پروژه درس دینامیک غیرخطی و آشوب

گروه ۱۰

در این مقاله سعی بر این شده که برای حرکت دسته جمعی پرندگان مدلی ریاضی ارائه شود که بتواند خواص این حرکت هماهنگ را نشان دهد. در این مدل، مکان پرندگان در فضای R^3 در نظر گرفته شده است و آنچه در عمل مشاهده می کنیم این است که تحت شرایط اولیه خاصی بر روی مکان و سرعت اولیه پرندگان، حالت پرواز پرندگان به یک حالت مشخص همگرا می شود. (برای مثال تمام پرندگان با یک سرعت پرواز خواهند کرد.) هدف از ارائه ی چنین مدلی توجیح این خواص و بدست آوردن شرایطی است که این همگرایی اتفاق می افتد.

در قدم اول، ابتدا فرض می کنیم که هر پرنده با نگاه کردن به پرنده های مجاور خود سرعت خود را تنظیم می کند. این تاثیر پذیری از همسایه ها را بصورت میانگین گرفتن از سرعت پرنده های مجاور مدل می کنیم. بنابراین اگر مکان و سرعت پرنده ی i ام در لحظه t را با x_i و v_i نشان دهیم، در لحظه ی $t+1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x_i(t+1) &= x_i(t) + v_i(t) \\ v_i(t+1) &= \frac{1}{n_i(t)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i(t)} v_j(t) \end{aligned}$$

در مدل ابتدایی تاثیر پذیرفتن یا نپذیرفتن از همسایه های مجاور را بصورت صفر و یک در نظر می گیریم. بدین صورت که اگر فاصله ی پرنده ای از یک مقدار مشخص (مثلا r) کمتر بود، سرعت پرنده ی مورد نظر ما از سرعت آن پرنده تاثیر می پذیر و اگر بیشتر از این مقدار بود سرعت پرنده ی همسایه بر روی پرنده ی مورد نظر ما تاثییری ندارد بنابراین درایه های ماتریس همسایگی بصورت زیر خواهند بود:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \|x_i(t) - x_j(t)\| \le r \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

در گام بعد و در راستای واقعی تر کردن مدل، ماتریس همسایگی را از حالت صفر و یکی خارج کرده و میزان تاثیر پذیری را بر حسب فاصله ای که دو پرنده از یک دیگر دارند فرمول بندی می کنیم و این کار را با معرفی کردن پارامتر η که خود تابعی از فاصله دو پرنده می باشد انجام می دهیم:

$$\eta(y) = \frac{K}{(\sigma^2 + y)^\beta}$$

که $\beta \geq 0$، $K, \sigma > 0$ ثابت می باشند. بنابراین درایه های ماتریس همسایگی بصورت زیر می باشد:

$$a_{ij} = \eta(\|x_i - x_j\|^2)$$

در حالتی که زمان را پیوسته در نظر بگیریم نیز می توان معادلات تحول سیستم را بصورت زیر دستگاه معدلات دیفرانسیل نوشت:

$$\begin{aligned} x' &= v \\ v' &= -L_x v. \end{aligned}$$

که L_x بصورت زیر تعریف می شود و به آن لاپلاسین A گفته می شود :

$$L = D - A$$

که ماتریس D یک ماتریس $K \times K$ قطری می باشد که درایه های آن بصورت زیر تعریف می شوند:

$$d_\ell = \sum_{j=1}^{k} a_{\ell j}$$

حال با داشتن این فرض های اولیه می توان نشان داد که اگر $x(t)$ و $v(t)$ جواب های مساله با شرایط اولیه دل خواه باشند درصورتی که $\beta < ۱/۲$ باشد آنگاه در حد $t \to \infty$ سرعت ها به یک سرعت مشخص میل خواهند کرد و بردار های $x_i - x_j$ نیز ، برای تمام i و j ها به یک بردار مشخص میل می کنند. برای حالتی که $\beta > ۱/۲$ می باشد نیز می توان نشان داد تحت شرایط اولیه خاصی این اتفاق می افتد.

در حالت پیوسته، می توان نشان داد برای سه رژیم مختلف β تحت شرایط زیر همگرایی رخ خواهد داد:

(i) $\beta < 1/2$,

(ii) $\beta = 1/2$ *and* $\Lambda_0 < \frac{(\nu K)^2}{2}$,

(iii) $\beta > 1/2$ *and*

$$\left[\left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} - \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{2\beta}{2\beta-1}}\right]\left(\frac{(\nu K)^2}{2\Lambda_0}\right)^{\frac{1}{2\beta-1}} > 2\Gamma_0 + \sigma^2$$

همان گونه که گفته شد برای حالت $\beta < ۱/۲$ این همگرایی بدون داشتن شرط بر روی حالت اولیه اتفاق می افتد(حالت (i)) و برای حالت های (ii) و (iii) این همگرایی با اعمال قید بر روی شرایط اولیه رخ خواهد داد. در معادلات بالا Γ و Λ بصورت زیر تعریف می شوند :

$$\Gamma = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \|x_i - x_j\|^2$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \|v_i - v_j\|^2$$

دقت کنید که شرایط اولیه در معادلات (ii) و (iii) در دل این دو پارامتر وجود دارند.

برای حالت گسسته نیز بصورت مشابه می توان شرایط همگرایی را بدست آورد:

$$a_{ij} = \frac{K}{(\sigma^2 + \|x_i - x_j\|^2)^{\beta}}$$

(i) $\beta < 1/2,$

(ii) $\beta = 1/2$ and $\|v(0)\| \leq \frac{\boldsymbol{\nu}\sigma^{2\beta}}{k\overline{\boldsymbol{\nu}}^{1/2}\Delta t},$

(iii) $\beta > 1/2$ and

$$\left(\frac{1}{\boldsymbol{a}}\right)^{\frac{2}{\alpha-1}} \left[\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{\alpha-1}} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}\right] > \overline{\boldsymbol{\nu}} \left(V_0^2 + 2V_0((\alpha \boldsymbol{a})^{-\frac{2}{\alpha-1}} - \sigma^2)\overline{\boldsymbol{\nu}}^{-}\right.$$

که در این معادلات پارامترها بصورت زیر می باشند:

$$V_0 := \Delta t\|v(0)\| \qquad \boldsymbol{a} = \frac{k\overline{\boldsymbol{\nu}}^{1/2}}{\boldsymbol{\nu}\sigma^{2\beta}}V_0, \qquad \boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{\nu}}^{1/2}\|x(0)\| + \sigma.$$

همان طور که در هر دو حالت پیوسته و گسسته مشاهده می شود، دینامیک برحسب پارامتر β دوشاخگی دارد و گاما و لاندا نیز سطح مقطع پوآنکاره برای دینامیک می باشند.

در انتها نیز ذکر این نکته ضروری است که دینامیک در حالاتی که همگرایی رخ می دهد به یک رویه ی ثابت و نه یک نقطه ی ثابت همگرا می شود.(برای هر شرط اولیه به یک مقدار متفاوت میل می کند) و این مدل برای مهاجرت طولانی پرندگان مناسب است چرا که همان طور که گفته شد، پس از همگرایی شکل گله ثابت می ماند.

حال هدف از این پروژه آن است که با افزودن نویز به این مدل، دینامیک سیستم را دوباره بررسی کنیم و در ادامه نمای بحرانی را برای این سیستم بیابیم. علاوه بر این در $\beta > ۱/۲$ بررسی خواهیم کرد که به جز رویه ی ثابت چه سرنوشتی برای دینامیک می تواند وجود داشته باشد. انگیزه اضافه کردن نویز به این مدل آن است که اولا مدل به آنچه در طبیعت اتفاق می افتد نزدیک تر شود و ثانیا، نتایج حاصل شده از مدل ویشک (Vicsek's model) را، که قبل تر از این مدل برای حرکت پرنده ها ارائه شده است را بازتولید کنیم. در مدل ویشک اندازه ی سرعت تمام پرنده ها یکسان فرض می شود و جهت جرکت پرنده ها با پارامتر تتا داده می شود بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t)\Delta t.$$

$$\theta(t+1) = \langle\theta(t)\rangle_r + \Delta\theta$$

$\Delta\theta$ در عبارت بالا یک عدد تصادفی می باشد که از یک تابع توزیع یکنواخت انتخاب شده است که در واقع بیانگر این واقعیت است که هر پرنده با یک خطای رندوم نسبت به میانگین جهت پرندگان اطراف خود، جهت پرواز خود را انتخاب می کند. در ادامه، با تعریف میانگین سرعت نرمال شده می توان نشان داد که همانند تغییر فازی که در سیستم های ترمودینامیکی رخ می دهد، اینجا نیز چنین تغییر فازی برای میانگین سرعت پرندکان رخ خواهد داد.

$$v_a = \frac{1}{Nv}\left|\sum_{i=1}^{N}\mathbf{v}_i\right|$$

$$v_a \sim (\eta_c(\rho) - \eta)^{\beta}$$

$$v_a \sim (\rho - \rho_c(\eta))^{\delta}$$

که در عبارات بالا η_c و ρ_c، به ترتیب نویز و چگالی بحرانی می باشند و δ و β نمای بحرانی می باشند.