بنام خدا

جزوه هندسه ۱

مدرس: دکتر محمود محمدی روزبهانی

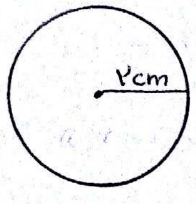
تهیه و تنظیم از :
امیر حسین مطلّبی

*** هزینه استفاده از این جزوه صلواتی بر محمّد و آل محمّد است ***

التماس دعا

(فصل ۱)

ترسیم های هندسی:

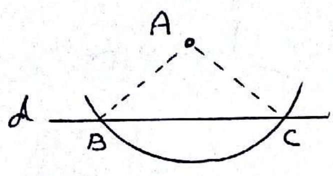


۱) نقطه‌ای مانند O را در صفحه در نظر بگیرید نقاطی را مشخص کنید که فاصله‌ی آنها از نقطه O برابر ۲cm باشد.

جواب: دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲cm رسم می‌کنیم تمام نقاط روی محیط دایره جواب مسئله هستند.

---

۲) نقطه A به فاصله‌ی ۱ cm از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله‌ی ۲cm از نقطه A باشند.

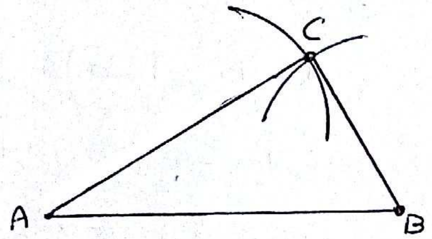


حل: دهانه پرگار را به اندازه ۲cm باز می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع ۲cm کمانی می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه B و C قطع کند. فاصله‌ی این دو نقطه از A برابر ۲cm است.

---

۳) مثلث ABC را با معلومات زیر رسم کنید:

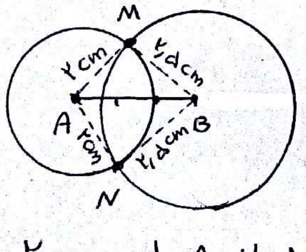
$AB = ۵cm$ $\quad AC = ۴cm$ $\quad BC = ۳cm$



حل: با خط کش پاره خط AB را به طول ۵cm رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع ۴cm کمانی می‌زنیم سپس به مرکز B و به شعاع ۳cm کمانی می‌زنیم این دو کمان همدیگر را در نقطه‌ای مانند C قطع می‌کنند. مثلث ABC رسم می‌شود.

---

۴) دو نقطه A و B به فاصله ۳cm از همدیگر قرار دارند. نقاطی را مشخص کنید که فاصلهٔ آن‌ها از A برابر ۲cm و از B برابر ۲/۵cm باشد. مسئله چند جواب دارد؟



حل: دهانهٔ پرگار را به اندازه ۲cm باز کرده و به مرکز A دایره‌ای می‌زنیم سپس دهانه پرگار را به اندازه ۲/۵cm باز کرده و به مرکز B دایره‌ای می‌زنیم این دو دایره همدیگر را در نقاط M و N قطع می‌کنند فاصله این دو نقطه از A برابر ۲cm و از B برابر ۲/۵cm می‌باشد (مسئله دو جواب دارد)

۵) جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر:

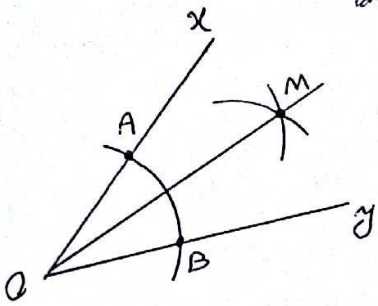
الف) دو جواب داشته باشد   ب) یک جواب داشته باشد   ج) جواب نداشته باشد

مسئله: «نقاط A و B به فاصله .... از هم هستند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر .... و از نقطه B برابر .... باشد»

حل الف) ۳cm _ ۴cm _ ۵cm

حل ب) ۳cm _ ۲cm _ ۵cm

حل ج) ۱cm _ ۲cm _ ۵cm

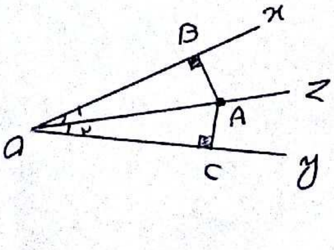


ترسیم نیمساز زاویه به کمک خط‌کش و پرگار:

زاویه‌ی xOy را در نظر می‌گیریم. دهانه پرگار را به اندازه دلخواه باز کرده و به مرکز O کمانی می‌زنیم تا نیم خطهای Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند. پس دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کرده یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B کمانی می‌زنیم تا دو کمان همدیگر را در نقطه‌ای مانند M قطع کنند O را به M وصل می‌کنیم تا نیمساز زاویه xOy رسم شود.

برخی خواص نیمساز:

۱) ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز یک زاویه باشد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

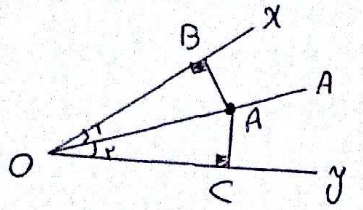


اثبات: زاویه xOy را در نظر می‌گیریم نیمساز Oz را رسم کرده و نقطه دلخواه A را روی Oz در نظر می‌گیریم از A دو عمود AB و AC را بر Ox و Oy رسم می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{ll}\hat{O}_1=\hat{O}_2 & (\text{نیمساز است } Oz)\\ OA=OA & \text{وتر مشترک}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{زاویه تند}]{\text{وتر و یک}} O\hat{A}B \cong O\hat{A}C \Rightarrow \boxed{AB=AC}$$

یعنی فاصله A از اضلاع زاویه برابر است.

۲) ثابت کنید اگر فاصله یک نقطه از دو ضلع زاویه برابر باشد، آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.



اثبات: می‌خواهیم ثابت کنیم OA نیمساز زاویه $x\hat{O}y$ است.

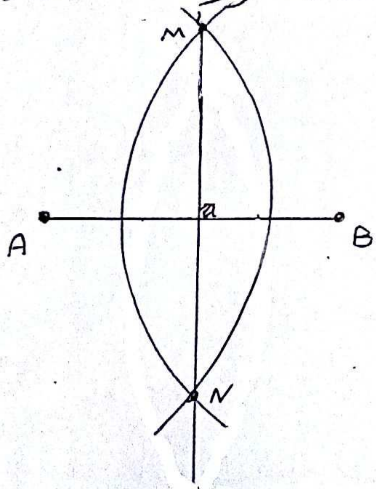
$$\left.\begin{array}{ll} OA = OA & \text{وتر مشترک} \\ AB = AC & \text{فرض مسئله} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{یک ضلع}]{\text{وتر و}} O\hat{A}B \cong O\hat{A}C \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

یعنی OA نیمساز زاویه $x\hat{O}y$ است.

نتیجه: هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

ترسیم عمود منصف یک پاره خط به کمک خط‌کش و پرگار:

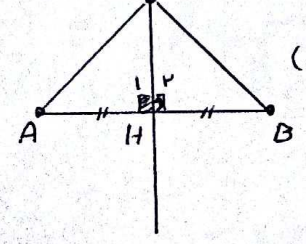
می‌دانیم عمود منصف هر پاره خط، خطی است که از وسط آن پاره خط گذشته و بر آن عمود باشد.



پاره خط دلخواه AB را رسم می‌کنیم. به مرکز A و B و شعاع بزرگتر از نصف AB کمانهایی می‌زنیم تا همدیگر را در دو نقطه M و N قطع کنند. M و N را به هم وصل می‌کنیم. خطی که از M و N می‌گذرد عمود منصف پاره خط AB است.

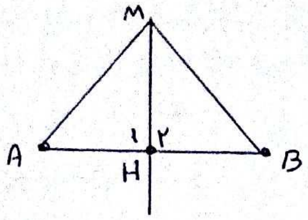
برخی خواص عمود منصف:

۱) اگر نقطه‌ای روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.



$$\left.\begin{array}{ll} AH = BH & (\text{وسط } AB \text{ } H) \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ & \\ MH = MH & \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حالت ض ز ض}} A\hat{M}H \cong B\hat{M}H \Rightarrow MA = MB$$

۲) اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.



اثبات: پاره خط AB و نقطه دلخواه M را طوری در نظر می‌گیریم که فاصله M از دو نقطه A و B برابر باشد M را به A و B و به وسط پاره خط AB وصل می‌کنیم.

فرض مسئله $AM = BM$

مشترک $MH = MH$

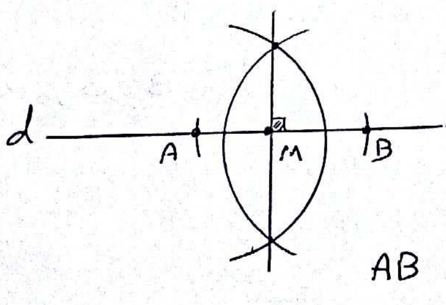
(H وسط AB) $AH = BH$

$$\left.\begin{array}{l} AM = BM \\ MH = MH \\ AH = BH \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ض ض ض)}]{\text{حالت}} \overset{\triangle}{AMH} \cong \overset{\triangle}{BMH} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 \\ \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{array}\right\} \Rightarrow$$ MH عمود منصف AB است.

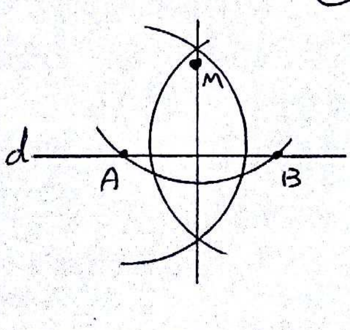
نتیجه: هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره خط باشد از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن:



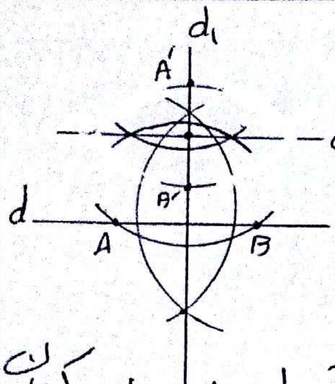
نقطه M را روی خط دلخواه d در نظر می‌گیریم به مرکز M و به شعاع دلخواه دو کمان هم اندازه در طرفین M می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. این عمود منصف از نقطه M می‌گذرد و بر خط d عمود است.

رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای غیر واقع بر آن:



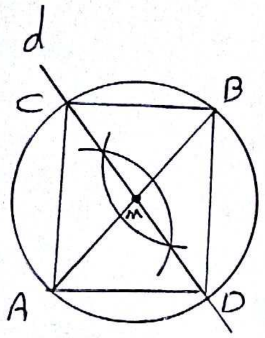
نقطه M را خارج خط d در نظر می‌گیریم. به مرکز M و به شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم. این عمود منصف از نقطه M می‌گذرد و بر خط d عمود است.

رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن:



نقطه M را خارج خط d در نظر می‌گیریم. به مرکز M و به شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا خط d را در دو نقطه A و B قطع کند. عمود منصف AB را رسم می‌کنیم که از M می‌گذرد این خط را d_1 می‌نامیم به مرکز M و به شعاع دلخواه دو کمان در طرفین M می‌زنیم تا خط d_1 را در دو نقطه A' و B' قطع کند عمود منصف $A'B'$ را رسم می‌کنیم و آنرا d_2 می‌نامیم خط d_2 بر d_1 عمود است و با خط d موازی است.

رسم مربعی که طول قطر آن داده شده باشد:



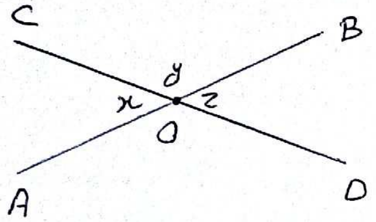
پاره خط AB را به اندازه قطر داده شده رسم می‌کنیم سپس عمود منصف AB را رسم می‌کنیم و آنرا d می‌نامیم این عمود منصف قطر AB را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمود منصف را در نقاط C و D قطع کند چهار ضلعی $ACBD$ ضلع‌هایش برابر و قطرهایش عمود منصف یکدیگرند پس مربع است.

استدلال :

۱) استدلال استقرایی : اگر با بررسی تعدادی حالت خاص به یک نتیجه کلی برسیم این نوع استدلال را استدلال استقرایی می‌نامند که نوعی روش از جزء به کل رسیدن است و اثبات ریاضی محسوب نمی‌شود.

۲) استدلال استنتاجی : روش نتیجه‌گیری بر مبنای حقایق است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم. همه اثبات‌های ریاضی استدلال استنتاجی هستند.

قضیه : ثابت کنید دو زاویه متقابل به رأس مساوی‌اند.

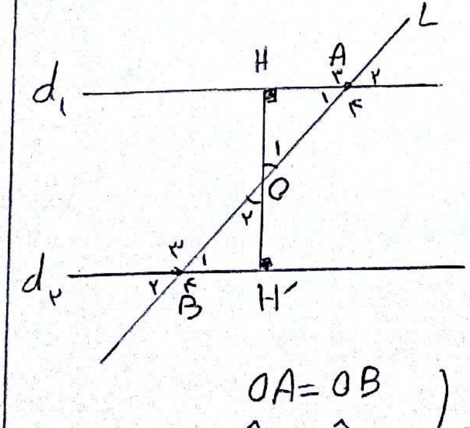


$A\hat{O}B = C\hat{O}D = 180^\circ$	فرض
$\hat{x} = \hat{z}$	حکم

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}+\hat{y}&=180^\circ\\ \hat{y}+\hat{z}&=180^\circ\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{x}+\hat{y}=\hat{y}+\hat{z} \Rightarrow \hat{x}=\hat{z}$$

قضیه خطوط موازی :

اگر دو خط موازی را خط موربی قطع کند چهار زاویه تند مساوی و چهار زاویه باز مساوی ایجاد می‌شود و هر زاویه تند با هر زاویه باز مکمل است.



$d_1 \parallel d_2$	فرض
$\hat{A}_1 = \hat{B}_1$	حکم

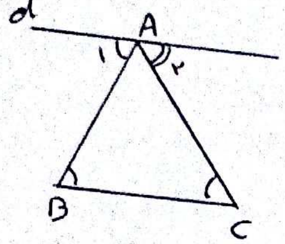
اثبات : از نقطه O وسط پاره خط AB عمودی بر d_1 و d_2 رسم می‌کنیم :

$$\left.\begin{aligned}OA&=OB\\ \hat{O}_1&=\hat{O}_2\\ \hat{H}&=\hat{H}'=90^\circ\end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{زاویه تند}]{\text{وتر و یک}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OBH'} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{B}_1$$

از طرفی چون $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ و $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ پس $\hat{A}_1=\hat{A}_2=\hat{B}_1=\hat{B}_2$

و مکمل‌های این زاویه‌ها نیز مساوی‌اند یعنی : $\hat{A}_3=\hat{A}_4=\hat{B}_3=\hat{B}_4$

قضیه: ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ است



فرض	مثلث دلخواه ABC
حکم	$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$

از رأس A خط d را موازی ضلع BC رسم می‌کنیم:

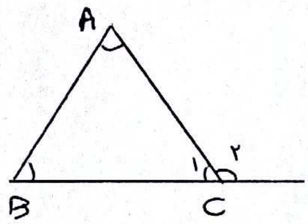
$$(d \parallel BC \,,\ AB \text{ مورّب}) \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{B} \quad ①$$

$$(d \parallel BC \,,\ AC \text{ مورّب}) \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{C} \quad ②$$

از طرفی $\hat{A}+\hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ$ ③

$$①, ②, ③ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه غیر مجاور داخلی.



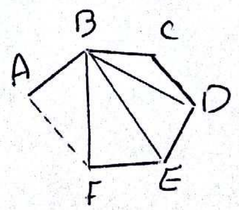
اثبات: ضلع BC را از طرف رأس C امتداد می‌دهیم

می‌خواهیم ثابت کنیم: $\hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{فرض}\quad \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_1=180^\circ \\ \hat{C}_1+\hat{C}_2=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_1+\hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}_1$$

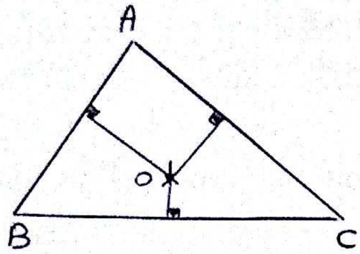
$$\Rightarrow \hat{C}_2=\hat{A}+\hat{B}$$

قضیه: ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدّب برابر است با: $(n-2)\times 180^\circ$



اثبات: n ضلعی ABCDE.... را درنظر می‌گیریم و قطرهایی که از رأس B می‌گذرند را رسم می‌کنیم به این ترتیب n ضلعی به $(n-2)$ مثلث تقسیم می‌شود و میدانیم مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است پس مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی برابر است با مجموع زاویه‌های داخلی $(n-2)$ تا مثلث یعنی: $(n-2)\times 180^\circ$

قضیه: ثابت کنید سه عمود منصف اضلاع هر مثلث همرأس اند.



اثبات: مثلث دلخواه $\overset{\triangle}{ABC}$ را در نظر می‌گیریم.

چون پاره خطهای AB و AC متقاطع هستند پس عمود منصف‌های آنها نیز همدیگر را در نقطه‌ای مانند O داخل مثلث قطع می‌کنند.

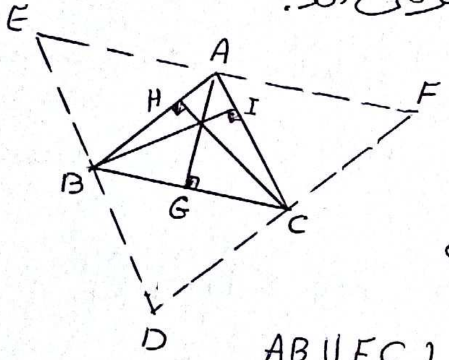
O روی عمود منصف AC است $\Rightarrow OA = OC$

O روی عمود منصف AB است $\Rightarrow OA = OB$

$\Rightarrow OB = OC \Rightarrow$ O روی عمود منصف BC است

پس O محل برخورد سه عمود منصف ضلع های مثلث ABC است و در نتیجه سه عمود منصف اضلاع هر مثلث همرسند.

قضیه: ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث همرس اند.



اثبات: مثلث دلخواه $\overset{\triangle}{ABC}$ را در نظر گرفته و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم می‌کنیم تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF تشکیل شود.

$\left.\begin{array}{l} AB \parallel FC \\ AF \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow$ متوازی الاضلاع $\overset{\square}{ABCF} \Rightarrow BC = AF$ (۱)

$\left.\begin{array}{l} AC \parallel BE \\ AE \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow$ متوازی الاضلاع $\overset{\square}{ACBE} \Rightarrow BC = AE$ (۲)

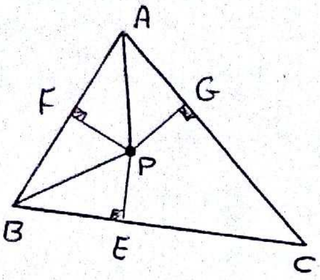
(۱), (۲) $\Rightarrow AF = AE \Rightarrow$ A وسط EF است (۳)

$\left.\begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array}\right\} \Rightarrow AG \perp EF$ (۴)

(۳), (۴) $\Rightarrow$ AG عمود منصف EF است

بهمین ترتیب $BI \perp DE$ و $CH \perp DF$ است بنابراین ارتفاع های مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ روی عمود منصف های اضلاع مثلث DEF هستند پس همرأس اند.

قضیه: ثابت کنید سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرأس اند.



اثبات: مثلث دلخواه $A\hat{B}C$ را مطابق شکل در نظر می‌گیریم

نیمسازهای زاویه‌های A و B همدیگر را در نقطه‌ای

مانند P قطع می‌کنند از P سه عمود بر اضلاع مثلث

$A\hat{B}C$ رسم می‌کنیم.

P روی نیمساز $\hat{A}$ $\Rightarrow PF = PG$ ①

P روی نیمساز $\hat{B}$ $\Rightarrow PF = PE$ ②

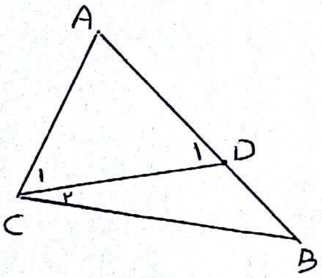
①, ② $\Rightarrow PG = PE \Rightarrow$ P روی نیمساز $\hat{C}$ قرار دارد

پس نقطه P محل برخورد سه نیمساز داخلی مثلث $A\hat{B}C$ است یعنی نیمسازهای

داخلی هر مثلث همرأس هستند.

قضیه: ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند زاویه روبرو به ضلع

بزرگتر، بزرگتر است از زاویه روبه رو به ضلع کوچکتر.



اثبات:

فرض	$AB > AC$
حکم	$\hat{C} > \hat{B}$

طبق فرض $AB > AC$ است نقطه D را روی ضلع

AB طوری انتخاب می‌کنیم که: $AC = AD$ پس مثلث $A\hat{C}D$ متساوی الساقین

است در نتیجه: $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ ① از طرفی $\hat{D}_1$ زاویه خارجی مثلث $B\hat{C}D$ است

پس: $\hat{D}_1 = \hat{B} + \hat{C}_2$ در نتیجه: $\hat{D}_1 > \hat{B}$ ②

$①, ② \Rightarrow \hat{C}_1 > \hat{B} \Rightarrow \hat{C} > B$

عکس قضیه:

اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم عکس قضیه بدست می‌آید که ممکن

است درست یا نادرست باشد.

مثال:

قضیه: اگر مثلثی قائمة الزاویه باشد آنگاه رابطه فیثاغورس در آن برقرار است.

عکس قضیه: اگر رابطه فیثاغورس در مثلثی برقرار باشد آن مثلث قائم الزاویه

است.

مثال:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می کنند

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند آنگاه آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

گزاره:

جمله ای است خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد هرچند که درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.

مثال) ۱) مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

۲) $5 < 3$

۳) زاویه بین دو خط عمود بر هم ۱۰۰ درجه است.

۴) هر چهارضلعی ۲ قطر دارد.

گزاره ساده:

گزاره هایی که فقط یک خبر را اعلام کنند گزاره های ساده نامیده می شوند

۱) فردا هوا بارانی است.

۲) عدد ۳ اول است.

۳) مجموع زاویه های داخلی هر ۴ ضلعی ۳۶۰ درجه است.

۴) همه اعداد اول فرد هستند.

گزاره های مرکب:

گزاره هایی که بیش از یک خبر را اعلام کنند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشند، گزاره های مرکب نامیده می شوند.

مثال) ۱) $5 > 3$ است و زاویه بین دو خط عمود بر هم ۹۰ درجه است.

۲) مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است و فردا هوا بارانی است.

جمله‌های زیر گزاره نیست:

۱) آیا فردا هوا بارانی است؟

۲) چه گل زیبایی!

۳) لباست را بپوش.

نقیض یک گزاره:

ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست نقیض یک گزاره جمله‌ای خبری است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است و معمولاً با «چنین نیست» شروع می‌شود.

مثال)

گزاره: a از b کوچکتر است.

نقیض گزاره: چنین نیست که a از b کوچکتر باشد یا a از b کوچکتر نیست یا a از b بزرگتر یا با آن مساوی است.

مثال)

گزاره: مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

نقیض گزاره: چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است یا مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن ۱۸۰ درجه نیست.

گزاره‌های شرطی:

گزاره‌هایی که در آنها خبر اعلام شده با یک شرط بیان شود گزاره‌های شرطی نامیده می‌شوند و معمولاً با «اگر» شروع و با «آنگاه» پایان می‌پذیرند.

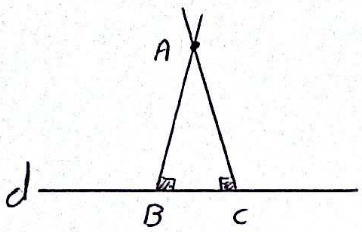
مثال) اگر فردا برف ببارد آنگاه امتحان برگزار نخواهد شد.

مثال) اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد آنگاه رابطه فیثاغورس در آن برقرار خواهد بود.

برهان خلف (برهان غیر مستقیم) :

برای اثبات برخی قضیه ، فرض می کنیم حکم نادرست است (فرض خلف) و به یک تناقض (نتیجه نادرست) می رسیم و می گوئیم فرض خلف باطل و حکم برقرار است . این نوع اثبات را اثبات به روش برهان خلف می نامند .

قضیه : ثابت کنید از یک نقطه غیر واقع بر یک خط نمی توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد .

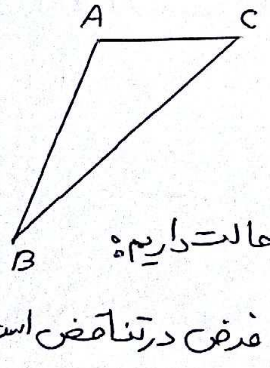


فرض	A نقطه‌ای غیر واقع بر خط d
حکم	از A نمی توان بیش از یک عمود بر d رسم کرد .

اثبات : فرض کنیم حکم نادرست باشد (فرض خلف)

یعنی از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کنیم در این صورت مطابق شکل این دو عمود خط d را در دو نقطه A و B قطع می کنند و مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ دارای دو زاویه قائمه بوده و مجموع زاویه های داخلی آن بزرگتر از ۱۸۰ درجه خواهد بود و این تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است

قضیه : اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند ، ضلع مقابل به زاویه بزرگتر ، بزرگتر است از ضلع روبرو به زاویه کوچکتر .



فرض	$\hat{A} > \hat{B}$
حکم	$BC > AC$

اثبات : فرض کنیم $BC \ngtr AC$ (فرض خلف) در اینصورت دو حالت داریم :

حالت اول : $BC < AC$ در این صورت $\hat{A} < \hat{B}$ است و این با فرض در تناقض است

حالت دوم : $BC = AC$ است در این صورت $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الساقین است و $\hat{A} = \hat{B}$ خواهد بود و این با فرض در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم درست است .

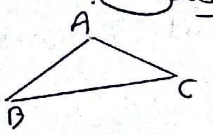
قضیه‌های دو شرطی:

۱ اگر یک قضیه و عکس آن درست باشد آن را یک قضیه دو شرطی می‌نامند و با نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و تنها اگر) بیان می‌شوند.

مثال) قضیه دو شرطی: یک مثلث متساوی الاضلاع است اگر و تنها اگر هر زاویه داخلی آن ۶۰ درجه باشد.

$\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی الاضلاع $\Leftrightarrow$ هر زاویه داخلی 60°

قضیه دو شرطی: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر و بر عکس:



$BC > AB \Leftrightarrow \hat{A} > \hat{C}$

قضیه دو شرطی: یک نقطه روی عمود منصف پاره خط است اگر و تنها اگر از دو سر آن پاره خط به یک فاصله باشد.

مثال نقض:

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است مثال نقض می‌گویند.

مثال) برای هر کدام از احکام کلی زیر که نادرست است مثال نقض بیاورید.

۱) همه اعداد صحیح مثبت اند.

نادرست - زیرا ۳- عدد صحیح است و مثبت نیست.

۲) همه اعداد اول فرد هستند.

نادرست - زیرا ۲ عدد اول است و فرد نیست.

۳) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهار ضلعی ۳۶۰ درجه است. درست.

۴) هر چهار ضلعی که ضلع هایش برابر باشد مربع است.

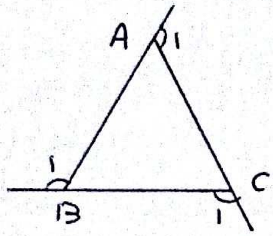
نادرست - زیرا لوزی چهار ضلعش برابر است و مربع نیست.

۵) به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار n^2+n+41 عددی اول است.

نادرست - زیرا به ازای $n=41$ حاصل عبارت بر ۴۱ بخشپذیر است و مرکب است.

(تمرینات اضافی)

قضیه: ثابت کنید مجموع زاویه های خارجی هر مثلث 360° است



فرض	$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$
حکم	$\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{C}_1=360^\circ$

اثبات:

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A}$$
$$\hat{B}_1 = 180^\circ - \hat{B} \quad +$$
$$\hat{C}_1 = 180^\circ - \hat{C} \quad +$$

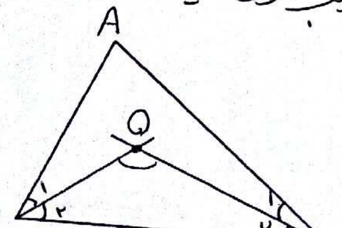
$$\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{C}_1 = 540^\circ - (\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$$

قضیه: ثابت کنید مجموع زاویه های خارجی هر n ضلعی محدب 360° است

اثبات: هر n ضلعی n رأس دارد و در هر رأس مجموع زاویه های داخلی و خارجی برابر 180° است پس مجموع زاویه های داخلی و خارجی هر n ضلعی برابر $n\times180^\circ$ است در نتیجه:

مجموع زاویه های خارجی = (مجموع زاویه های داخلی و خارجی) − (مجموع زاویه های داخلی) $= n\times180^\circ - (n-2)\times180^\circ = 360^\circ$

قضیه: ثابت کنید در مثلث $A\hat{B}C$ زاویه حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر است با:



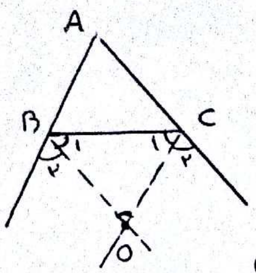
$$\hat{O} = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

اثبات: نیمسازهای دو زاویه داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم می کنیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=\frac{180^\circ}{2} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}_2+\hat{C}_2=90^\circ \Rightarrow$$
$$\hat{B}_2+\hat{C}_2 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

از طرفی: $\hat{O}+\hat{B}_2+\hat{C}_2=180^\circ \Rightarrow \hat{O}+90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}=180^\circ \Rightarrow \hat{O}=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$

قضیه: ثابت کنید در مثلث $A\hat{B}C$ زاویه حاصل از برخورد نیمسازهای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برابر است با: $\hat{O} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$



اثبات: نیمسازهای خارجی دو زاویه $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند:

$$\text{(خارجی)}\ \hat{B}_1+\hat{B}_2 = \hat{A}+\hat{C} \xrightarrow{\hat{B}_1=\hat{B}_2} 2\hat{B}_1 = \hat{A}+\hat{C} \Rightarrow \hat{B}_1 = \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}$$

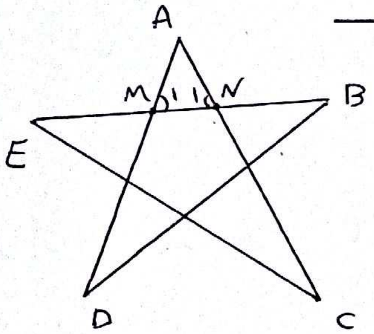
$$\text{(خارجی)}\ \hat{C}_1+\hat{C}_2 = \hat{A}+\hat{B} \xrightarrow{\hat{C}_1=\hat{C}_2} 2\hat{C}_1 = \hat{A}+\hat{B} \Rightarrow \hat{C}_1 = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$$

$$\text{از طرفی}:\ \hat{B}_1+\hat{C}_1+\hat{O}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}+\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}+\hat{O}=180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}+180}{2}+\hat{O}=180$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A}}{2}+90^\circ+\hat{O}=180^\circ \Rightarrow \hat{O}=180^\circ-90^\circ-\frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \boxed{\hat{O}=90-\frac{\hat{A}}{2}}$$

قضیه: ثابت کنید در شکل مقابل:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}+\hat{E}=180^\circ$$

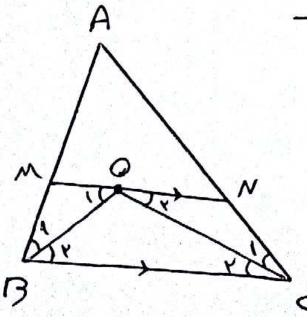


$$\overset{\triangle}{MBD}:\ \text{خارجی}\ \hat{M}_1=\hat{B}+\hat{D}$$

$$\overset{\triangle}{NCE}:\ \text{خارجی}\ \hat{N}_1=\hat{C}+\hat{E}$$

$$\text{از طرفی}:\ \hat{A}+\hat{M}_1+\hat{N}_1=180^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{D}+\hat{C}+\hat{E}=180^\circ$$

قضیه: در مثلث دلخواه ABC، OB نیمساز زاویه $\hat{B}$ و OC نیمساز زاویه $\hat{C}$ و MN∥BC است ثابت کنید:

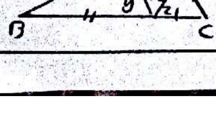


$$\text{محیط}\ \overset{\triangle}{AMN}=AB+AC$$

$$\left.\begin{array}{l}(MN \parallel BC \text{ و مورب } OB)\ \hat{O}_1=\hat{B}_2 \\ \text{از طرفی}\ \hat{B}_1=\hat{B}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_1=\hat{B}_1 \Rightarrow \underset{\text{متساوی الساقین}}{O\hat{M}B} \Rightarrow OM=MB$$

$$\left.\begin{array}{l}(MN \parallel BC \text{ و مورب } OC)\ \hat{O}_2=\hat{C}_2 \\ \text{از طرفی}\ \hat{C}_1=\hat{C}_2\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_2=\hat{C}_1 \Rightarrow \underset{\text{متساوی الساقین}}{O\hat{N}C} \Rightarrow ON=NC$$

$$\text{محیط}\ \overset{\triangle}{AMN}=AM+OM+ON+AN=AM+MB+NC+AN=AB+AC$$



ثابت کنید: $\hat{x}=45^\circ$

$$y+y+\hat{B}=180^\circ \Rightarrow y=\frac{180-B}{2} \qquad z+z+C=180^\circ \Rightarrow z=\frac{180-C}{2}$$

$$y+z=\frac{180-B}{2}+\frac{180-C}{2}=\frac{360-90}{2}=\frac{270}{2}=135 \Rightarrow \boxed{x=45^\circ}$$

$$x=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$

فرمول کلی

فصل ۲

ویژگی های تناسب:

۱) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$ $\quad b,d\neq 0$ (طرفین وسطین کردن)

مثال) $\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۱۲} \Leftrightarrow ۲\times ۱۲=۳\times ۸$

۲) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ $\quad a,b,c,d\neq 0$ (معکوس کردن طرفین تناسب)

مثال) $\frac{۵}{۷}=\frac{۱۰}{۱۴} \Rightarrow \frac{۷}{۵}=\frac{۱۴}{۱۰}$

۳) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{b}=\frac{c}{a} \\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \end{cases}$ $\quad a,b,c,d\neq 0$ (تعویض های طرفین یا وسطین)

مثال) $\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۱۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۵}=\frac{۴}{۲}$

۴) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ $\quad b,d\neq 0$ (ترکیب نسبت در صورت)

مثال) $\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶} \Rightarrow \frac{۲+۳}{۳}=\frac{۴+۶}{۶} \Rightarrow \frac{۵}{۳}=\frac{۱۰}{۶}$

۵) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$ $\quad b,d\neq 0$ (ترکیب نسبت در مخرج)

مثال) $\frac{۳}{۴}=\frac{۶}{۸} \Rightarrow \frac{۳}{۳+۴}=\frac{۶}{۶+۸} \Rightarrow \frac{۳}{۷}=\frac{۶}{۱۴}$

۶) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ $\quad b,d\neq 0$ (تفصیل نسبت در صورت)

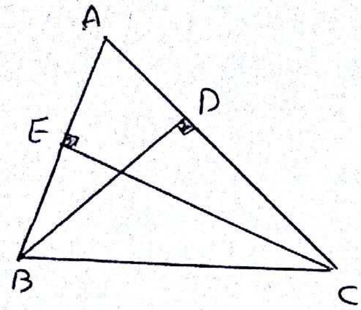
$\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۶} \Rightarrow \frac{۳-۲}{۲}=\frac{۹-۶}{۶} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}$

۷) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$ $\quad b,d\neq 0$ (تفصیل نسبت در مخرج)

مثال) $\frac{۱۰}{۳}=\frac{۲۰}{۶} \Rightarrow \frac{۱۰}{۱۰-۳}=\frac{۲۰}{۲۰-۶} \Rightarrow \frac{۱۰}{۷}=\frac{۲۰}{۱۴}$

۸) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\dots=\frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$ $\quad \frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲+۴+۶}{۳+۶+۹}=\frac{۱۲}{۱۸}$

قضیه: ثابت کنید در هر مثلث، نسبت اندازه های هر دو ضلع با عکس نسبت ارتفاع های وارد بر آنها برابر است.



فرض	$CE \perp AB$ و $BD \perp AC$
حکم	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}$

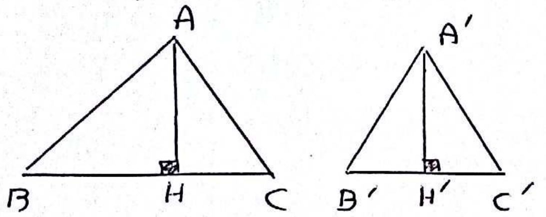
$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \times AB \times CE \quad ①$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \times AC \times BD \quad ②$$

$$①, ② \Rightarrow \frac{1}{2} \times AB \times CE = \frac{1}{2} \times AC \times BD \Rightarrow AB \cdot CE = AC \cdot BD$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE}}$$

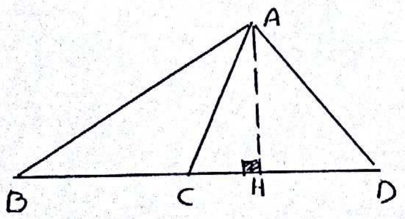
قضیه: هرگاه اندازهٔ ارتفاع های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحتهای آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده هایی است که این ارتفاع ها بر آنها وارد شده است.



فرض	$AH = A'H'$
حکم	$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}} = \frac{BC}{B'C'}$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \\ S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}} = \frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot A'H' \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH}{\frac{1}{2} \cdot B'C' \cdot A'H'} = \frac{BC}{B'C'}$$

قضیه: اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و قاعدهٔ مقابل به این رأس آنها روی یک خط راست باشد نسبت مساحتهای آنها برابر با نسبت اندازهٔ قاعده های آنهاست.

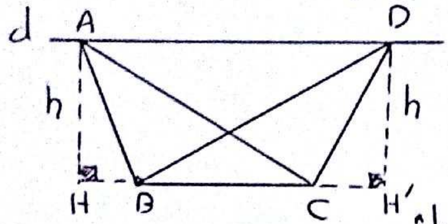


فرض	A رأس مشترک $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{ACD}$ است
حکم	$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ACD}}} = \frac{BC}{CD}$

اثبات: ارتفاع AH را رسم می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{ABC}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH \\ S_{\overset{\triangle}{ACD}} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AH \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{ACD}}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH}{\frac{1}{2} \cdot CD \cdot AH} = \frac{BC}{CD}$$

قضیه: اگر دو مثلث قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و راس های روبروی این قاعدهٔ آنها روی یک خط، موازی این قاعده باشند، این مثلث ها هم مساحت اند



فرض: $d \parallel BC$

حکم: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC}$

اثبات: می دانیم اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است پس AH بر AD نیز عمود است در نتیجه چهارضلعی $AHH'D$ مستطیل است و $AH = DH' = h$

$$\left.\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} BC \cdot h \\ S_{\triangle DBC} &= \frac{1}{2} BC \cdot h \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC}$$

مثال) در هر یک از عبارتهای زیر، مقادیر x و y را پیدا کنید.

الف) $\frac{-7}{3x+5} = \frac{2}{2-2x} = \frac{y+1}{4}$

$\frac{-7}{3x+5} = \frac{2}{2-2x} \Rightarrow -14 + 14x = 6x + 10$

$\Rightarrow 8x = 24 \Rightarrow \boxed{x = 3}$

$\frac{2}{2-2(3)} = \frac{y+1}{4} \Rightarrow \frac{2}{-4} = \frac{y+1}{4}$

$\Rightarrow y + 1 = -2 \Rightarrow \boxed{y = -3}$

ب) $\frac{1}{y} = \frac{x-1}{9} = \frac{25}{x-1}$

$\frac{x-1}{9} = \frac{25}{x-1} \Rightarrow (x-1)^2 = 25 \times 9$

$\Rightarrow x - 1 = \pm(5 \times 3) = \pm 15 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 \\ x = -14 \end{cases}$

$x = 16 \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{16-1}{9} \Rightarrow y = \frac{3}{5}$

$x = -14 \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{-14-1}{9} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$

تعریف واسطه (میانگین) هندسی:

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب شامل دو عدد برابر باشند یعنی $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ با طرفین وسطین کردن تناسب نتیجه می شود: $b^2 = ac$

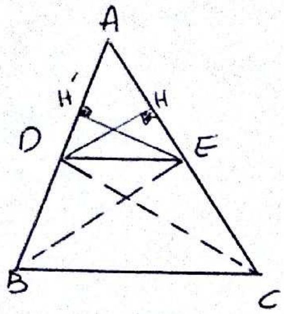
در این صورت b را واسطه هندسی بین a و c می نامند

مثال) بین ۹ و ۲۵ یک واسطه هندسی بنویسید.

$b^2 = 9 \times 25 \Rightarrow b = \sqrt{9 \times 25} \Rightarrow b = 3 \times 5 \Rightarrow \boxed{b = 15}$

قضیه تالس (قضیه جزئی):

اگر خطی به موازات یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند بر روی آن دو ضلع پاره خط‌های متناسب ایجاد می‌کند.



فرض	$DE \parallel BC$
حکم	$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

حل: DH هم ارتفاع مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ است و هم ارتفاع مثلث $\overset{\triangle}{DEC}$ پس:

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{DEC}}} = \frac{AE}{EC} \quad (1)$$

EH' هم ارتفاع مثلث $\overset{\triangle}{ADE}$ است و هم ارتفاع مثلث $\overset{\triangle}{DBE}$ پس:

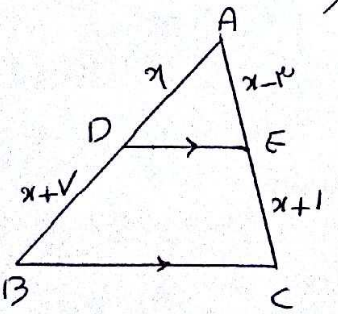
$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ADE}}}{S_{\overset{\triangle}{DBE}}} = \frac{AD}{DB} \quad (2)$$

از طرفی DE قاعده مشترک دو مثلث $\overset{\triangle}{DEC}$ و $\overset{\triangle}{DBE}$ است و چون ارتفاع‌های این دو مثلث برابرند پس:

$$S_{\overset{\triangle}{DEC}} = S_{\overset{\triangle}{DBE}} \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \boxed{\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{AD}{AD+DB} = \frac{AE}{AE+EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \\ \frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC} \end{cases}$$

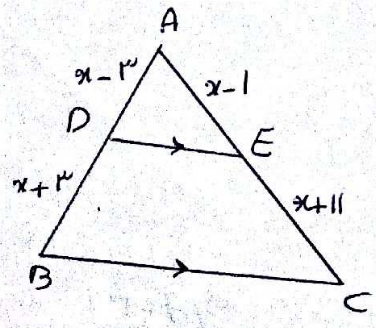
مثال) مقدار x را بیابید.



$$\frac{x}{x+7} = \frac{x-3}{x+1} \Rightarrow x(x+1) = (x-3)(x+7)$$

$$\Rightarrow x^2+x = x^2+4x-21 \Rightarrow x = 4x-21 \Rightarrow 3x = 21$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 7}$$

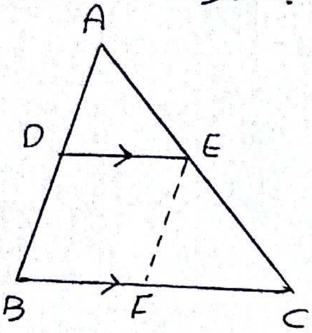


$$\frac{x-3}{x+3} = \frac{x-1}{x+11} \Rightarrow (x-3)(x+11) = (x-1)(x+3)$$

$$\Rightarrow x^2+8x-33 = x^2+2x-3 \Rightarrow 6x = 30 \Rightarrow \boxed{x = 5}$$

تعمیم قضیه تالس (قضیه کلی):

اگر خطی به موازات یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند با آن دو ضلع مثلثی می‌سازد که اضلاعش با اضلاع مثلث اصلی متناسب اند.



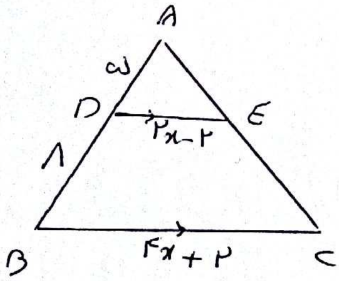
فرض	$DE \parallel BC$
حکم	$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

اثبات: از نقطه E پاره خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم چهارضلعی $DEFB$ متوازی الاضلاع است (چون $DE \parallel BF$ و $DB \parallel EF$) پس: $DE=BF$ و $DB=EF$

$$\overset{\triangle}{ABC}: DE \parallel BC \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق قضیه}} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC} \quad (1)$$

$$\overset{\triangle}{CAB}: EF \parallel AB \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{طبق قضیه}} \frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC} \quad (2)$$

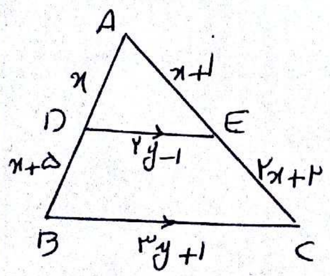
$$(1),(2) \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{BF}{BC} \xrightarrow{BF=DE} \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$



مثال) مقدار x را بدست آورید:

$$\frac{2x-2}{4x+2}=\frac{5}{13} \Rightarrow 26x-26=20x+10$$

$$\Rightarrow 6x=36 \Rightarrow \boxed{x=6}$$



مثال) مقادیر x و y را بیابید.

$$\frac{x}{x+5}=\frac{x+1}{2x+2} \Rightarrow 2x^2+2x=x^2+6x+5$$

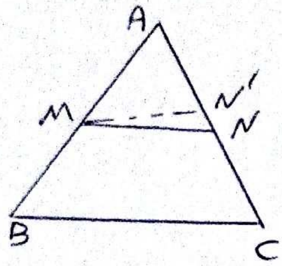
$$\Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x-5)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 & \text{ق ق} \\ x=-1 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\frac{x}{x+x+5}=\frac{2y-1}{3y+1} \Rightarrow \frac{5}{15}=\frac{2y-1}{3y+1} \Rightarrow 15y+5=30y-15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15y=20 \Rightarrow y=\frac{4}{3}$$

عکس قضیه تالس:

اگر خطی چنان رسم شود که دو ضلع مثلثی را قطع کند و بر روی آن دو ضلع پاره خط‌های متناسب ایجاد کند آن خط با ضلع سوم موازی است.



فرض	$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$
حکم	$MN \parallel BC$

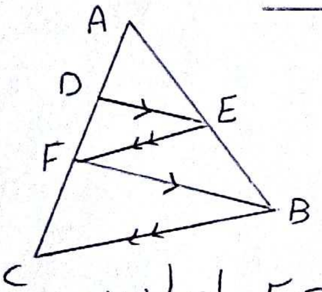
اثبات با برهان خلف: فرض کنیم $MN \nparallel BC$ (فرض خلف)

پس از نقطه M پاره خط MN' را موازی BC رسم می‌کنیم

طبق قضیه تالس:

$$\left.\begin{array}{l} MN' \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN'}{AC} \\ \text{فرض}: \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{AN'}{AC} \Rightarrow AN = AN'$$

پس N بر N' منطبق است و MN همان MN' است که موازی BC است.



تمرین: در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ داریم: $DE \parallel FB$ و $BC \parallel EF$

الف) ثابت کنید: $\frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$

ب) ثابت کنید $AF^2 = AD.AC$

ج) اگر $AE=5$ و $EB=2$ و $AD=3$ باشد طول پاره خط FC را بیابید.

حل الف)

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABF}: DE \parallel BF \Rightarrow \dfrac{AD}{DF} = \dfrac{AE}{EB} \\ \overset{\triangle}{ABC}: EF \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AF}{FC} = \dfrac{AE}{EB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{DF} = \frac{AF}{FC}$$

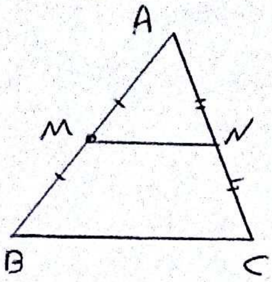
حل ب)

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ABF}: DE \parallel BF \Rightarrow \dfrac{AD}{AF} = \dfrac{AE}{AB} \\ \overset{\triangle}{ABC}: EF \parallel BC \Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AE}{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AD}{AF} = \frac{AF}{AC} \Rightarrow AF^2 = AC \times AD$$

$\overset{\triangle}{ABF}$: تالس: $\frac{AD}{DF} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{3}{DF} = \frac{5}{2} \Rightarrow DF = 1{,}2$

$\overset{\triangle}{ABC}$: تالس: $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow \frac{4{,}2}{FC} = \frac{5}{2} \Rightarrow FC = \frac{8{,}4}{5} = 1{,}68$

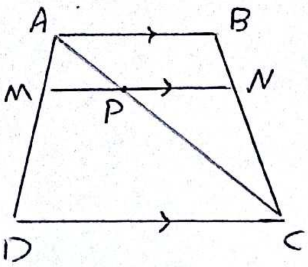
تمرین: ثابت کنید در هر مثلث پاره خط که وسطهای دو ضلع مثلث را بهم وصل می کند با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.



$$\left.\begin{array}{l} AB \text{ وسط } M \Rightarrow AM = MB \Rightarrow \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{2} \\ AC \text{ وسط } N \Rightarrow AN = NC \Rightarrow \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \xRightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس}} MN \parallel BC$$

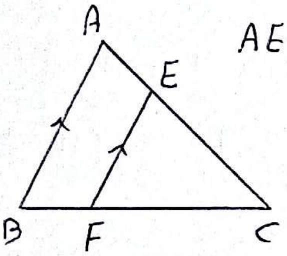
$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC$$

تمرین: در ذوزنقه مقابل $AB \parallel MN \parallel DC$ است ثابت کنید: $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{BN}{NC}$



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{ACD}: MP \parallel DC \Rightarrow \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{AP}{PC} \\ \overset{\triangle}{ABC}: PN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{AP}{PC} = \dfrac{BN}{NC} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$$

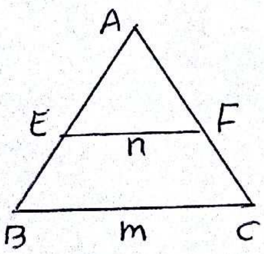
تمرین: در شکل مقابل $AB \parallel EF$ و $BF = m+1$ و $AE = 3m+1$ و $\dfrac{EC}{FC} = \dfrac{5}{3}$ می باشد. طول پاره خط AE چقدر است؟



$$AB \parallel EF \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{EC}{AE} = \frac{FC}{BF} \Rightarrow \frac{EC}{FC} = \frac{AE}{BF} \Rightarrow \frac{5}{3} = \frac{3m+1}{m+1}$$

$$\Rightarrow 9m+3 = 5m+5 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}} \qquad AE = 3m+1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)+1 = \frac{5}{2}$$

تمرین: در شکل مقابل $EF \parallel BC$ و $AB = 12$ و $BC = m$ و $EF = n$ می باشد اگر $2m^2 - mn - 3n^2 = 0$ باشد. طول پاره خط AE چقدر است؟



$$2m^2 - mn - 3n^2 = 0 \Rightarrow 2m^2 + 2mn - 3mn - 3n^2 = 0$$

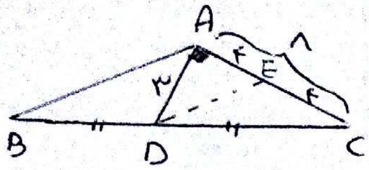
$$\Rightarrow 2m(m+n) - 3n(m+n) = 0 \Rightarrow (m+n)(2m-3n) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m+n = 0 & \text{غیرممکن} \\ 2m - 3n = 0 \Rightarrow 2m = 3n \Rightarrow \boxed{\dfrac{n}{m} = \dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

$$EF \parallel B \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{AE}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{AE = 8}$$

تمرین: در شکل مقابل، طول ضلع AB را بدست آورید.

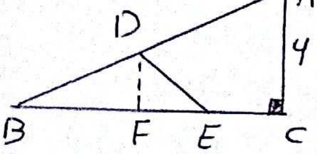


حل: D را به وسط AC یعنی E وصل می کنیم

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow \boxed{DE = 5}$$

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DB} = 1 \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس}} DE \parallel AB \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = 10$$

تمرین: در شکل مقابل $AC=6$ و $BC=12$ می باشد اگر $\frac{EC}{BE} = \frac{1}{3}$ و D وسط ضلع AB باشد طول پاره خط DE را بیابید.

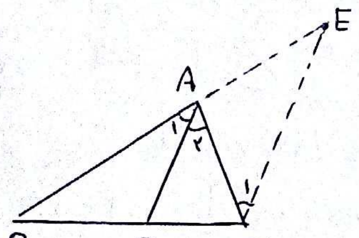


$$\frac{EC}{BE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} EC = k \\ BE = 3k \end{cases} \Rightarrow 3k + k = 12 \Rightarrow \boxed{k=3} \Rightarrow \begin{cases} EC = 3 \\ BE = 9 \end{cases}$$

D را به وسط BC یعنی F وصل می کنیم چون DF وسط دو ضلع ضلع AB و BC را بهم وصل می کند پس موازی AC و مساوی نصف آن است یعنی $DF=3$ می دانیم اگر خطی بر یکی از دو خط موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است پس: $\hat{F} = 90^\circ$ در نتیجه $\overset{\triangle}{DEF}$ قائم الزاویه است.

$$DE^2 = DF^2 + FE^2 = 3^2 + 3^2 = 9+9 = 18 \Rightarrow DE = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

قضیه: در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می کند.



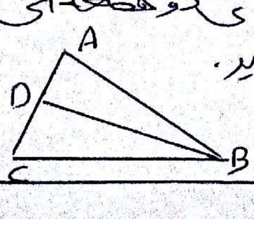
فرض	$\hat{A}_1 = \hat{A}_2$
حکم	$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

اثبات: مطابق شکل از نقطه C، خطی موازی با نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در نقطه E قطع کند، طبق خاصیت خطوط موازی با یک مورب داریم:

$$\hat{A}_1 = \hat{E} \ , \ \hat{A}_2 = \hat{C}_1 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{C}_1 = \hat{E} \Rightarrow AE = AC$$

$$\overset{\triangle}{EBC}: AD \parallel EC \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

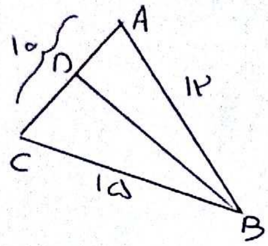
مثال) در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$، $AB=7$، $AC=5$ و $BC=8$ است. طولهای دو قطعه‌ای که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد می کند را بدست آورید.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{15}{8} \Rightarrow$$

$\frac{5}{CD}=\frac{15}{8} \Rightarrow CD=\frac{8}{3}$ ، $AD=AC-CD=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$

مثال) در شکل مقابل نیمساز زاویه B دو قطعه روی AB ایجاد می کند طول آن دو قطعه را بیابید.



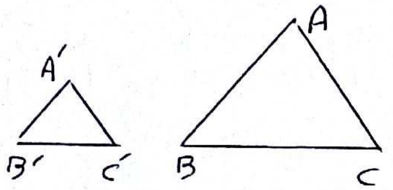
$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{AD}{CD}=\frac{12}{15} \Rightarrow \frac{AD+CD}{CD}=\frac{12+15}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{CD}=\frac{27}{15} \Rightarrow \frac{10}{CD}=\frac{27}{15} \Rightarrow CD=\frac{50}{9}$$

$$AD=AC-CD=10-\frac{50}{9}=\frac{40}{9}$$

تشابه مثلث‌ها:

دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ را متشابه می گویند هرگاه همه زاویه های آنها باهم برابر و اندازه های ضلع های آنها متناسب باشند و برعکس:

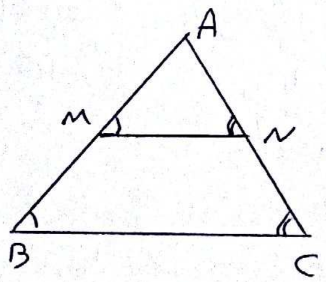


$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A'} ,\ \hat{B}=\hat{B'} ,\ \hat{C}=\hat{C'} \\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\end{array}\right\} \Leftrightarrow \overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

نسبت اندازه های اضلاع نظیر هم در دو مثلث را نسبت تشابه می گوئیم

قضیه اساسی تشابه مثلث‌ها:

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند با آن دو ضلع مثلثی می سازد که با مثلث اصلی متشابه است



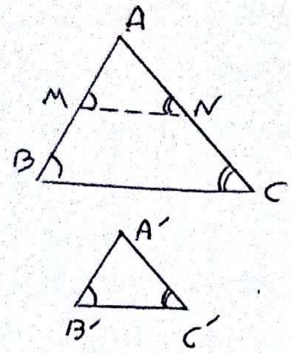
فرض	$MN \parallel BC$
حکم	$\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

$$MN \parallel BC \xRightarrow[\text{موازی}]{\text{قضیه خطوط}} \hat{M}=\hat{B} ,\ \hat{N}=\hat{C} \quad (1)$$

$$MN \parallel BC \xRightarrow{\text{تالس}} \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

قضیه ۱ : اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر هم اندازه باشند آن دو مثلث متشابه اند.



فرض	$\hat{B}=\hat{B'}\ ,\ \hat{C}=\hat{C'}$
حکم	$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

اثبات : روی ضلع های AB و AC پاره خط های AM و AN را به ترتیب هم اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می کنیم:

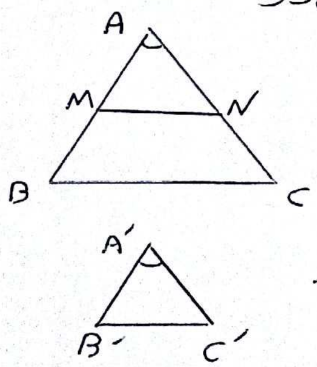
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A'}+\hat{B'}+\hat{C'}=180 \xrightarrow[\hat{C}=\hat{C'}]{\hat{B}=\hat{B'}} \hat{A}=\hat{A'}$$

$$\left.\begin{array}{l} AM=A'B' \\ AN=A'C' \\ \hat{A}=\hat{A'} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} MN=B'C' \\ \hat{M}=\hat{B'} \\ \hat{N}=C' \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{M}=\hat{B'} \\ \hat{B}=\hat{B'} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}=\hat{B} \Rightarrow MN \parallel BC$$

طبق قضیه اساسی تشابه $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ در نتیجه : $\overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

قضیه ۲ : اگر اندازه های دو ضلع از مثلثی با اندازه های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه بین آنها هم اندازه باشند آن دو مثلث متشابه اند.



فرض	$\hat{A}=\hat{A'}\ ,\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$
حکم	$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

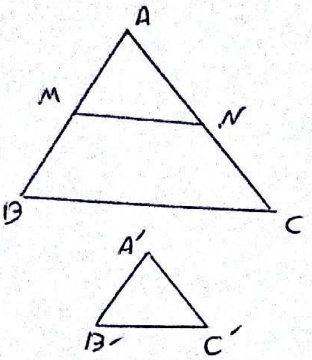
اثبات : روی ضلع های AB و AC پاره خط های AM و AN را به ترتیب هم اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} AM=A'B' \\ AN=A'C' \\ \hat{A}=\hat{A'} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{A'B'C'} \cong \overset{\triangle}{AMN} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{M}=\hat{B'}=\hat{B} \\ \hat{N}=\hat{C'}=\hat{C} \end{array}\right. \quad (1)$$

$$\text{فرض}\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \xrightarrow[\text{تالس}]{\text{عکس}} MN \parallel BC \quad (2)$$

از رابطه (۱) نتیجه می شود که زاویه های نظیر هم برابرند و از رابطه (۲) طبق قضیه تالس نتیجه می شود اضلاع متناسبند پس طبق قضیه اساسی تشابه دو مثلث $A\hat{B}C$ و $A'\hat{B'}C'$ متشابهند.

قضیه ۳: اگر اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند آن دو مثلث متشابه‌اند.



فرض	$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$
حکم	$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

اثبات: روی AB و AC پاره خطهای AM و AN را به ترتیب هم‌اندازه با $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم:

فرض: $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC} \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \xRightarrow[\text{قضیه تالس}]{\text{عکس}} MN \parallel BC$

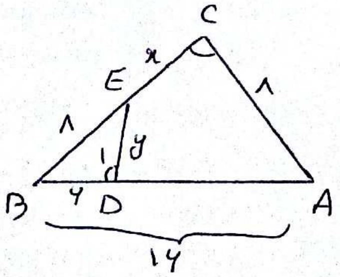
طبق قضیه اساسی تشابه $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AMN}$ (۱)

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{MN}{BC} \\ \text{طبق فرض } \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC} \end{array}\right\} \Rightarrow MN=B'C'$$

$$\left.\begin{array}{l} AM=A'B' \\ AN=A'C' \\ MN=B'C' \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ض ض ض}} \overset{\triangle}{AMN} \cong \overset{\triangle}{A'B'C'} \quad (۲)$$

$(۱), (۲) \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$

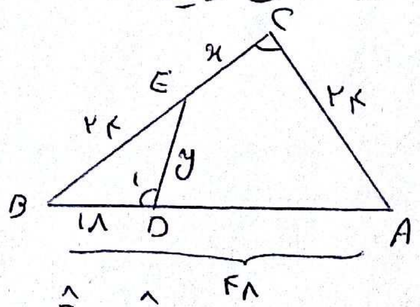
تمرین: در شکلهای زیر $\hat{D}_1=\hat{C}$ طول x و y را بیابید.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_1=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{BDE} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{x+۸}=\frac{y}{۸}$$

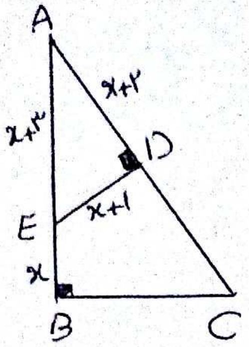
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۸}{۱۲}=\frac{۴}{x+۸} \Rightarrow x=۴ \\ \frac{۸}{۱۲}=\frac{y}{۸} \Rightarrow y=۴ \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_1=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{BDE} \sim \overset{\triangle}{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۴}{۴۸}=\frac{۱۸}{۲۴+x}=\frac{y}{۲۴}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۲۴}{۴۸}=\frac{۱۸}{۲۴+x} \Rightarrow x=۱۲ \\ \frac{۲۴}{۴۸}=\frac{y}{۲۴} \Rightarrow y=۱۲ \end{cases}$$



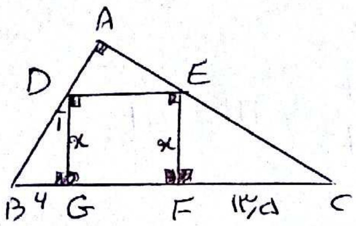
مثال) در شکل مقابل $\hat{B}=\hat{D}=90^\circ$ ، اندازه BC را بیابید.

$$\overset{\triangle}{ADE}: (x+3)^2=(x+1)^2+(x+2)^2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=2 & \text{ق ق} \\ x=-2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\hat{A} \\ \hat{B}=\hat{D} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ADE} \Rightarrow \frac{x+1}{BC}=\frac{x+2}{x+3+x}$$

$$\xrightarrow{x=2} \frac{3}{BC}=\frac{4}{7} \Rightarrow \boxed{BC=\frac{21}{4}}$$

مثال) در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ ، چهار ضلعی DEFG مربع است و BG=4 و FC=13/5 است. مساحت مربع را بدست آورید.

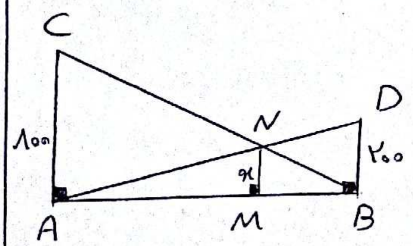


$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}+\hat{D}_1=90^\circ \\ \hat{B}+\hat{C}=90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{D}_1=\hat{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{D}_1=\hat{C} \\ \hat{G}=\hat{F}=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{BDG} \sim \overset{\triangle}{EFC} \Rightarrow \frac{4}{x}=\frac{x}{13/5} \Rightarrow x^2=81$$

$$S_{\text{مربع}}=x^2=81$$

مثال) با توجه به شکل مقابل، مقدار x را بیابید.



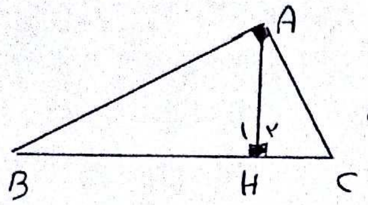
$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}=\hat{A} \ \text{مشترک} \\ \hat{M}=\hat{B}=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABD} \Rightarrow \frac{x}{200}=\frac{AM}{AB} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B}=\hat{B} \ \text{مشترک} \\ \hat{M}=\hat{A}=90^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{BMN} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{x}{800}=\frac{BM}{AB} \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \frac{x}{200}+\frac{x}{800}=\frac{AM+BM}{AB}=\frac{AB}{AB}=1 \Rightarrow \frac{4x+x}{800}=1$$

$$\Rightarrow 5x=800 \Rightarrow \boxed{x=160}$$

اثبات قضیه فیثاغورس و رابطه های طولی در مثلث قائم الزاویه :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_1=\hat{A}=90^\circ \\ \text{مشترک}\ \hat{B}=\hat{B}\end{array}\right\} \overset{\text{زز}}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AH}{AC}=\frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \left\{ \boxed{AB^2=BH\cdot BC} \right.$$

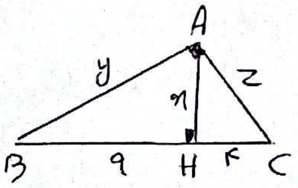
$$\left.\begin{array}{l}\hat{H}_2=\hat{A} \\ \hat{C}=\hat{C}\end{array}\right\} \overset{\text{زز}}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AC}{BC}=\frac{AH}{AB}=\frac{CH}{AC} \Rightarrow \boxed{AC^2=CH\cdot BC}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \\ \overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{ABC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{AH}{BH}=\frac{CH}{AH} \Rightarrow \boxed{AH^2=BH\cdot CH}$$

$$AB^2+AC^2=BH\cdot BC+CH\cdot BC=(BH+CH)\cdot BC=BC\cdot BC=BC^2$$

$$\Rightarrow \boxed{AB^2+AC^2=BC^2}$$

تمرین : مقدار مجهول را بیابید .

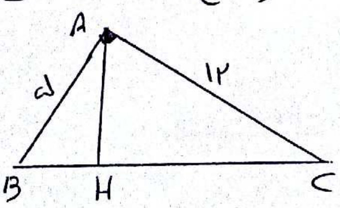


$$x^2=4\times 9=36 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

$$y^2=BH\cdot BC=9\times 13=117 \Rightarrow y=\sqrt{117}$$

$$z^2=CH\cdot BC=4\times 13=52 \Rightarrow z=\sqrt{52}$$

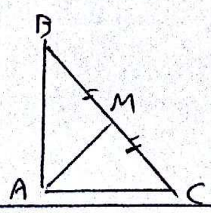
تمرین : طول ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ای که دو ضلع قائمه آن ۵ و ۱۲ سانتیمتر است چقدر است ؟



$$\overset{\triangle}{ABC}: BC^2=5^2+12^2=25+144=169 \Rightarrow BC=13$$

$$AH\cdot BC=AB\cdot AC \Rightarrow AH\times 13=5\times 12 \Rightarrow AH=\frac{60}{13}$$

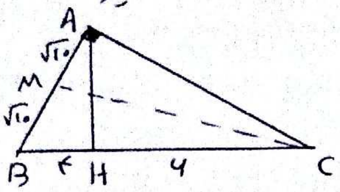
نکته ریاضی :



در هر مثلث قائم الزاویه ، میانه وارد بر وتر نصف وتر است :

$$AM=\frac{1}{2}BC$$

تمرین: در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ $(\hat{A}=90^\circ)$ اندازه بزرگترین میانه را بدست آورید.

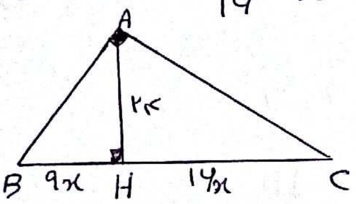


$$AH^2 = BH \cdot CH = 4 \times 6 = 24$$
$$AB^2 = BH \cdot CH = 4 \times 10 = 40 \Rightarrow AB = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$
$$AC^2 = CH \cdot BC = 6 \times 10 = 60 \Rightarrow AC = \sqrt{60}$$

کوچکترین ضلع مثلث، ضلع AB است و بزرگترین میانه مثلث، میانه‌ای است که بر کوچکترین ضلع وارد می‌شود پس: $AM = \frac{AB}{2} = \frac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

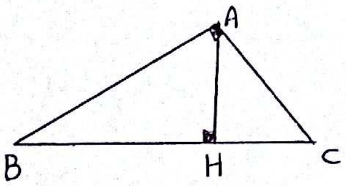
$$\overset{\triangle}{ACM}: CM^2 = AM^2 + AC^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{60})^2 = 10 + 60 = 70 \Rightarrow CM = \sqrt{70}$$

تمرین: در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ $(\hat{A}=90^\circ)$، طول ارتفاع وارد بر وتر ۲۴ و نسبت دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر روی وتر پدید می‌آورد $\frac{9}{16}$ است. طول وتر مثلث را بیابید.



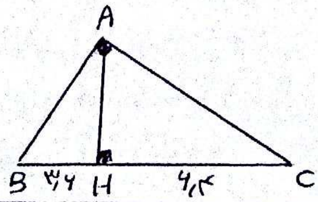
$$AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow 24^2 = (9x)(16x) \Rightarrow x^2 = \frac{24^2}{9 \times 16}$$
$$\Rightarrow x^2 = \left(\frac{24}{3 \times 4}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$
$$BC = 9x + 16x = 25x = 25 \times 2 = 50$$

تمرین: در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ $(\hat{A}=90^\circ)$ اگر $AC=5$ و $AB=12$ باشد اندازه BH و CH را بدست آورید.



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow \boxed{BC = 13}$$
$$AB^2 = BH \cdot BC \Rightarrow 12^2 = BH \times 13 \Rightarrow BH = \frac{144}{13} \simeq 11{,}07$$
$$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow 5^2 = CH \times 13 \Rightarrow CH = \frac{25}{13} \simeq 1{,}9$$

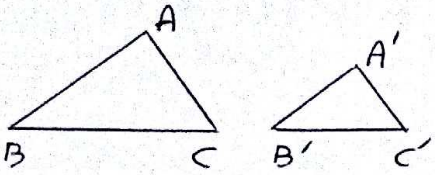
تمرین: در مثلث قائم الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ $(\hat{A}=90^\circ)$، اندازه دو پاره خطی که ارتفاع وارد بر وتر روی آن جدا می‌کند به ترتیب ۶٫۴ و ۳٫۶ می‌باشد در اینصورت مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه را بدست آورید.



$$BC = 3{,}6 + 6{,}4 = 10$$
$$AB^2 = BH \cdot BC = 3{,}6 \times 10 = 36 \Rightarrow AB = 6$$
$$AC^2 = CH \cdot BC = 6{,}4 \times 10 = 64 \Rightarrow AC = 8$$
$$AB + AC = 6 + 8 = 14$$

نسبت اجزای فرعی، محیط‌ها و مساحت‌های دو مثلث متشابه:

قضیه: ثابت کنید در دو مثلث متشابه، نسبت اندازه محیط‌ها با نسبت تشابه برابر است.

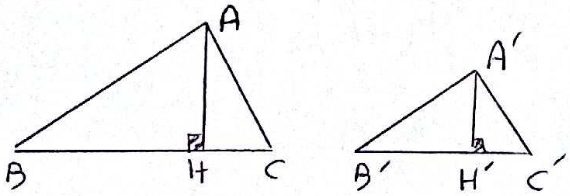


$$\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = K$$

$$\Rightarrow \frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'} = K \Rightarrow \frac{\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC}}{\text{محیط } \overset{\triangle}{A'B'C'}} = K$$

نتیجه: در دو مثلث متشابه نسبت ارتفاع‌ها، میانه‌ها و نیمسازها با نسبت تشابه برابر است.

قضیه: ثابت کنید در دو مثلث متشابه نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است.



$$\frac{BC}{B'C'} = K \quad , \quad \frac{AH}{A'H'} = K$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}} = \frac{\frac{1}{2} \times AH \times BC}{\frac{1}{2} \times A'H' \times B'C'} = \frac{AH}{A'H'} \times \frac{BC}{B'C'} = K \times K = K^2$$

نکته ریاضی:

در دو شکل متشابه با نسبت تشابه K داریم:

نسبت محیط‌ها $= K$ نسبت مساحت‌ها $= K^2$

مثال ۱: مثلث‌های $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ متشابهند. اگر اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۴ و ۶ و ۸ سانتیمتر و محیط مثلث $A'B'C'$ برابر ۴۵ سانتیمتر باشد:

الف) طول اضلاع مثلث $A'B'C'$ را بدست آورید.

$$\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC} = 4+6+8 = 18$$

$$\text{نسبت تشابه} = \text{نسبت محیط‌ها} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{A'B'} = \frac{6}{A'C'} = \frac{8}{B'C'} = \frac{2}{5} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = 10 \\ A'C' = 15 \\ B'C' = 20 \end{cases}$$

ب) نسبت مساحتهای دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ را بیابید.

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}} = (\text{نسبت تشابه})^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

مثال ۲: طول ضلع های مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ برابر ۷، ۹ و ۱۴ سانتیمتر و مثلث MNP با مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متشابه است و طول بزرگترین ضلع آن ۲۱ سانتیمتر است. محیط مثلث MNP را بدست آورید و نسبت مساحتهای دو مثلث را بیابید.

$\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC} = ۷+۹+۱۴ = ۳۰$

$\dfrac{\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC}}{\text{محیط } \overset{\triangle}{MNP}} = (\text{نسبت ضلع}) \Rightarrow \dfrac{۳۰}{\text{محیط } MNP} = \dfrac{۱۴}{۲۱} \Rightarrow \text{محیط } \overset{\triangle}{MNP} = ۴۵$

$\text{نسبت محیطها} = \dfrac{۳۰}{۴۵} = \dfrac{۲}{۳} = \text{نسبت تشابه} \Rightarrow \dfrac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{MNP}}} = (\text{نسبت تشابه})^۲ = (\dfrac{۲}{۳})^۲ = \dfrac{۴}{۹}$

مثال ۳: دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ متشابه هستند. اگر طول اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ به ترتیب ۳، ۵ و ۷ باشد و محیط $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ برابر ۳۰ باشد:

الف) نسبت مساحتهای این دو مثلث را بدست آورید.

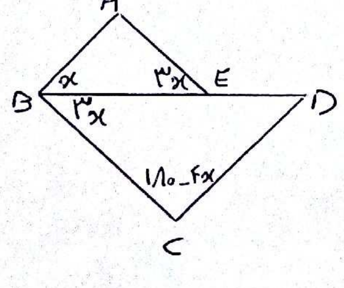
ب) طول اضلاع $\overset{\triangle}{A'B'C'}$ را بدست آورید.

$\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC} = ۳+۵+۷ = ۱۵ \Rightarrow \dfrac{\text{محیط } \overset{\triangle}{ABC}}{\text{محیط } \overset{\triangle}{A'B'C'}} = \dfrac{۱۵}{۳۰} = \dfrac{۱}{۲} = \text{نسبت تشابه}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{\overset{\triangle}{ABC}}}{S_{\overset{\triangle}{A'B'C'}}} = (\dfrac{۱}{۲})^۲ = \dfrac{۱}{۴}$

$\dfrac{۳}{A'B'} = \dfrac{۵}{A'C'} = \dfrac{۷}{B'C'} = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} A'B' = ۶ \\ A'C' = ۱۰ \\ B'C' = ۱۴ \end{cases}$

مثال ۴: در شکل مقابل E وسط پاره خط BD است. نسبت مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABE}$ به مساحت $\overset{\triangle}{BCD}$ را بدست آورید.



$\hat{A} = ۱۸۰ - (x + ۳x) = ۱۸۰ - ۴x \quad , \quad \dfrac{BE}{BD} = \dfrac{۱}{۲} = \text{نسبت تشابه}$

$\left.\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{C} = ۱۸۰ - ۴x \\ A\hat{E}B = C\hat{B}D = ۳x \end{array}\right\} \overset{(ز ز)}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{ABE} \sim \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow \dfrac{S_{\overset{\triangle}{ABE}}}{S_{\overset{\triangle}{BCD}}} = (\dfrac{۱}{۲})^۲ = \dfrac{۱}{۴}$

تشابه چند ضلعی ها:

دو چند ضلعی را متشابه می گویند هرگاه زاویه های نظیر آنها باهم برابر بوده و اضلاع نظیر آنها باهم متناسب باشند به نسبت اضلاع نظیر در دو چند ضلعی متشابه، نسبت تشابه می گویند.

نکته ریاضی:

۱) هر دو n ضلعی منتظم باهم متشابه اند (مثال: دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه اند)

۲) در دو چند ضلعی متشابه، نسبت محیط‌ها با نسبت تشابه برابر است.

۳) در دو چند ضلعی متشابه، نسبت مساحت‌ها با مجذور نسبت تشابه برابر است

۴) در دو چند ضلعی متشابه، نسبت قطرهای متناظر با نسبت تشابه برابر است

۵) اگر طول و عرض یک مستطیل به ترتیب با طول و عرض یک مستطیل دیگر متناسب باشند آن دو مستطیل متشابه اند.

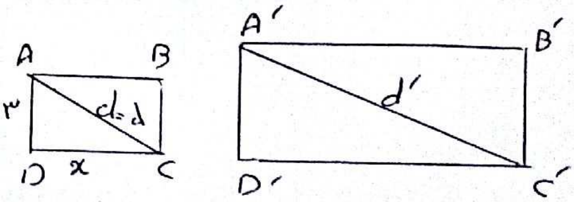
۶) اگر زاویه بین دو قطر یک مستطیل با زاویه بین دو قطر مستطیل دیگر مساوی باشد آن دو مستطیل متشابه اند.

مثال ۱: نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی منتظم برابر $\frac{4}{9}$ است. اگر اندازه ی ضلع یکی از آنها ۶ باشد. اندازه ضلع دیگری چقدر است؟

$$\text{نسبت مساحت‌ها} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \text{نسبت ضلع‌ها} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{6}{x} \Rightarrow \boxed{x=9} \\ \text{یا} \\ \frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$$

مثال ۲: مستطیلی به مساحت ۲۴ با مستطیلی به عرض ۳ و قطر d متشابه است. قطر مستطیل اولی را برحسب d آورید.

$$x^2 + 3^2 = d^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x=4}$$



$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{24}{3\times 4} = 2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \text{نسبت تشابه} = \sqrt{2}$$

$$\text{نسبت ضلع} = \text{نسبت تشابه} = \frac{d'}{d} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{d'}{d} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{d' = d\sqrt{2}}$$

فصل ۳ : چند ضلعی‌ها و ویژگی‌های آنها

تعریف چند ضلعی :

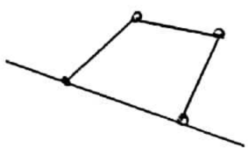
چند ضلعی شکلی است شامل n ($n \geq 3$) پاره خط متوالی که :

۱) هر پاره خط دقیقاً دو پاره خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

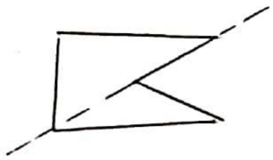
۲) هر دو پاره خط که در یک انتها مشترک اند روی یک خط نباشند.

انواع چند ضلعی :

الف) محدب : یک چند ضلعی را محدب می نامند هرگاه هر ضلع آن را از دو طرف امتداد دهیم چند ضلعی در یک طرف آن خط واقع شود.



ب) مقعر : یک چند ضلعی را مقعر می نامند هرگاه حداقل ضلعی داشته باشد که اگر آن را از دو طرف امتداد دهیم چند ضلعی در دو طرف آن خط واقع شود.



تعریف قطر چند ضلعی :

در هر n ضلعی، هر پاره خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیر مجاور باشند قطر می نامند.

$$\text{تعداد قطر} = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی } n \text{ ضلعی} = (n-2) \times 180^\circ$$

$$\text{مجموع زاویه‌های داخلی } n \text{ ضلعی منتظم} = \frac{(n-2) \times 180}{n}$$

مثال ۱ : اگر هر زاویه‌ی یک n ضلعی منتظم فقط ۲ درجه کمتر از هر زاویه یک $(n+2)$ ضلعی منتظم باشد n کدام است (کنکور - ۷۰)

$$\frac{(n-2) \times 180}{n} + 2 = \frac{(n+2-2) \times 180}{n+2} \Rightarrow$$

$$n = 18$$

مثال ۲: در کدام چند ضلعی، تعداد قطرها ۴ برابر تعداد ضلع ها است؟

$$\frac{n(n-3)}{2}=4n \Rightarrow n^2-3n=8n \Rightarrow n^2-11n=0 \Rightarrow \begin{cases} n=0 & \text{غ ق ق} \\ n=11 & \text{ق ق} \end{cases}$$

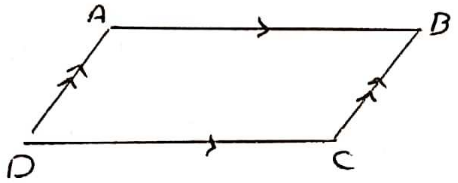
مثال ۳: اگر مجموع زاویه های داخلی یک $(n+k)$ ضلعی 1440° بیشتر از مجموع زاویه های داخلی یک $(n-k)$ ضلعی باشد، k کدام است؟

$$(n+k-2)\times 180=(n-k-2)\times 180+1440 \Rightarrow$$

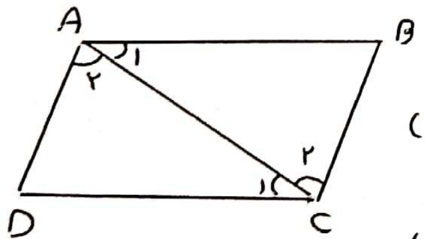
$$180n+180k-360=180n-180k-360+1440 \Rightarrow k=4$$

چهار ضلعی های مهم و ویژگی های آنها:

۱) متوازی الاضلاع: چهار ضلعی که هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.



قضیه ۱: ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه اند.

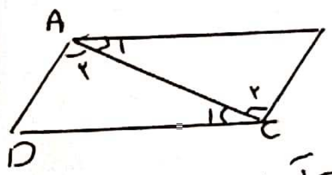


اثبات: قطر AC را رسم می کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} (AB \parallel CD\ ,\ \text{مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1 \\ \text{مشترک}\quad AC=AC \\ (AD \parallel BC\ ,\ \text{مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{C}_2 \end{array}\right\} \overset{\text{زضز}}{\Rightarrow} \triangle ABC \cong \triangle ACD$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB=CD \\ BC=AD \end{cases}$$

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی ضلع های مقابل دو به دو هم اندازه باشند چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.

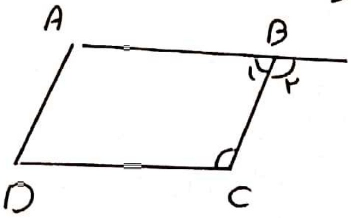


اثبات: قطر AC را رسم می کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} AB=CD \\ AD=BC \\ AC=AC \ \text{مشترک} \end{array}\right\} \overset{\text{ضضض}}{\Rightarrow} \triangle ABC \cong \triangle ACD \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{A}_1=\hat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD \\ A_2=C_2 \Rightarrow AD \parallel BC \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD$$

متوازی الاضلاع است.

قضیه ۲: در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.



اثبات: ضلع AB را از طرف راس B امتداد می دهیم:

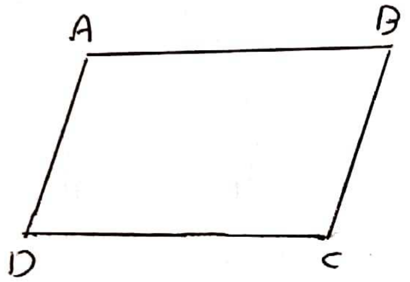
$(AB \parallel CD$ ، مورب $BC) \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{C}$ (۱)

از طرفی $B_2 + \hat{B}_1 = 180$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \hat{C} + \hat{B}_1 = 180$

به همین ترتیب ثابت می شود: $\hat{A}+\hat{B} = \hat{B}+\hat{C} = \hat{C}+\hat{D} = \hat{A}+\hat{D} = 180^\circ$

عکس قضیه ۲: ثابت کنید هر چهار ضلعی که هر دو زاویه مجاور آن مکمل باشند متوازی الاضلاع است.

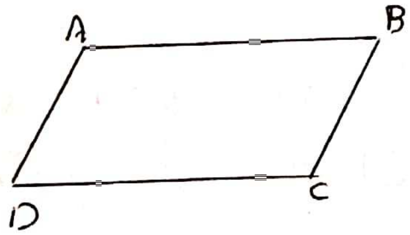


$\hat{B}+\hat{C} = 180 \xRightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{عکس قضیه}} AB \parallel CD$ (۱)

$\hat{A}+\hat{B} = 180 \xRightarrow[\text{خطوط موازی}]{\text{عکس قضیه}} AD \parallel BC$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow$ ABCD متوازی الاضلاع است

قضیه ۳: ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، هر دو زاویه مقابل هم اندازه اند.

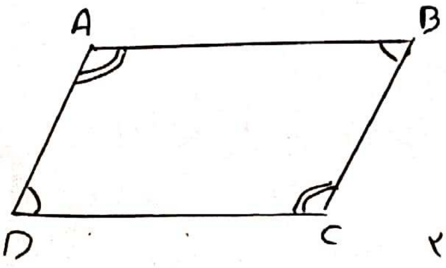


اثبات: می دانیم در هر متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}+\hat{B} &= 180^\circ\\ \hat{C}+\hat{B} &= 180^\circ\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B} = \hat{C}+\hat{B} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{B}+\hat{C} &= 180^\circ\\ \hat{C}+\hat{D} &= 180^\circ\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{B}+\hat{C} = \hat{C}+\hat{D} \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$$

عکس قضیه ۳: ثابت کنید اگر در یک چهار ضلعی هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند چهار ضلعی متوازی الاضلاع است.



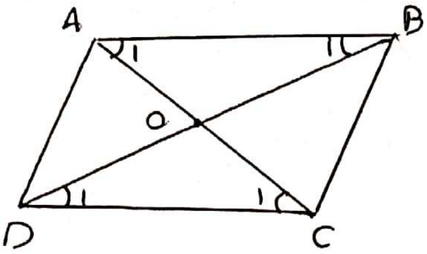
بنا به فرض: $\hat{A} = \hat{C}$ ، $\hat{B} = \hat{D}$

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{A}+\hat{B} = 360^\circ$

$\Rightarrow 2\hat{A}+2\hat{B} = 360^\circ \Rightarrow 2(\hat{A}+\hat{B}) = 360 \Rightarrow \hat{A}+\hat{B} = 180$

$\xRightarrow{\text{عکس قضیه ۲}}$ ABCD متوازی الاضلاع است.

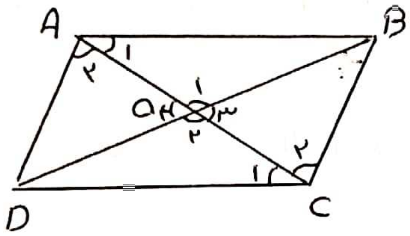
قضیه ۴: ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند.



$$\left.\begin{array}{l}(AB \parallel CD \text{ و مورب } AC) \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AB = CD \\ (AB \parallel CD \text{ و مورب } BD) \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD}$$

$\Rightarrow OA = OC \;,\; OB = OD \Rightarrow$ قطرها منصف یکدیگرند

عکس قضیه ۴: ثابت کنید هر چهار ضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند متوازی الاضلاع است.

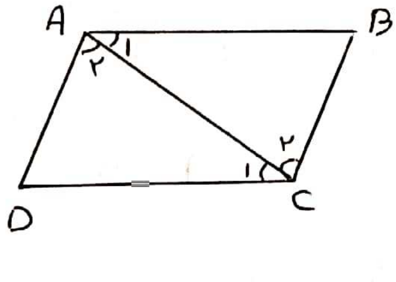


$$\left.\begin{array}{l}OA = OC \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OB = OD\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{OAB} \cong \overset{\triangle}{OCD} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow AB \parallel CD \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}OA = OC \\ \hat{O}_4 = \hat{O}_3 \\ OD = OB\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{OAD} \cong \overset{\triangle}{OCB} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC \quad (2)$$

(1) , (2) $\Rightarrow$ $ABCD$ متوازی الاضلاع

قضیه: ثابت کنید هر چهار ضلعی که دو ضلع مقابل آن هم اندازه و موازی باشند متوازی الاضلاع است.

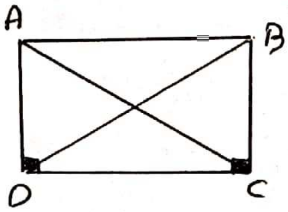


$$\left.\begin{array}{l}AC = AC \text{ مشترک} \\ AB \parallel CD \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AB = CD\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ACD} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_2$$

$\Rightarrow AD \parallel BC$

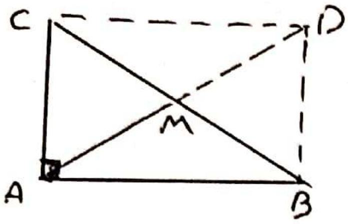
در نتیجه $ABCD$ متوازی الاضلاع است.

قضیه: ثابت کنید در هر مستطیل قطرها باهم برابرند.



$$\left.\begin{array}{l}\text{عرض } AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} = 90 \\ \text{مشترک } CD = CD\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ADC} \cong \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow AC = BD$$

قضیه: ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

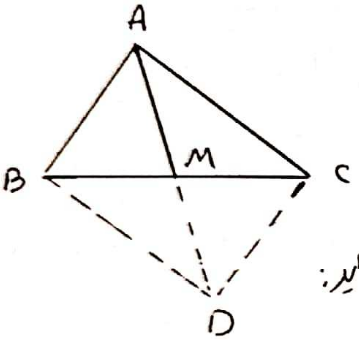


اثبات: میانه AM را از طرف M به اندازه خودش امتداد می‌دهیم $AM = MD$

چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند و چون $\hat{A} = 90^\circ$ است پس ABCD مستطیل است.

وچون در مستطیل قطرها برابرند پس: $AM = \frac{AD}{2} \Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$

عکس قضیه: اگر در مثلثی اندازه میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع باشد آن مثلث قائم‌الزاویه است.



اثبات: در مثلث ABC میانه AM وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم طبق فرض مسئله: $AM = \frac{BC}{2}$

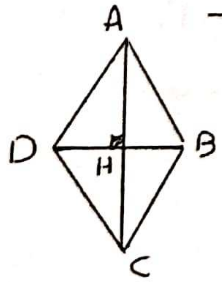
AM را به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه D بدست آید:

D را به B و C وصل می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned} AM = BM = MC \\ AM = MD \end{aligned}\right\} \Rightarrow MA = MB = MC = MD \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2MA = AD \\ 2MA = BC \end{aligned}\right\} \Rightarrow AD = BC$$

چهارضلعی که قطرهایش باهم برابر و همدیگر را نصف می‌کنند مستطیل است پس $\hat{A} = 90^\circ$ و $A\hat{B}C$ قائم‌الزاویه است.

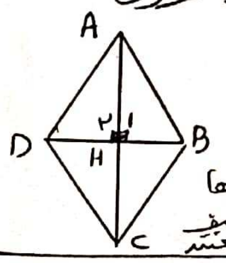
ویژگی‌های لوزی:



۱) در لوزی قطرها عمود منصف یکدیگرند.

۲) در لوزی قطرها روی نیمساز زاویه‌ها می‌باشند.

ثابت کنید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن برهم عمود باشند لوزی است.



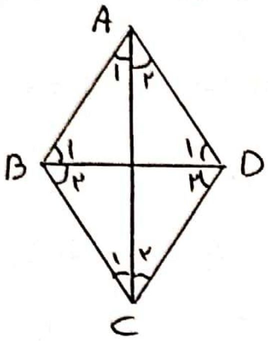
در متوازی الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند

$$\left.\begin{aligned} AH = AH \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ BH = DH \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{ض ز ض}} A\hat{B}H \cong A\hat{D}H \Rightarrow AB = AD$$

همین ترتیب ثابت می‌شود $AB = BC$ و $AB = CD$

و چون اضلاع متوازی‌الاضلاع باهم مساویند پس لوزی است.

ثابت کنید متوازی الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویه آن باشد، لوزی است.



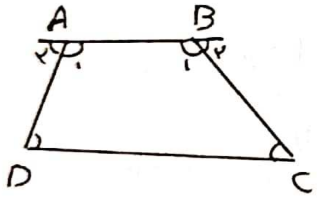
$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ AC=AC\\ \hat{C}_1=\hat{C}_2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{ABC} \cong \overset{\triangle}{ACD} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}AB=AD\\ BC=CD\end{array}\right. \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1=\hat{B}_2\\ BD=BD\\ \hat{D}_1=\hat{D}_2\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \overset{\triangle}{ABD} \cong \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}AB=BC\\ AD=CD\end{array}\right. \quad (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow AB=BC=CD=AD \Rightarrow$ $\overset{\square}{ABCD}$ لوزی است.

ذوزنقه: چهارضلعی که فقط دو ضلع آن که قاعده نامیده می‌شوند با هم موازی باشند ذوزنقه نامیده می‌شود.

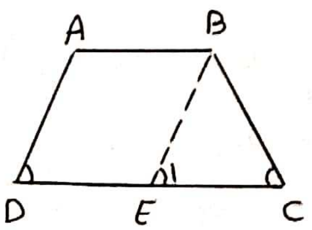
قضیه: ثابت کنید در هر ذوزنقه زاویه‌های مجاور ساق‌ها مکمل اند.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1+\hat{A}_2=180^\circ\\ (AB \parallel CD,\ AD \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{D}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1+\hat{D}=180^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B}_1+\hat{B}_2=180^\circ\\ (AB \parallel CD,\ BC \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{B}_2=\hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1+\hat{C}=180^\circ$$

قضیه: ثابت کنید در هر ذوزنقه متساوی الساقین، زاویه های مجاور به یک قاعده هم اندازه اند.



اثبات: از رأس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در E قطع کند.

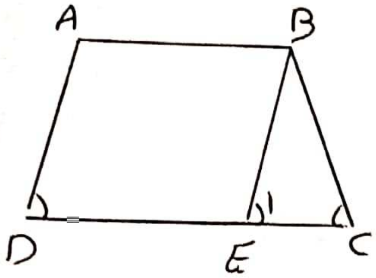
$$\left.\begin{array}{l}AB \parallel DE\\ AD \parallel BE\end{array}\right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } ABED \Rightarrow AD=BE$$

$$(AD \parallel BE,\ DE \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{D}=\hat{E}_1 \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}AD=BC\\ AD=BE\end{array}\right\} \Rightarrow BC=BE \Rightarrow \hat{E}_1=\hat{C} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \hat{C}=\hat{D}$$

قضیه: ثابت کنید اگر در یک ذوزنقه دو زاویه مجاور به یک قاعده هم اندازه باشند ذوزنقه متساوی الساقین است.



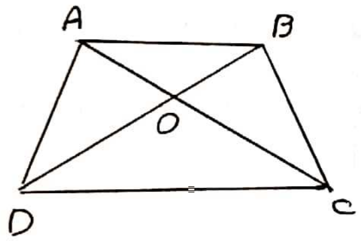
اثبات: از راس B خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در E قطع کند.

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel DE \\ AD \parallel BE \end{array}\right\} \Rightarrow \text{متوازی‌الاضلاع } ABED \Rightarrow AD = BE \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} (AD \parallel BE \ ,\ \text{مورب } DE) \Rightarrow \hat{D} = \hat{E}_1 \\ \text{از طرفی } \hat{D} = \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C} \Rightarrow BE = BC \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow AD = BC \Rightarrow \text{متساوی الساقین است } ABCD$$

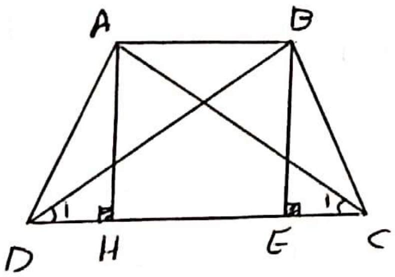
قضیه: در هر ذوزنقه متساوی الساقین قطرها اندازه‌های مساوی دارند و برعکس.



اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \hat{D} = \hat{C} \\ CD = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ACD} \cong \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow AC = BD$$

اثبات عکس قضیه:



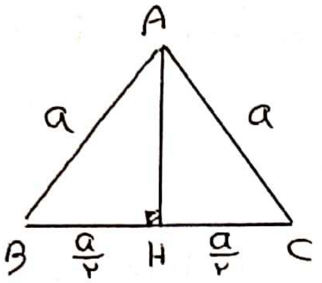
$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \\ \text{ارتفاع } AH = BE \\ \hat{H} = \hat{E} = 90 \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{وتر و یک}} \overset{\triangle}{ACH} \cong \overset{\triangle}{BDE} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{C}_1$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \\ \hat{C}_1 = \hat{D}_1 \\ \text{مشترک } CD = CD \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\triangle}{ACD} \cong \overset{\triangle}{BCD} \Rightarrow \hat{C} = \hat{D} \Rightarrow AD = BC$$

(تمرین)

مساحت و کاربردهای آن:

۱) مساحت و ارتفاع مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a را بدست آورید.



$$\overset{\triangle}{ACH}: AH^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow AH^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 \Rightarrow AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

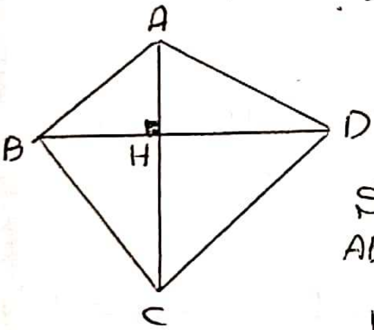
$$S = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{a \times \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

مثال) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱۰ cm را بدست آورید.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{10^2 \times \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

---

۲) ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی برهم عمود باشند مساحت آن برابر است با نصف حاصلضرب قطرها:

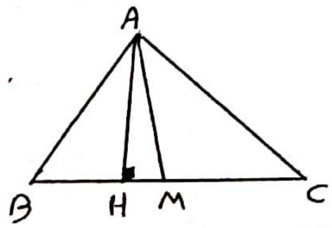


$$S_{\square ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times BD \times AH + \frac{1}{2} \times BD \times CH$$

$$= \frac{1}{2} \times BD \times (AH + CH) = \frac{1}{2} \times BD \times AC$$

---

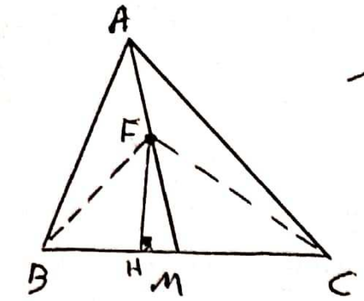
۳) نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.



حل: ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

AM میانه $\Rightarrow BM = MC$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot AH \\ S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot AH \\ BM = MC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot BM \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot AH \Rightarrow S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMC}$$



۴) در شکل مقابل اگر F هر نقطه‌ای روی میانه AM به جز نقطه M باشد نشان دهید: $S_{\triangle FBM} = S_{\triangle FMC}$

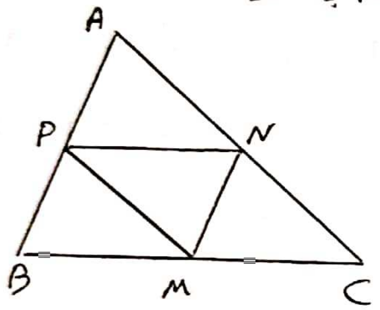
حل: در مثلث $\hat{FBC}$ ارتفاع FH را رسم می‌کنیم

FM میانه $\Rightarrow BM = CM$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\triangle FBM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot FH \\ S_{\triangle FMC} = \frac{1}{2} \cdot MC \cdot FH \\ BM = MC \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\triangle FBM} = S_{\triangle FMC}$$

---

۵) اگر وسط های سه ضلع هر مثلث را به هم وصل کنیم چهار مثلث هم نهشت با مساحت‌های برابر پدید می آید.



حل: می دانیم در هر مثلث خطی که وسطهای دو ضلع را به هم وصل می کند موازی ضلع سوم است (عکس تالس) پس:

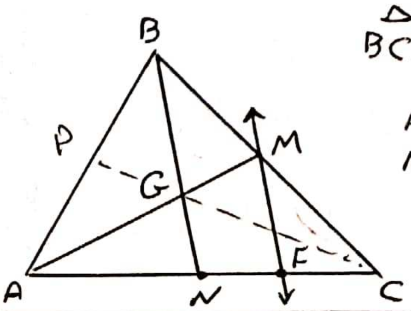
$$\left.\begin{array}{l} PN \parallel MC \\ PM \parallel NC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{PMCN} \text{ متوازی الاضلاع}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} PN = MC \\ PM = NC \\ MN = MN \text{ مشترک} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{ض ض ض}} \hat{PMN} \cong \hat{MNC}$$

بهمین ترتیب ثابت می‌شود: $\hat{PMN} \cong \hat{APN} \cong \hat{PBM}$

---

۶) ثابت کنید سه میانه هر مثلث در نقطه ای درون آن مثلث همرس اند بطوریکه فاصله ی این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع است و فاصله اش تا هر راس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن راس است.



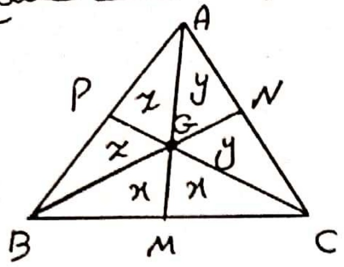
$\hat{BCN}$: $MF \parallel BN \xrightarrow[BM = CM]{\text{رابطه تالس}} \frac{CF}{FN} = \frac{CM}{MB} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow CF = FN \Rightarrow$ F وسط NC

$$\left.\begin{array}{l} AN = NC \\ NC = 2NF \end{array}\right\} \Rightarrow AN = 2NF \Rightarrow AF = AN + NF \Rightarrow AF = 3NF$$

$\hat{AMF}$: $GN \parallel MF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{GM}{AM} = \frac{NF}{AF} \Rightarrow \frac{GM}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} GM = \frac{1}{3} AM \\ AG = \frac{2}{3} AM \end{array}\right.$

بهمین ترتیب ثابت می‌شود $BG = \frac{2}{3} BN$ و $CG = \frac{2}{3} CP$ پس سه میانه همرس اند.

۷) ثابت کنید سه میانه هر مثلث، آن را به ۶ مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند.



$$\left.\begin{array}{l} S_{\triangle MBG} = \frac{1}{2} \times BM \times h \\ S_{\triangle MCG} = \frac{1}{2} \times MC \times h \end{array}\right\} \xrightarrow{BM=MC} S_{\triangle MBG} = S_{\triangle MCG} = x$$

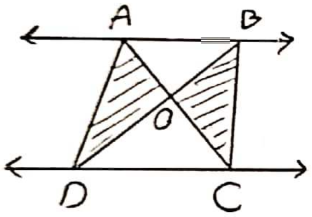
بهمین ترتیب ثابت می‌شود: $S_{\triangle APG} = S_{\triangle BPG} = z \;,\; S_{\triangle AGN} = S_{\triangle CGN} = y$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle ABC: \text{میانه } AM \Rightarrow S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM} \Rightarrow x+z+z = x+y+y \Rightarrow 2z = 2y \Rightarrow y = z \\ \triangle ABC: \text{میانه } BN \Rightarrow S_{\triangle ABN} = S_{\triangle BCN} \Rightarrow x+x+y = z+z+y \Rightarrow 2x = 2z = x+z \end{array}\right\} \Rightarrow x=y=z$$

---

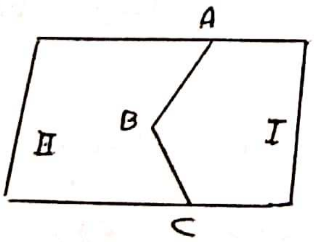
۸) فرض کنیم دو خط AB و CD موازی اند به طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند ثابت کنید:

$$S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC}$$



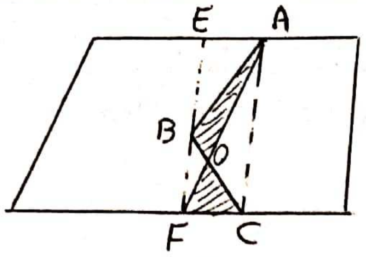
$$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times CD \times h$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\triangle ACD} - S_{\triangle OCD} = S_{\triangle OAD} \\ S_{\triangle BCD} - S_{\triangle OCD} = S_{\triangle OBC} \\ S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\triangle OAD} = S_{\triangle OBC}$$



مسئله: در شکل دو مزرعه I و II متعلق به دو کشاورز است این دو کشاورز برای استفاده از ماشین های کشاورزی می خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوریکه مساحتهای زمین های آنها تغییر نکند، این کار به چه روشی ممکن است؟

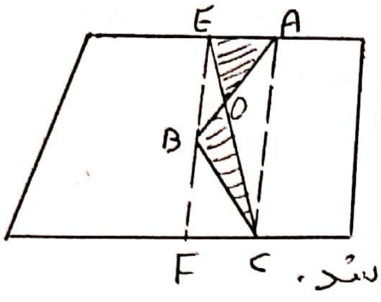
حل: A را به C وصل کرده و از B پاره خط EF را موازی AC رسم می‌کنیم تا دو مرز



دیگری را در E و F قطع کند:

با توجه به مسئله قبل: $S_{OAB}^{\triangle} = S_{OFC}^{\triangle}$

پس می‌توان آن‌ها را با یکدیگر معاوضه کرد و مرز مشترک جدید AF باشد.

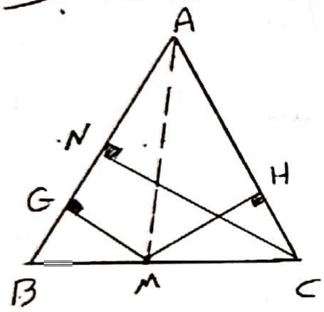


با توجه به مسئله قبل: $S_{OBC}^{\triangle} = S_{OAE}^{\triangle}$

پس می‌توان آن‌ها را با یکدیگر معاوضه کرد و مرز مشترک CE باشد.

---

۹) ثابت کنید هر نقطه دلخواه روی قاعده مثلث متساوی الساقین در نظر بگیریم مجموع فاصله‌های این نقطه از دو ساق مثلث برابر است با ارتفاع وارد بر ساق.



$\overset{\triangle}{ABC}$: متساوی‌الساقین $\Rightarrow AB = AC$

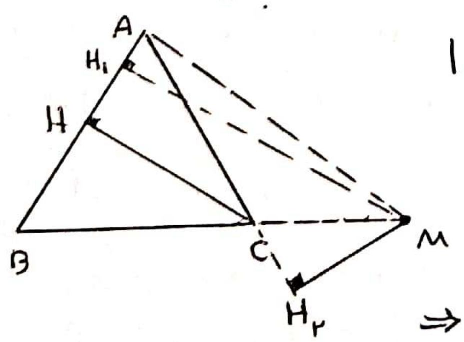
$$S_{AMC}^{\triangle} + S_{ABM}^{\triangle} = S_{ABC}^{\triangle} \Rightarrow \frac{AC \cdot MH}{2} + \frac{AB \cdot MG}{2} = \frac{AB \cdot CN}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2}(MH + MG) = \frac{AB}{2} \cdot CN \Rightarrow MH + MG = CN$$

---

۱۰) نشان دهید قدر مطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتداد قاعده مثلث متساوی الساقین از خط‌های شامل دو ساق برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

می‌خواهیم ثابت کنیم: $|MH_1 - MH_2| = CH$

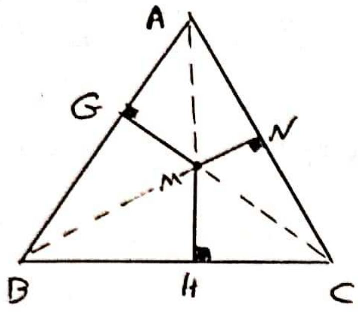


$$S_{ABC}^{\triangle} = S_{ABM}^{\triangle} - S_{ACM}^{\triangle}$$

$$\Rightarrow \frac{AB \times CH}{2} = \frac{AB \times MH_1}{2} - \frac{AC \times MH_2}{2}$$

$$\xRightarrow{AB=AC} \frac{AB \times CH}{2} = \frac{AB \times (MH_1 - MH_2)}{2} \Rightarrow CH = MH_1 - MH_2$$

۱۱ ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی الاضلاع از سه ضلع برابر ارتفاع مثلث است.



اثبات: ارتفاع مثلث ABC را برابر h و هر ضلع آن را برابر a می‌گیریم:

$$S_{\triangle MBC} + S_{\triangle MAB} + S_{\triangle MAC} = S_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{a.MH}{2} + \frac{a.MG}{2} + \frac{a.MN}{2} = \frac{a.h}{2}$$

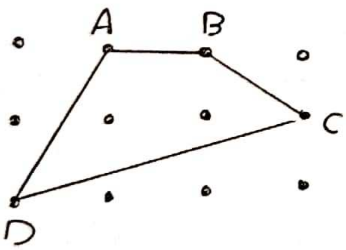
$$\Rightarrow \frac{a}{2}(MH + MG + MN) = \frac{a.h}{2} \Rightarrow MH + MG + MN = h$$

مثال) اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله نقطه M درون مثلث از سه ضلع برابر ۲ و ۴ و ۶ باشند، اندازه ضلع مثلث را محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم ارتفاع ~~محیط~~ هر مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است پس

$$2+4+6 = h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 12 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{24}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{24\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = 8\sqrt{3}$$

نقاط شبکه‌ای و مساحت:



به تعدادی نقاط که فاصله‌ی هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی و عمودی برابر واحد باشد را نقاط شبکه‌ای می‌گوئیم. چند ضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام راس‌های آنها روی نقاط شبکه ای باشند چند ضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

راس‌های چند ضلعی شبکه ای را نقاط مرزی (b) و نقطه‌های داخل چند ضلعی شبکه‌ای را نقاط درون شبکه ای (i) می‌نامند.

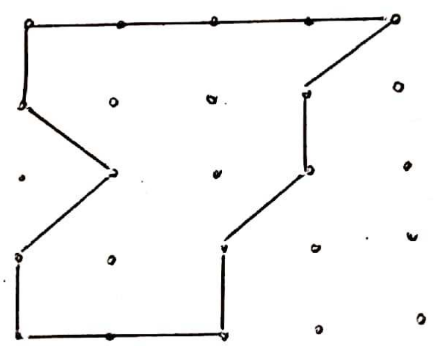
سوال ۱: یک چند ضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه مرزی می‌تواند داشته باشد؟
جواب: سه نقطه چون کوچکترین چند ضلعی، ۳ ضلعی است.

سوال ۲: یک چند ضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه درون می‌تواند داشته باشد؟
جواب: صفر یعنی نقطه درون شبکه‌ای نداشته باشد.

مساحت یک چند ضلعی شبکه‌ای که تعداد نقاط مرزی آن b و تعداد نقاط درونی آن i باشد از فرمول زیر که به فرمول پیک (جرج الکساندر پیک) معروف است محاسبه می‌شود:

$$\boxed{S=\frac{b}{2}-1+i}$$

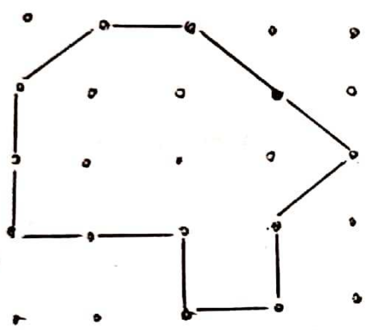
تمرین: در شکل‌های زیر فاصله هر دو نقطه متوالی برابر ۱ واحد است. با استفاده از فرمول پیک مساحت‌ها را محاسبه کنید.



نقاط مرزی $= b = 14$

نقاط درونی $= i = 4$

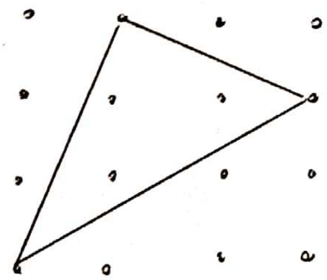
$S=\frac{b}{2}-1+i=\frac{14}{2}-1+4=10$



نقاط مرزی $= b = 12$

نقاط درونی $= i = 5$

$S=\frac{b}{2}-1+i=\frac{12}{2}-1+5=10$



نقاط مرزی $= b = 3$

نقاط درونی $= i = 3$

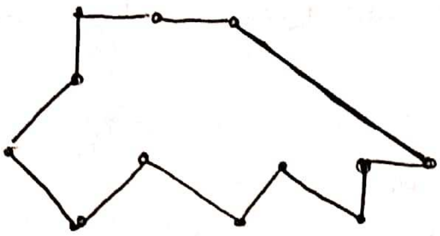
$S=\frac{b}{2}-1+i=\frac{3}{2}-1+3=\frac{1}{2}+3=3/5$

تمرین: در یک چند ضلعی شبکه‌ای، تعداد نقاط درونی، سه برابر تعداد نقاط مرزی است. اگر مساحت این چند ضلعی ۱۳ واحد مربع باشد تعداد نقاط درونی و مرزی را بیابید.

$i=3b$ $\qquad S=\frac{b}{2}-1+i \Rightarrow 13=\frac{b}{2}-1+3b$

$S=13$ $\qquad \Rightarrow 14=\frac{7}{2}b \Rightarrow \boxed{b=4}$ $\qquad i=3\times 4=\boxed{12}$

تمرین: در شکل زیر اگر فاصله‌ی بین دو نقطه متوالی ۱ واحد باشد و مساحت شکل ۱۴ واحد مربع باشد، تعداد نقاط درونی را حساب کنید:



نقاط مرزی $= b = 12$

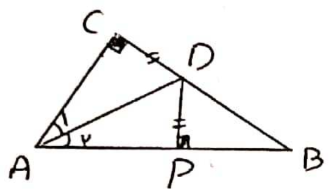
نقاط درونی $= i = ?$

$S = 14$

$S = \frac{b}{2} - 1 + i \Rightarrow 14 = \frac{12}{2} - 1 + i \Rightarrow i + 5 \Rightarrow i = 14 - 5 = \boxed{9}$

تمرین تکمیلی

۱) در مثلث $A\overset{\triangle}{B}C$ اگر $\hat{A} = 60^\circ$ و $\hat{B} = 30^\circ$ آنگاه طول نیمساز $\hat{A}$ چند برابر طول BC است؟



$\left.\begin{array}{l}\hat{A} = 60^\circ \\ \hat{B} = 30^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$

از نقطه D عمود DP را بر ضلع AB وارد می‌کنیم:

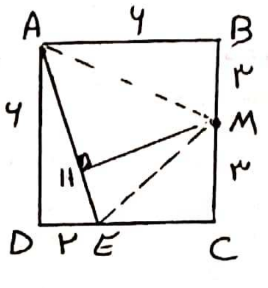
D روی نیمساز $\hat{A}$ قرار دارد $\Rightarrow DP = DC$

$A\overset{\triangle}{D}C: \hat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow CD = \frac{1}{2}AD$

$\overset{\triangle}{B}DP: \hat{B} = 30^\circ \Rightarrow DP = \frac{1}{2}BD \Rightarrow BD = 2DP = 2DC = 2(\frac{1}{2}AD) = AD$

$BC = BD + CD = AD + \frac{1}{2}AD = \frac{3}{2}AD \Rightarrow \boxed{AD = \frac{2}{3}BC}$

۲) در شکل مقابل ABCD مربعی به طول ضلع ۶ واحد است. فاصله نقطه M وسط BC از AE چقدر است؟



حل: M را به A و B وصل کرده عمود MH را بر AE رسم می‌کنیم

$S_{\underset{AME}{\triangle}} = S_{\text{مربع}} - (S_{\underset{ABM}{\triangle}} + S_{\underset{MCE}{\triangle}} + S_{\underset{ADE}{\triangle}})$

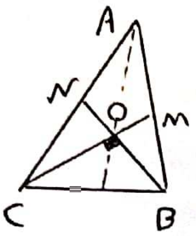
$= 6^2 - (\frac{6\times3}{2} + \frac{4\times3}{2} + \frac{6\times2}{2}) = 36 - (9 + 6 + 6) = 15$

$A\overset{\triangle}{D}E: AE^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \Rightarrow AE = 2\sqrt{10}$

$S_{\underset{AME}{\triangle}} = \frac{AE \times MH}{2} \Rightarrow 15 = \frac{2\sqrt{10} \times MH}{2}$

$\Rightarrow MH = \frac{15}{\sqrt{10}} = \frac{15\sqrt{10}}{10} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$

۳) در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ اندازه میانه‌های وارد بر اضلاع AC و برابر ۹ و ۶ سانتیمتر است. اگر این دو میانه بر هم عمود باشند مساحت مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ چقدر است؟



حل: می‌دانیم میانه‌ها همدیگر را به نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند

$$OB = \frac{2}{3}N = \frac{2}{3}\times 9 = 6$$

$$OC = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3}\times 6 = 4$$

$$S_{\overset{\triangle}{OBC}} = \frac{OB\times OC}{2} = \frac{6\times 4}{2} = 12 \Rightarrow S_{ABC} = 3\times 12 = 36$$

۴) اگر مساحت یک شکل شبکه‌ای نصف تعداد نقاط مرزی و ۲/۵ برابر تعداد نقاط درونی باشد مساحت آن چقدر است؟

$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{b}{2} \\ S = 2.5\,i \Rightarrow i = \frac{2}{5}S \end{array}\right\} \Rightarrow S = \frac{b}{2} - 1 + i \Rightarrow S = S - 1 + \frac{2}{5}S \Rightarrow S = \frac{5}{2} = 2.5$$

فصل ۴ :

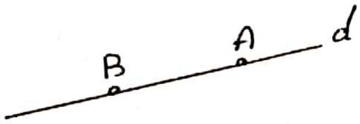
مفاهیم اولیه (تعریف نشده ها) :

درهر علم، مفاهیمی وجود دارد که آنها را بدون تعریف می پذیریم و هرکس تصوری از آنها در ذهن خود دارد. در هندسه این مفاهیم عبارتند از :

۱) نقطه : اثر قلم بر روی کاغذ است و با حروف بزرگ انگلیسی نامگذاری می شود.

A .

۲) خط : اثر قلم کنار یک راستای مستقیم بر روی کاغذ است که معمولاً با یک حرف کوچک مانند d یا با دو نقطه نشان می دهند:



خط d یا خط AB یا خط BA

تذکر مهم :

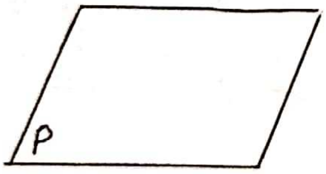
۱) نقطه صفر بُعدی است.

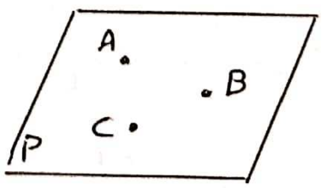
۲) خط یک بُعدی است یعنی فقط طول دارد.

۳) هر خط از دو طرف قابل امتداد است.

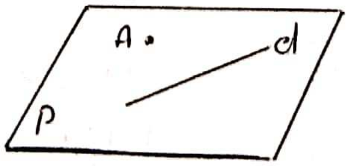
۴) روی هر خط بیشمار نقطه است.

۳) صفحه : هر سطح صاف را که معمولاً بصورت یک متوازی الاضلاع نشان می دهند را صفحه می گویند و با حروف بزرگ انگلیسی مانند P، Q، R و S نشان می دهند و به صورتهای زیر نیز قابل نمایش است :

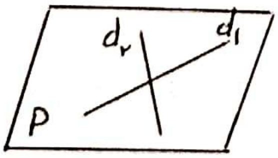




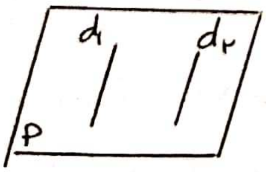
با سه نقطه غیرهم استا



با یک خط و نقطه ای خارج از آن



با دو خط متقاطع



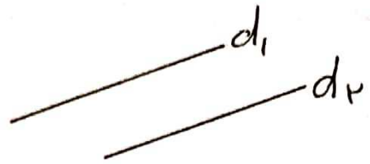
با دو خط موازی

تذکر مهم :

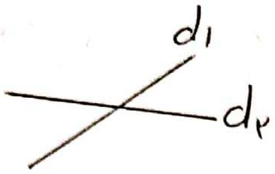
صفحه دو بُعدی است یعنی طول و عرض دارد و از چهار طرف قابل امتداد است و ضخامت ندارد

اوضاع نسبی دو خط در صفحه:

الف) موازی‌اند؛ یعنی هیچ نقطه مشترکی ندارند و همدیگر را قطع نمی‌کنند.

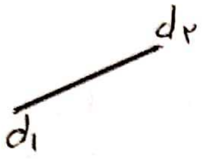


$d_1 \parallel d_2$



ب) متقاطع‌اند؛ یعنی در یک نقطه مشترک‌اند.

$d_1 \nparallel d_2$

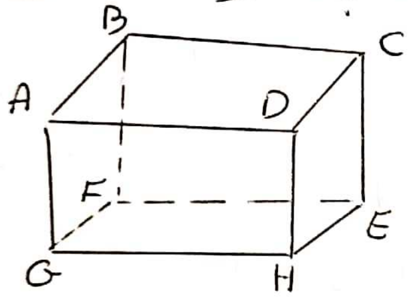


ج) منطبق‌اند؛ یعنی بی‌شمار نقطه مشترک دارند.

$d_1 = d_2$

اوضاع نسبی دو خط در فضا:

الف) موازی‌اند: هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند و صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد.



$AB \parallel CD \parallel EH \parallel GF$

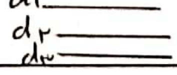
ب) متقاطع‌اند؛ یک نقطه مشترک داشته باشند و صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد. مانند AB و BC

ج) منطبق‌اند: بی‌شمار نقطه مشترک داشته باشند و صفحه‌ای وجود داشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد.

د) متنافرند: هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند و هیچ صفحه‌ای وجود نداشته باشد که شامل هر دوی آنها باشد. مانند AB و EF

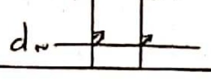
تذکر مهم: در یک صفحه:

۱) دو خط موازی با یک خط باهم موازی‌اند



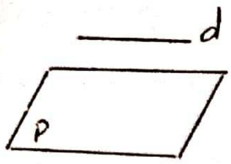
$d_1 \parallel d_2,\ d_3 \parallel d_2 \Rightarrow d_1 \parallel d_3$

ب) دو خط عمود بر یک خط باهم موازی‌اند

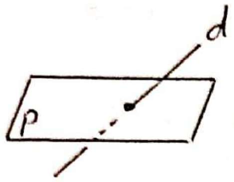


$d_1 \perp d_3,\ d_2 \perp d_3 \Rightarrow d_1 \parallel d_2$

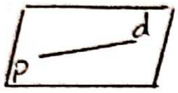
اوضاع نسبی خط و صفحه



۱) موازیند: خط و صفحه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند.

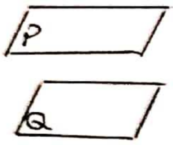


۲) متقاطع‌اند: خط و صفحه در یک نقطه مشترک باشند.

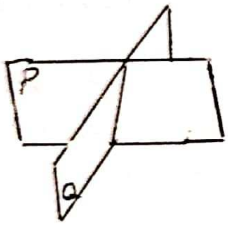


۳) منطبق اند: خط و صفحه بیشمار نقطه مشترک داشته باشند.

اوضاع نسبی دو صفحه



۱) موازیند: دو صفحه هیچ نقطه مشترکی باهم نداشته باشند.



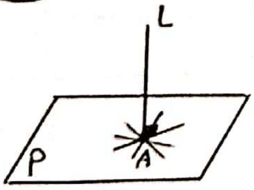
۲) متقاطع‌ند: دو صفحه در یک خط راست مشترک باشند.
(بیشمار نقطه مشترک داشته باشند).

خط راستی که اشتراک دو صفحه متقاطع است را فصل مشترک آن دو صفحه می نامند.

۳) منطبق اند: دو صفحه بیشمار نقطه مشترک داشته باشند.

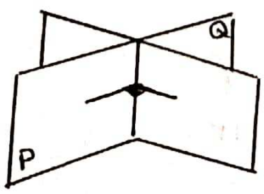
تعامد:

تعریف ۱: خط L را بر صفحه‌ی P عمود می‌گویند هرگاه خط L در نقطه‌ای مانند A صفحه را قطع کند و بر تمام خطهای صفحه P که از نقطه A می‌گذرند عمود باشد.



تعریف ۲:

دو صفحه را برهم عمود می‌گویند هرگاه هرکدام شامل خطی باشد که بر دیگری عمود است.



تذکر مهم:

۱) دو خط عمود بر یک صفحه باهم موازیند.

۲) دو صفحه عمود بر یک صفحه باهم موازیند.

۳) دو صفحه‌ی عمود بر یک خط باهم موازیند.

۴) اگر خطی بر یکی از دو صفحه موازی عمود باشد بر دیگری نیز عمود است

۵) اگر یکی از دو خط موازی بر صفحه‌ای عمود باشد خط دیگر هم بر صفحه عمود است.

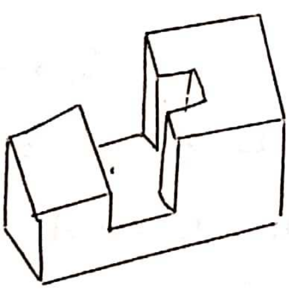
«تمرین»

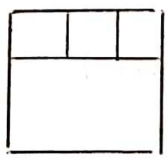
تفکر تجسمی: تصویری که از هر شکل یا جسم در جهت های مختلف در ذهن هر شخص نقش می بندد را یک تفکر تجسمی می گویند

۱) تصویر یک توپ فوتبال از بالا به چه شکلی است؟ دایره

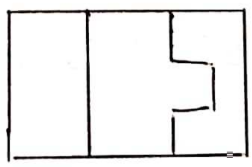
۲) تصویر یک مکعب از روبرو به چه شکلی است؟ مربع

تمرین: در شکل زیر نمای بالا، روبرو و سمت چپ را رسم کنید.

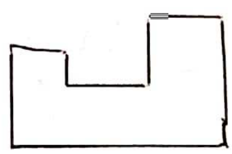




نمای چپ



نمای بالا



نمای روبرو

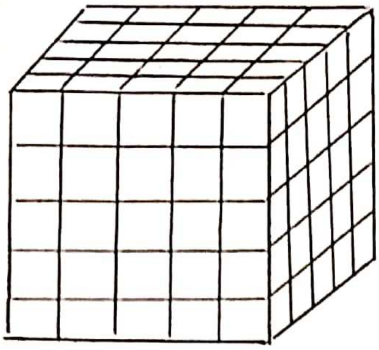
نکته ریاضی: اگر یک مکعب بزرگ را به مکعب های کوچک مساوی تقسیم کنیم و آن را رنگ بزنیم:

تعداد مکعب هایی که از ۳ طرف رنگ می شوند = ۸ تا

〃 〃 〃 یک طرف 〃 〃 = ^{۲}(بعد − ۲) × ۶

〃 〃 〃 ۲ 〃 〃 = (بعد − ۲) × ۱۲

〃 〃 بدون رنگ هستند = ^{۳}(بعد − ۲)



تمرین: هر بُعد یک مکعب بزرگ را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کرده و آن را به مکعب های کوچک مساوی تبدیل می کنیم:

الف) چند مکعب کوچک در شکل وجود دارد؟

جواب $= 5\times5\times5=125$

ب) چند مکعب سه وجه رنگ شده دارد؟

جواب $= 8$ تا

ج) چند مکعب فقط یک وجه رنگ شده دارد؟ $(5-2)^2\times6=9\times6=54$

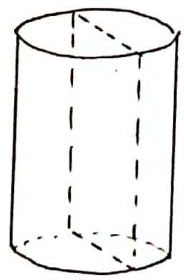
د) چند مکعب فقط دو وجه رنگ شده دارد؟ $(5-2)\times12=3\times12=36$

هـ) چند مکعب رنگ نشده است؟ $(5-2)^3=3^3=27$

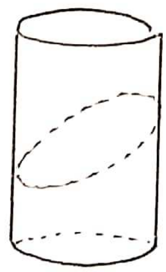
و) چند مکعب رنگ شده است؟ $125-27=98$

برش:

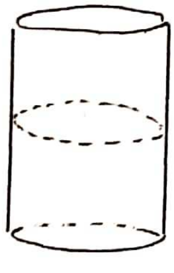
سطح مقطع: شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می شود سطح مقطع آن نامیده می شود.



سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه عمودی، مستطیل است.



سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه مایل، بیضی است.



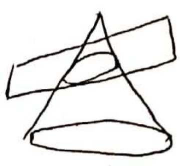
سطح مقطع استوانه در برخورد با صفحه افقی، دایره است.

نکته ریاضی:

سطح مقطع یک مخروط قائم در برخورد با صفحه های افقی و مایل به شکل های زیر است.

مقاطع مخروطی

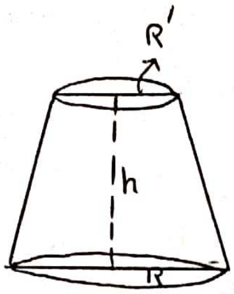
سهمی



بیضی

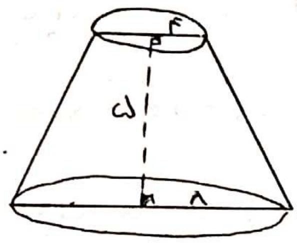
دایره

مخروط ناقص:



اگر مخروط قائمی را با صفحه‌ای موازی قاعده آن برخورد دهیم، مخروط به دو قسمت تقسیم می‌شود که قسمت زیرین آن را مخروط ناقص می‌نامند که حجم آن از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$V=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+R'^2+RR'\right)$$



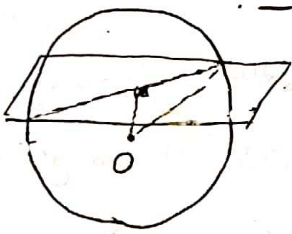
تمرین: حجم مخروط ناقص زیر را حساب کنید.

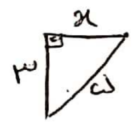
$R=8$
$R'=4$
$h=5$

$$V=\frac{\pi\times 5}{3}\left(8^2+4^2+4\times 8\right)=\frac{5\pi}{3}\times 112=\frac{560\pi}{3}$$

تمرین ۳ ص ۹۴:

صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتیمتر را قطع کرده است. اگر فاصله‌ی نقطه O از صفحه ۳ سانتیمتر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟





$$x^2=5^2-3^2=25-9=16 \Rightarrow \boxed{x=4}$$

مساحت سطح مقطع $=\pi r^2=\pi\times 4^2=16\pi$

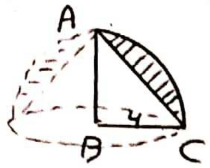
دوران حول محور:

خط ثابتی به نام محور دوران را در نظر می‌گیریم و شکل مشخصی را حول (اطراف) آن می‌چرخانیم، حجمی ایجاد می‌شود که به این حجم دوران یافته شکل حول آن خط می‌گوئیم:

مثال۱) از دوران نیم دایره حول قطرش کره ایجاد می‌شود.

مثال ۲: از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض اش استوانه ایجاد می‌شود.

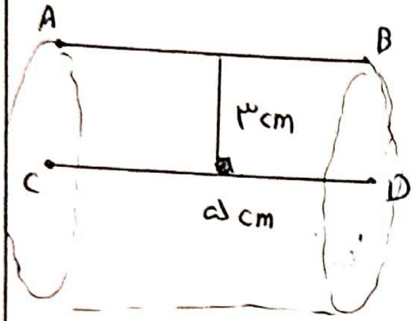
مثال ۳: از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول اضلاع قائم آن یک مخروط ایجاد می‌شود.



تمرین: حجم حاصل از دوران سطح هاشور خورده حول ضلع AB را بدست آورید.

$$\text{حجم هاشور خورده} = \text{حجم نیمکره} - \text{حجم مخروط} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

$$= \frac{2}{3} \pi (4)^3 - \frac{1}{3} \pi (4)^2 (4) = \frac{1}{3} \pi (4)^3 = 72\pi$$

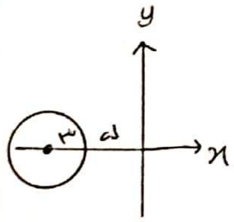


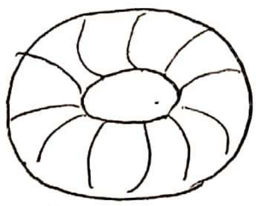
تمرین: دو پاره خط موازی AB و CD به طولهای ۵cm و به فاصلهٔ ۳cm از هم وجود دارند. اگر پاره خط AB را حول CD دوران دهیم، حجم شکل دوران یافته را حساب کنید.

حل: حجم حاصل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۳cm و ارتفاع ۵cm است.

$$V = \pi r^2 h = \pi \times 3^2 \times 5 = 45\pi$$

تمرین: از دوران شکل مقابل حول محور yها چه شکلی حاصل می‌شود؟ آن را رسم کنید.



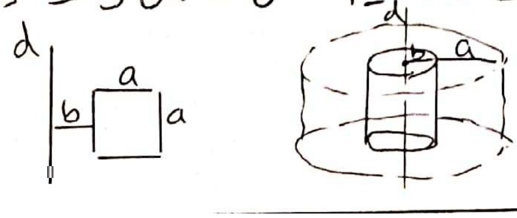


تیوب (چنبره)

تمرین: دو خط متقاطع را مطابق شکل در نظر می‌گیریم، اگر یکی از خطوط را حول دیگری دوران دهیم چه جسم هندسی ساخته می‌شود.

جواب: دو مخروط که در یک راس مشترکند.

تمرین: مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.



شکل حاصل یک استوانه بزرگ است که در وسط آن سوراخی به شکل یک استوانه کوچک وجود دارد.