

۱. هدف

هدف ما تعیین جدول زمان بندی ورود و خروج اتوبوسها است به نحوی که کمیتی که ما اسمش رو انرژی میذاریم، کمینه بشه. توجه کن که این سیستم برای BRT یا مترو یکسانه. بنابراین من گاهی اوقات برای اینکه تایپ قطار راحت تر از اتوبوسه، از قطار به جای اتوبوس استفاده می کنم. هم چنین به BRT هم میگم مترو.

۲. نمایش متغیرها و پارامترها

توی این کدها، من به هر قطار و ایستگاه یه شماره دادم. جدول زمان بندی در اصل ماتریسی خواهد بود که میگه هر قطار در چه زمانی به این ایستگاهها میرسه. متغیرهای این ماتریس هم زمان خواهند بود. ضمناً به ازای هر ایستگاه دو بردار تعریف میشه. یکی نرخ ورود مسافر به ایستگاه و یکی دیگه احتمال خروج مسافر در این ایستگاه. در واقع شماره ای ایستگاه، مولفه های این بردارها. یه سری اسکالر هم این وسط تعریف میشن که به موقع معرفی شون میکنیم.

۳. مقدمه

با سیستم های مترو آشنا هستیم. از زمانی که یک مسافر وارد ایستگاه میشه تا زمانی که از قطار پیاده میشه، زمان سفر اون مسافر خواهد بود. توجه کنید که ما زمان انتظار برای رسیدن قطار رو هم جزو سفر در نظر گرفتیم. چون اگر شما بخواید بهینه تر بودن استفاده از یک سیستم حمل و نقلی رو توی ذهن خودتون مرور کنید، زمان انتظار برای رسیدن قطار هم براتون مهم خواهد بود.

این زمان سفر از چند قسمت تقسیم شده:

۱. زمانی که شما در انتظار رسیدن قطار هستید. t_1

۲. زمانی که قطار برای سوار و پیاده کردن مسافران دیگه داخل ایستگاه های دیگه در توقفه. t_2

۳. زمانی که شما در بین ایستگاه ها در حال حرکت هستید. t_3

ما مجموع این سه زمان رو برای تمامی مسافران، و برای تمامی قطارها حساب می کنیم. اسمش رو میذاریم انرژی. هدفمون اینه که این مجموع کمینه بشه. این کمیت در واقع نفر-زمان سفره.

۴. فرض ها و مدل سازی

ما برای سادگی یک خط یک طرفه رو در نظر گرفتیم. خطی که اتوبوس ها از یک منبع به اون تزریق می شن و بعد از رسیدن به انتهای خط، از اون خارج میشن.

ورود و خروج مسافران

ما فرض کردیم که مسافرا با λ به نرخ که تابع زمان و شماره ایستگاه، وارد ایستگاه میشن. ضمناً ما فرض کردیم وقتی قطاری به ایستگاه خاصی می‌رسه، کسر β مسافران (که فقط تابع شماره ایستگاه)، تو اون ایستگاه پیاده میشن. میشد این رو هم به جای احتمال، تعداد گرفت اما کار سخت میشد. میشد از اول یه سری احتمال تعریف کرد مثل این که اونی که ایستگاه i سوار میشه با چه احتمالی تو j پیاده میشه... اما بازم سخت میشد (یه گروهی داره رو این کار می‌کنه).

رضایت مسافران

برای ما رضایت مسافران مهمه. رضایت رو با ایستاده یا نشسته بودن اون‌ها مدل می‌کنیم. به این معنی که اگر یک نفر نشسته باشه، ضریب رضایت یا آسودگیش برابره با ۱ و اگر ایستاده باشه، صفر. بنابراین توی یک قطار یک ضریب رضایت میانگین وجود خواهد داشت. ما از این ضریب استفاده خواهیم کرد. اسم این ضریب رو میذاریم $comf$.

Headway بین قطارها

در ایستگاه‌های BRT مشاهده شده که گاهی چندین اتوبوس پشت سر هم قطار میشن که اولی در حال انفجاره و در آخری پرنده پر نمی‌زنه. بعد از رفتن این‌ها هم باید زمان زیادی رو صبر کرد تا (قطاری از) اتوبوس‌های بعدی بیان. به نظر میاد اگر یک فاصله‌ی زمانی معقولی بین اون‌ها باشه، هم زمان انتظار کم میشه و هم جمعیت به نحو مناسب‌تری توزیع میشن. بنابراین ما یک شرط هدوی روی اتوبوس‌ها میذاریم:

هر اتوبوس با اتوبوس بعدی باید حداقل به میزان مشخصی فاصله داشته باشه (tb). ما این رو برای سادگی این طوری اعمال می‌کنیم که در زمان ورود هر اتوبوس به ایستگاه، اتوبوس قبلی باید حداقل tb واحد زمانی، زودتر از ایستگاه خارج شده باشه. وجود این شرط تضمین می‌کنه که اتوبوس‌ها با همون ترتیبی که وارد سیستم میشن، وارد ایستگاه‌ها هم میشن. به عبارتی اتوبوس‌ها از هم سبقت نمی‌گیرن.

زمان کاری

زمان کاری خط محدوده. این قید واقعی نیست. اما مشخص کننده‌ی اینه که انرژی قطارها رو تا کی باید با هم جمع زد. منظور از کی، اینه که تا چه شماره قطاری. در واقع ما باید بدونیم که کدوم قطار، آخرین قطاره. دو تا پیشنهاد هست.

۱. یکی این که بذاریم اون قدری قطار بیاد که تمامی مسافرای داخل ایستگاهو جمع کنه و ببره. اون قطاری که آخرین مسافرا رو می‌بره، آخرین قطاره. الان کد تقریباً این جوریه.
۲. یکی دیگه اینه که هر ساعت از یه حد معینی گذشت، دیگه قطاری به سیستم تزریق نشه. در واقعیت سیستم مترو این طوریه. اگه مسافری تو ایستگاه باشه، اجباراً میره بیرون.

۵. قیدهای روی سیستم

اگر منابع بی‌نهایت بودن، ما دوست داشتیم به ازای هر مسافر یک قطار میومد که با سرعت بی‌نهایت مسافر رو به مقصد می‌رسوند. این طبیعتاً میشه بهینه‌ترین حالت. اما ما یک سری محدودیت داریم.

۱. هدوی بین قطارها باید برقرار بمونه. یعنی وقتی به قطاری تو ایستگاه، هیچ قطاری نباید وارد بشه.

۲. سرعت قطارها نمی‌تونه از یک حدی بیشتر باشه. در اصل می‌تونه اما جریمه/مصرف بالای سوخت و... داره. برای این اعمال این قضیه، یک سرعت زمان متوسط سفر $tbar$ بین دو ایستگاه تعریف می‌کنیم که به عنوان ورودی به سیستم میدیم. اگه زمان سفر واقعی، از این کمتر بود، متناسب با این میزان اختلاف، انرژی مربوط به زمان سفر با یه تابعی افزایش پیدا می‌کنه. این تابع احتمالا ترکیبی از میزان مصرف سوخت+فرسایش^۱.
۳. سرعت قطارها نمی‌تونه از یک حدی هم کمتر باشه. میشه روی این هم جریمه گذاشت. اما من تو کد این کار رو نکردم. به هر حال اگه سرعت کم باشه، زمان سفر طولانی میشه و انرژی خود به خود بالا میره. اگر واقعا این کار به جز بالا بردن زمان سفر هزینه‌ی دیگه‌ای داشته باشه، باید به صورت جریمه با یه تابعی مدلش کنیم.
۴. ظرفیت قطارها محدوده. این باعث میشه که بعد از یه مدتی این امکان پیدا بشه که قطار کاملا پر بشه. در نتیجه مسافرا باید برای قطار بعدی منتظر بمونن. علاوه بر این برای قطارها دو نوع ظرفیت در نظر گرفتیم. ظرفیت صندلی و ظرفیت ایستاده. سر همین موضوع، بخش رضایت مندی پیش میاد.
۵. ظرفیت قطارها هم ضمنا محدوده. این رو ما تصمیم گرفتیم به این شکل مدل کنیم که در هر زمان، تعداد محدودی قطار داخل خط باشن. در واقع وقتی قطارها به پایان خط رسیدن، بازیافت میشن و دوباره از اول خط وارد سیستم میشن. یک جور شرط دوره‌ای. با این حال این که تعداد این قطارها چندتاس، جواب رو عوض می‌کنه. پس ما باید به ازای تعداد قطارهای متفاوت ران بگیریم.

۶. روش بهینه سازی

خوب. ساختار مساله طوریه که اگه ورودی‌ها (نرخ و ورود و احتمال خروج) رو بدیم، فقط و فقط با تعیین زمان ورود اولین قطارها به سیستم، کل آینده‌اش تعیین میشه. در نتیجه انرژی‌ش هم تعیین میشه. یعنی با فرض این که مثلا من ۵ قطار تو سیستم دارم، کافیه بگم که این ۵ قطار در چه زمان‌هایی وارد سیستم بشن. بعدش خودش خودکار تحول پیدا می‌کنه و جدول زمان‌بندی من به صورت یکتا (البته تحت این فرض‌هایی که کردیم) مشخص میشه.

اما ما می‌خوایم دقیقا درایه‌های این ماتریس رو اندکی تغییر بدیم و بعد با مونت کارلو، ببینیم که چه بلایی سر انرژی میاد. مثلا ما می‌تونیم یه درایه رو رندوم انتخاب کنیم و کمی تغییرش بدیم. یعنی قطاری که وارد ایستگاه میشه، بهش بگیم کمی زودتر یا دیرتر بیا. در این صورت تعداد آدم‌هایی که تا قبل از ورود قطار وارد ایستگاه شدن، با حالت قبل فرق می‌کنه، در نتیجه زمان لازم برای سوار و پیاده شدنشون هم فرق می‌کنه. در نتیجه قطار ممکنه دیرتر یا زودتر راه بیفته. در نتیجه ممکنه زودتر یا دیرتر برسه به ایستگاه‌های بعدی و همین روند توی اون‌ها هم تکرار بشه. در واقع یک تغییر کوچیک توی یه قسمتی از سیستم تا انتها خودش رو به صورت یه بهمن نشون میده. البته توی یه سیستم واقعی انتظار داریم که این توی ایستگاه اول یا دوم، دمپ شه. اما به هر حال اگه پارامترها خوب تنظیم نشن، علی‌الاصول ممکنه چنین پدیده‌ای رخ بده. در نتیجه این به عنوان یه هشدار بود که تغییر چه کارها که نمی‌تونه بکنه.

خوب. برای مونت کارلو زدن، ما دو راه داریم.

۱. بیایم با رعایت قیود، یه تغییری توی یکی از درایه‌ها بدیم و بعد کل جدول رو بر اساس اون آپدیت کنیم. کد الان داره این کار رو می‌کنه که خیلی زمان‌بره.

^۱ الان که کد رو می‌دیدم، دیدم این رو توی دو جا وارد کردم که عملا اون دومیش رو کم تاثیر می‌کنه. اصلاحش می‌کنیم.

۲. بیایم با رعایت قیود یه تغییری توی یکی از درایه‌های زمان ورود قطار به ایستگاه بدیم. اما زمان خروجش رو دست نزنیم. در این صورت ممکنه یه سری از مسافرا که قبلا سوار می‌شدن، نتونن سوار بشن. ممکن هم هست که مسافرا همه سوار بشن، اما قطار یه مدت تو ایستگاه نگهشون داره و بعد راه بیفته. در این صورت ایستگاه‌های بعدی همونی که بودن می‌مونن. نیازی به آپدیت نیست، سرعت بالا میره و زمان محاسبه پایین میاد.^۲

۷. روابط موجود در مدل مساله

از نمادهای زیر برای کمیت‌های ورودی استفاده می‌کنیم

B	• تعداد قطارها:
S	• تعداد ایستگاه‌ها:
$\lambda_s(t)$	• نرخ ورود به ایستگاه λ ام:
$\beta_s(t)$	• نرخ (احتمال) خروج از قطار در ایستگاه S ام:
τ_{in}	• زمان لازم برای سوار شدن در قطار به ازای هر نفر:
τ_{out}	• زمان لازم برای پیاده شدن از قطار به ازای هر نفر:
C_0	• ظرفیت صندلی‌ها در هر قطار :
C	• ظرفیت کل در هر قطار:
t_{bar}	• مدت زمان متوسط سفر بین دو ایستگاه:
t_s	• حداقل زمان سفر بین دو ایستگاه:
t_b	• حداقل هدوی بین دو قطار

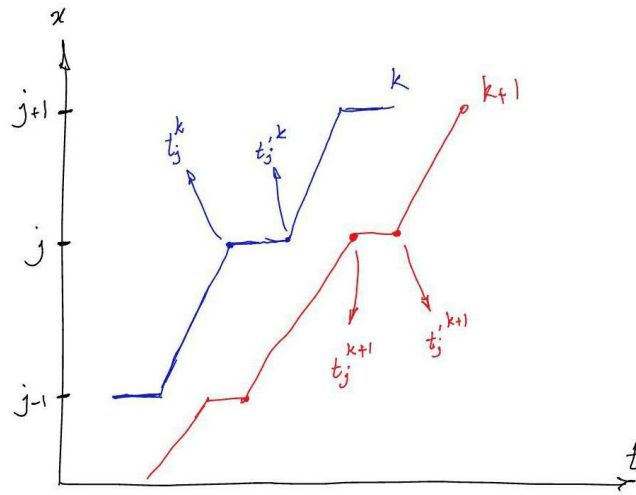
هم‌چنین کمیت‌های زیر متغیرهایی را نشان می‌دهد که در خلال برنامه تعریف و استفاده خواهند شد.

N_s^b	• تعداد مسافران در قطار b ام در حین رسیدن به ایستگاه S ام:
t_s^b	• زمان رسیدن قطار b ام به ایستگاه S ام:
$t_s'^b$	• زمان حرکت قطار b ام از ایستگاه S ام به سمت ایستگاه بعدی:
$\eta_s^b = t_s'^b - t_s^b$	• مدت زمان ایست قطار در ایستگاه S ام
n_s^b	• تعداد افراد موجود در ایستگاه S ام در حین ورود قطار b ام
$n_s'^b$	• تعداد افراد موجود در ایستگاه S ام پس از خروج قطار b ام
T	• زمان پایان کار خط

محاسبه‌ی تعداد و زمان ورود و خروج مسافران در هر ایستگاه

فرض کنید قطار b ام در زمان‌های معلوم از ایستگاه S عبور کرده و به جز مسافرانی که پس از رسیدن قطار b ام به ایستگاه رسیده‌اند، با توجه به میزان ظرفیت خالی آن، مسافران ایستگاه S ام را سوار کرده است. قصد داریم کمیت‌های مورد نیاز برای محاسبه میزان افزایش انرژی در فاصله‌ی خروج قطار b تا خروج قطار $b+1$ ، از ایستگاه S ام را برآورد کنیم.

^۲ الان که داشتیم اینو می‌نوشتیم به ذهنم رسید این! به نظرم اینو بزنیم.



با خروج قطار b ام از ایستگاه، تعداد مسافری که (از زمان رسیدن قطار b تا قطار $b+1$) به ایستگاه S اضافه می‌شوند برابر خواهد بود با

$$\Delta n_s^{b+1} = \lambda_s (t_s^{b+1} - t_s^b) \quad (1)$$

اما ممکن است تمامی مسافری، سوار قطار قبلی نشده باشند. بنابراین تعداد مسافری داخل ایستگاه S در زمان ورود قطار $b+1$ ام برابر است با

$$n_s^{b+1} = n_s'^b + \Delta n_s^{b+1} \quad (2)$$

قطار $b+1$ ام در حین ورود به ایستگاه S ، N_s^{b+1} مسافر دارد که $\beta_s N_s^{b+1}$ تعداد از آن‌ها پیاده خواهند شد. پر واضح است که اگر ظرفیت خالی قطار پس از پیاده شدن مسافری به میزان کافی باشد، تمامی مسافری داخل ایستگاه، سوار قطار خواهند شد. در غیر این صورت تنها به میزان ظرفیت خالی قطار، مسافر سوار خواهد شد و تعدادی مسافر در ایستگاه باقی خواهند ماند. این شرط را با $cond$ نشان می‌دهیم (درست بودن شرط $cond$ به معنای پر بودن قطار است).

$$cond_s^{b+1} = \begin{cases} 0. & [C - N_s^{b+1}(1 - \beta_s)] > n_s^{b+1} \\ 1. & [C - N_s^{b+1}(1 - \beta_s)] < n_s^{b+1} \end{cases} \quad (3)$$

با توجه به برقراری یا عدم برقراری شرط C ، تعداد مسافری که پس از خروج قطار $b+1$ ام در ایستگاه باقی می‌مانند برابر است با

$$n_s'^{b+1} = \begin{cases} 0. & \text{if } cond_s^{b+1} = 0 \\ n_s^{b+1} - [C - N_s^{b+1}(1 - \beta_s)]. & \text{if } cond_s^{b+1} = 1 \end{cases} \quad (4)$$

و به تبع آن تعداد مسافری که به ایستگاه $S+1$ ام می‌روند برابر خواهد بود با

$$N_{s+1}^{b+1} = \begin{cases} N_s^{b+1}(1 - \beta_s) + n_s'^{b+1}. & \text{if } cond_s^{b+1} = 0 \\ C. & \text{if } cond_s^{b+1} = 1 \end{cases} \quad (5)$$

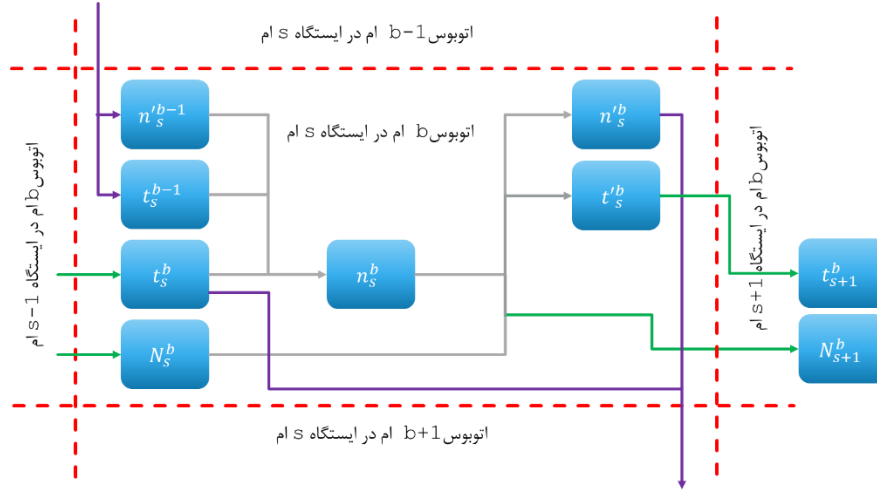
هم‌چنین، با توجه به تعداد ورود و خروج مسافری از قطار، زمان حرکت قطار $b+1$ ام از ایستگاه S برابر است با

$$t_s'^{b+1} = t_s^{b+1} + \tau_{out}\beta_s N_s^{b+1} + \tau_{in}(N_{s+1}^{b+1} - N_s^{b+1}) \quad (6-1)$$

یا به طور معادل می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد:

$$\eta_s^{b+1} = \tau_{out}\beta_s N_s^{b+1} + \tau_{in}(N_{s+1}^{b+1} - N_s^{b+1}) \quad (6-2)$$

در شکل زیر شمای رابطه‌ی بین متغیرهای گوناگون آمده است.



محاسبه‌ی افزایش انرژی

بخشی از نفر-زمان سفر، مربوط به مسافرانی که احیاناً از نتوانسته‌اند سوار قطار قبلی (قطار b ام) شوند و تا رسیدن $b+1$ امین قطار منتظر مانده‌اند. سهم انرژی مربوط به این افراد مطابق زیر محاسبه خواهد شد.

$$E_0 = n_s^{b+1}(t_s^{b+1} - t_s^b) \quad (7)$$

بخشی دیگر از نفر-زمان سفر، مربوط به مسافرانی که است که در زمان t (و قبل از ورود قطار به ایستگاه)، داخل ایستگاه شده‌اند و منتظر قطار هستند. از زمان رسیدن قطار b ام تا زمان رسیدن $b+1$ امین قطار می‌تواند تغییر کند. برای سادگی فعلاً نرخ ورودی مسافر به ایستگاه را ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین خواهیم داشت

$$E_1 = \int_{t_s^b}^{t_s^{b+1}} \lambda_s (t_s^{b+1} - t) dt = \frac{\lambda_s}{2} (t_s^{b+1} - t_s^b)^2 \quad (8)$$

تاکنون، انرژی مربوط به افرادی که تا قبل از ورود قطار، در ایستگاه بودند یا به آن وارد شده‌اند، محاسبه شده است. اکنون باید انرژی سوار یا پیاده‌شدن تعدادی از مسافران محاسبه گردد.

پس از رسیدن قطار به ایستگاه، تمامی مسافرانی که به ایستگاه بعدی می‌روند، باید منتظر سوار و پیاده شدن مسافران شوند. توجه کنید که سفر مسافرانی که در ایستگاه j پیاده می‌شوند، با رسیدن قطار به داخل ایستگاه تمام می‌شود و (این فرض معقول را می‌کنیم که) زمان پیاده و سوار شدن، در زمان سفر آن‌ها (و در نتیجه در میزان انرژی) بی‌تاثیر است.

$$E_2 = N_{s+1}^{b+1}(t_s^{b+1} - t_s^{b+1}) = N_{s+1}^{b+1} \eta_s^{b+1} \quad (9)$$

همین مسافران باید تا ایستگاه بعدی نیز سفر کنند. میزان انرژی لازم برای این کار متناسب است با

$$E_3 \propto N_{s+1}^{b+1}(t_{s+1}^{b+1} - t_s^{b+1}) \quad (10)$$

توجه کنید که در این زمان رضایت مندی مسافران مطرح خواهد شد. بنابراین اگر ضریب آسایش را به صورت گسسته‌ی صفر (برای مسافر ایستاده) و ۱ (برای مسافر نشسته) تعریف کنیم، میانگین ضریب آسایش برابر خواهد شد با

$$comf = \langle comf_p \rangle = \begin{cases} 1 & N_{s+1}^{b+1} < C_0 \\ 1 / N_{s+1}^{b+1} & N_{s+1}^{b+1} > C_0 \end{cases} \quad (11)$$

علاوه بر این سریع رفتن بیش از حد نیز جریمه خواهد داشت. اگر قطار به میزان $(t_{s+1}^{b+1} - t_s^{b+1})$ $x = t_{bar} -$ زودتر به ایستگاه بعدی برسد، می‌توان جریمه‌ای معادل به افزایش در انرژی با نرخ k را برای آن در نظر گرفت. یعنی انرژی E_3 را می‌توان بدین شکل تعریف کرد

بنابراین انرژی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$E_3 = \frac{N_{s+1}^{b+1}(t_{s+1}^{b+1} - t_s^{b+1})}{comf} (1 + kx) \quad (11)$$

هم‌چنین بخشی از مسافران که به دلیل تراکم زیاد، نمی‌توانند سوار شوند، باید در بازه‌ی سوار و پیاده شدن باید منتظر بمانند. با این حال انرژی مربوط به این افراد، در E_0 مربوط به قطار بعدی محاسبه خواهد شد و نیازی به محاسبه‌ی آن در این جا نخواهد بود.

در نهایت انرژی کلی که در ایستگاه s ام برای قطار $b+1$ ام مورد نیاز است، برابر است با

$$E_s^{b+1} = E_0 + E_1 + E_2 + E_3 \quad (12)$$

انرژی کلی که قطار $b+1$ نیاز دارد تا از ایستگاه صفرم (مبدا) به ایستگاه s (مقصد) برسد برابر با جمع این انرژی روی تمام ایستگاه‌ها (s) است.

$$E^{b+1} = \sum_{s=0}^S E_s^{b+1} \quad (13)$$

در عبارت بالا تنها متغیرها، زمان‌های ورود قطارها به هر ایستگاه هستند و با داشتن مقادیر ورودی (نرخ‌های ورود و خروج به و از هر ایستگاه و ویژه زمان‌های ورود و خروج مسافران به داخل قطار) می‌توان انرژی مربوط به هر قطار را محاسبه کرد. انرژی کل سیستم حمل و نقل، با جمع بستن روی تمامی قطارها به دست خواهد آمد.