

Relatório 2 - Comunicações Digitais

Gabriel Mendanha da Costa (17/0010571), Gabriel Williams Silva de Mendonça (17/0143121), Felipe Rodrigues Sobrinho (17/0141764)

I. INTRODUÇÃO

As comunicações digitais são muito utilizadas atualmente devido a sua boa performance frente as distorções causadas pelo canal ao sinal e por conta da evolução do poder de processamento dos dispositivos. Este último é um facilitador quando é necessário o uso de diversos protocolos de comunicação para manter um enlace confiável.

Assim, esse trabalho visa mostrar o funcionamento principal da modulação QPSK (*"Quadrature-Phase-Shift Keying"*) e das suas variantes *Offset-QPSK* (O-QPSK) e $\pi/4$ - QPSK. A modulação QPSK, por sua vez, é uma variação da modulação PSK (*"Phase-Shift Keying"*), que consiste em modular a informação da mensagem na fase. Após a caracterização matemática da modulação, serão desenvolvidos alguns algoritmos que permitam simular o comportamento do esquema de comunicação sem a interferência do canal. Por último, será feito um comparativo do erro gerado nas modulações apresentadas neste trabalho quando submetidas ao acréscimo de um ruído branco, caracterizando um canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*).

II. QPSK

Na modulação por defasagem em quadratura, a informação transportada pelo sinal transmitido está contida na fase da portadora senoidal, que por sua vez, assume valores igualmente espaçados em $\pi/2$. Essa modulação é mais vantajosa, quando comparada às modulações ASK/PAM binárias, por serem mais eficientes na utilização da banda, já que dobra-se a capacidade do canal por utilizar a componente em quadratura do sinal. Tal esquema pode ser interpretado como dois moduladores binários PSK em paralelo, como será visto a diante. Para este conjunto de valores o sinal transmitido é definido pela equação geral 1[1].

$$s_i(t) = g(t) \cos\left(\frac{2\pi}{M}(m-1)\right) \cos(2\pi f_c t) - g(t) \sin\left(\frac{\pi}{2}(m-1)\right) \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (1)$$

onde E é a energia do sinal transmitido por símbolo, $g(t)$ é o formato do pulso (retangular no caso), M é o índice de modulação, m é associado à fase de um símbolo específico e T_s é a duração do símbolo. Como para o QPSK há quatro valores possíveis de fase, pode-se utilizar quatro símbolos e portanto o índice de modulação é $M = 4$. Portanto, para esse esquema de modulação, cada valor de fase corresponde a um par de bits (dibit). De forma a aumentar a robustez a erros de transmissão, é adotado o código gray como o codificador dos dados, pois esse método permite a mudança de apenas um único bit na sequência de números. Sabe-se que a energia média de um pulso é dada pela 2, já que a amplitude da portadora permanece inalterada para os diferentes símbolos.

$$\varepsilon_{avg} = \varepsilon_m = \frac{1}{2}\varepsilon_g \quad (2)$$

Em 1, temos a expressão da portadora nas componentes $\cos(2\pi f_c t)$ e $\sin(2\pi f_c t)$, que são ortogonais. Normalizando-as em energia unitária, tem-se que as funções de base são dadas pelas equações em 3[1].

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \quad (3)$$

$$\phi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (4)$$

Temos, por fim, a expressão dada pela equação 5.

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_g}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(m-1)\right) \phi_1(t) + \sqrt{\frac{\varepsilon_g}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(m-1)\right) \phi_2(t) \quad (5)$$

É possível ver a partir da equação 5 que temos uma componente em fase e outra em quadratura, o que resulta no diagrama de espaço de sinais visto na figura 1. Nota-se que em cada um dos símbolos, uma das componentes é zero no QPSK.

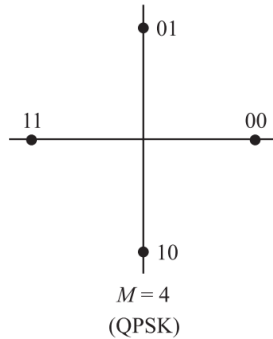


Figura 1. Diagrama de espaço de sinal do esquema QPSK.

A distância euclidiana entre os pontos de sinais é dada pela expressão 6.

$$d_{mn} = \sqrt{\|s_m - s_n\|^2} \quad (6)$$

Sabendo que a distância mínima corresponde a $|m - n| = 1$ tem-se a distância mínima dada pela equação 7. Com isso, sabe-se que a distância entre os símbolos está diretamente relacionada apenas com a energia empregada em cada símbolo.

$$d_{min} = \sqrt{\varepsilon_g \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\varepsilon_g} \quad (7)$$

Na figura 2, é mostrado o diagrama em blocos do transmissor QPSK. Como visto na figura 1, cada função de base comporta um par de símbolos. Nesse sentido, o demultiplexador é responsável por direcionar corretamente cada símbolo para a respectiva componente, seja em fase ou quadratura. Essa separação acaba por separar os díbits ímpares dos díbits pares gerados pelo codificador NRZ. Em seguida, cada onda é somada e o sinal QPSK está pronto para ser transmitido.

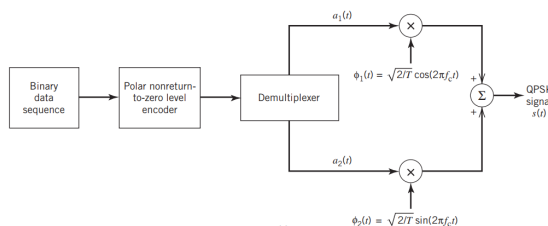


Figura 2. Diagrama em blocos simplificado do transmissor no esquema QPSK.

A formação do sinal QPSK também pode ser visto na figura 3. O conjunto de bits 01101000 é enviado para o modulador. O multiplexador então realiza a separação dos díbits em pares e ímpares, onde os ímpares são enviados para o caminho superior (em fase) da figura 2 e os pares para o caminho inferior (em quadratura). A saída dos dois caminhos podem ser vistas na figura 3b e 3c, assim como os respectivos díbits atribuídos. A saída então, é a soma dos dois sinais. Note, na figura 3d, que a portadora é mantida constante quando os bits em fase e em quadratura não mudam; defasam 180° quando ambas as saídas mudam; e defasam 90° quando dois bits são modificados. Note que no segundo caso, há uma variação abrupta na amplitude do sinal, que será uma das fontes de erro desse tipo de modulação[2].

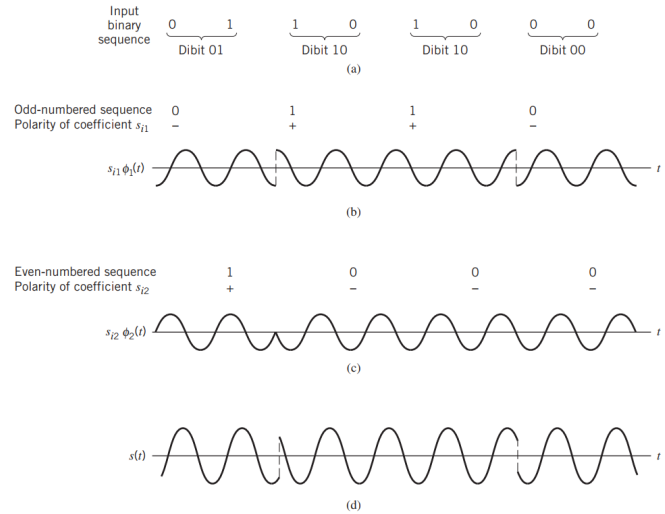


Figura 3. Formas de onda durante a formação do sinal modulado utilizando o esquema QPSK.

O processo de demodulação do sinal é bastante parecido com o processo de demodulação PSK tradicional. No caso do QPSK, o sinal recebido passa por um caminho superior que é multiplicado por uma função de base senoidal sincronizada com a componente em fase do transmissor e um caminho inferior, que é multiplicado por uma função de base senoidal sincronizada com a componente em quadratura. Isso caracteriza um receptor síncrono, ou coerente. As saídas das multiplicações são dadas por meio das variáveis x_1 e x_2 vistas na figura 4.

Depois da etapa de correlação, os sinais x_1 e x_2 gerados passam por um par de dispositivos de decisão. Basicamente, se o valor de $x_1 > 0$, então o símbolo 1 será utilizado para a saída em fase, o

contrário, determinará que o símbolo de saída será 0. As mesmas decisões são feitas para o canal em quadratura[2].

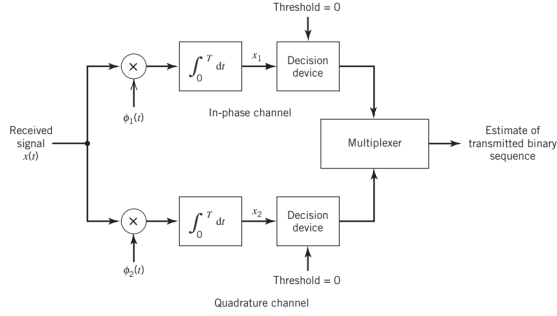


Figura 4. Diagrama em blocos simplificado do receptor síncrono no esquema QPSK.

Por fim, há um multiplexador que combina as sequencias dos dispositivos de decisão. O resultado produzido é então o estimado ao binário original transmitido.

Sabendo que o esquema PSK apresenta uma probabilidade de erro dada pela equação 8 e que o esquema QPSK é na verdade o uso de dois moduladores PSK em paralelo, podemos utilizar essa mesma expressão para estimar a probabilidade de erro das componentes em fase e em quadratura do modulador QPSK.

$$P' = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (8)$$

Os canais são independentes, logo o erro também é independente. Para calcular o erro combinado das duas utilizamos a equação 9.

$$\begin{aligned} P_c &= (1 - P')^2 \\ &= \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)\right]^2 \\ &= 1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) + Q^2\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (9)$$

Onde Q é a Q -function, formalmente definida como

$$\begin{aligned} Q(x) &= 1 - F_X(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \end{aligned}$$

A probabilidade média de erro de símbolo para o QPSK é dada pela equação 10.

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P_c \\ &= 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Numa região em que $(E/N_0 \gg 1)$, então o termo quadrático pode ser desconsiderado na equação 10. Se utilizarmos o código gray para a geração do binário, então a BER resultante é dada na forma 11.

$$BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \quad (11)$$

Dado ainda que a componente em fase e em quadratura são independentes, a densidade espectral de potência será a soma das densidades individuais. Como é bem conhecido a densidade espectral de potência da modulação PSK, temos a densidade do QPSK dada pela equação 12.

$$S_B(f) = 4E_b \text{sinc}^2(2T_b f) \quad (12)$$

III. $\pi/4$ -QPSK

Diferentemente do esquema de modulação QPSK convencional, o esquema $\pi/4$ - QPSK realiza uma rotação no diagrama de estados de sinais em $\pi/4$. Isso facilita a sincronização do símbolo, uma vez que o símbolo é composto sempre pela composição entre as componentes em fase e em quadratura, como visto na figura 5. Nesse caso o símbolo pode ser dado por meio da equação

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E}{T}} \cos\left[2\pi f_c t + (2i - 1)\frac{\pi}{4}\right], i \in [1, 4] \quad (13)$$

onde E é a energia do sinal transmitido por símbolo e T é a duração do símbolo. Note que para essa modulação não foi inserido a função, uma vez que o processo utilizado para modulação envolve o uso da técnica NRZ (Non-Return Zero) seguido de um demultiplexador para realizar o mapeamento dos símbolos. Para tal esquema, também será utilizado a representação em código *gray*, definida pelos símbolos 10, 00, 01 e 11.

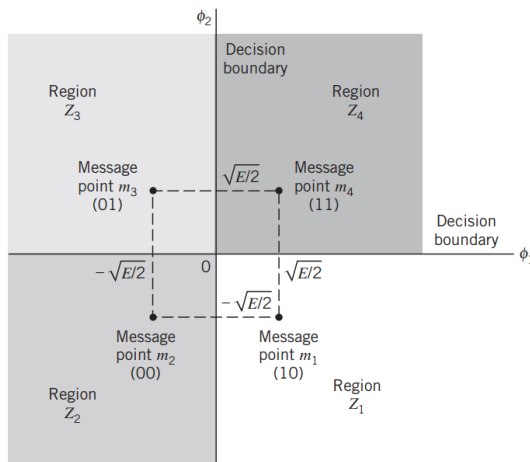


Figura 5. Diagrama de espaço de sinal do esquema QPSK.

A tabela da figura 6 sumariza a relação entre os símbolos e as fases.

Table 7.2 Signal-space characterization of QPSK

Gray-encoded input dibit	Phase of QPSK signal (radians)	Coordinates of message points	
		s_{I1}	s_{I2}
11	$\pi/4$	$+\sqrt{E/2}$	$+\sqrt{E/2}$
01	$3\pi/4$	$-\sqrt{E/2}$	$+\sqrt{E/2}$
00	$5\pi/4$	$-\sqrt{E/2}$	$-\sqrt{E/2}$
10	$7\pi/4$	$+\sqrt{E/2}$	$-\sqrt{E/2}$

Figura 6. Caracterização do espaço de sinais em relação ao código gray implementado.

O esquema de modulação pode ser visto na figura 7. O primeiro passo é realizar a codificação do sinal para o formato de onda necessário e em consonância com o código gray. Isso é feito a partir do bloco NRZ coding, que realiza a codificação do sinal. Logo depois, os dibits pares e ímpares são separados em dois braços, que passam por uma etapa de sobreamostragem e depois são adequadas a um pulso de formato qualquer. O pulso implementado então foi o retangular. Por último, o sinal é deslocado em frequência por meio da multiplicação dos pulsos por senoides em fase e em quadratura, e então é somado, gerando o sinal $\pi/4$ -QPSK.

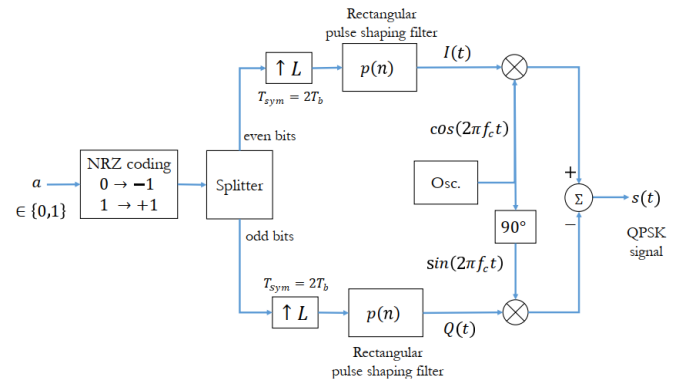


Figura 7. Diagrama em blocos do modulador $\pi/4$ -QPSK.

Já o diagrama em blocos para o demodulador pode ser visto na figura 8. O primeiro passo é multiplicar o sinal recebido por duas senoides (em fase e em quadratura), que está em sincronia com o transmissor. Isso caracteriza o demodulador como síncrono. Após, é realizada uma integração no sinal, e então amostrado em intervalos de tempo de símbolo ($2 \cdot T_b$). Após a amostragem, o valor é comparado, e se for maior que um, resultará no bit 1; o contrário, resultará no bit 0. Os bits são recombinados em pares e ímpares, resultando nos bits transmitidos estimados[3].

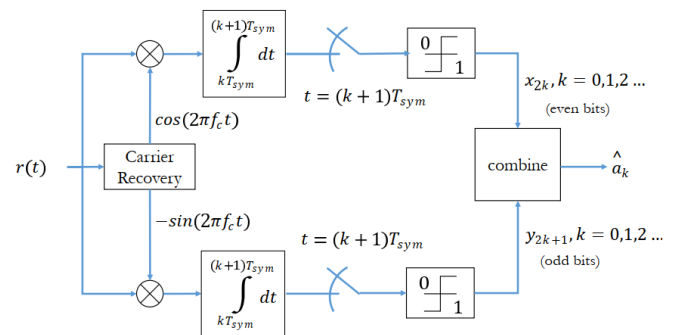


Figura 8. Diagrama em blocos do modulador $\pi/4$ -QPSK[3].

A distância entre símbolos e a probabilidade de erro teórico segue sendo os mesmos visto na seção II.

IV. O-QPSK

Embora o QPSK possuir certa robustez, existe a fragilidade da fase de portadora que pode haver uma inversão de $\pm 180^\circ$ ou $\pm 90^\circ$ a cada duração de dois dibits, o que traz descontinuidade na detecção de envoltória que pode flutuar no sinal QPSK. Quando o sistema de transmissão de dados contém

componentes não lineares, flutuações deste tipo são indesejáveis pois elas tendem a distorcer o sinal recebido.

Tendo em vista este problema, utiliza-se uma variante do chaveamento em quadratura de fase, chamado de chaveamento em quadratura de fase deslocada (OQPSK, offset quadriphase-shift keying) em que o fluxo de bits em quadratura sofre um deslocamento relativo de um período de bit T_b , ou seja, de metade do intervalo de símbolo T . Com o O-QPSK, os instantes em que ocorrem transição no símbolo em fase e em quadratura estão deslocados, portanto, não há possibilidade de ocorrer uma transição simultânea de fase e quadratura, limitando a alteração de fase máxima em $\pm 90^\circ$, como é mostrado na figura 9. Com isto, tem-se a seguinte expressão:

$$s_m(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_g}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}(m-1)\right)\phi_1(t) + \sqrt{\frac{\varepsilon_g}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2}(m-1)\right)\phi_2\left(t - \frac{T_{sym}}{2}\right) \quad (14)$$

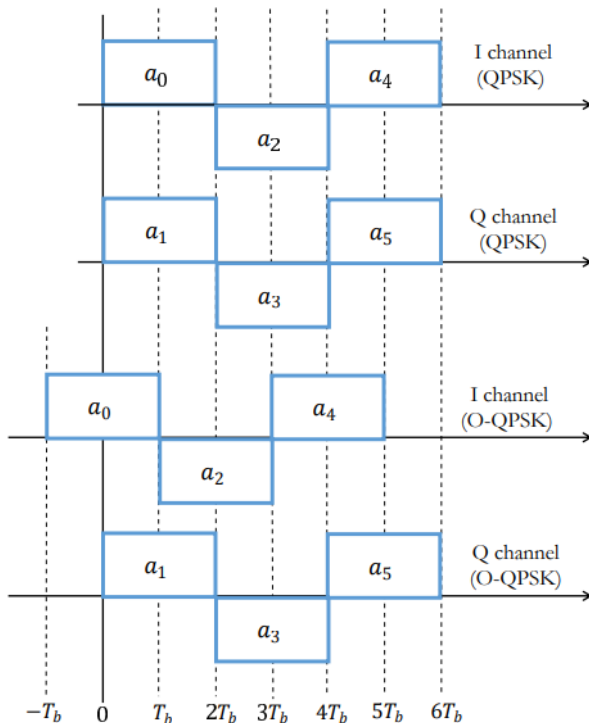


Figura 9. Comportamento do atraso do O-QPSK.

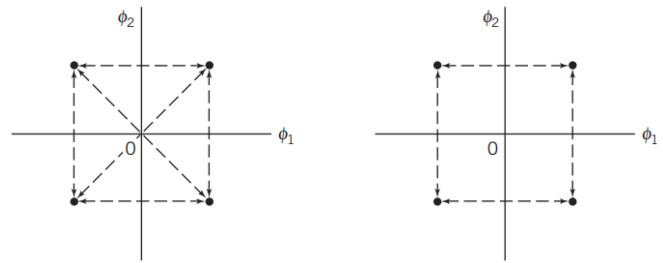


Figura 10. Diagrama de espaço de sinal do esquema QPSK.

Quanto a modulação, nota-se que é a mesma utilizada na QPSK, porém com um atraso de 90° , como demonstrada na expressão 14. Quanto a demodulação também será igual a QPSK com a diferença no tempo de chaveamento. A figuras 11 e 12, demonstram o processo de modulação e demodulação respectivamente.

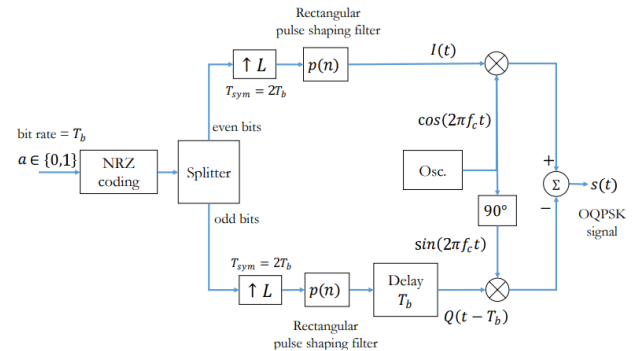


Figura 11. Modulação O-QPSK.

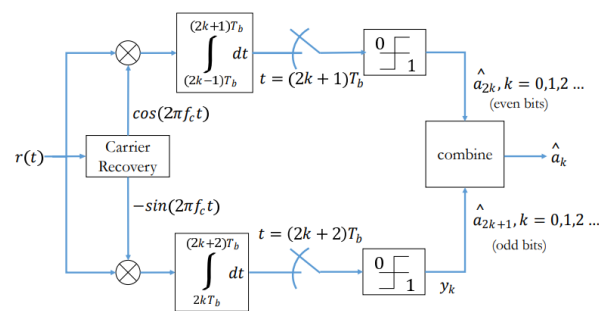


Fig. 2.15: OQPSK demodulator

Figura 12. Demodulação O-QPSK.

A probabilidade média de erro é idêntica ao QPSK, já que a probabilidade de erro é obtida independentemente das componentes em fase e em quadratura e a quantidade de bits transmitidos em ambos é a mesma. Pelo mesmo motivo a densidade espectral do potência também é a mesma.

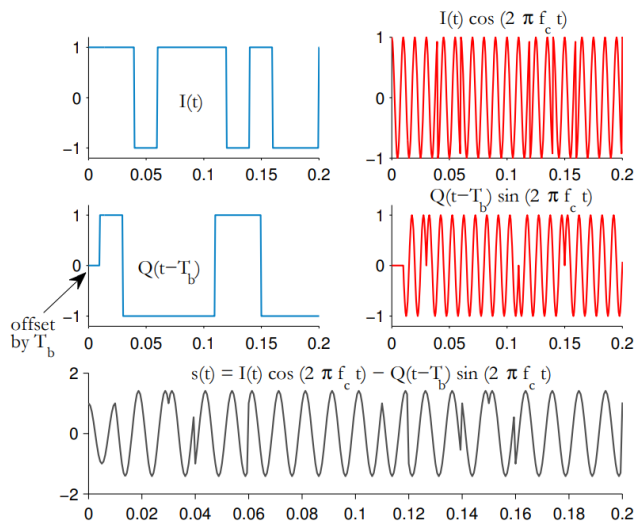


Figura 13. Formas de onda QPSK em comparação a forma de onda O-QPSK.

V. IMPLEMENTAÇÕES

A implementação de cada modulador e demodulador foi realizada em simulações Python.

A. QPSK

No QPSK, obtemos um diagrama de constelação como visto na figura 14. Como para cada par de símbolos haverá uma das componentes nulas, obtemos as formas de onda para banda passante conforme mostrado na figura 15, por exemplo. Nota-se que nas senoides das componentes há variações abruptas correspondendo à mudança entre símbolos ortogonais. O sinal total modulado é a soma de ambos sinais, correspondendo à figura 16.

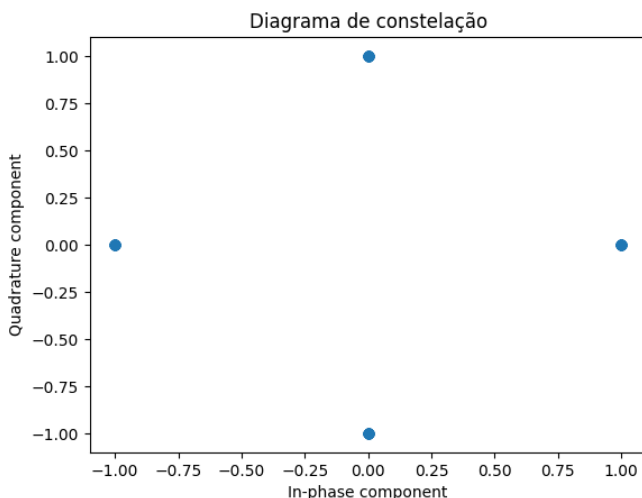


Figura 14. Diagrama de constelação para o QPSK.

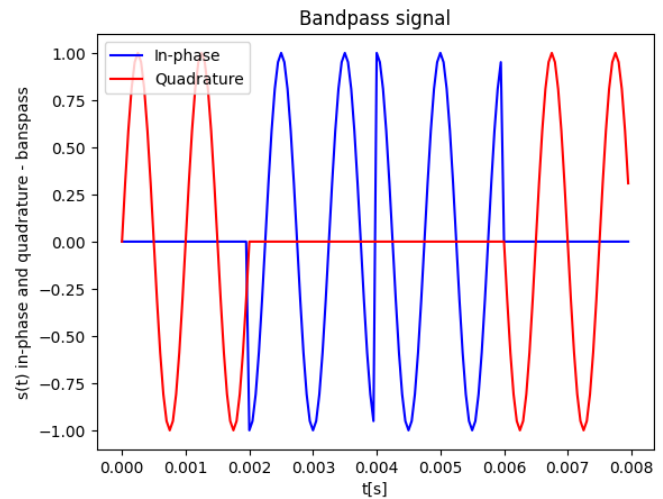


Figura 15. Gráfico em banda passante do sinal QPSK.

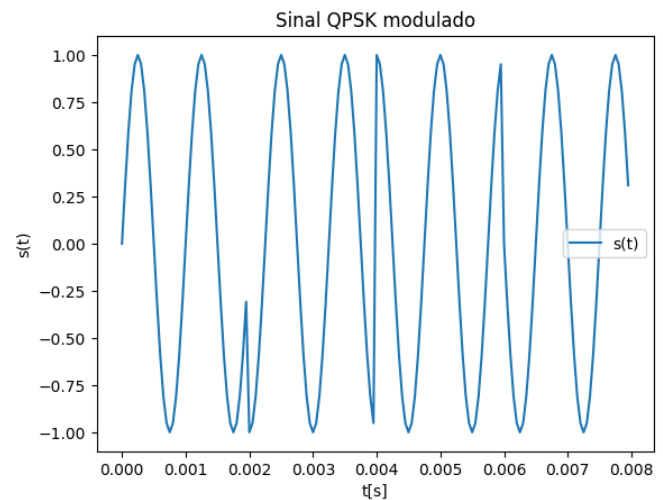


Figura 16. Gráfico em banda passante do sinal QPSK.

Para demodulação, foi primeiramente realizado uma multiplicação dos sinal recebido por uma onda senoidal gerada localmente e sincronizada com o receptor, e em seguida feito a integração do sinal, que pode ser implementado por meio de uma convolução de um pulso unitário com largura T_b (tempo de bit). Após a integração foi implementado o algoritmo de decisão, que consiste apenas em um comparador.

O resultado não foi satisfatório. Esse demodulador é útil para a implementação quando o sinal está exatamente dentro dos quadrantes do diagrama de constelação. No caso desse tipo de modulação, os sinais estão exatamente em cima dos eixos do diagrama de constelação. Nesse sentido, qualquer erro proveniente de cálculo numérico faz com que haja um erro na estimação do sinal de entrada.

B. $\pi/4$ -QPSK

À diferença de fase de $\pi/4$ de rotação, o diagrama de constelação é idêntico ao diagrama do QPSK, como visto na figura 17 referente ao sinal em banda passante visto na figura 18. Nesse caso, sempre haverá componentes não-nulas para qualquer um dos símbolos, o que facilita a sincronia do receptor. Obtém-se as formas de onda das componentes em fase, em quadratura e o sinal final conforme vistos nas figuras 19 e ??.

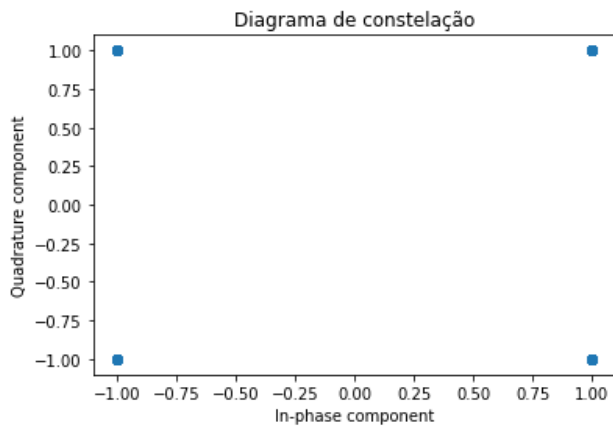


Figura 17. Constelação para o esquema de modulação $\pi/4$ - QPSK.

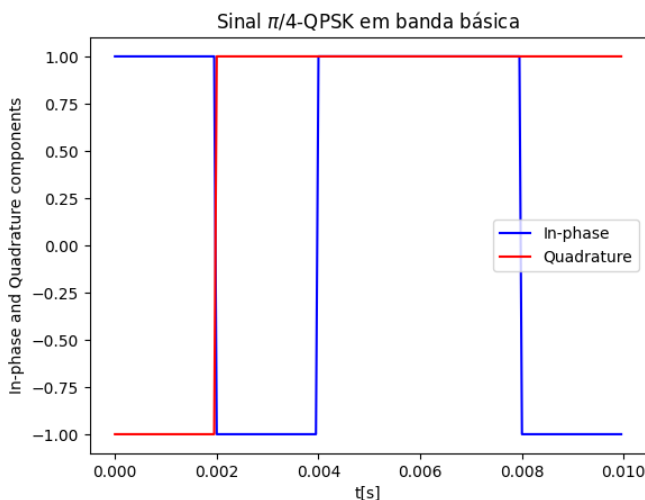


Figura 18. Componentes em banda básica para o esquema de modulação $\pi/4$ - QPSK.

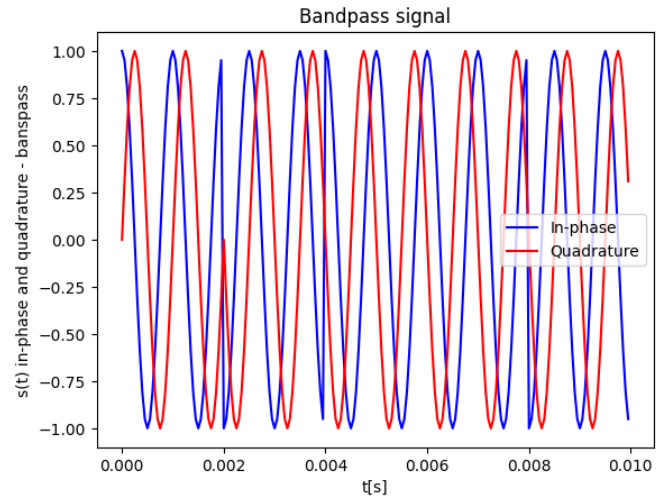


Figura 19. Componentes em banda passante para o esquema de modulação $\pi/4$ - QPSK.

Como visto na figura 8, depois de ter multiplicado o sinal recebido por duas senoides em fase e em quadratura sincronizadas com o transmissor, é feito a integração dos dois sinais resultantes, que são dados por meio das figuras 20 e 21.

Realizando agora a amostragem no instante anterior ao início do próximo tempo de bit, e realizando a comparação com o limiar em zero, é possível obter o conjunto de bits originalmente enviados. Isso finaliza o processo de demodulação.

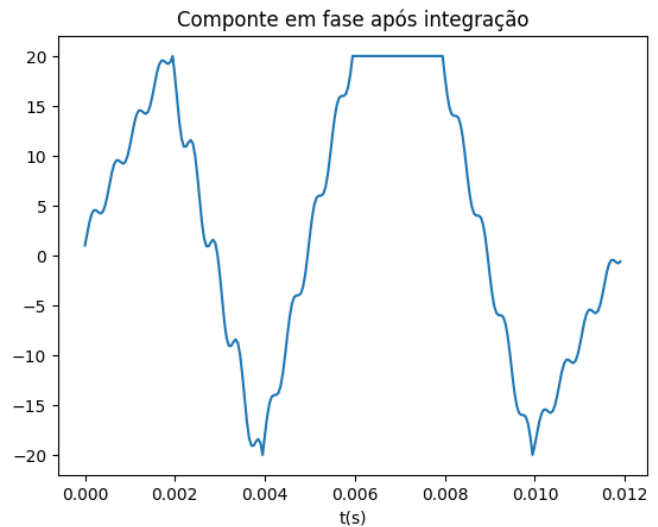


Figura 20. Componente em fase após realizada a multiplicação pela senoide em frequência f_c e feita a integração do sinal $\pi/4$ -QPSK recebido.

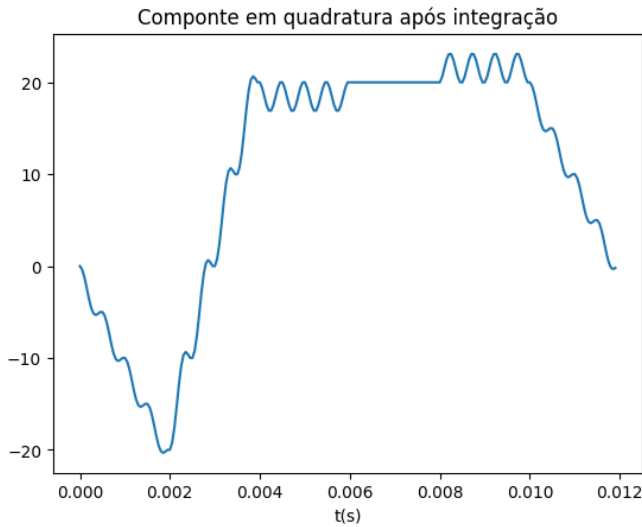


Figura 21. Componente em quadratura após realizada a multiplicação pela senoide em frequência f_c e feita a integração do sinal $\pi/4 - QPSK$ recebido.

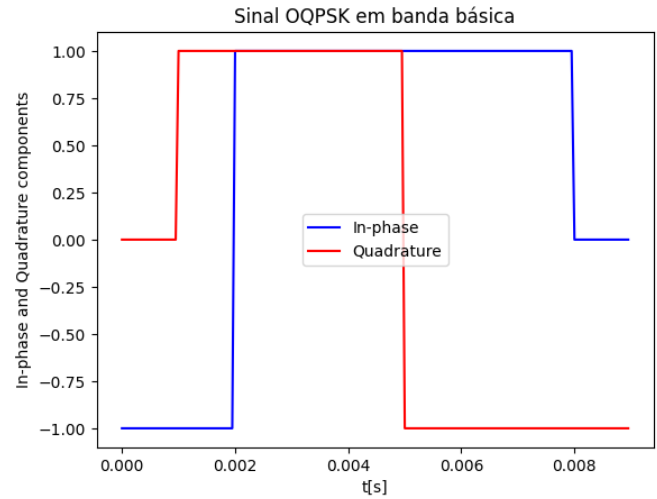


Figura 22. Sinal em banda básica do esquema de modulação OQPSK.

C. OQPSK

O OQPSK possui apenas uma defasagem na componente em quadratura, o que não altera a sua propriedade de formar uma base com $\cos 2\pi f_c t$. Assim, pode-se observar que o diagrama de constelação é idêntico àquele do $\pi/4 - QPSK$, já que a base do espaço vetorial também mudou.

O sinal em banda básica pode ser visto na figura 22. A principal característica é que a componente em quadratura está adiantada por um tempo de bit, T_b , assim, as transições acontecem sempre nos tempos ímpares para a componente em quadratura, e nos tempos pares para a componente em fase.

Após a multiplicação pelas senoides em fase e em quadratura, o sinal passa agora a estar em banda passante, que pode ser visto na figura 23. Somando as componentes em fase e em quadratura, chegamos ao sinal modulado visto na figura 24.

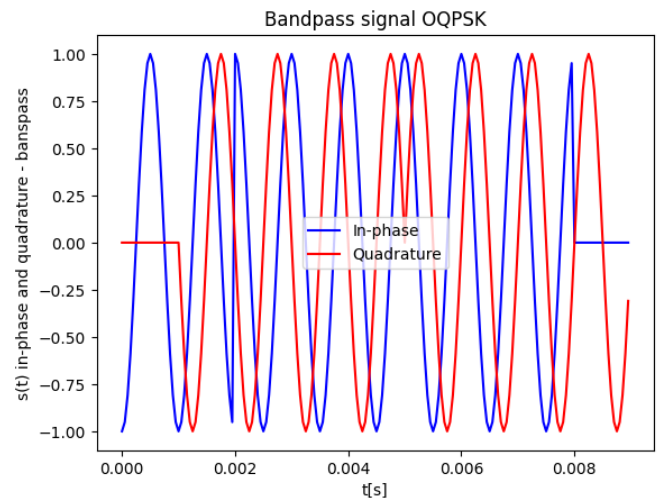


Figura 23. Sinal em banda passante do esquema de modulação OQPSK.

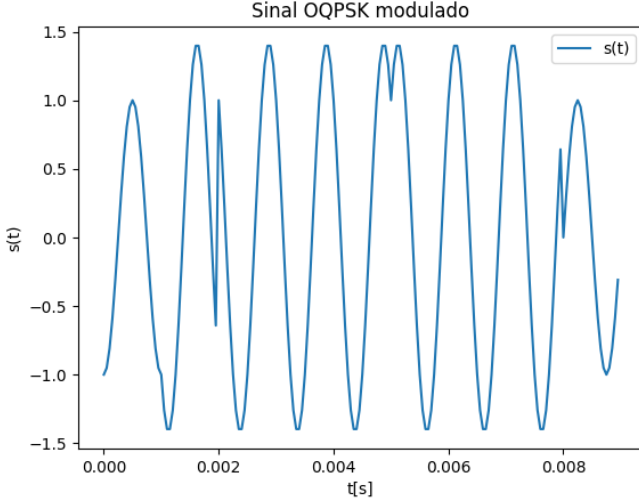


Figura 24. Sinal de saída já modulado pelo esquema QPSK.

Para que ocorra a demodulação correta, deve-se realizar a amostragem com o mesmo atraso temporal aplicado no transmissor. Dessa forma, para a amostragem da componente em quadratura foi aplicado um atraso temporal de $T_{\text{simbolo}}/2$, sendo que o remanescente do demodulador permaneceu inalterado em relação ao demodulador $\pi/4 - QPSK$. As demais etapas de demodulação ocorreram de maneira idêntica ao $\pi/4 - QPSK$.

D. Densidade Espectral de Potência e BER

Considerando que as diferenças entre a modulação QPSK e as modulações OQPSK e $\pi/4 - QPSK$ são simplesmente rotações ou atrasos temporais, não há fator que leve à diferença entre suas densidades espectrais de potência, devido à invariância da PSD a rotações. Com isso, obtemos a mesma PSD para todas três modulações, conforme visto na figura 25.

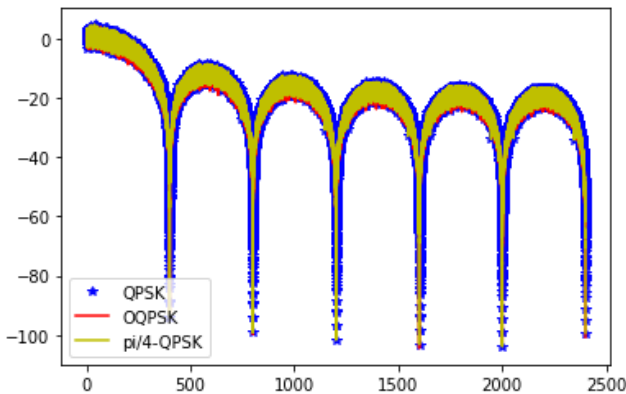


Figura 25. Densidade espectral de potência para cada uma das modulações empregadas.

A BER para cada modulação varia pouco, sendo o principal fator de mudança a energia do sinal da portadora, já que todos símbolos possuem a mesma energia para essas modulações. A variação maior está no QPSK, que pela arquitetura do demodulador não ser adequada para esse tipo de modulação, acabou por prejudicar radicalmente a probabilidade de erros. As outras modulações tiveram uma probabilidade semelhante, como visto na figura 26.

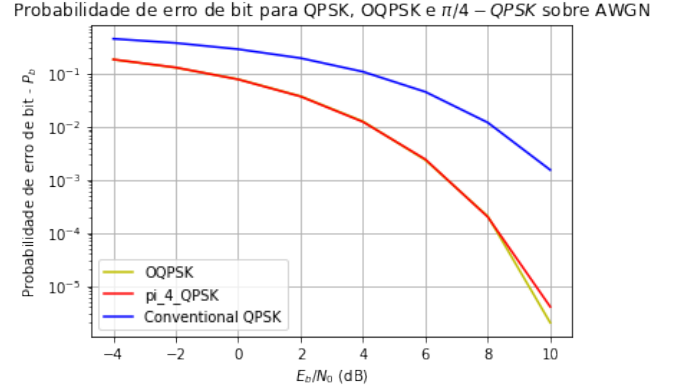


Figura 26. Probabilidade de erros para diferentes níveis de relação SNR.

VI. CANAIS

A. AWGN

O canal AWGN consiste na adição do sinal com um ruído branco de potência conhecida. A potência desse ruído geralmente depende na proporção de sinal e ruído desejado e normalmente é aplicado a entrada do sinal, como mostrado na figura 27.

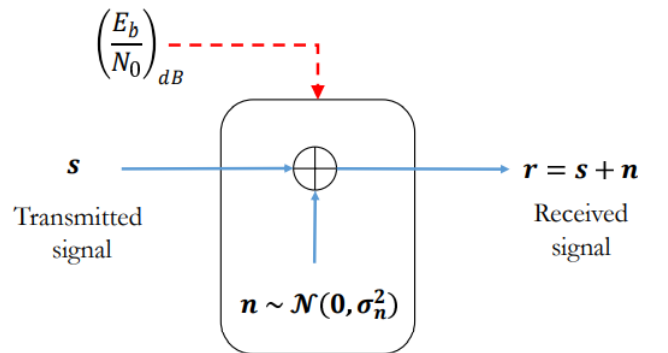


Figura 27. AWGN

O sinal recebido ao final da passagem neste canal é representado pela expressão :

$$r = s + n \quad (15)$$

Em que \mathbf{r} representa o sinal depois de passar pelo canal AWGN, \mathbf{s} o vetor que representa o sinal transmitido e \mathbf{n} representa o vetor de ruído associado.

A potência do sinal do vetor \mathbf{s} pode ser medido como:

$$P = L \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |s_i|^2 \quad (16)$$

Para a densidade espectral de potência do ruído \mathbf{n} :

$$N_0 = \frac{P}{SNR} \quad (17)$$

Assim, temos que a variância será igual a:

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \quad (18)$$

Uma das características desse tipo de canal é a propriedade de ser um ruído branco, ou seja, que não é seletivo em frequência. Isso resulta em um caso ideal de ruído, com uma distribuição gaussiana bastante conhecida.

B. Rayleigh

O canal de Rayleigh, como o de Rice, é um canal do tipo *flat-fading* modelado com um filtro de resposta finita com tamanho único ($L = 1$) e com o peso dado pela distribuição de *Rayleigh*. Tal distribuição é utilizada quando o receptor não possui nenhuma linha de visada (NLOS) com o transmissor, sendo o sinal recebido formado apenas por sinais espalhados espacialmente. Para este tipo de canal, tem-se a seguinte distribuição gaussiana para a parte real e imaginária do modelo complexo de banda básica:

$$h = X + jY, \quad X \approx \mathcal{N}(0, \sigma^2/2) \text{ e } \mathcal{N}(\sigma^2/2) \quad (19)$$

Tal distribuição assume que a potência média da distribuição é dada por $P_{avg} = \sigma^2$. Atribuindo um modelo da canal flat com potência $P_{avg} = 1$, temos que $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Para a simulação da transmissão sobre um modelo de canal modelado com uma resposta finita ao impulso, deve ser feito a convolução entre o sinal de transmissão e a resposta ao impulso do sistema que modela o canal, como visto na equação 20. Um canal do tipo fading-flat é não seletivo, e portanto, como dito, é implementado apenas com um único

tap, ou seja, $h = h[0]$ apenas, como visto na equação 21.

$$\mathbf{r} = \mathbf{h} * \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (20)$$

$$\mathbf{r} = h\mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (21)$$

Nesse caso, conhecendo bem o canal, podemos fazer um filtro casado, para remover a influência da distorção. Para isso, podemos fazer a multiplicação pelo conjugado da resposta do canal, resultando em $hh^* = |h|^2$. Assim, temos que a resposta será dada por

$$\mathbf{y} = \mathbf{r}h^* = hh^*\mathbf{s} + \mathbf{n}h^*$$

Note que para a recuperação do sinal de entrada, apenas precisamos escalonar a resposta em um fator de $\frac{1}{||h||^2}$, resultando na equação 22. Isso resulta na recuperação do vetor de sinal \mathbf{s} mais o ruído branco escalonado. O modelo diagramático dessa implementação pode ser visto na figura 28.

$$\tilde{\mathbf{y}} = \frac{h^*}{||h||^2} h\mathbf{s} + \frac{h^*}{||h||^2} \mathbf{n} = \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{n}} \quad (22)$$

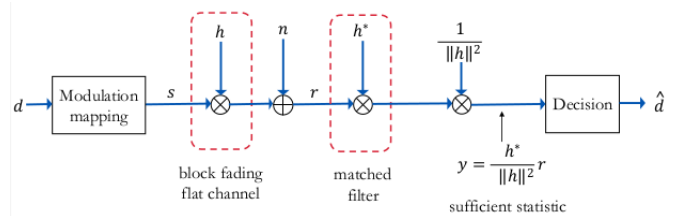


Figura 28. Estimação do ruído em um espaço vetorial complexo.

Note que há uma correspondência direta entre $||h||^2 = |h|^2 = hh^*$. Nesse sentido, podemos simplificar a equação para o diagrama em blocos visto na figura 29.

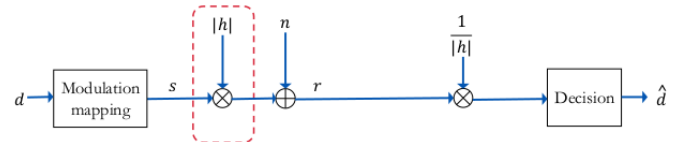


Figura 29. Estimação do ruído em um espaço vetorial complexo num modelo simplificado.

Como é um sinal de média zero, temos que também terá uma energia nula $E[h] = 0$.

Sobre tal canal, podemos medir a performance sob diferentes níveis de potência aplicados, tal como pode ser visto na figura 30.

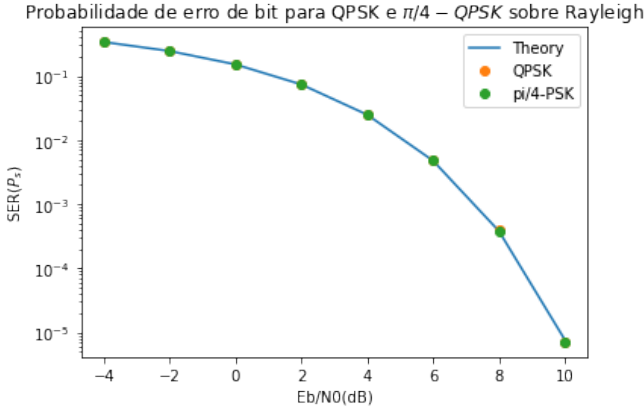


Figura 30. Probabilidade de erro na decodificação em função do nível de relação SNR. Em linha contínua, o valor do erro teórico; nos pontos, os resultados das simulações.

Como pode ser visto, não foi inserida a modulação OQPSK por ser uma modulação que possui uma performance igual à $\pi/4$ -QPSK.

C. Rice

No caso de haver alguma linha de visada, a distribuição do envelope não é mais uma distribuição de Rayleigh, mas uma distribuição de Rice. Se houver um componente LOS dominante, o processo de desvanecimento pode ser expresso como uma soma de processos gaussianos complexos exponenciais e complexos de banda estreita $g(t)$. Se a componente LOS chega ao receptor com ângulo de chegada (AoA) θ , fase ϕ e frequência Doppler máxima f_D , o processo de desvanecimento na banda base pode ser expresso como visto na equação 23.

$$h(t) = \sqrt{\frac{K\Omega}{K+1}} e^{j2\pi f_D \cos(\theta)t + \phi} + \sqrt{\frac{\Omega}{K+1}} g(t) \quad (23)$$

Onde K representa a potência do componente LOS (A) dividido pela potencia dos componentes de espalhamento (S):

$$K = \frac{A^2}{S^2} \quad (24)$$

A soma das potências que chegam no receptor são dadas por $\Omega = A^2 + S^2$.

Assim, a critério de simulação, podemos adotar a resposta do canal como um vetor de variáveis

aleatórias no domínio complexo, com distribuição dada na equação 25.

$$h = X + jY, \quad X, Y \approx \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (25)$$

onde

$$\mu = \sqrt{\frac{K}{2(K+1)}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2(K+1)}}$$

A análise performática do modelo de Rice pode ser visto na figura 31. Também sobre tal aspecto de análise, não foi inserido a modulação OQPSK. Observa-se que quanto maior a potência vista pela linha de visada, melhor será a taxa de erro de bits.

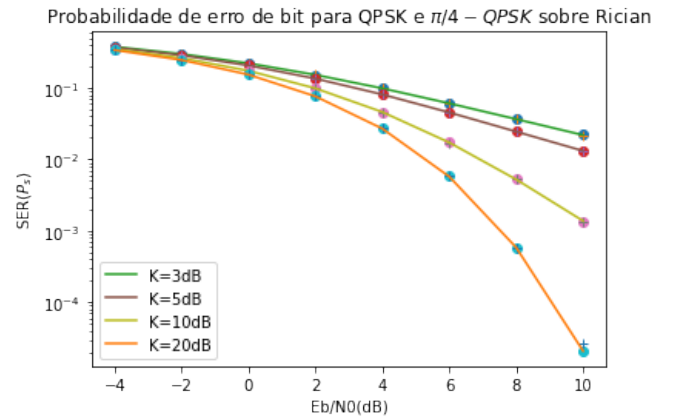


Figura 31. Probabilidade de erro na decodificação em função do nível de relação SNR. Em linha contínua, o valor do erro teórico; nos pontos, os resultados das simulações.

D. Canal com filtro FIR

Como visto anteriormente, um canal pode ser modelado com apenas um tap, resultando em um canal sem seletividade em frequência. A seletividade em frequência, no entanto, existe e pode ser modelada como um sistema \mathbf{h} , de tamanho L . Idealmente, um canal deve possuir uma resposta infinita ao impulso, e com isso pode ser modelado como um filtro IIR (*Infinite Impulse Response*). Entretanto, além de serem mais custosos computacionalmente, os filtros IIR possuem estados de instabilidade que devem ser tratados durante o projeto. Nesse sentido, é implementado um filtro de resposta finita ao impulso, que garante a estabilidade incondicional do sistema por conta da linearidade inerente à fase.

A implementação de um canal modelado como um sistema FIR pode ser visto na figura 32, que modela basicamente uma convolução no tempo, tal qual foi dada na equação 20.

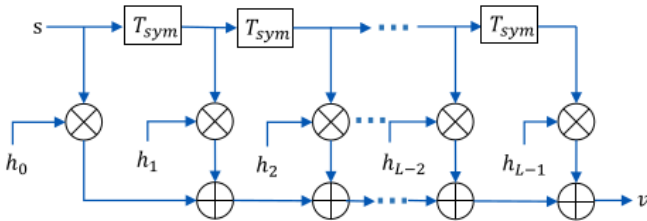


Figura 32. Canal linear e invariante no tempo visto como um *Tapped Delay Filter*.

Mesmo que o sinal trabalhado esteja no domínio complexo, podemos aplicar de maneira individual os taps dos filtros para a parte real e imaginária. Assim, o filtro FIR foi projetado para ter uma banda de aproximadamente 100Hz , com atenuação na banda de rejeição de 30dB , e a resposta frequencial modulada por uma janela do tipo Kaiser. Para o projeto, foi escolhido um filtro do tipo passa-banda, com frequências de corte em 50Hz e 350Hz . A janela para essas especificações pode ser vista na figura 34.

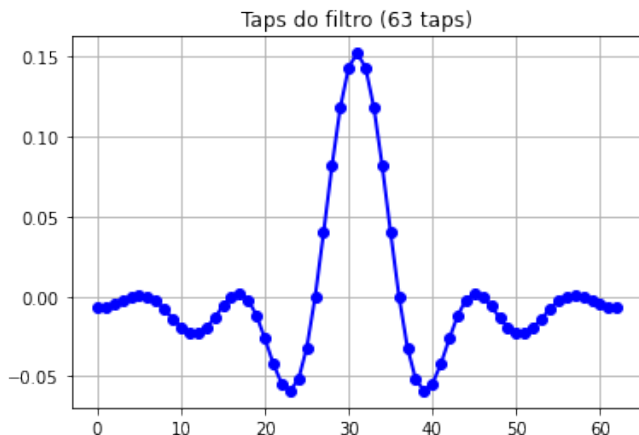


Figura 33. Janela projetada para as especificações dadas pelo filtro.

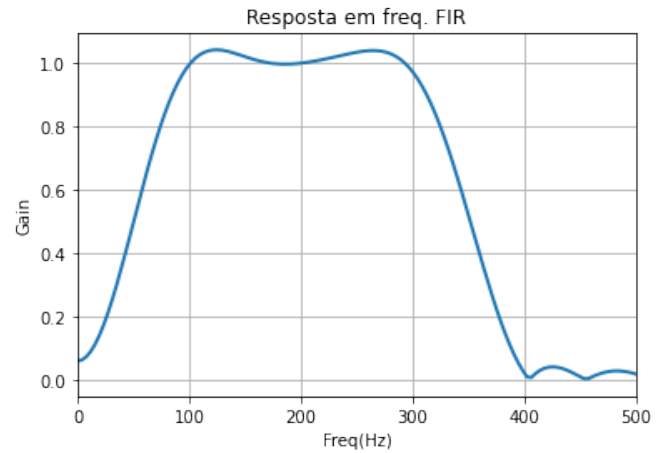


Figura 34. Resposta em frequência do filtro FIR passa-banda.

Fazendo a transformada inversa da resposta em frequência do filtro FIR, obtemos os taps do filtro no tempo.

gabriel, inserir aqui os resultados da simulação

VII. EQUALIZADORES

Os equalizadores são componentes em uma cadeia de transmissão que servem para eliminar a interferência do sinal sobre os símbolos. Como os símbolos transmitidos podem se espalhar e tomar diferentes caminhos, alguns chegarão mais atrasados devido ao maior espaço percorrido, resultado em uma interferência dos símbolos, também chamada interferência interssimbólica (ISI). Tais efeitos são amplificados em sinais dispersivos no tempo, como nas modulações GFSK onde os pulsos moduladores são suavizados por um filtro gaussiano.

O equalizador desenvolvido é um *zero-forcing equalizer*, que é um tipo de equalizador linear, sub ótimo e com a menor complexidade. Como estamos considerando canais invariantes no tempo, o equalizador poderá ser desenvolvido com pesos fixos, sob uma amostragem dada em tempo de símbolo. Tal estrutura de transmissão pode ser melhor visualizada na figura 35.

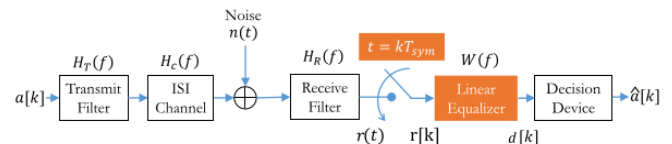


Figura 35. Equalizador linear espaçado por tempo de símbolo.

Considerando o filtro de transmissão, o canal dispersivo e o filtro de recepção como apenas um

canal, temos $H(f) = H_T(f)H_C(f)H_R(f)$. O sinal recebido então será na forma:

$$r[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[i]a[k-i] + n[k]$$

onde $a[k]$ são os símbolos transmitidos, $h[k]$ a resposta ao impulso do canal e $n[k]$ o ruído gaussiano aplicado no canal.

Podemos truncar o tamanho do vetor de resposta discreta do canal para um vetor de tamanho finito L . Garantindo que a saída é causal, ou seja, que somente será em função das entradas e/ou saídas atuais e anteriores, podemos assumir que os valores $h[i] = 0, \forall i < 0$. Assim, o sinal recebido fica na forma da equação 26.

$$r[k] = \sum_{i=0}^{L-1} h[i]a[k-i] + n[k] \quad (26)$$

O objetivo do equalizador é tentar eliminar ou minimizar o efeito da interferência interssimbólica. No domínio do tempo, queremos que a resposta da

interação do equalizador com o canal resulte em uma função impulso idealmente, tal como visto na equação 27.

$$q[k] = h[k]*w[k] = \delta[k-k_0] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k > 0 \end{cases} \quad (27)$$

Implementando a resposta do canal como um filtro FIR garante a estabilidade devido ao fato de ser um filtro real. O equalizador como um filtro FIR pode ser escrito como

$$W(z) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k]z^{-k}$$

A convolução entre o canal de tamanho finito L e o equalizador de tamanho finito N pode ser expresso no formato de matriz como visto na equação 28.

Devido a causalidade assumida no canal de transmissão, podemos garantir que os valores $h[k] = 0, \forall k < 0$ e que $h[k] \approx 0, \forall k \geq L$. A solução para o método *zero forcing* então pode ser dada pela equação 29.

$$\begin{bmatrix} q[0] \\ q[1] \\ q[2] \\ \vdots \\ q[L+N-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & h[-1] & \dots & h[-(N-1)] \\ h[1] & h[0] & \dots & h[-(N-2)] \\ h[2] & h[1] & \dots & h[-(N-3)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[L+N-2] & h[L+N-3] & \dots & h[L-1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \\ \vdots \\ w[L+N-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} q[0] \\ q[1] \\ q[2] \\ \vdots \\ q[L+N-2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h[1] & h[0] & 0 & \dots & h[-(N-2)] \\ h[2] & h[1] & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h[L-1] & 0 \\ h[L+N-2] & h[L+N-3] & \dots & 0 & h[L-1] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w[0] \\ w[1] \\ w[2] \\ \vdots \\ w[L+N-2] \end{bmatrix} \quad (29)$$

Assim, temos uma operação entre vetores na forma

$$\mathbf{T}(h) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{w} = \delta_{k0}$$

em que $\mathbf{H} = \mathbf{T}(h)$ é a matriz de *Toeplitz*. Note que a posição de k_0 determinará apenas o atraso

gerado pelo canal, retirando a ISI.

Existem várias formas de realizar a construção da matriz \mathbf{w} para a equalização do canal. Neste trabalho, utilizamos o método dos mínimos quadrados, que é uma forma de otimização fechada que tenta minimizar o erro entre a solução dada e a possível solução obtida, já que a matriz trabalhada

não possui o mesmo número de equações que a quantidade de incógnitas por ser uma matriz quadrada $(L + N - 1) \times N$.

Tal minimização é feita encontrando a mínima distância euclidiana entre o vetor de canal e o vetor alvo, matematicamente $||\mathbf{H} \cdot \mathbf{w} - \delta_{k0}||$. Para isso, multiplicamos ambos os lados por uma matriz hermitiana, \mathbf{H}^H que é o conjugado transposto de uma matriz:

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H} \mathbf{w} = \mathbf{H}^H \delta_{k0}$$

Como há a dependência linear entre as linhas, a matriz $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ é simétrica (pois uma é transposta da outra) e inversível, a solução dos coeficientes do equalizador *zero-forcing* são dados pela equação 30.

$$\mathbf{w} = (\mathbf{H}^H \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^H \delta_{k0} = \mathbf{H}^\dagger \delta_{k0} \quad (30)$$

A matriz \mathbf{H}^\dagger é chamada matriz pseudo-inversa.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Proakis and M. Salehi, "Digital communication 5th edition," 2007.
- [2] S. Haykins, "Digital communication," *disp*, vol. 11, p. 10, 2010.
- [3] V. Srinivasan and M. Viswanathan, *Digital Modulations Using Python: (Black & White Edition)*. Independently Published, 2019. [Online]. Available: <https://books.google.com.br/books?id=w5MjzAEACAAJ>