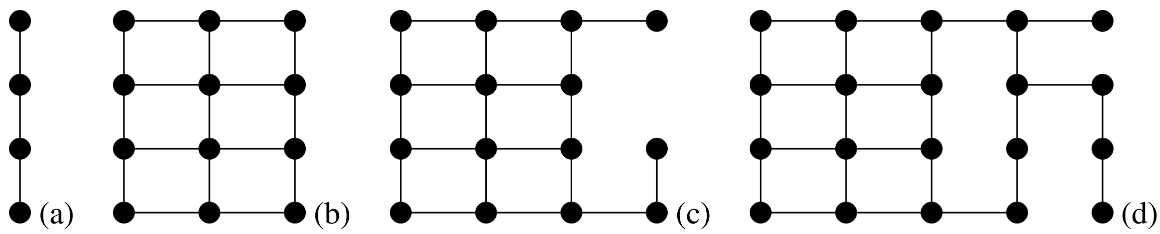


Fonte: Elaborada pelo Autor

2.2.2 Grade Parcial

Um grafo H é dito de *grade parcial* se ele é um subgrafo de uma grade $G_{n,m}$. Na Figura 3 são mostradas quatro grades parciais que são subgrafos do grafo da Figura 2.

Figura 3 – Grades parciais



Fonte: Elaborada pelo Autor

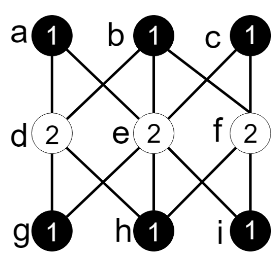
2.3 Coloração

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma *coloração* de G, é uma função $c : v \to \mathbb{N}$ que associa a cada vértice do grafo um número, denominado cor. Se uma coloração do grafo G usa exatamente k cores, podemos chamá-la de k-coloração de G (OLIVEIRA, 2011). Uma k-coloração pode ser vista como uma partição $S = \{S_1, ..., S_k\}$ de $V(G)$ em k conjuntos disjuntos onde cada conjunto S_i contém os vértices coloridos com a cor i, para todo $i \in \{1, ..., k\}$. Os conjuntos S_i são as *classes de cores* dessa coloração (OLIVEIRA, 2011). Uma coloração c é *própria* se a nenhum par de vértices adjacentes é atribuída a mesma cor.

2.3.1 Número Cromático

O menor inteiro k para o qual um grafo G possui uma k-coloração própria é o *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$. A Figura 4 apresenta um grafo colorido com duas cores. Note que não podemos colorir o grafo com menos cores e ainda termos uma coloração própria. Devido ser a menor quantidade de cores que é possível atribuir a esse grafo de forma que ele possua uma coloração própria dizemos então que $\chi(G) = 2$.

Figura 4 – coloração própria de G com número cromático $\chi(G) = 2$



Fonte: Elaborada pelo Autor

2.3.2 Algoritmo Guloso de Coloração

Algumas das principais abordagens algorítmicas utilizadas para o problema de coloração são baseadas em métodos gulosos que realizam a coloração sequencial dos vértices usando uma função gulosa (SILVA *et al.*, 2016). Uma dessas abordagens é o *Algoritmo Guloso de Coloração*, também conhecido como *Algoritmo Sequencial*, que é descrito no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: ALGORITMO GULOSO DE COLORAÇÃO

Entrada: Grafo $G = (V,E)$ e ordem $\theta = v_1, v_2, ..., v_n$ de $V(G)$

Saída: Coloração própria c de G

início
    para cada $v_i \in \theta$ **faça**
        $c(v_i) \leftarrow$ a menor cor não utilizada em $N(v_i) \cap \{v_1, ..., v_{i-1}\}$
    fim
    retorna c
fim

Fonte: Baseado no trabalho de Oliveira (2011)

A esse algoritmo é dado como entrada um grafo G e uma ordem θ dos vértices de G. Em cada iteração ele seleciona um vértice seguindo a sequência de θ. Para esse vértice é atribuida a menor cor que não foi atribuída aos seus vizinhos já coloridos. De acordo com Oliveira (2011), o Algoritmo Guloso de Coloração gera somente colorações próprias para um grafo.

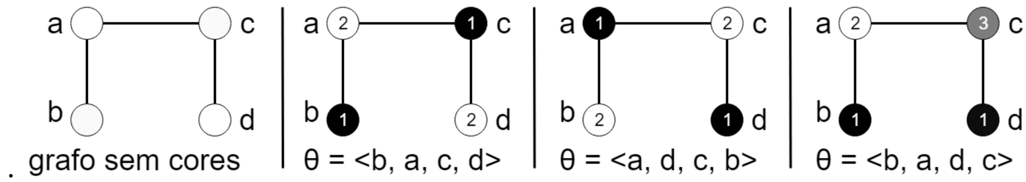
Dizemos que uma coloração c é gulosa se ela pode ser gerada pelo Algoritmo 1. Se a coloração gerada por tal algoritmo possui k cores, também podemos chamá-la de *k-coloração gulosa* (OLIVEIRA, 2011). Podemos notar que tal algoritmo pode apresentar diferentes colorações para um mesmo grafo, a depender apenas da ordem informada para os vértices.

Segundo Neto e Gomes (2015), o número mínimo de cores que o Algoritmo Guloso consegue atribuir a um grafo é o número cromático. Sendo assim, existe uma ordem de vértices que faz com que o Algoritmo 1 atribua uma coloração a um grafo com a quantidade de cores iguais ao número cromático.

O número cromático parametriza o comportamento do melhor caso da coloração gerada pelo o Algoritmo 1. Dessa forma, o número de cores de qualquer coloração gerada por tal algoritmo é um limite superior pra o número cromático.

Na Figura 5 são mostradas três diferentes colorações gulosas para o mesmo grafo. Nessa figura podemos perceber o impacto da ordem considerada na coloração obtida.

Figura 5 – coloração gulosa obtida com diferente ordem θ de vértices



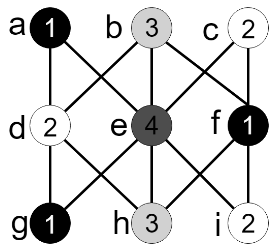
Fonte: Baseado no trabalho de Silva *et al.* (2016)

2.3.3 Número de Grundy

O *número de Grundy* de um grafo G é o maior k tal que G tem uma k-coloração gulosa. O problema de Coloração Gulosa consiste em determinar, dentre todas as possíveis ordenações de $V(G)$, a maior quantidade de cores que o Algoritmo 1 utiliza (OLIVEIRA, 2011). Denominamos essa quantidade de número guloso de G ou número de Grundy, que é denotado por $\Gamma(G)$. O número de Grundy e sua relação com o número cromático parametriza o pior caso da coloração que Algoritmo Guloso de Coloração consegue em um grafo. Dessa forma, temos de que $\chi(G) \leq \Gamma(G)$, determinando o quão ruim é esse limite superior para o número cromático.

De acordo com Sampaio (2012) um limite superior para o número de Grundy de qualquer grafo é $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$. Na Figura 6 é mostrada uma coloração gulosa. Note que foi possível colorir o grafo com quatro cores, e essa é a maior quantidade de cores que o Algoritmo 1 consegue utilizar para colorir o grafo da Figura 6. Então podemos concluir que $\Gamma(G) = 4$.

Figura 6 – Coloração própria de G com número de Grundy $\Gamma(G) = 4$



Fonte: Elaborada pelo Autor

2.4 Número de Grundy e Grades

Como mostrado por Sampaio (2012), um limite para o número de Grundy em grafos em geral é $\Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$. Uma grade G possui $\Delta(G) = 4$, sendo assim o limite superior para tal grafo é $\Gamma(G) \leq 5$. De acordo com Effantin e Kheddouci (2007) para uma grade $G_{n,m}$, se $n = 2$ ou se n e m forem iguais 3, temos que o número de Grundy é no máximo 4; caso contrário temos que é sempre 5.

Como dito anteriormente, toda grade parcial é subgrafo de uma grade, e por definição uma grade é subgrafo de si própria, logo temos que toda grade também é uma grade parcial. Seja H uma grade parcial que é subgrafo de uma grade G. De acordo com Ferseira (2003), toda grade é uma grafo bipartido, logo, G é bipartido. Para gerar H a partir de G, apenas foram apagados vértices e/ou arestas. Remover vértices e/ou arestas não pode gerar novos ciclos, pelo contrário, só pode desfazer ciclos que já existem. Assim, todo ciclo em H também é um ciclo de G. Um grafo é bipartido se e somente não contém ciclo de tamanho ímpar (WEST *et al.*, 1996), logo, todos os ciclos de G e consequentemente de H têm tamanho par. Como todos os ciclos de H têm tamanho par, H também é bipartido. Desse modo, além de toda grade ser uma grade parcial, toda grade parcial é bipartida. Sendo assim, sejam $\mathscr{G}$, $\partial\mathscr{G}$ e $\mathscr{B}$ as classes de grafos grades, grades parciais e bipartidos, respectivamente, temos que $\mathscr{G} \subseteq \partial\mathscr{G} \subseteq \mathscr{B}$.

Como demonstrado em Sampaio (2012), encontrar o número de Grundy para grafos bipartidos é NP-difícil. Porém como mostrado em Effantin e Kheddouci (2007), determinar o número de Grundy para grades é fácil, pois pode ser feito em tempo polinomial. Assim sendo, é interessante o estudo do problema para a classe das grades parciais, pois não foram encontrados muitos resultados sobre o mesmo na literatura. Além disso, por a classe das grades parciais ser uma superclasse das grades e subclasse dos bipartidos, faz sentido o estudo da dificuldade computacional do problema para esse tipo de grafo.

Também podemos frisar de que, pelo o fato de uma grade parcial H ser um subgrafo de uma grade G, temos que o número de vértices e arestas de H pode ser menor do que o de G, já que para termos um subgrafo podemos manter ou remover arestas e/ou vértices do grafo original. Pelo fato de podermos remover arestas e vértices, estamos diminuindo a quantidade de adjacências dos vértices, o que faz com que a grade parcial possa ter uma quantidade de cores menor do que a da grade original. Assim, temos o seguinte limite: $\Gamma(H) \leq \Gamma(G)$.

3 TRABALHOS RELACIONADOS

3.1 Aspectos algorítmicos da heurística de cloração de grafos

No trabalho de Sampaio (2012) é feito o estudo do número de Grundy e do número b-cromático de grafos, que são dois parâmetros para avaliar algumas heurísticas para encontrar coloração própria. No trabalho é mostrado que o problema de determinar o número de Grundy de grafos bipartidos e cordais é NP-difícil. Também é demostrado que determinar o número b-cromático de um grafo cordal distância-hereditária é NP-difícil, e é dado um algoritmo de tempo polinomial para as classes de grafos de bloco, bipartidos completos, e P_4-esparsos.

No trabalho é considerada a tratabilidade de parâmetros fixos para determinar o número de Grundy e o número b-cromático, e em particular os autores mostram que decidir se o número de Grundy ou o número b-cromático de um grafo G é pelo menos $|V(G)|-k$ admitindo um algoritmo FPT quando k é um parâmetro. Então é considerado a complexidade computacional de alguns problemas relacionados à comparação do número b-cromático e o número de Grundy com vários outros parâmetros de um grafo.

3.2 Número de Grundy de grafos

Em Effantin e Kheddouci (2007) são mostrados alguns limites para o número de Grundy em algumas classes de grafos e produtos cartesianos de grafos. Ele também mostra que, para caminhos, ciclos e bipartidos completos, o número de Grundy é fixo. Em particular é determinado o exato valor do número de Grundy para malhas com n dimensões e algumas malhas toroidais com n dimensões.

No trabalho é mostrado que para o produto cartesiano entre dois caminhos $P_n \square P_m$, definido anteriormente como sendo uma grade $G_{n,m}$, o número de Grundy de G é menor ou igual a 4 se $n = 2$ ou se $n = m = 3$, caso contrário, $\Gamma(G) = 5$.

Nesse mesmo trabalho, Effantin e Kheddouci (2007) dão um algoritmo recursivo que, dado um número k, consegue construir com o menor número de arestas, todos os grafos que possuem número de Grundy igual a k. A ideia principal do algoritmo desse trabalho é começar com uma árvore com 2^{k-1} vértices e então são unidos alguns vértices que têm a mesma cor. Pela computação de todos os agrupamentos possíveis, é encontrado um conjunto de grafos com o número de Grundy igual a k. Esse processo é repetido recursivamente tanto quanto possível para cada grafo nesse conjunto.

3.3 Número de Grundy e produtos de grafos

No trabalho de Asté, Havet e Linhares-Sales (2010), foi estudado o número de Grundy de produtos lexicográficos e cartesianos de dois grafos em termos dos números de Grundy destes grafos.

Em relação ao produto lexicográfico, é mostrado no trabalho que $\Gamma(G) \times \Gamma(H) \leq \Gamma(G[H]) \leq 2^{\Gamma(G)-1}(\Gamma(H)-1)+\Gamma(G)$. Além disso, mostrado que se G é uma árvore ou $\Gamma(G) = \Delta(G)+1$, então $\Gamma(G[H]) = \Gamma(G) \times \Gamma(H)$. A partir disso foi deduzido que para cada $c \geq 1$ fixo, dado um grafo G, é *CoNP*-Completo decidir se $\Gamma(G) \leq c \times \chi(G)$ e é *CoNP*-Completo decidir se $\Gamma(G) \leq c \times \omega(G)$.

Em relação ao produto cartesiano, é dito no trabalho que não há limite superior de $\Gamma(G \,\square\, H)$ como função de $\Gamma(G)$ e $\Gamma(H)$. No entanto, foi provado que $\Gamma(G \,\square\, H) \leq \Delta(G) \cdot 2^{\Gamma(H)-1} + \Gamma(H)$.

4 OBJETIVOS

4.1 Objetivo Geral

Esse trabalho tem como objetivo principal propor uma forma eficiente de obter o número de Grundy para grades parciais.

4.2 Objetivos Específicos

- Encontrar propriedades ou estruturas em grades parciais que nos forneça informações sobre o comportamento do algoritmo guloso de coloração.
- Determinar resultados sobre esses grafos que nos permitam reconhecer as porções críticas a serem analisadas na busca do número de Grundy para grades parciais.
- Propor uma solução algorítmica para fornecer o número de Grundy de grafos dessa classe.
- Concluir informações relevantes sobre a eficiência algorítmica da solução proposta.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

5.1 Estudo da literatura sobre grades e grades parciais

Após a definição e entendimento do problema a ser tratado, será feita uma busca com finalidade de encontrar trabalhos com resultados sobre as classes de grafos denominadas de grades e grades parciais. Após isso será feita uma análise crítica sobre quais desses trabalhos contribuem para o escopo do nosso trabalho.

5.2 Formulação de novos resultados

Com base no que foi encontrado sobre o problema, buscaremos descobrir e demonstrar propriedades novas e úteis que estejam relacionadas à classe de grafo em estudo e ao problema.

5.3 Proposta algorítmica

Após a descoberta de propriedades que nos auxiliam a identificar algumas características do grafo em estudo, será construído um algoritmo.

5.4 Implementação

A implementação do algoritmo proposto será feita provavelmente na linguagem C++. Será implementado um algoritmo que utilizará propriedades já identificadas em grades parciais para conseguir retornar uma solução.

5.5 Validação da implementação

Será feita uma análise da solução algorítmica que criamos, utilizando instâncias variadas. Essa análise irá avaliar o desempenho do algoritmo para tais instâncias e a eficácia da solução.

5.6 Cronograma de execução

	Meses (2019)					
Atividade	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov
Estudo da literatura sobre grades e grades parciais	X	X	X			
Formulação de novos resultados		X	X	X		
Implementação algorítmica			X	X		
Analisar o comportamento da solução para instância				X	X	
Realização de testes				X	X	
Análise e conclusão dos testes					X	
Desenvolvimento da monografia		X	X	X	X	X
Devesa						X

REFERÊNCIAS

ASTÉ, M.; HAVET, F.; LINHARES-SALES, C. Grundy number and products of graphs. **Discrete Mathematics**, Elsevier, v. 310, n. 9, p. 1482–1490, 2010.

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *et al.* **Graph theory with applications**. [S.l.]: Citeseer, 1976. v. 290.

EFFANTIN, B.; KHEDDOUCI, H. Grundy number of graphs. **Discussiones Mathematicae Graph Theory**, De Gruyter Open, v. 27, n. 1, p. 5–18, 2007.

FERSEIRA, T. de O. **CONJUNTO INDEPENDENTE E COBERTURA POR CLIQUES EM GRAFOS DE DISCO UNITARIO E MOEDA UNITARIA**. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, 2003.

GAMA, S. I. M. *et al.* Sobre problemas de lista coloração e a propriedade de selecionabilidade em grafos. Universidade Federal do Amazonas, 2016.

NETO, A. S. A.; GOMES, M. J. N. Problema e algoritmos de coloracao em grafos-exatos e heuristicos. **Revista de Sistemas e Computação-RSC**, v. 4, n. 2, 2015.

OLIVEIRA, A. K. Maia de. **Estudo de Casos de Complexidade de Colorações Gulosa de Vértices e de Arestas**. 2011.

SAMPAIO, L. Algorithmic aspects of graph colourings heuristic. 2012. Disponível em: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00759408>. Acesso em: 01 abr. 2019.

SILVA, T. G. N. da; ROCHA, L. S.; VALDISIO, G.; VIANA, R. Proposta e avaliação de novas heurísticas para o problema de coloração de vértices. 2016.

SOUZA, B. S. d. Produtos e coespectralidade de grafos. 2016.

WEST, D. B. *et al.* **Introduction to graph theory**. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1996. v. 2.