تمرین سوم درس مبانی هوش محاسباتی

مبانی سیستم های فازی

آرش حریرپوش
9731505

آرش حریرپوش
9731505

❖ بخش اول – مباحث تئوری و مسائل تشریحی

1. با ذکر مثال، توضیح دهید که متغیر فازی چه تفاوتی با متغیر تصادفی دارد؟

متغییر تصادفی احتمال وقوع یک رویداد یا حادثه را نشان می دهد، در حالی که متغیر فازی میزان تعلق (Membership) را نشان می دهد، برای مثال اگر تعدادی ظرف میوه موجود باشد که در برخی از آن ها سیب و برخی پرتقال و در بقیه آن ها هم سیب و هم پرتقال موجود باشد، اگر عنوان شود که احتمال انتخاب ظرفی که در آن پرتقال وجود دارد 0.7 است، یعنی اگر 100 ظرف میوه از این مجموعه انتخاب شود در 70 ظرف آن پرتقال موجود است؛ در حالی که اگر تعلق سیب به مجموعه ظرف ها برابر 0.3 باشد، یعنی در 0.3 میوه های همه ظرف های آن مجموعه دارای سیب می باشد.

به طور خلاصه در مثال بالا، اگر در مجموعه ای احتمال انتخاب ظرفی که در آن پرتقال وجود دارد 0.7 باشد، امکان دارد در نهایت ظرفی از این مجموعه انتخاب گردد که اصلا در آن پرتقال وجود نداشته، این در حالی است اگر در مجموعه ای مقدار تعلق سیب به ظرف ها در آن برابر 0.3 باشد، بنابراین همیشه باید ظرفی وجود داشته باشد که 0.3 ظرفیت کل آن شامل سیب باشد.

به عبارت دیگر، متغیر تصادفی احتمال وقوع حوادثی که می تواند رخ دهد را نشان می دهد، در حالی که متغیر فازی شدت حوادث را نشان می دهد، و با وقوع آن حادثه سر و کار ندارد بلکه شدت رخداد آن اتفاق را نشان می دهد.

(منبع: https://www.quora.com/What-is-the-difference-between-fuzzy-logic-and-probability-since-degrees-of-truth-are-often-confused-with-probabilities)

2. مجموعه فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \left\{\frac{0.1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{0.7}{3}\right\}, \qquad B = \left\{\frac{0.5}{2}, \frac{0.3}{6}\right\}, \qquad C = \left\{\frac{0.2}{6}, \frac{0.8}{2}, \frac{1}{4}\right\}$$

X = {2, 3, 4, 5, 6}

Y = {2, 3, 6}

که X مجموعه مرجع (A و C) و Y مجموعه مرجع (B) است. مطلوب است محاسبه موارد زیر با ذکر کامل مراحل:

الف) (B U C) ∩ A

آرش حریرپوش
9731505

برای محاسبه این عبارت ابتدا باید A و B و C به صورت زیر هم مرجع گردند:

$$A' = A \times Y = \left\{\frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,3)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{1}{(5,2)} + \frac{1}{(5,3)} + \frac{1}{(5,6)} + \frac{0.7}{(3,2)} + \frac{0.7}{(3,3)} + \frac{0.7}{(3,6)}\right\}$$

$$B' = X \times B = \left\{\frac{0.5}{(2,2)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.5}{(4,2)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.5}{(6,2)} + \frac{0.3}{(2,6)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{0.3}{(4,6)} + \frac{0.3}{(5,6)} + \frac{0.3}{(6,6)}\right\}$$

$$C' = C \times Y = \left\{\frac{0.2}{(6,2)} + \frac{0.2}{(6,3)} + \frac{0.2}{(6,6)} + \frac{0.8}{(2,2)} + \frac{0.8}{(2,3)} + \frac{0.8}{(2,6)} + \frac{1}{(4,2)} + \frac{1}{(4,3)} + \frac{1}{(4,6)}\right\}$$

سپس ابتدا مقدار B U C به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\mathrm{B} \cup \mathrm{C} = B' \cup \mathrm{C}' = \left\{\frac{0.8}{(2,2)} + \frac{0.8}{(2,3)} + \frac{0.8}{(2,6)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{1}{(4,2)} + \frac{1}{(4,3)} + \frac{1}{(4,6)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.3}{(5,6)} + \frac{0.5}{(6,2)} + \frac{0.2}{(6,3)} + \frac{0.3}{(6,6)}\right\}$$

سپس مقدار عبارت نهایی به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$(B \cup C) \cap A = (B' \cup C') \cap A' = \left\{\frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,3)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.3}{(5,6)}\right\}$$

ب) $A \cap \overline{A}$

برای محاسبه عبارت فوق ابتدا مقدار $\overline{A}$ به صورت زیر محاسبه می گردد:

آرش حریرپوش
9731505

$$\overline{A} = 1 - A = \left\{\frac{0.9}{2}, \frac{0.3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right\}$$

سپس مقدار عبارت فوق برابر است با:

$$A \cap \overline{A} = \left\{\frac{0.1}{2}, \frac{0.3}{3}\right\}$$

ج) A ∩ B

برای محاسبه عبارت فوق ابتدا باید این دو مجموعه به صورت زیر هم مرجع گردند:

$$A' = A \times Y = \left\{\frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,3)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{1}{(5,2)} + \frac{1}{(5,3)} + \frac{1}{(5,6)} + \frac{0.7}{(3,2)} + \frac{0.7}{(3,3)} + \frac{0.7}{(3,6)}\right\}$$

$$B' = X \times B = \left\{\frac{0.5}{(2,2)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.5}{(4,2)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.5}{(6,2)} + \frac{0.3}{(2,6)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{0.3}{(4,6)} + \frac{0.3}{(5,6)} + \frac{0.3}{(6,6)}\right\}$$

سپس مقدار عبارت فوق به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$A \cap B = A' \cap B' = \left\{\frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.3}{(5,6)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.3}{(3,6)}\right\}$$

د) A × B

برای محاسبه حاصل ضرب کارتزین این دو مجموعه ابتدا باید توسعه استوانه ای آن ها محاسبه گردد:

$$A' = A \times Y = \left\{\frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,3)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{1}{(5,2)} + \frac{1}{(5,3)} + \frac{1}{(5,6)} + \frac{0.7}{(3,2)} + \frac{0.7}{(3,3)} + \frac{0.7}{(3,6)}\right\}$$

آرش حریرپوش
9731505

$$B' = X \times B = \left\{\frac{0.5}{(2,2)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.5}{(4,2)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.5}{(6,2)} + \frac{0.3}{(2,6)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{0.3}{(4,6)} + \frac{0.3}{(5,6)} + \frac{0.3}{(6,6)}\right\}$$

سپس باید اشتراک توسعه استوانه ای این مجموعه ها به صورت زیر محاسبه گردد:

$$A \times B = A' \cap B' = \left\{\frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.3}{(5,6)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.3}{(3,6)}\right\}$$

3. همانطور که می دانید مجموعه عملگر هایی را کلاس نرمال می نامیم که خاصیت جابجایی، شرکت پذیری، توزیع پذیری و دمورگان داشته باشند. حال اگر در مجموعه های فازی، عملگرهای اشتراک، اجتماع و متمم را مطابق آنچه در زیر آمده است در نظر بگیریم، با بررسی وجود هر کدام از خواص مطرح شده، بیان کنید که آیا می توان این عملگر ها را یک کلاس نرمال در نظر گرفت؟

$$\mu_{A\cap B}(X) = \mu_A(X) * \mu_B(X)$$

$$\mu_{A\cup B}(X) = \max(\mu_A(X), \mu_B(X))$$

$$\mu_{\overline{A}}(X) = 1 - \mu_A(X)$$

عملگر های بالا به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$\mu_{A\cap B}(X) = t(A,B), \mu_{A\cup B}(X) = s(A,B), \mu_{\overline{A}}(X) = c(A)$$

ابتدا خواص مطرح شده برای این عملگر ها مورد بررسی قرار می گیرد:

- خاصیت جابجایی:

$$\mu_A(X) * \mu_B(X) = \mu_B(X) * \mu_A(X) \Rightarrow \mu_{A\cap B}(X) = \mu_{B\cap A}(X)$$

$$\max(\mu_A(X), \mu_B(X)) = \max(\mu_B(X), \mu_A(X)) \Rightarrow \mu_{A\cup B}(X) = \mu_{B\cup A}(X)$$

بنابراین خاصیت جابجایی در این عملگر ها صادق است.

- خاصیت شرکت پذیری

$$\mu_A(X) * (\mu_B(X) * \mu_C(X)) = (\mu_A(X) * \mu_B(X)) * \mu_C(X)$$
$$\Rightarrow \mu_{A\cap(B\cap C)}(X) = \mu_{(A\cap B)\cap C}(X)$$

$$\max(\mu_A(X), \max(\mu_B(X), \mu_C(X)))$$
$$= \max(\max(\mu_A(X), \mu_B(X)), \mu_C(X)) \Rightarrow \mu_{A\cup(B\cup C)}(X)$$
$$= \mu_{(A\cup B)\cup C}(X)$$

بنابراین خاصیت شرکت پذیری در این عملگر ها صادق است.

- خاصیت توزیع پذیری

$$\max\left(\mu_A(X), \mu_B(X) * \mu_C(X)\right)$$
$$\neq \max\left(\mu_A(X), \mu_B(X)\right) * \max(\mu_A(X), \mu_C(X))$$
$$\Rightarrow \mu_{A\cup(B\cap C)}(X) \neq \mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(X)$$

مثال زیر در نظر گرفته می شود:

$$\mu_A(X) = 0.7, \mu_B(X) = 0.2, \mu_C(X) = 0.1$$

$$\mu_{A\cup(B\cap C)}(X) = max\left(\mu_A(X), \mu_B(X) * \mu_C(X)\right)$$
$$= \max(0.7, 0.02) = 0.7$$

$$\mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(X)$$
$$= \max\left(\mu_A(X), \mu_B(X)\right) * \max(\mu_A(X), \mu_C(X))$$
$$= \max(0.7, 0.2) * \max(0.7, 0.1) = 0.7 * 0.7$$
$$= 0.49$$

آرش حریرپوش
9731505

بنابراین $\mu_{(A\cup B)\cap(A\cup C)}(X) \neq \mu_{A\cup(B\cap C)}(X)$؛ به همین دلیل با توجه به مثال نقض بالا خاصیت توزیع پذیری برای این عملگر ها صادق نمی باشد.

- خاصیت دمورگان

$$\mu_{(A\cap B)'}(X) = 1 - \mu_{A\cap B}(X) = 1 - \mu_A(X) * \mu_B(X)$$

$$\mu_{A'\cup B'}(X) = \max\big(1 - \mu_A(X), 1 - \mu_B(X)\big)$$

$$1 - \mu_{A\cap B}(X) = 1 - \mu_A(X) * \mu_B(X) \neq \max\big(1 - \mu_A(X), 1 - \mu_B(X)\big)$$

$$\Rightarrow \mu_{(A\cap B)'}(X) \neq \mu_{A'\cup B'}(X)$$

مثال زیر در نظر گرفته می شود:

$$\mu_A(X) = 0.7, \mu_B(X) = 0.2, \mu_C(X) = 0.1$$

$$\mu_{(A\cap B)'}(X) = 1 - \mu_{A\cap B}(X) = 1 - \mu_A(X) * \mu_B(X)$$

$$= 1 - 0.7 * 0.2 = 0.86$$

$$\mu_{A'\cup B'}(X) = \max\big(1 - \mu_A(X), 1 - \mu_B(X)\big)$$

$$= \max(1 - 0.7, 1 - 0.2) = \max(0.3, 0.8) = 0.8$$

بنابراین $\mu_{A'\cup B'}(X) \neq \mu_{(A\cap B)'}(X)$؛ به همین دلیل با توجه به مثال نقض بالا خاصیت دمورگان برای این عملگر ها صادق نمی باشد.

با توجه به اینکه خواص توزیع پذیری و دمورگان برای این عملگر ها صادق نمی باشد؛ به همین دلیل این عملگر ها یک **کلاس نرمال در نظر گرفته نمی شوند.**

4. دو رابطه R و S را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) با ذکر مراحل، جدا پذیر بودن یا نبودن هر کدام از رابطه ها را مشخص نمایید.

ابتدا محور های زیر در نظر گرفته می شود:

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$C = \{c_1, c_2, c_3\}$$

آرش حریرپوش
9731505

برای محاسبه جدا پذیر بودن روابط S و R ابتدا تصویر این روابط بر روی محور هایشان به صورت زیر محاسبه می گردد:

تصویر R روی A:

$$R_A = \left\{\frac{0.7}{a_1} + \frac{0.9}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right\}$$

تصویر R روی B:

$$R_B = \left\{\frac{0.3}{b_1} + \frac{0.8}{b_2} + \frac{1}{b_3}\right\}$$

تصویر S روی B:

$$S_B = \left\{\frac{0.7}{b_1} + \frac{0.9}{b_2} + \frac{0.4}{b_3}\right\}$$

تصویر S روی C:

$$S_C = \left\{\frac{0.4}{c_1} + \frac{0.8}{c_2} + \frac{0.9}{c_3}\right\}$$

سپس توسعه استوانه ای تصاویر بدست آمده به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\begin{aligned} R'_A &= R_A \times B \\ &= \left\{\frac{0.7}{(a_1, b_1)} + \frac{0.7}{(a_1, b_2)} + \frac{0.7}{(a_1, b_3)} + \frac{0.9}{(a_2, b_1)} + \frac{0.9}{(a_2, b_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.9}{(a_2, b_3)} + \frac{1}{(a_3, b_1)} + \frac{1}{(a_3, b_2)} + \frac{1}{(a_3, b_3)}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'_B &= A \times R_B \\ &= \left\{\frac{0.3}{(a_1, b_1)} + \frac{0.3}{(a_2, b_1)} + \frac{0.3}{(a_3, b_1)} + \frac{0.8}{(a_1, b_2)} + \frac{0.8}{(a_2, b_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{0.8}{(a_3, b_2)} + \frac{1}{(a_1, b_3)} + \frac{1}{(a_2, b_3)} + \frac{1}{(a_3, b_3)}\right\} \end{aligned}$$

آرش حریرپوش
9731505

$$S_B' = S_B \times C$$
$$= \left\{\frac{0.7}{(b_1, c_1)} + \frac{0.7}{(b_1, c_2)} + \frac{0.7}{(b_1, c_3)} + \frac{0.9}{(b_2, c_1)} + \frac{0.9}{(b_2, c_2)} + \frac{0.9}{(b_2, c_3)} + \frac{0.4}{(b_3, c_1)} + \frac{0.4}{(b_3, c_2)} + \frac{0.4}{(b_3, c_3)}\right\}$$

$$S_C' = B \times S_C$$
$$= \left\{\frac{0.4}{(b_1, c_1)} + \frac{0.4}{(b_2, c_1)} + \frac{0.4}{(b_3, c_1)} + \frac{0.8}{(b_1, c_2)} + \frac{0.8}{(b_2, c_2)} + \frac{0.8}{(b_3, c_2)} + \frac{0.9}{(b_1, c_3)} + \frac{0.9}{(b_2, c_3)} + \frac{0.9}{(b_3, c_3)}\right\}$$

سپس به کمک توسعه استوانه ای تصاویر بدست آمده روابط به صورت زیر باز سازی می گردند:

بازسازی رابطه R برابر است با:

$$R' = R_A \times R_B = R_A' \cap R_B'$$
$$= \left\{\frac{0.3}{(a_1, b_1)} + \frac{0.7}{(a_1, b_2)} + \frac{0.7}{(a_1, b_3)} + \frac{0.3}{(a_2, b_1)} + \frac{0.8}{(a_2, b_2)} + \frac{0.9}{(a_2, b_3)} + \frac{0.3}{(a_3, b_1)} + \frac{0.8}{(a_3, b_2)} + \frac{1}{(a_3, b_3)}\right\}$$
$$\Rightarrow R' = R$$

بنابراین به دلیل اینکه رابطه R' که از روی توسعه استوانه ای تصاویر رابطه R بدست آمده است و برابر این رابطه شده است، یعنی می توان از روی توسعه استوانه ای تصاویر رابطه R این رابطه را باز سازی کرد، به همین دلیل **رابطه R جدا پذیر می باشد.**

بازسازی رابطه S برابر است با:

$$S' = S_B \times S_C = S'_B \cap S'_C$$
$$= \left\{\frac{0.4}{(b_1,c_1)} + \frac{0.7}{(b_1,c_2)} + \frac{0.7}{(b_1,c_3)} + \frac{0.4}{(b_2,c_1)} + \frac{0.8}{(b_2,c_2)} + \frac{0.9}{(b_2,c_3)} + \frac{0.4}{(b_3,c_1)} + \frac{0.4}{(b_3,c_2)} + \frac{0.4}{(b_3,c_3)}\right\}$$
$$\Rightarrow S' \neq S$$

بنابراین به دلیل اینکه رابطه S' که از روی توسعه استوانه ای تصاویر رابطه S بدست آمده است و برابر این رابطه نشده است، یعنی نمی توان از روی توسعه استوانه ای تصاویر رابطه S این رابطه را باز سازی کرد، به همین دلیل **رابطه S جدا پذیر نمی باشد.**

ب) رابطه $Z = R°S$ را محاسبه نمایید. (ترکیب بر اساس max-min)

$R°S$	c_1	c_2	c_3
a_1	0.4	0.7	0.7
a_2	0.4	0.8	0.8
a_3	0.4	0.8	0.8

ج) با داشتن رابطه Z در قسمت ب و ورودی $A_1 = \left\{\frac{0.1}{a_1}, \frac{0.8}{a_3}\right\}$، خروجی را بدست آورید. (ترکیب بر اساس max-product)

R	b۱	b۲	b۳
a۱	۰.۳	۰.۷	۰.۷
a۲	۰.۳	۰.۸	۰.۹
a۳	۰.۳	۰.۸	۱

S	c۱	c۲	c۳
b۱	۰.۲	۰.۷	۰.۵
b۲	۰.۳	۰.۸	۰.۹
b۳	۰.۴	۰.۱	۰.۴

خروجی فازی این رابطه از طریق فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$B_1 = A_1 \circ Z = \left\{\frac{0.32}{c_1} + \frac{0.64}{c_2} + \frac{0.64}{c_3}\right\}$$

آرش حریرپوش
9731505

5. رابطه $R = \{(x_1, x_2, y) | x_1, x_2, y \in R, x_1 + x_2 + y^2 = 10\}$ را در نظر بگیرید. با توجه به ورودی های فازی $x_1 = A_1$ و $x_2 = A_2$ خروجی فازی (y = B) را به دست آورید.

$A_1 = \left\{\frac{0.5}{1}, \frac{0.3}{0}\right\}$, $A_2 = \left\{\frac{0.3}{0}, \frac{0.7}{1}\right\}$

خروجی فازی این رابطه از طریق فرمول زیر محاسبه می گردد:

$$B = A \circ R$$

برای انجام محاسبات، ابتدا A به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$A = A_1 \times A_2 = \left\{\frac{0.3}{(1,0)} + \frac{0.5}{(1,1)} + \frac{0.3}{(0,0)} + \frac{0.3}{(0,1)}\right\}$$

حال رابطه R برابر است با:

R	3	-3	$2\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}$
$(1,0)$	1	1	0	0	0	0
$(1,1)$	0	0	1	1	0	0
$(0,0)$	0	0	0	0	1	1
$(0,1)$	1	1	0	0	0	0

سپس خروجی فازی به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$B = A \circ R = \left\{\frac{0.3}{3} + \frac{0.3}{-3} + \frac{0.5}{2\sqrt{2}} + \frac{0.5}{-2\sqrt{2}} + \frac{0.3}{\sqrt{10}} + \frac{0.3}{-\sqrt{10}}\right\}$$

6. دو مجموعه فازی A، B را در نظر بگیرید که هر دو بر روی محموعه U تعریف شده اند:

$U = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$

$A = \left\{\frac{0.3}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{0.7}{x_4}, \frac{0.6}{x_5}\right\}$

$B = \left\{\frac{0.2}{x_1}, \frac{0.5}{x_2}, \frac{0.3}{x_3}, \frac{0.8}{x_4}\right\}$

برش لامبدا از روش هایی است که در عملیات غیر فازی سازی برای تبدیل مجموعه های فازی به مجموعه های crisp کاربرد دارد. برش لامبدای خواسته شده بر روی مجموعه ها اعمال کرده و خروجی آن را به دست آورید.

$C = A' \cap B, \lambda = 0.3$

آرش حریرپوش
9731505

$$A' = \left\{\frac{0.7}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.3}{x_4} + \frac{0.4}{x_5} + \frac{1}{x_6} + \frac{1}{x_7}\right\}$$

$$A'_{0.3} = \{x \mid \mu(x) \geq 0.3\} = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

$$B_{0.3} = \{x \mid \mu(x) \geq 0.3\} = \{x_2, x_3, x_4\}$$

$$C = A'_{0.3} \cap B_{0.3} = \{x_2, x_4\}$$

$B, \lambda = 0^+, 0$

$$B_{0^+} = \{x \mid \mu(x) > 0\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

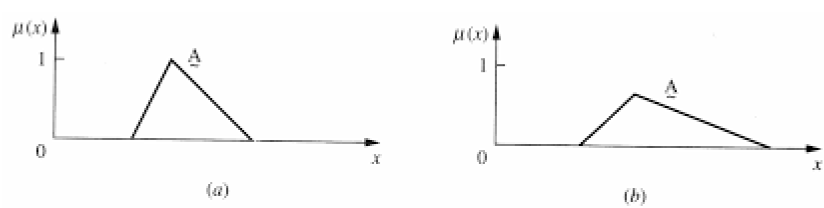
$$B_0 = \{x \mid \mu(x) \geq 0\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

7. در این سوال می خواهیم ویژگی هایی از تابع تعلق فازی را بررسی کنیم.

الف) در مورد ویژگی normal یا subnormal بودن مجموعه های فازی و همچنین convexity و nonconvexity مجموعه های فازی تحقیق کرده و به صورت خلاصه و با رسم نمودار تابع تعلق های فرضی توضیحشان دهید (رسم دو نمودار هم کفایت می کند).

یک مجموعه فازی normal مجموعه ای می باشد که حداقل یکی از عضو های مجموعه مرجع آن دارای مقدار تعلق یک باشد(حداقل یکی از مقادیر تعلق عضو های مجموعه دارای مقدار یک باشد)؛ و مجموعه فازی subnormal مجموعه ای می باشد که هیچ یک اعضای مجموعه مرجع آن دارای مقدار تعلق یک نباشد(هیچ یکی از مقادیر تعلق عضو های مجموعه دارای مقدار یک باشد).

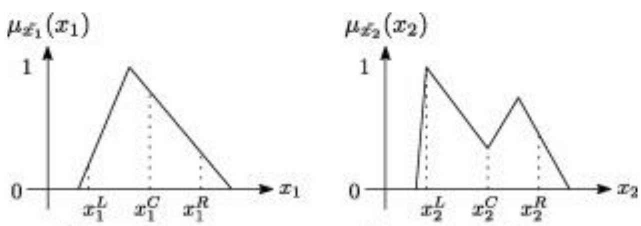
در شکل زیر بخش a یک مجموعه فازی normal و در بخش b یک مجموعه فازی subnormal نمایش داده شده است:



Fuzzy sets that are normal (a) and subnormal (b).

یک مجموعه فازی convex مجموعه ای می باشد که اگر در آن همانند شکل زیر به ازای هر سه نقطه x_1^L, x_1^C, x_1^R که در آن $x_1^L < x_1^C < x_1^R$ باشد، رابطه $\mu_{x_1}(x_1^C) \geq \min(\mu_{x_1}(x_1^R), \mu_{x_1}(x_1^L))$ برقرار باشد در این صورت **مجموعه فازی convex می باشد**، بنابراین مجموعه هایی دارای این ویژگی می باشند که اکیدا صعودی یا نزولی باشند یا با افزایش مقدار ابتدا اکید صعودی و سپس بعد از آن اکیدا نزولی شوند(همانند شکل زیر که از x_1^L تا x_1^C اکیدا صعودی می باشد و پس از آن اکیدا نزولی می شود)؛ اگر همانند شکل زیر به ازای هر سه نقطه x_2^L, x_2^C, x_2^R د که در آن $x_2^L < x_2^C < x_2^R$ باشد، اگر $\mu_{x_2}(x_2^C) \geq \min(\mu_{x_2}(x_2^R), \mu_{x_2}(x_2^L))$ برقرار نباشد در این صورت **مجموعه فازی nonconvex می باشد**، به عبارت دیگر مجموعه nonconvex مجموعه ای می باشد که convex نباشد.

در شکل زیر سمت چپ یک مجموعه convex و سمت راست یک مجموعه nonconvex نمایش داده شده است:



Convex fuzzy set　　Non convex fuzzy set

ب) با تعاریفی که از اشتراک و اجتماع مجموعه های فازی داریم، آیا اشتراک دو مجموعه فازی که convex هستند، مجموعه ای فازی خواهد شد؟ اجتماعشان چطور؟ برای ویژگی normal بودن هم این عملگر ها را بررسی کنید.

اشتراک دو مجموعه فازی convex یک **مجموعه فازی convex می باشد**، به این دلیل که مجموعه های convex ورودی می توانند اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی باشند که در این حالت در صورت اشتراک گرفتن مجموعه خروجی دارای یک بخش اکیدا صعودی و یک بخش اکیدا نزولی می شود که در این حالت نیز مجموعه خروجی convex می باشد، یا مجموعه های ورودی می توانند دارای یک بخش اکیدا صعودی و یک بخش اکیدا نزولی باشند که در صورت اشتراک این مجموعه با مجموعه

آرش حریرپوش
9731505

convex دیگر مجموعه خروجی نیز به دلیل اینکه شامل یک بخش اکیدا صعودی و یک بخش اکیدا نزولی می شود یک مجموعه convex می شود.

حال اگر از دو مجموعه convex **اجتماع** گرفته شود، مجموعه خروجی **ممکن است convex نباشد**، ، به این دلیل که مجموعه های convex ورودی می توانند اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی یا دارای یک بخش اکیدا نزولی و یک بخش اکیدا صعودی باشند. در صورتی که یک مجموعه convex که دارای یک بخش اکیدا صعودی و یک بخش اکیدا نزولی می باشد با مجموعه convex دیگری اجتماع یابد، خروجی می توانند شامل بیش از یک بخش اکیدا صعودی و یا بیش از یک بخش اکیدا نزولی شود، که در صورتی که مجموعه خروجی شامل بیش از یک بخش اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی شود دیگر convex نمی باشد.

اگر از دو مجموعه فازی normal **اشتراک** گرفته شود ممکن است مجموعه خروجی **normal نباشد**، به این دلیل که ممکن است بخش Core این مجموعه ها با یک دیگر همپوشانی نداشته باشند در نتیجه در ناحیه Core هر یک از مجموعه ها مجموعه دیگر در ناحیه Boundary می باشد به همین اشتراک این دو مجموعه باعث از بین رفتن ناحیه Core موجود در هر دو مجموعه می شود.

اما اگر از دو مجموعه فازی normal اجتماع گرفته شود، به این دلیل که هر یک از این مجموعه ها دارای ناحیه های Core می باشند، Core مجموعه اجتماع یافته خروجی برابر Core هر دو مجموعه فازی normal می شود.

ج) ناحیه های Core، Boundary و Support را هم روی نمودار های قبلی رسم شده یا به روی یک نمودار جدید مشخص کرده و مختصرا توضیح دهید.

ناحیه Core، شامل بخش هایی از مجموعه مرجع می باشد که در آن مقدار تعلق برابر یک $(\mu A(x) = 1)$ باشد.

آرش حریرپوش
9731505

ناحیه Boundary، شامل بخش هایی از مجموعه مرجع می باشد که در آن مقدار تعلق بین صفر و یک ($0 < \mu A(x) < 1$) باشد؛ همچنین این ناحیه برابر حاصل تفریق Support و Core نیز می باشد.

ناحیه Support، شامل بخش هایی از مجموعه مرجع می باشد که در آن مقدار تعلق بزرگ تر مساوی صفر ($\mu A(x) \geq 0$) باشد.

نواحی تعریف شده در بالا، در شکل زیر نمایش داده شده اند:

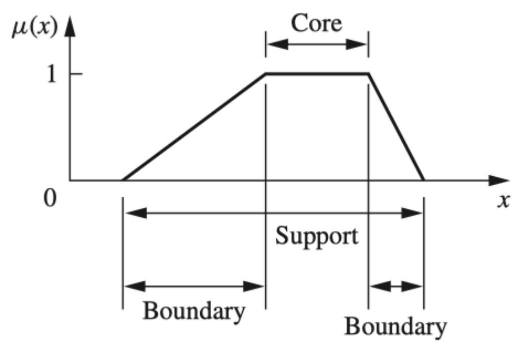


Figure 5: Core, support and boundaries of a fuzzy set.

(منبع: https://www.youtube.com/watch?v=trIiPsAFf9Y&list=PLhdVEDm7SZ-Ph7E3bYW89UbjD6zkW-vbf&index=8)

8. در آخرین قسمت از تمرین تئوری فازی که شامل این سوال و سوال بعدیست، هدف درک مفهوم و کاربردی است که قوانین فازی در دنیای واقعی می توانند داشته باشند.
در اینجا قصد داریم از ویژگی هایی که یک نوع بیماری ویروسی از خودش به جا می گذارد به درجه ی بیماری در بدن این فرد پی ببریم.
پس از پردازش تصویر بر روی سلول های آسیب دیده، دو ویژگی را می توانیم استخراج کنیم:
1- تعداد نقاط سیاه مشاهده شده داخل سلول
2- شکل این نقاط سیاه مشاهده شده
از آنجایی که مشخص کردن دقیق این دو ویژگی از روی این تصاویر کار دشواری است، ملزم به بیان فازی این متغیر ها و مفاهیم هستیم. با استفاده از قوانین و روابط فازی به روی استاندارد های از پیش تعریف

آرش حریرپوش
9731505

شده که قبلا با دقت و هزینه ی بالا توسط افراد خبره به دست آمده اند، درجه بیماری را به دست آوردیم.

مجموعه های فازی تعریف شده در سه حوزه ی مختلف به صورت زیر می باشد.

تعداد نقاط:

$$Low = \left\{\frac{1}{0}, \frac{0.4}{10}, \frac{0.2}{20}, \frac{0.1}{30}\right\}, \quad Medium = \left\{\frac{0.7}{10}, \frac{0.9}{20}, \frac{0.4}{30}, \frac{0.15}{40}\right\},$$
$$High = \left\{\frac{0.3}{20}, \frac{0.7}{30}, \frac{0.9}{40}, \frac{1}{50}\right\}$$

شکل نقاط:

$$Circular = \left\{\frac{0.8}{R_1}, \frac{0.6}{R_2}, \frac{0.2}{R_3}\right\}, Oval = \left\{\frac{0.1}{R_1}, \frac{0.35}{R_2}, \frac{0.7}{R_3}, \frac{0.9}{R_4}\right\}$$

درجه ی بیماری:

$$Low - Grade \ = \left\{\frac{0.9}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.3}{3}, \frac{0.2}{4}, \frac{0.2}{5}\right\}, High - Grade = \left\{\frac{0.6}{3}, \frac{0.8}{4}, \frac{0.9}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$$

حال خروجی فازی را برای قوانین زیر با اعمال کردن ورودی مشاهده شده ی R_2 (شکل نقاط) و 20 (تعداد نقاط) به دست آورید.

الف) اگر تعداد نقاط زیاد باشد آنگاه درجه ی بیماری بالا است. (با استفاده از max-min)

A: زیاد بودن تعداد نقاط: $High = \left\{\frac{0.3}{20}, \frac{0.7}{30}, \frac{0.9}{40}, \frac{1}{50}\right\}$

B: بالا بودن درجه بیماری: $High - Grade = \left\{\frac{0.6}{3}, \frac{0.8}{4}, \frac{0.9}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$

$$A \ \rightarrow \ B \equiv R = (A \times B)$$

$$\begin{aligned} R \ = A \times B = \bigg\{ & \frac{0.3}{(20,3)} + \frac{0.3}{(20,4)} + \frac{0.3}{(20,5)} + \frac{0.3}{(20,6)} + \frac{0.3}{(20,7)} \\ & + \frac{0.6}{(30,3)} + \frac{0.7}{(30,4)} + \frac{0.7}{(30,5)} + \frac{0.7}{(30,6)} + \frac{0.7}{(30,7)} \\ & + \frac{0.6}{(40,3)} + \frac{0.8}{(40,4)} + \frac{0.9}{(40,5)} + \frac{0.9}{(40,6)} + \frac{0.9}{(40,7)} \\ & + \frac{0.6}{(50,3)} + \frac{0.8}{(50,4)} + \frac{0.9}{(50,5)} + \frac{1}{(50,6)} + \frac{1}{(50,7)} \bigg\} \end{aligned}$$

$$A_1 = \left\{\frac{1}{20}\right\}$$

آرش حریرپوش
9731505

$$B_1 = A_1 \circ R = \left\{\frac{0.3}{3} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.3}{6} + \frac{0.3}{7}\right\}$$

ب) اگر شکل نقاط بیضوی شکل باشد آنگاه درجه بیماری پایین است.(با استفاده از max-product)

A: بیضوی بودن نقاط شکل: $Oval = \left\{\frac{0.1}{R_1}, \frac{0.35}{R_2}, \frac{0.7}{R_3}, \frac{0.9}{R_4}\right\}$

B: پایین بودن درجه بیماری: $Low - Grade = \left\{\frac{0.9}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.3}{3}, \frac{0.2}{4}, \frac{0.2}{5}\right\}$

$$A \rightarrow B \equiv R = (A \times B)$$

$$\begin{aligned} R = A \times B = \Bigg\{ & \frac{0.1}{(R_1, 1)} + \frac{0.1}{(R_1, 2)} + \frac{0.1}{(R_1, 3)} + \frac{0.1}{(R_1, 4)} + \frac{0.1}{(R_1, 5)} \\ & + \frac{0.35}{(R_2, 1)} + \frac{0.35}{(R_2, 2)} + \frac{0.3}{(R_2, 3)} + \frac{0.2}{(R_2, 4)} + \frac{0.2}{(R_2, 5)} \\ & + \frac{0.7}{(R_3, 1)} + \frac{0.6}{(R_3, 2)} + \frac{0.3}{(R_3, 3)} + \frac{0.2}{(R_3, 4)} + \frac{0.2}{(R_3, 5)} \\ & + \frac{0.9}{(R_4, 1)} + \frac{0.6}{(R_4, 2)} + \frac{0.3}{(R_4, 3)} + \frac{0.2}{(R_4, 4)} + \frac{0.2}{(R_4, 5)} \Bigg\} \end{aligned}$$

$$A_1 = \left\{\frac{1}{R_2}\right\}$$

$$B_1 = A_1 \circ R = \left\{\frac{0.35}{1} + \frac{0.35}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.2}{5}\right\}$$

آرش حریرپوش
9731505

ج) اگر تعداد نقاط متوسط و شکل نقاط دایروی باشند. آنگاه درجه بیماری بالا است.(با استفاده از (max-min

A: متوسط بودن تعداد نقاط دایروی بودن نقاط شکل: $Medium \times \ Circular$

$$A = Medium \times \ Circular = \left\{\frac{0.7}{10}, \frac{0.9}{20}, \frac{0.4}{30}, \frac{0.15}{40}\right\} \times \left\{\frac{0.8}{R_1}, \frac{0.6}{R_2}, \frac{0.2}{R_3}\right\}$$

$$= \left\{\frac{0.7}{(10, R_1)} + \frac{0.6}{(10, R_2)} + \frac{0.2}{(10, R_3)} + \frac{0.8}{(20, R_1)} + \frac{0.6}{(20, R_2)} + \frac{0.2}{(20, R_3)} + \frac{0.4}{(30, R_1)} + \frac{0.4}{(30, R_2)} + \frac{0.2}{(30, R_3)} + \frac{0.15}{(40, R_1)} + \frac{0.15}{(40, R_2)} + \frac{0.15}{(40, R_3)}\right\}$$

B: بالا بودن درجه بیماری: $High - Grade = \left\{\frac{0.6}{3}, \frac{0.8}{4}, \frac{0.9}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$

$$A \ \rightarrow \ B \equiv R = (A \times B)$$

آرش حریرپوش
9731505

$$R = A \times B = \left\{ \frac{0.6}{(10, R_1, 3)} + \frac{0.7}{(10, R_1, 4)} + \frac{0.7}{(10, R_1, 5)} + \frac{0.7}{(10, R_1, 6)} \right.$$
$$+ \frac{0.7}{(10, R_1, 7)} + \frac{0.6}{(10, R_2, 3)} + \frac{0.6}{(10, R_2, 4)} + \frac{0.6}{(10, R_2, 5)}$$
$$+ \frac{0.6}{(10, R_2, 6)} + \frac{0.6}{(10, R_2, 7)} + \frac{0.2}{(10, R_3, 3)} + \frac{0.2}{(10, R_3, 4)}$$
$$+ \frac{0.2}{(10, R_3, 5)} + \frac{0.2}{(10, R_3, 6)} + \frac{0.2}{(10, R_3, 7)} + \frac{0.6}{(20, R_1, 3)}$$
$$+ \frac{0.8}{(20, R_1, 4)} + \frac{0.8}{(20, R_1, 5)} + \frac{0.8}{(20, R_1, 6)} + \frac{0.8}{(20, R_1, 7)}$$
$$+ \frac{0.6}{(20, R_2, 3)} + \frac{0.6}{(20, R_2, 4)} + \frac{0.6}{(20, R_2, 5)} + \frac{0.6}{(20, R_2, 6)}$$
$$+ \frac{0.6}{(20, R_2, 7)} + \frac{0.2}{(20, R_3, 3)} + \frac{0.2}{(20, R_3, 4)} + \frac{0.2}{(20, R_3, 5)}$$
$$+ \frac{0.2}{(20, R_3, 6)} + \frac{0.2}{(20, R_3, 7)} + \frac{0.4}{(30, R_1, 3)} + \frac{0.4}{(30, R_1, 4)}$$
$$+ \frac{0.4}{(30, R_1, 5)} + \frac{0.4}{(30, R_1, 6)} + \frac{0.4}{(30, R_1, 7)} + \frac{0.4}{(30, R_2, 3)}$$
$$+ \frac{0.4}{(30, R_2, 4)} + \frac{0.4}{(30, R_2, 5)} + \frac{0.4}{(30, R_2, 6)} + \frac{0.4}{(30, R_2, 7)}$$
$$+ \frac{0.2}{(30, R_3, 3)} + \frac{0.2}{(30, R_3, 4)} + \frac{0.2}{(30, R_3, 5)} + \frac{0.2}{(30, R_3, 6)}$$
$$+ \frac{0.2}{(30, R_3, 7)} + \frac{0.15}{(40, R_1, 3)} + \frac{0.15}{(40, R_1, 4)} + \frac{0.15}{(40, R_1, 5)}$$
$$+ \frac{0.15}{(40, R_1, 6)} + \frac{0.15}{(40, R_1, 7)} + \frac{0.15}{(40, R_2, 3)} + \frac{0.15}{(40, R_2, 4)}$$
$$+ \frac{0.15}{(40, R_2, 5)} + \frac{0.15}{(40, R_2, 6)} + \frac{0.15}{(40, R_2, 7)} + \frac{0.15}{(40, R_3, 3)}$$
$$\left. + \frac{0.15}{(40, R_3, 4)} + \frac{0.15}{(40, R_3, 5)} + \frac{0.15}{(40, R_3, 6)} + \frac{0.15}{(40, R_3, 7)} \right\}$$

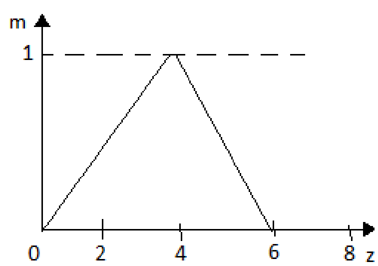
آرش حریرپوش
9731505

$$A_1 = \left\{\frac{1}{(20, R_2)}\right\}$$

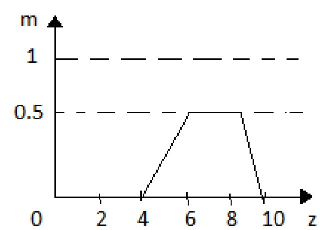
$$B_1 = A_1 \circ R = \left\{\frac{0.6}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.6}{5} + \frac{0.6}{6} + \frac{0.6}{7}\right\}$$

9. پیش از این با برش لامبدا که مجموعه های فازی را به مجموعه هایِ غیر فازی تبدیل می کرد آشنا شده ایم. حال قصد داریم شیوه تبدیل خروجی فازی به تنها یک عدد اسکالر را بررسی کنیم. برای این منظور می خواهیم خروجی فازی تولید شده در یکی از بخش های مسئله قبل را، غیر فازی سازی کرده، به طوری که مقدار اسکالری برای Grade بیماری به دست بیاوریم.
الف) ابتدا در مورد روش های Max Membership Principle، Centroid Method، Weighted Average Method، Mean Max Membership تحقیق کرده و به طور خلاصه با بیان ویژگی هایشان آن ها را با یک دیگر مقایسه کنید.

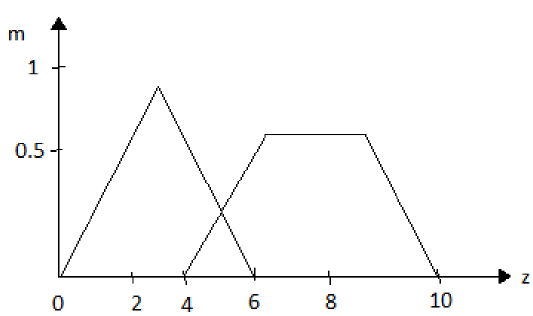
ابتدا مجموعه فازی زیر در نظر گرفته می شود:



[A]



[B]



[C]

که در آن شکل A بخش اول خروجی فازی و شکل B بخش دوم خروجی فازی و شکل C اجتماع این دو بخش می باشد.

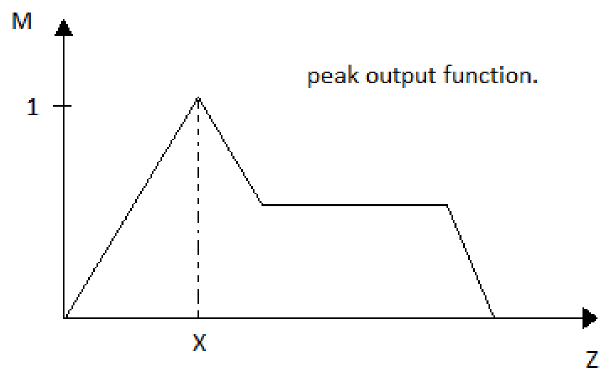
آرش حریرپوش
9731505

Max Membership Principle: این روش به peak خروجی توابع محدود شده است و همچنین به عنوان height method نیز شناخته می شود. این روش از نظر ریاضی می تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$\mu_{\bar{A}}(x^*) > \mu_{\bar{A}}(x)\ for\ all\ x \in X$$

که در فرمول بالا x^* خروجی غیر فازی سازی می باشد.

پس از اعمال این روش بر روی شکل C، خروجی آن برابر است با:

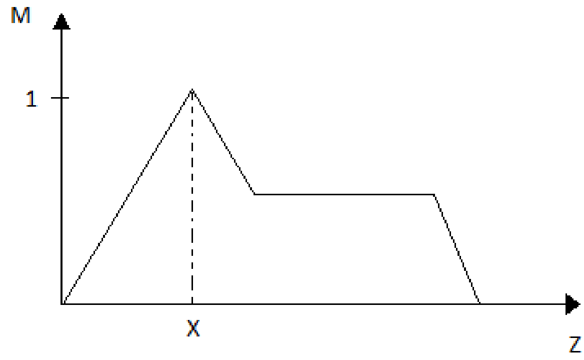


Centroid Method: این روش به عنوان center of area نیز شناخته می شود. در این روش کنترلر فازی ابتدا فضای زیر تابع تعلق (membership functions) scaled و در محدوده متغیر خروجی را محاسبه می کند.(در این روش منطقه های هم پوشان (overlapping area) دوبار در نظر گرفته می شوند) سپس کنترلر منطق فازی غیر فازی سازی خروجی x^* را به کمک فرمول ریاضی زیر انجام می دهد:

$$x^* = \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \mu_{\bar{A}}(x).\, x\, dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \mu_{\bar{A}}(x)\, dx}$$

پس از اعمال این روش بر روی شکل C، خروجی آن برابر است با:

آرش حریرپوش
9731505

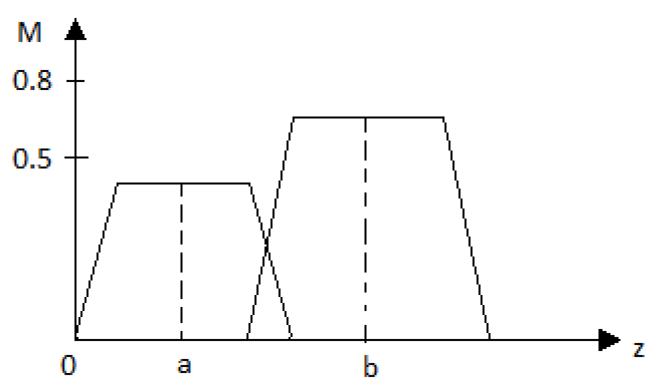


Weighted Average Method: در این روش، هر یک از توابع تعلق وزنی برابر بیشترین مقدار تعلق (membership) می گیرند. به صورت ریاضیاتی، خروجی x^* غیر فازی شده به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$x^* = \frac{\sum \mu_{\bar{A}}(\overline{x_\iota}).\overline{x_\iota}}{\sum \mu_{\bar{A}}(\overline{x_\iota})}$$

که در آن $\overline{x_\iota}$ برابر بزرگ ترین مقدار تابع تعلق می باشد.

پس از اعمال این روش بر روی شکل C، خروجی آن برابر است با:



Mean Max Membership: این روش به عنوان middle of the maxima نیز شناخته می شود. در این روش مقدار غیر فازی سازی شده به عنوان عنصر با بزرگ ترین مقادیر تعلق در نظر گرفته می شود. زمانی که بیش از یک عنصر بیشترین مقادیر تعلق را دارد، میانگین maxima در نظر گرفته می شود. (در این روش ابتدا نقاطی که در آن مقدار تعلق برابر بیشینه شده را با یک دیگر جمع و سپس بر تعداد آن نقاط تقسیم می گردد) همچنین از این روش برای برنامه های تشخیص pattern استفاده می شود

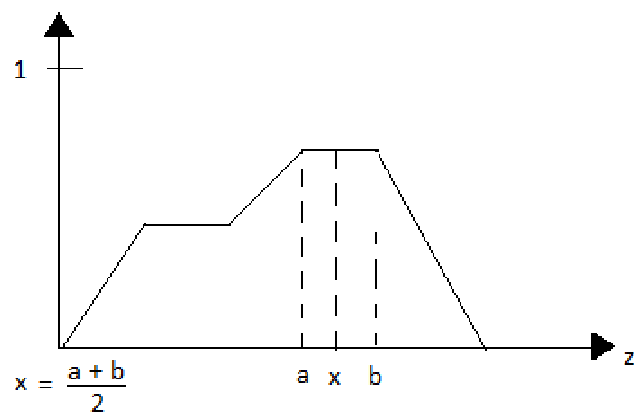
آرش حریرپوش
9731505

محتمل ترین نتیجه را محاسبه می کند. به جای اینکه میانگین درجه عضویت در خروجی linguistic terms را بدست آورد، این روش مقدار معمولی معتبر ترین خروجی linguistic terms را محاسبه می کند؛ در این روش غیر فازی سازی مقدار غیر فازی شده x^* به صورت زیر محاسبه می شود:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}}{n}$$

که در آن $\overline{x_i}$ برابر height مجموعه فازی و n برابر cardinality می باشد.

پس از اعمال این روش بر روی شکل C، خروجی آن برابر است با:



(منابع: https://www.tutorialspoint.com/fuzzy_logic/fuzzy_logic_membership_function.htm و https://cse.iitkgp.ac.in/~dsamanta/courses/archive/sca/Archives/Chapter%205%20Defuzzification%20Methods.pdf و https://www.physik.uzh.ch/local/teaching/SPI301/LV-2015-Help/lvpidmain.chm/defuzz_methods.html و https://www.ques10.com/p/47718/explain-defuzzification-and-its-methods-1/#:~:text=Defuzzification%3A,quantity%20into%20a%20precise%20quantity.&text=%5BC%5D%20Union%20of%20part%20%5B,the%20two%20or%20more%20shapes.)

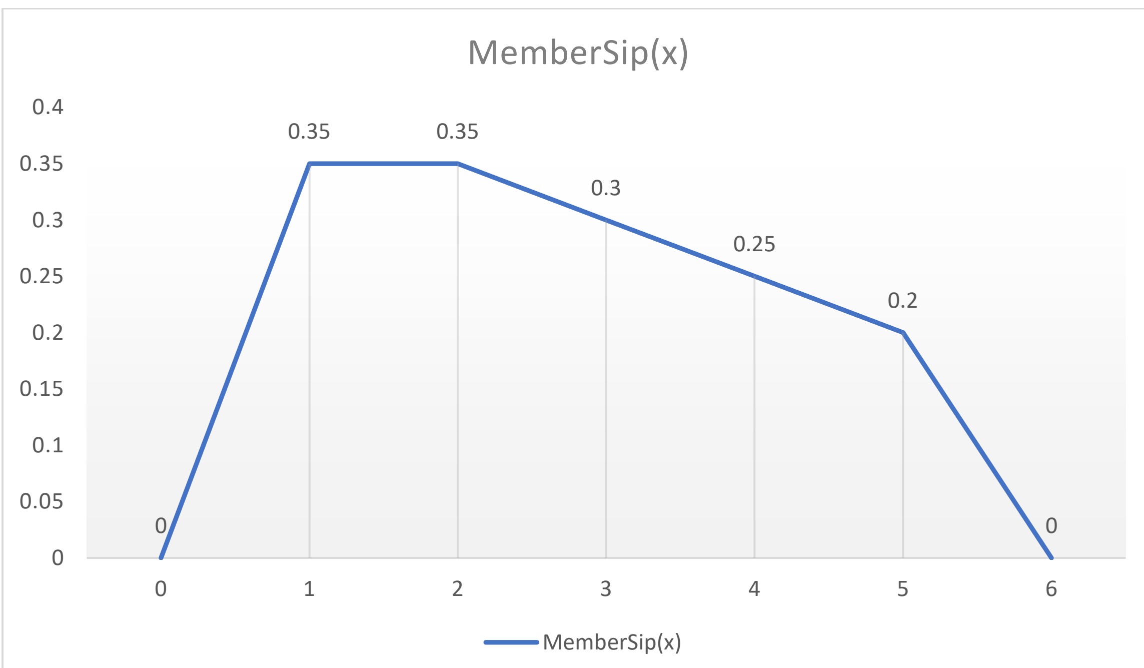
آرش حریرپوش
9731505

ب) پاسخ فازی که برای یکی از قوانین داده شده به دست آورده اید را انتخاب کرده و خروجی که به صورت گسسته به دست آورده اید را در این قسمت، پیوسته فرض کنید. برای این منظور یک توزیع دلخواه منطبق با مجموعه فازی به دست آمده تان است، رسم کنید. (راهنمایی: برای ساده شدن کارتان می توانید خروجی نمودارتان را به صورت مثلثی، ذوزنقه ای یا ترکیبی از آن ها بکشید.) سپس خروجی عددی به ازا هر کدام از روش های ذکر شده به دست آورید. حتی اگر خروجی که انتخاب کرده اید به نظرتان توزیع پیچیده ای دارد، مقادیرش را با اعداد نزدیک تقریب زده تا بتوانید از روش های ذکر شده به راحتی استفاده کنید. زیرا هدف این قسمت صرفا آشنایی شما با روش های غیر فازی سازی است.

پاسخ فازی بدست آمده برای قسمت ب سوال قبل در نظر گرفته می شود:

$$B_1 = A_1 \circ R = \left\{\frac{0.35}{1} + \frac{0.35}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.2}{4} + \frac{0.2}{5}\right\}$$

برای ساده تر شدن توزیع خروجی مقدار تعلق در 4 را برابر 0.25 در نظر گرفته می شود، سپس نمودار آن به صورت زیر رسم می گردد:



سپس به کمک روش های بخش الف مجموعه بالا به صورت زیر غیر فازی می گردد:

:Max Membership Principle

$$\mu_{\bar{A}}(x^*) > \mu_{\bar{A}}(x) \; for\ all\ x \in X \;\Rightarrow \boldsymbol{x^*} = \{\mathbf{1}\,, \mathbf{2}\}$$

آرش حریرپوش
9731505

:Centroid Method

$$x^{*}=\frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}}\mu_{\bar{A}}(x).x\,dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}}\mu_{\bar{A}}(x)\,dx}$$

برای محاسبه مقدار اسکالر غیر فازی شده در این بخش، ابتدا انتگرال مورد نظر برای نواحی مختلف شکل بالا به صورت زیر محاسبه می گردد:

ابتدا ناحیه 0 تا 1 در نظر گرفته می شود:

$$A_{0,1}=\int_{0}^{1}0.35*x*x\,dx\simeq 0.12*x^{3}\Rightarrow A_{0,1}=0.12$$

$$B_{0,1}=\int_{0}^{1}0.35*x\,dx=0.175*x^{2}\Rightarrow B_{0,1}=0.175$$

سپس ناحیه 1 تا 2 در نظر گرفته می شود:

$$A_{1,2}=\int_{1}^{2}0.35*x\,dx=0.175*x^{2}\Rightarrow A_{1,2}=0.175$$

$$B_{1,2}=\int_{1}^{2}0.35\,dx=0.35*x\Rightarrow B_{1,2}=0.35$$

سپس ناحیه 2 تا 5 در نظر گرفته می شود:

$$A_{2,5}=\int_{2}^{5}\big(0.35-0.05*(x-2)\big)*x\,dx=\int_{2}^{5}(0.45-0.05*x)*x\,dx$$
$$\simeq 0.225*x^{2}-0.02*x^{3}\Rightarrow A_{2,5}=3.125-0.74=2.385$$

$$B_{2,5}=\int_{2}^{5}0.35-0.05*(x-2)\,dx=\int_{2}^{5}0.45-0.05*x\,dx=0.45*x$$
$$-0.025*x^{2}\Rightarrow B_{2,5}=1.625-0.8=0.825$$

و در نهایت ناحیه 5 تا 6 در نظر گرفته می شود:

آرش حریرپوش
9731505

$$A_{5,6} = \int_5^6 \left(0.2 - 0.2 * (x-5)\right) * x \, dx = \int_5^6 1.2 * x - 0.2 * x^2 \, dx$$

$$\simeq \; 0.6 * x^2 - 0.06 * x^3 \Rightarrow A_{5,6} = 8.64 - 7.5 = 1.14$$

$$B_{5,6} = \int_5^6 0.2 - 0.2 * (x-5) \, dx = \int_5^6 1.2 - 0.2 * x \, dx = \; 1.2 * x - 0.1 * x^2$$

$$\Rightarrow B_{5,6} = 3.6 - 3.5 = 0.1$$

بنابراین مقدار اسکالر غیر فازی شده برابر است با:

$$A = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \mu_{\bar{A}}(x).x \, dx = A_{0,1} + A_{1,2} + A_{2,5} + A_{5,6}$$

$$= 0.12 + 0.175 + 2.385 + 1.14 = 3.82$$

$$B = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \mu_{\bar{A}}(x) \, dx = B_{0,1} + \; B_{1,2} + B_{2,5} + B_{5,6} = \; 0.175 + 0.35 + 0.825 + 0.1$$

$$= 1.45$$

$$x^* = \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \mu_{\bar{A}}(x).x \, dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \mu_{\bar{A}}(x) \, dx} = \frac{A}{B} = \frac{3.82}{1.45} \simeq 2.63 \; \Rightarrow \boldsymbol{x^*} \simeq \{\mathbf{2.63}\}$$

:Weighted Average Method

با توجه به اینکه در اینجا دو مجموعه فازی با یک دیگر اجتماع گرفته نشده اند، در اینجا فرض می شود که مجموعه خروجی حاصل یک مجموعه می باشد که در شکل بالا از 0 تا 2 با مجموعه ای دیگر که در شکل بالا از 2 تا 6 قرار دارد می باشد؛ بنابراین با اعمال این روش نتیجه زیر حاصل می گردد:

مرکز دو مجموعه عنوان شده برابر است با:

در مجموعه اول $\frac{0+2}{2}$ که برابر با 1 می باشد و در مجموعه دوم برابر است با $\frac{6-2}{2} + 2$ که برابر با 4 می باشد؛ سپس مقدار اسکالر غیر فازی شده از طریق این روش به صورت زیر محاسبه می شود:

آرش حریرپوش
9731505

$$x^* = \frac{\sum \mu_{\bar{A}}(\overline{x_\iota}).\overline{x_\iota}}{\sum \mu_{\bar{A}}(\overline{x_\iota})} = \frac{0.35 + 4 * 0.25}{0.35 + 0.25} = \frac{1.35}{0.6} = 2.25 \Rightarrow \boldsymbol{x^*} = \{\mathbf{2.25}\}$$

:Mean Max Membership

در شکل بالا بیشترین مقدار تعلق برابر 0.35 می باشد که بین نقاط 1 و 2 قرار دارد بنابراین:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x_\iota}}{n} = \frac{1+2}{2} = 1.5 \Rightarrow \boldsymbol{x^*} = \{\mathbf{1.5}\}$$

(منابع: http://vlabs.iitb.ac.in/vlabs-dev/labs/machine_learning/labs/exp9/theory.php و https://www.youtube.com/watch?v=OPB9uZgHZ30)

❖ بخش دوم – مسائل برنامه نویسی و پیاده سازی

1. شرح مختصری در مورد مراحل و نحوه کار کلی الگوریتم و برخی موارد جزئی تر مانند نوع رویکرد تان در مقدار دهی اولیه ماتریس تعلق ها و تعیین شرط خاتمه الگوریتم ارائه دهید.

نحوه کار کلی الگوریتم این برنامه به صورت زیر می باشد:

1. ابتدا مرکز اولیه خوشه ها در تابع initialize تعیین می گردد، برای این کار یک random_state تعریف شده است که باعث می شود به ازای اجرا های متفاوت خوشه های اولیه یکسانی تعریف شود، و این مقدار می تواند بسته به توزیع خوشه بندی تغییر کند و پس از انتخاب اعداد تصادفی به کمک این اعداد مراکز اولیه خوشه بندی از داده های ورودی انتخاب می گردد؛ همچنین می توان به اندازه تعداد مراکز خوشه به کمک تابع normal نقاطی تصادفی در محدوده ای که داده ها قرار دارند انتخاب کرد که در اینجا نیز با قرار دادن مقدار random_state در seed باعث می شود در اجرا های متفاوت نقاط یکسانی انتخاب شود، در این حالت دیگر مراکز اولیه خوشه بندی از بین داده های ورودی انتخاب نشده است و همچنین توزیع نسبتا یکنواخت تری نسبت به قبل می تواند داشته باشد؛ و مقدار اولیه ماتریس تعلق ها نیز صفر در نظر گرفته می شود تا در مرحله 2 مقدار تعلق آن ها به مراکز محاسبه شود.

آرش حریرپوش
9731505

2. پس از انتخاب مراکز اولیه مقدار تعلق هر یک از نقاط توسط تابع update_membership محاسبه می شود.
3. تا زمانی که مقدار فاصله اقلیدسی تابع تعلق جدید با تابع تعلق قدیم از مقدار خطای تعیین شده بیشتر یا مساوی باشد مراحل 2 و 3 تکرار می شود.

همچنین برای اطمینان از اتمام برنامه حداکثر تعداد تکرار حلقه نیز تعیین می گردد.

2. رابطه تابع هزینه در خوشه خوشه بندی FCM را بنویسید و با توجه به رابطه توضیح دهید که مقدار هزینه بدست آمده از لحاظ مفهومی چه چیزی را نشان می دهد؟ مقدار هزینه با افزایش تعداد خوشه ها چه تغییری می کند؟ چرا؟

رابطه تابع هزینه در FCM برابر است با:

$$J_m = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{c} u_{ik}^{m} * d_{ik}^{2}$$

که در آن d_{ik} فاصله اقلیدسی بین داده i ام با مرکز خوشه k ام می باشد، مقدار هزینه بدست آمده برابر مجموع مربع های خطای درون خوشه ای می باشد، مقدار این هزینه با افزایش تعداد خوشه ها کاهش می یابد، چرا که با افزایش تعداد خوشه ها هر کدام از مراکز خوشه ناحیه کمتر و داده کمتری را پوشش می دهند، به همین دلیل فاصله بین نقاط داده با مرکز خوشه ها کمتر می شود، و در نتیجه آن جمع مربع های آن نیز کاهش می یابد.

3. پارامتر m (در رابطه مراکز، مقدار تعلق ها و تابع هزینه) چه عددی در نظر گرفته شده است؟

این پارامتر در این برنامه برابر 2 در نظر گرفته شده است؛ که این مقدار به صورت تجربی بدست آمده است.

4. تعداد خوشه ای که منجر به یک خوشه بندی خوب شود، تعداد خوشه بهینه است. در مورد معیار های یک خوشه بندی فازی خوب و نحوه ارزیابی آن تحقیق کنید . توضیح دهید.

برخی از ویژگی هایی که یک خوشه بندی خوب باید داشته باشد، عبارت است از:

- اختلافات درون خوشه ای باید کم باشد.

- اختلافات بین خوشه ای باید زیاد باشد.
- خوشه ها باید به خوبی توسط برخی مدل های احتمالی همگن همانند توزیع Gaussian یا uniform بر روی یک مجموعه convex یا خطی، سری زمانی یا مدل های فرآیند مکانی، به خوبی قرار داده شوند.
- عضو های خوشه باید به خوبی توسط centroid آن نمایش داده شوند.
- اختلافات بین داده ها باید به خوبی توسط خوشه بندی مشخص شده باشد.
- خوشه ها باید پایدار باشند.
- خوشه ها باید با فضای متصل به فضای داده با چگالی بالا مطابقت داشته باشند.
- نواحی موجود در فضای داده های مربوط به خوشه ها باید دارای ویژگی های خاصی باشند.
- باید بتوان با استفاده از تعداد کمی از متغیر ها خوشه ها را توصیف کرد.
- خوشه ها باید به خوبی با یک پارتیشن یا مقادیر مشخص شده یک یا چند متغیر که برای محاسبه خوشه مورد استفاده قرار نمی گرفت مطابقت داشته باشند.
- ویژگی ها در هر خوشه باید تقریبا مستقل باشد.
- تعداد خوشه ها باید کم باشد.

(منبع: https://blogs.sas.com/content/sgf/2017/07/17/what-are-the-characteristics-of-true-clusters/)

- تعداد خوشه ها و رویکرد تعیین آن:

برای بدست آوردن تعداد خوشه ها، به کمک سه تابع رفتار خوشه بندی به ازای تعداد خوشه های متفاوت بررسی می گردد، که این سه تابع برابر است با:

1. شاخص کارآیی (Performance Index):

$$P_I = \sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} u_{ik}^{m} * \left(||x_k - v_i||^2\right) - \sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} u_{ik}^{m} * \left(||v_i - \bar{x}||^2\right)$$

آرش حریرپوش
9731505

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

این شاخص میزان کارآیی خوشه بندی را نمایش می دهد، و همچنین بیانگر تفاضل مجموع نوسانات داخل خوشه ای با مجموع نوسانات بین خوشه ای می باشد.

در این روش به ازای تعداد خوشه ای که مقدار این عبارت کمینه شود برابر تعداد خوشه بهینه در این روش می باشد، به این دلیل که برای کم شدن مقدار این تابع باید فاصله بین نوسانات درون خوشه ای کمتر از نوسانات بین خوشه ای باشد، یعنی در این حالت خوشه ها با یک دیگر فاصله مناسبی دارند و همچنین مقادیر درون هر خوشه نیز به یک دیگر نزدیک می باشند، و هر چی این مقدار کوچک تر شود یعنی فاصله نوسانات بین خوشه ای بیشتر از نوسانات درون خوشه ای شده است؛ در نهایت برای بهتر نشان دادن مقادیر و همچنین برای مقایسه بهتر عدد بدست آمده تابع بالا بر تعداد خوشه ها می گردد؛ یعنی:

$$P_I = \frac{\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} u_{ik}^{m} * \left(\left|\left|x_k - v_i\right|\right|^2\right) - \sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} u_{ik}^{m} * \left(\left|\left|v_i - \bar{x}\right|\right|^2\right)}{number\ of\ clusters}$$

2. تابع بعدی آنتروپی می باشد، که برابر است با:

$$E = -\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} u_{ik} * \log\left(u_{ik}\right)$$

این تابع میزان بی نظمی در هر خوشه بندی را نمایش می دهد، در این روش به ازای تعداد خوشه ای که مقدار این عبارت کمینه شود برابر تعداد خوشه بهینه در این روش می باشد، به این دلیل که هر چه بی نظمی در خوشه بندی کمتر باشد خوشه بندی بهتر انجام شده است؛ این تابع نیز برای بهتر نشان دادن تاثیر تعداد خوشه ها بر روی بی نظمی بر مجذور تعداد خوشه ها به صورت زیر تقسیم می گردد:

$$E = \frac{-\sum_{i=1}^{c}\sum_{k=1}^{n} u_{ik} * \log\left(u_{ik}\right)}{\sqrt{number\ of\ clusters}}$$

آرش حریرپوش
9731505

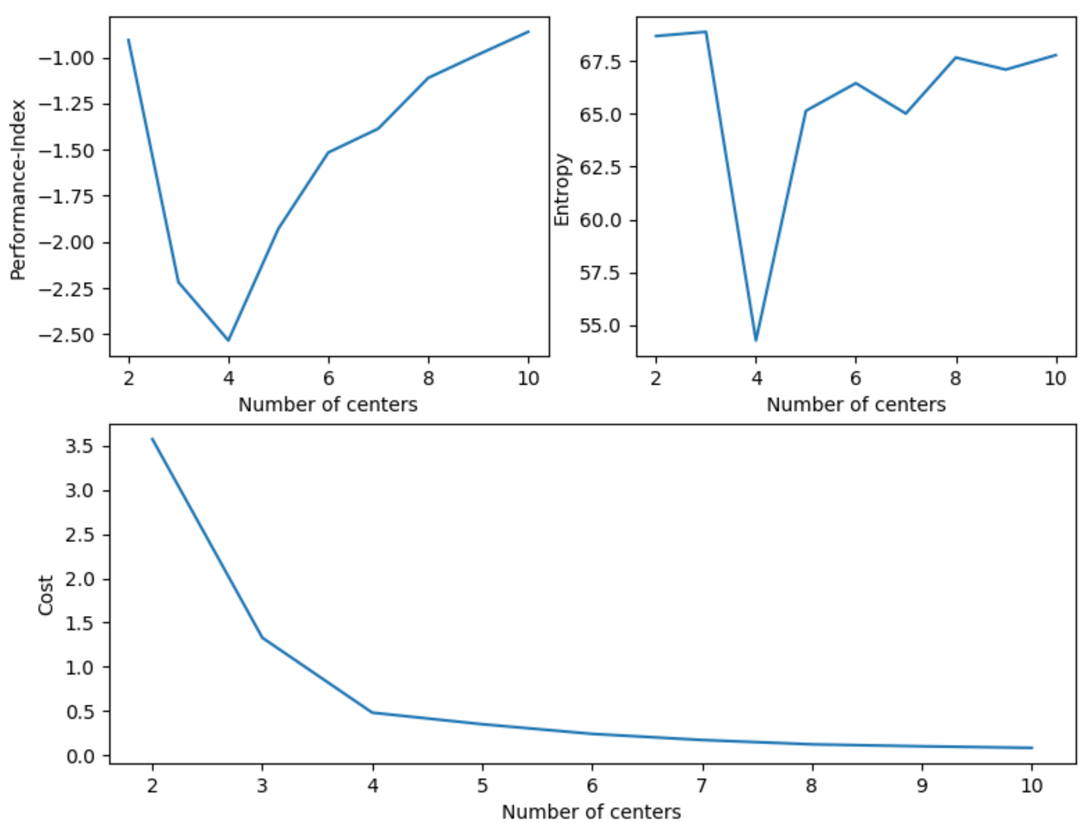
3. در نهایت تابع آخر برابر مجموع مربع های خطای درون خوشه ای که به عنوان تابع هزینه در سوال 2 نوشته شده است، برای بدست آوردن تعداد خوشه های بهینه به کمک این نمودار از روش *elbow* استفاده می گردد، برای بهتر نشان دادن تاثیر تعداد خوشه ها بر روی این تابع این تابع بر مجذور تعداد خوشه ها به صورت زیر تقسیم می گردد:

$$J_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{c} u_{ik}^{m} * d_{ik}^{2}}{\sqrt{number\ of\ clusters}}$$

- مقدار هزینه (توسط تابع هزینه):

مقدار توابع مشخص شده در بخش قبل برای داده های ورودی به صورت زیر می باشد:

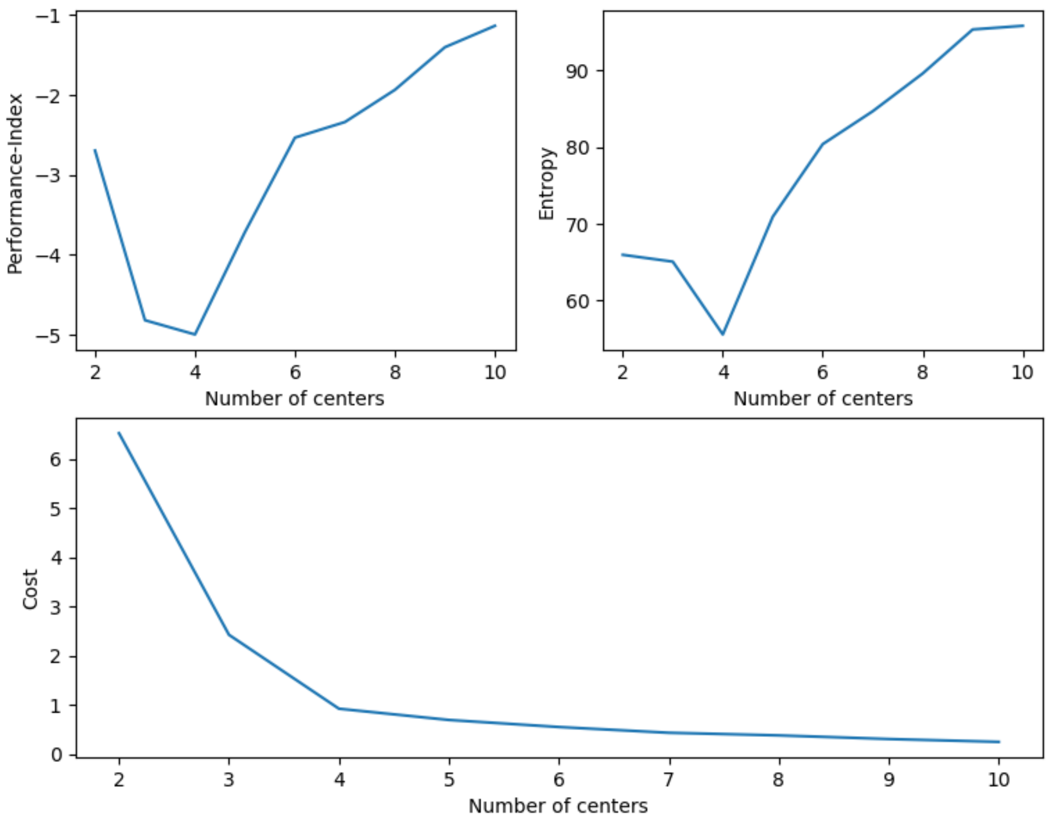
داده sample1.csv:



آرش حریرپوش
9731505

همانطور که از سه نمودار بالا مشخص است، تعداد خوشه های بهینه برای این داده ها برابر 4 خوشه می باشد.

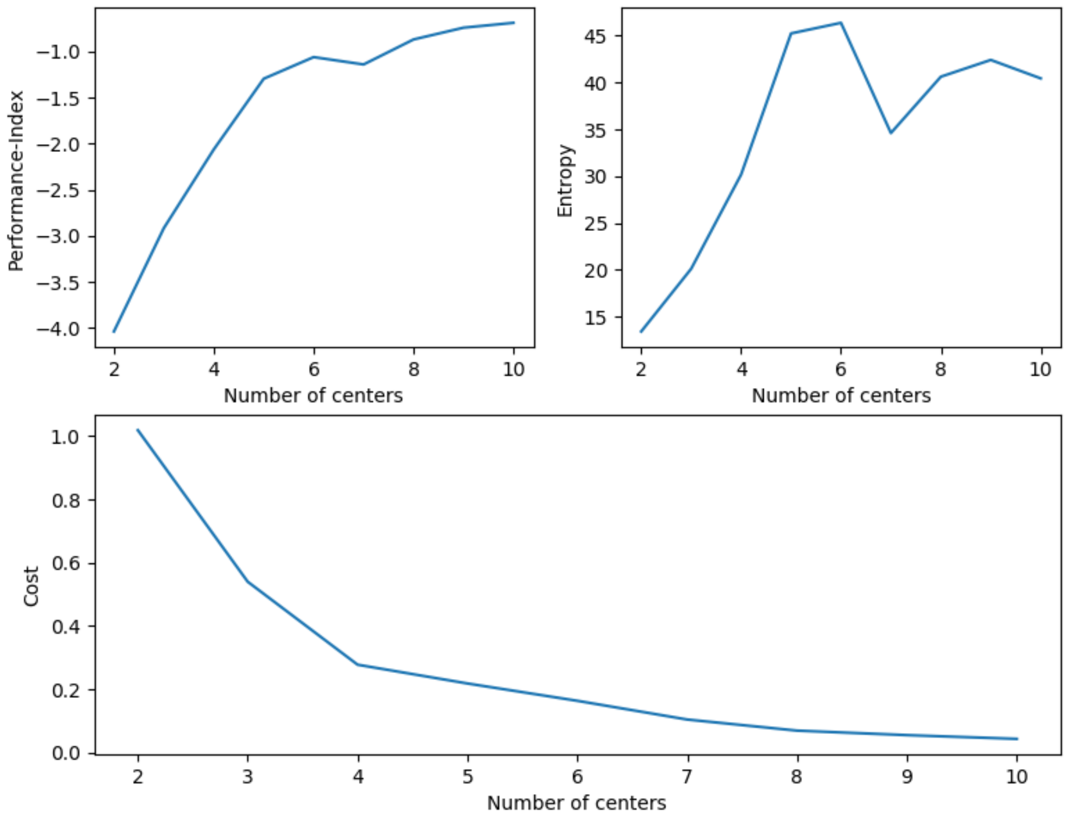
داده sample2.csv:



همانطور که از سه نمودار بالا مشخص است، تعداد خوشه های بهینه برای این داده ها برابر 4 خوشه می باشد.

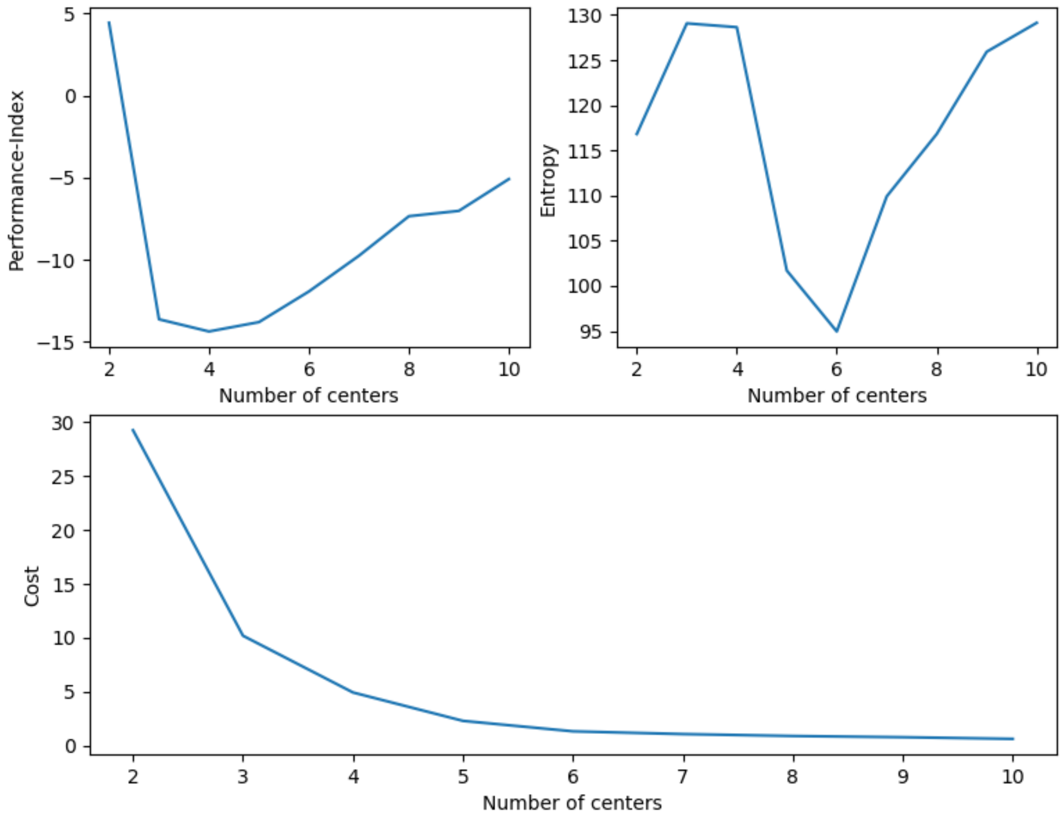
آرش حریرپوش
9731505

داده sample3.csv:



با توجه به دو نمودار اول یعنی نمودار شاخص کارآیی و آنتروپی تعداد خوشه های بهینه برای این داده ها برابر 2 و طبق نمودار سوم یعنی مجموع مربع های خطای درون خوشه ای تعداد خوشه های بهینه برابر 3 می باشد.

داده sample4.csv:



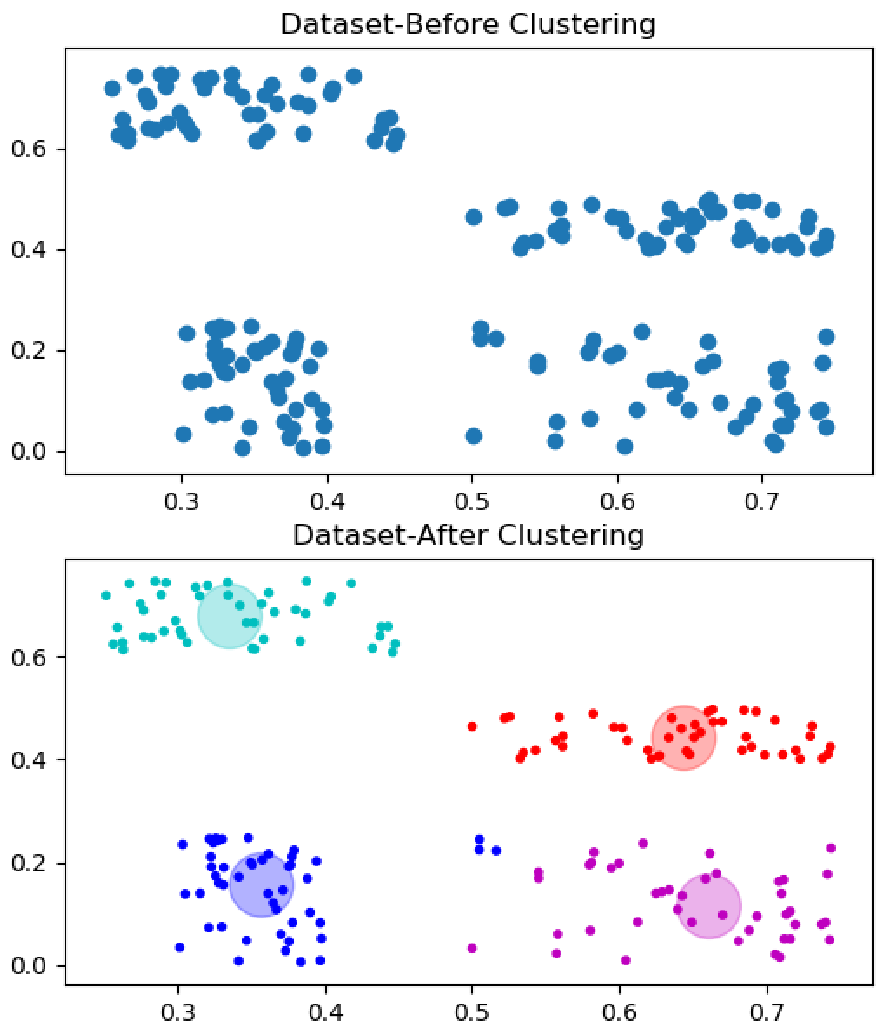
با توجه به دو نمودار اول و سوم یعنی نمودار شاخص کارآیی و مجموع مربع های خطای درون خوشه ای تعداد خوشه های بهینه برای این داده ها برابر 3 و طبق نمودار دوم یعنی آنتروپی تعداد خوشه های بهینه برابر 6 می باشد.

- پلات کردن کل نقطه ها + پلات کردن مراکز خوشه های به دست آمده (برای داده گان دو بعدی):

برای رسم نقاط مقدار تابع تعلق آن ها به مرکز خوشه ها به کمک روش Max Membership Principle غیرفازی شده است و داده های هر خوشه با رنگ های متفاوت رسم شده اند.

داده sample1.csv:

با توجه به اینکه تعداد خوشه های بهینه مطابق بخش قبل برای این داده ها برابر 4 می باشد نمودار این نقاط برابر است با:

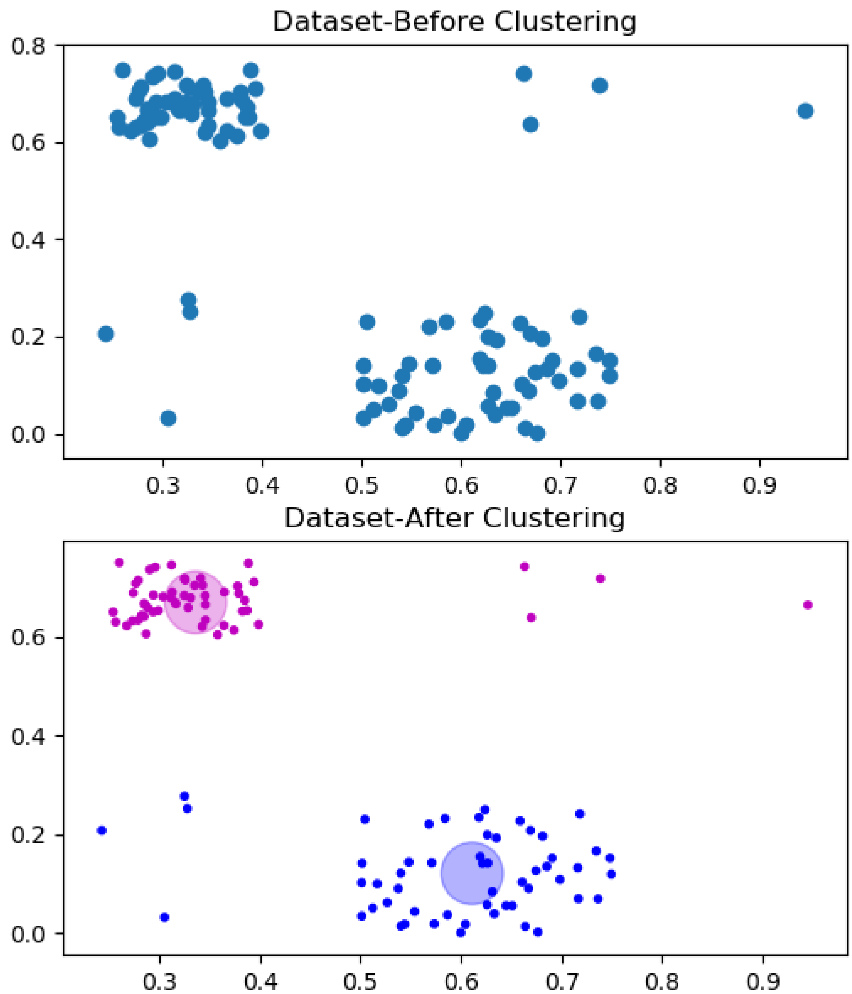


داده sample3.csv:

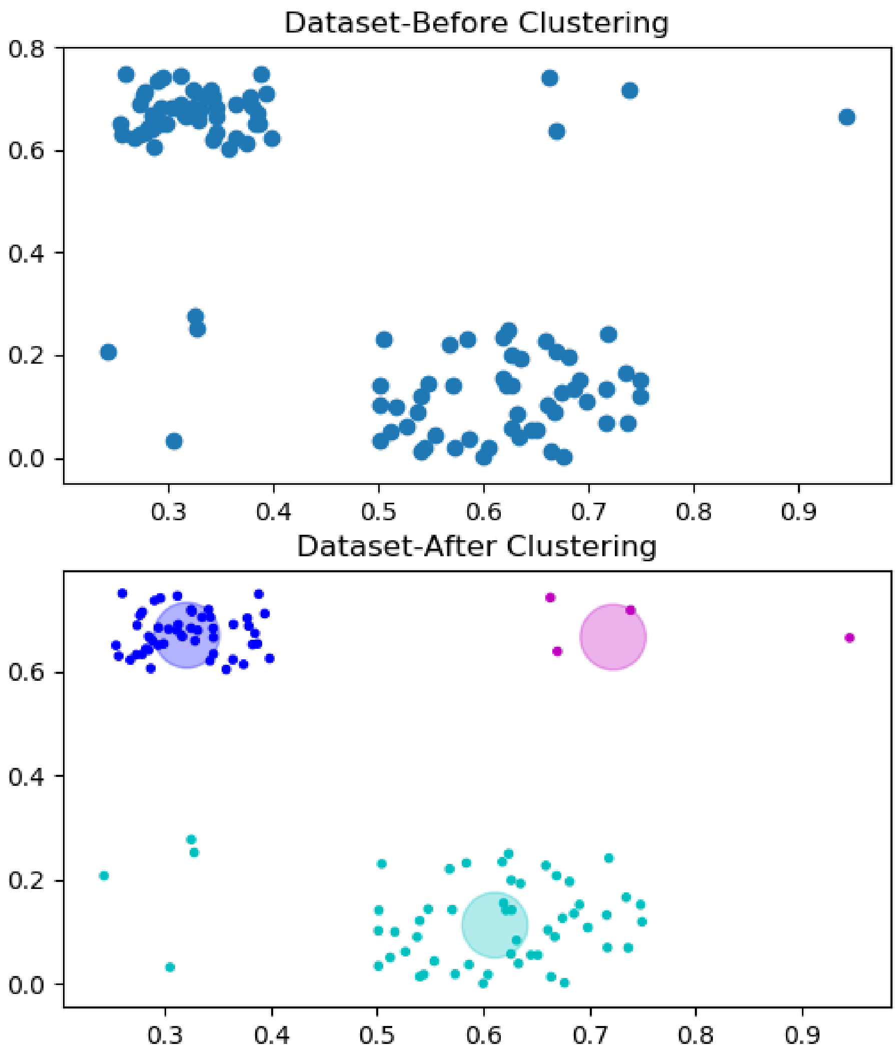
با توجه به اینکه برای این داده ها دو مقدار خوشه بهینه مطابق بخش قبل در نظر گرفته شده است، نمودار این نقاط برابر است با:

آرش حریرپوش
9731505

اگر تعداد خوشه ها برابر 2 باشد:



اگر تعداد خوشه ها برابر 3 باشد:

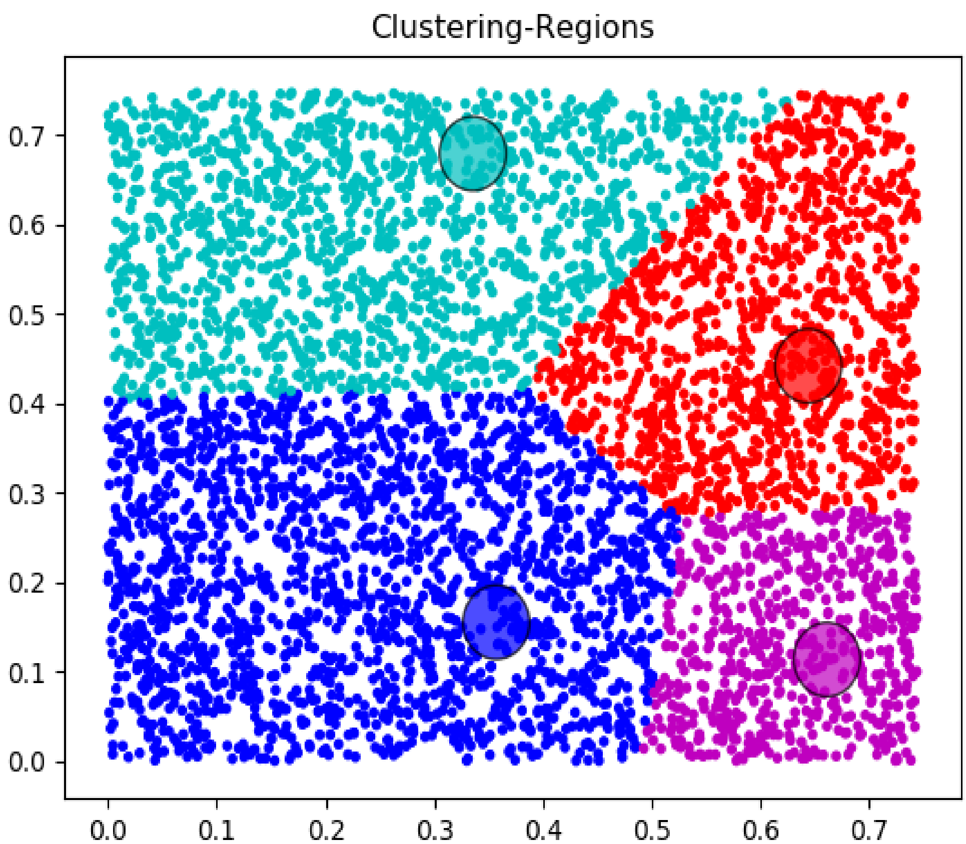


آرش حریرپوش
9731505

- نمایش مرز بندی خوشه ها(برای داده گان دو بعدی):

داده sample1.csv:

با توجه به اینکه تعداد خوشه های بهینه مطابق بخش های قبل برای این داده ها برابر 4 می باشد نمودار این نقاط برابر است با:

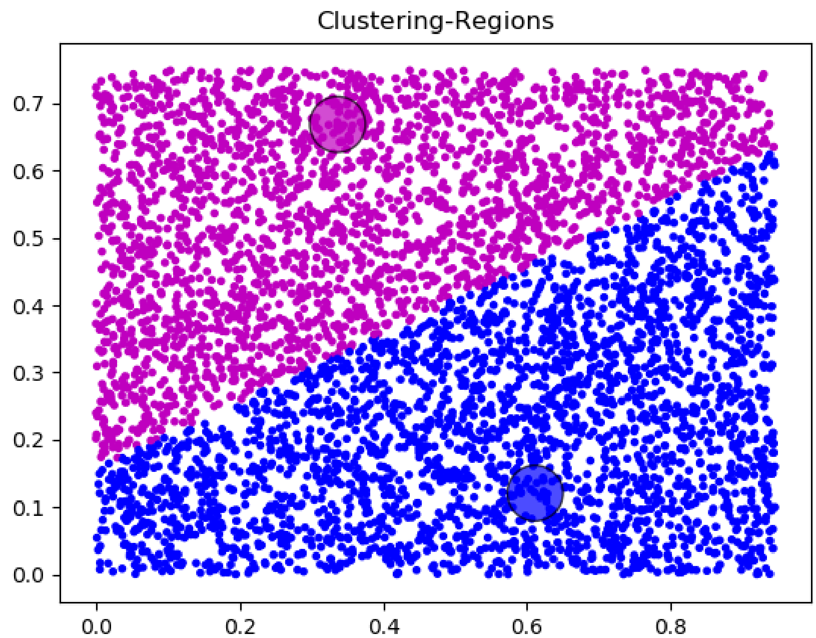


داده sample3.csv:

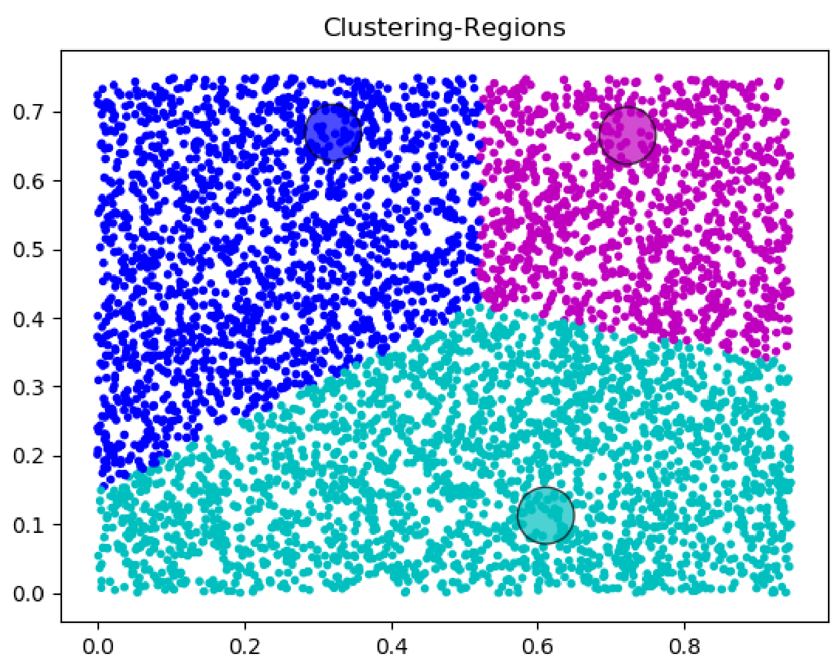
با توجه به اینکه برای این داده ها دو مقدار خوشه بهینه مطابق بخش های قبل در نظر گرفته شده است، نمودار مرز بندی این خوشه بندی برابر است با:

آرش حریرپوش
9731505

اگر تعداد خوشه ها برابر 2 باشد:



اگر تعداد خوشه ها برابر 3 باشد:



آرش حریرپوش
9731505

برای نوشتن این برنامه ابتدا یک کلاس به نام FCM به صورت زیر نوشته می شود، که در آن مقادیر اولیه و توابع مورد نیاز قرار دارد:

```
import numpy as np
import matplotlib.pylab as plt
import matplotlib.gridspec as gridspec

class FCM:
    def __init__(self, data, number_of_clusters=2, m=2, error = 0.01,
random_state = 42, max_ind=150):
        self.number_of_clusters = number_of_clusters
        self.data = data.to_numpy().astype(np.float32)
        #Fuzziness : m
        self.m = m
        self.J = 1.0
        self.performance_index = 0.0
        self.entropy = 0.0
        self.max_ind = max_ind
        self.fcp = []
        self.dif = None
        self.u = None
        self.centers = None
        self.error = error
        self.random_state = random_state

    # Generate The Initial Centers
    def center_distribution(self):
        dim = self.data.shape[1]
        data_generated = []
        np.random.seed(self.random_state)
        for i in range(dim):
            data_generated.append(abs(np.random.normal(0, 0.7,
self.number_of_clusters)))
        centers = np.vstack(data_generated).T
        return centers
    # 1st Step: Initialize the needed attributes
    def initialize(self, data, number_of_clusters):
        self.dif = 1.0
        self.u = np.zeros((len(data), number_of_clusters))
        rand = np.random.RandomState(self.random_state)
        # self.centers = data[rand.randint(0, len(data), number_of_clusters)]
        self.centers = self.center_distribution()

    # 2en Step: Update the membership of the Data's
    def update_membership(self):
        old_u = np.copy(self.u)
        for i in range(len(self.data)):
            for j in range(self.number_of_clusters):
                temp = 0
                d_ij = np.linalg.norm(self.data[i]-self.centers[j])
                for k in range(self.number_of_clusters):
                    power = 2/(self.m - 1)
                    d_ik = np.linalg.norm(self.data[i]-self.centers[k])
                    if d_ik != 0:
                        temp += (d_ij/d_ik)**power

                if temp !=0:
                    self.u[i, j] = 1 / temp
                else:
                    self.u[i, j] = 1
```

آرش حریرپوش
9731505

```
        self.dif = np.linalg.norm(self.u - old_u)

    # 3rd step: update the centers of the clustering
    def update_centers(self):
        for j in range(self.number_of_clusters):
            temp1 = 0
            sum_of_membership = 0
            for i in range(len(self.data)):
                temp_u = self.u[i, j] ** self.m
                temp1 += temp_u*self.data[i]
                sum_of_membership += temp_u
            self.centers[j] = temp1 / sum_of_membership

    # Calculate the sum of the squares of the error within the cluster
    def calculate_cost(self):
        J = 0.0
        for i in range(len(self.data)):
            for j in range(self.number_of_clusters):
                J += (self.u[i, j] ** self.m) * \
                          (np.linalg.norm(self.data[i]-self.centers[j]) ** 2)
        return J

    # Calculate performance Index
    def calculate_performance_Index(self):
        avg = self.mean_data()
        performance_index = 0.0
        for i in range(len(self.data)):
            for k in range(self.number_of_clusters):
                small_value_of_optimal_C = np.linalg.norm(self.data[i] -
self.centers[k]) ** 2
                big_value_of_optimal_C = np.linalg.norm(self.centers[k] - avg)
** 2
                performance_index += (self.u[i, k] ** self.m) * (
                small_value_of_optimal_C - big_value_of_optimal_C)
        return performance_index

    # Calculate Entropy
    def calculate_Entropy(self):
        entropy = 0.0
        for i in range(len(self.data)):
            for k in range(self.number_of_clusters):
                entropy -= self.u[i, k] * np.log2(self.u[i, k])
        return entropy

    # Combine the last steps for clustering
    def fit(self):
        self.initialize(self.data, self.number_of_clusters)
        i = self.max_ind
        while self.dif >= self.error and i > 0:
            self.update_membership()
            self.update_centers()
            i -= 1

        self.J = self.calculate_cost()
        self.performance_index =  self.calculate_performance_Index()
        self.entropy = self.calculate_Entropy()

    # Defuzzification of the data's based on max membership principle
    def max_membership_defuzzification(self, data, u):
        label = []
        for i in range(len(data)):
            label.append(np.argmax(u[i], axis=0))
        return label
```

آرش حریرپوش
9731505

```
    # Calculate average of the data
    def mean_data(self):
        avg = []
        for i in range(self.data.shape[1]):
            avg.append(np.mean(self.data[:, i]))

        return np.array(avg)


    # Generate data for representing the regions of the clustering centers
    def generate_data(self):
        max_x = np.max(self.data[:, 0])
        max_y = np.max(self.data[:, 1])
        x = np.random.uniform(0, max_x, 5000)
        y = np.random.uniform(0, max_y, 5000)
        return x, y

    # Calculate membership of the Generated data
    def calculate_membership(self, data):
        u = np.zeros((len(data),self.number_of_clusters))
        for i in range(len(data)):
            for j in range(self.number_of_clusters):
                temp = 0
                d_ij = np.linalg.norm(data[i]-self.centers[j])
                for k in range(self.number_of_clusters):
                    power = 2/(self.m - 1)
                    d_ik = np.linalg.norm(data[i]-self.centers[k])
                    if d_ik != 0:
                        temp += (d_ij/d_ik)**power

                if temp !=0:
                    u[i, j] = 1 / temp
                else:
                    u[i, j] = 1
        return u

    # plot the Data-set Before and After clustering
    def plot(self):
        color_map = ['b', 'm', 'c', 'r', 'g', 'orange', 'y', 'k', 'Brown',
'ForestGreen']

        x = self.data[:, 0]
        y = self.data[:, 1]

        labels = self.max_membership_defuzzification(data=self.data, u=self.u)

        label_color = [color_map[l] for l in labels]
        center_color = [color_map[l] for l in range(len(self.centers))]
        fig = plt.figure(figsize=(6, 7))
        plt.subplot(2, 1, 1)

        plt.scatter(x, y)
        plt.title('Dataset-Before Clustering')
        plt.subplot(2, 1, 2)
        plt.scatter(x, y, marker='.', c=label_color)

        plt.scatter(self.centers[:, 0], self.centers[:, 1],
c=center_color,s=700, linewidths=1,alpha=0.3)
        plt.title('Dataset-After Clustering')
        plt.show()

    # plot the clustering regions
```

آرش حریرپوش
9731505

```
    def plot_clustering_regions(self):
        color_map = ['b', 'm', 'c', 'r', 'g', 'orange', 'y', 'k', 'Brown',
'ForestGreen']

        x, y = self.generate_data()
        data = np.vstack((x, y)).T
        u = self.calculate_membership(data=data)

        labels = self.max_membership_defuzzification(data=data, u=u)

        label_color = [color_map[l] for l in labels]
        center_color = [color_map[l] for l in range(len(self.centers))]
        plt.scatter(x, y, marker='.', c=label_color)

        plt.scatter(self.centers[:, 0], self.centers[:, 1],
c=center_color,s=700, linewidths=1,alpha=0.7, edgecolors='k')
        plt.title("Clustering-Regions")
        plt.show()

    # calculate the performance_index and entropy and cost for different number
of clusters and then plot the results
    def plot_fcp(self):
        fcp = []
        entropy = []
        J = []
        x = []
        for i in range(2, 11):
            self.number_of_clusters = i
            self.fit()
            fcp.append(self.performance_index/i)
            entropy.append(self.calculate_Entropy()/np.sqrt(i))
            J.append(self.calculate_cost()/np.sqrt(i))
            x.append(i)

        # Create 2x2 sub plots
        gs = gridspec.GridSpec(2, 2)
        fig = plt.figure(figsize=(9, 7))
        ax = plt.subplot(gs[0, 0]) # row 0, col 0
        plt.plot(x, fcp)
        plt.xlabel("Number of centers")
        plt.ylabel("Performance-Index")
        ax = plt.subplot(gs[0, 1])  # row 0, col 1
        plt.plot(x, entropy)
        plt.xlabel("Number of centers")
        plt.ylabel("Entropy")
        ax = plt.subplot(gs[1, :])  # row 1, span all columns
        plt.plot(x, J)
        plt.xlabel("Number of centers")
        plt.ylabel("Cost")
        plt.show()
```

آرش حریرپوش
9731505

و سپس به صورت زیر با استفاده از کلاس بالا خوشه بندی انجام می شود:

```
import pandas as pd
from FCM_C_Means import FCM

data = pd.read_csv("data/sample1.csv")

cluster = FCM(data=data, number_of_clusters=4, m=2, error=0.007,
random_state=42)

cluster.fit()

# plot the result
cluster.plot()
# plot the clustering regions
cluster.plot_clustering_regions()
# plot the performance_index and entropy and cost for different number of
clusters
cluster.plot_fcp()
```

(کد این برنامه در پوشه ای به نام Clustering و همچنین در فایل FCM_C_Means.ipynb به پیوست قرار داده شده است.)

(منابع: https://home.deib.polimi.it/matteucc/Clustering/tutorial_html/cmeans.html و https://sites.google.com/site/dataclusteringalgorithms/fuzzy-c-means-clustering-algorithm)