

Moduladores e Demoduladores CPFSK, GMSK, MSK

Aldo Felipe Barbosa Silva
170055701

Emmanuel K. M. Johnson
180011464

João Marcelo
170106080

Engenharia Eletrônica - UnB Engenharia Eletrônica - UnB Engenharia Eletrônica - UnB
aldobsilva70@gmail.com johnson.emmanuel322@gmail.com joaomacedodf@hotmail.com

1. Introdução

As modulações digitais são fundamentais direta ou indiretamente do cotidiano de toda a população em torno do globo, sendo muito usadas em todos os níveis de telecomunicações. Divididas em muitas formas diferentes, estas modulações podem se concentrar tanto em amplitude quanto em fase ou frequência.

As modulações estudadas neste trabalho são a CPFSK, MSK E GMSK. Todas possuem a característica de uma fase contínua. Esta continuidade evita sinais com grandes lobos laterais e garante um melhor uso da banda do sinal. Mas esta vantagem aumenta a complexidade das arquiteturas de comunicação, principalmente o receptor. Uma análise será realizada para pesar as vantagens e desvantagens de todas estas modulações, e seus resultados serão discutidos.

2. CPFSK

Na CPM (modulação de fase contínua), a fase da portadora é gradualmente alterada de um símbolo para outro símbolo. a fase instantânea depende da fase dos símbolos anteriores. Portanto, o CPM é classificado como modulação com memória. A modulação e demodulação do CPM são mais complicadas pelo fato de que a fase de um símbolo depende da fase dos símbolos anteriores.

O Continuous Phase Frequency Shift Keying (CPFSK) é uma variação da técnica de Frequency Shift Keying (FSK), que elimina as descontinuidades de fase. Na modulação FSK binária convencional, a frequência instantânea da portadora é comutada entre uma das duas frequências. Devido à comutação abrupta entre as duas frequências, a fase não é contínua no FSK convencional. No CPFSK binário, a continuidade

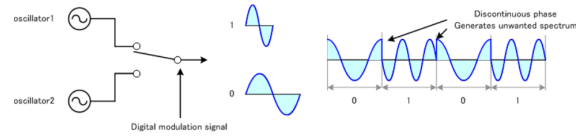


Figure 1: Imagem da modulação FSK.

de fase suave é assegurada definindo o sinal do transmissor como pode ser visto na equação 1 onde E_b é a média da energia, T_b é o período de bit, f_c é a frequência da portadora base e $\theta(t)$ é a evolução da fase.

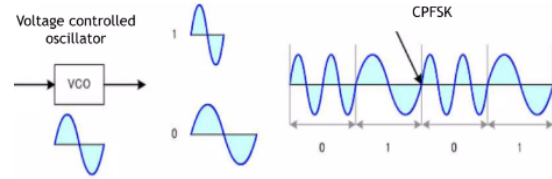


Figure 2: Imagem da modulação CPFSK.

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_c t + \theta(t)) \quad , \quad 0 \leq t \leq T_b \quad (1)$$

Em qualquer instante de tempo, a evolução da fase pode ser dada como;

$$\theta(t) = \theta(0) + \frac{\pi h}{T_b} \int_0^t b(t) dt \quad (2)$$

Os diagramas de fase também são chamados de árvores de fase. Observa-se que as árvores de fase para CPFSK são lineares por partes como consequência do

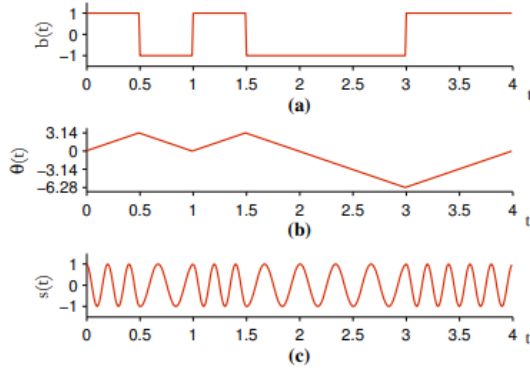


Figure 3: (a) Sequencia de Informação, (b) Evolução da fase de CPFSK do sinal (c) O sinal CPFSK modulado.

pulso $g(t)$ ser retangular. Trajetórias de fase e árvores de fase mais suaves são obtidas usando pulsos que não contêm descontinuidades, como a classe de cossenos elevados. A trajetória de fase para CPFSK pode ser visto na figura 4.

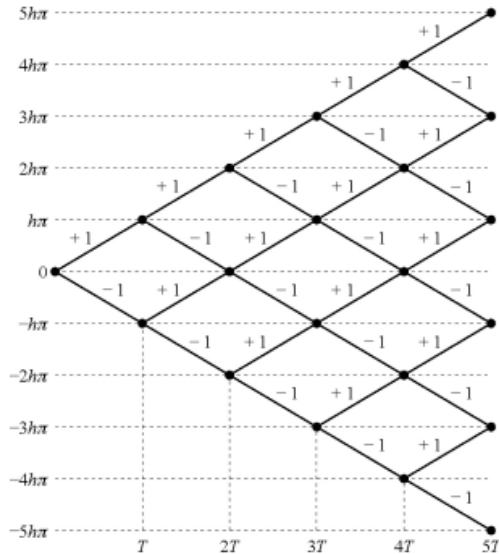


Figure 4: Imagem da Trajetória de fase para CPFSK..

Como apenas a fase é modulada, o CPFSK possui um envelope constante. Isso permite o uso de um amplificador Classe C barato e com baixo consumo de energia. Não há distorção de intermodulação no amplificador e, portanto, não há respingos de espectro.

Geralmente, porém, não podemos carregar tantos bits/s em uma determinada largura de banda com CPFSK quanto podemos com modulação linear (por exemplo, BPSK com raiz quadrada de cosseno elevado), porque usamos apenas uma coordenada (fase) e ignoramos a outra (raio). Devido às vantagens mencionadas acima, os esquemas CPFSK são os preferidos esquemas de modulação na maioria das aplicações de comunicação sem fio. O custo do amplificador é aproximadamente proporcional à sua potência, e os PAs dominam o custo das estações base. Por outro lado, detectores caros e que consomem muita energia também não são bem-vindos em aparelhos.

3. Minimum Shift-Keying (MSK)

A modulação MSK carrega diversas características positivas: Ela mantém um envelope constante, um espectro compacto se comparado a modulações como QPSK e OQPSK, com boa performance em relação a sua taxa de erros, imutabilidade frente a limite em banda. Esta modulação é nada mais do que um caso especial da modulação CPFSK binária com índice de modulação igual a 0.5 e usando um pulso retangular de duração T . Assumindo então $\theta(0) = 0$ (zerando as contribuições de fase em $t \neq 0$) e $h = 2f_d T = 0.5$, a componente em fase e quadratura da modulação MSK tem o formato senoidal e estão nas equações 3 e 4.

$$s_I(t) = \pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \quad , \quad -T_b < t < T_b \quad (3)$$

$$s_Q(t) = \pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \quad , \quad 0 < t < 2T_b \quad (4)$$

Onde E_b é a energia do bit e T_b é o tempo de duração de cada bit. O nome *Minimum Shift-Keying* vem do fato do índice de modulação ter a distância mínima de separação em frequência para garantir a ortogonalidade dos sinais. Uma representação gráfica para o sinal em fase e em quadratura está na figura 5.

Uma forma compacta de escrever o sinal MSK em banda passante está na equação 5, para t entre 0 e $2T_b$. Nesta expressão, é importante ressaltar que a sequência de informação em fase e quadratura estão omitidas, mas consideradas partes de s_I e s_Q . A imagem 6 ilustra um modulador MSK, projetado de modo a enfatizar sua equivalência com a modulação OQPSK. Ele divide os bits em componentes em fase e quadratura, realiza um *upscale* para aumentar o tempo de duração de cada bit

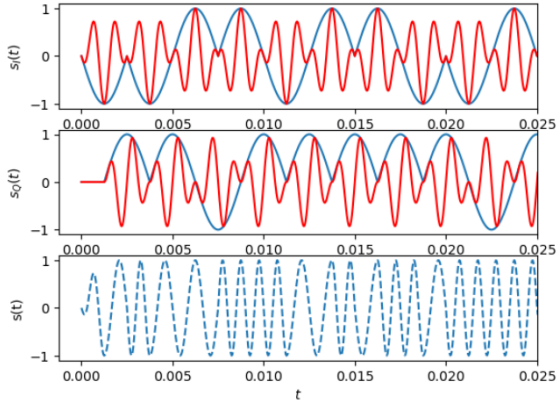


Figure 5: Componente em fase (primeiro) comparado com o componente em quadratura (segundo) do sinal MSK em banda-passante (terceiro). Os sinais em vermelho são as componentes com adição da portadora. Em azul, banda básica.

e aplica um atraso na componente em quadratura antes de multiplicar as componentes por suas respectivas senóides, gerando assim o sinal modulado descrito na equação 5.

$$s(t) = s_I(t)\cos(2\pi f_c t) - s_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \quad (5)$$

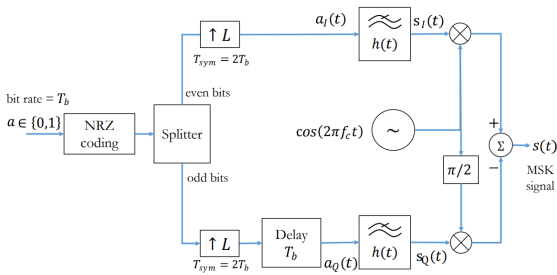


Figure 6: Modulador MSK com estrutura similar a da modulação OQPSK.

A equivalência com o OQPSK acontece porque ambas as modulações tem suas componentes em fase e em quadratura defasadas por T_b segundos (ou meio símbolo), mas o MSK tem suas curvas em formato senoidal em meio-ciclo enquanto o OQPSK utiliza-se de ondas retangulares.

O demodulador MSK está na figura 7, onde é possível ver que os sinais em fase e quadratura são

multiplicados pelo módulo das funções de meio ciclo. Um integrador então recupera a informação no tempo e cada componente é amostrado para recompor o sinal que havia sido dividido em bits pares e ímpares. Um decisor no fim utiliza os dados da amostragem para estimar o bit correto. Por ser uma modulação com memória, é de se esperar que a arquitetura de demodulação seja mais complexa do que as sem memória.

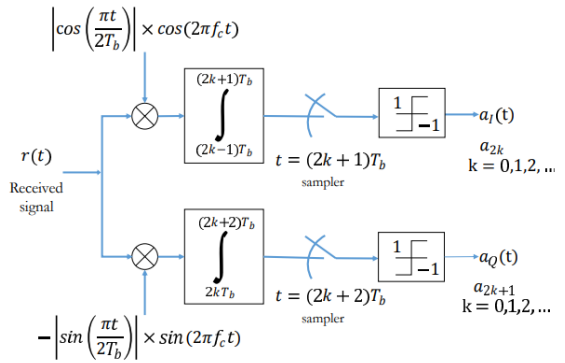


Figure 7: Demodulador MSK com equivalência enfatizada ao OQPSK.

Por ser um caso especial da modulação CPFSK binária, ou seja, por ser uma modulação cuja fase do sinal precisa ser estritamente contínua, a modulação MSK possui memória, ou não poderia ser capaz de garantir a continuidade do sinal em fase.

A taxa de erro de bits é dada pela equação 6, sendo essencialmente a mesma da modulação BPSK convencional. Sendo a função erro uma sigmoide, a energia de cada bit é inversamente proporcional a probabilidade de erro de bits, enquanto N_0 é diretamente proporcional a taxa de erro. A imagem 8 apresenta sua curva se comparada a modulação BPSK. É possível perceber similaridades entre as duas mesmo com as outras vantagens intrínsecas ao MSK.

$$P_b = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (6)$$

A densidade espectral de potência para a modulação MSK se encontra na figura 9, onde é possível um decaimento acentuado dos lobos em frequências mais altas se comparado a modulações como BPSK. O primeiro lobo decai rapidamente com a frequência. Comparado ao QPSK, é possível perceber

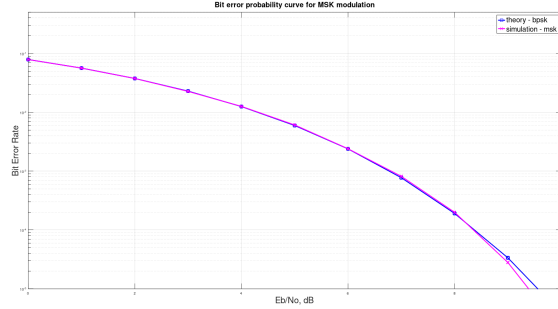


Figure 8: Taxa de erro de bits da modulação MSK.

então que a interferência inter-canal é menor para o MSK. O lobo principal do MSK é mais largo, indicando mais energia na banda *null-to-null*. Entretanto, pode ser considerada uma desvantagem caso seja necessário uma banda muito estreita.

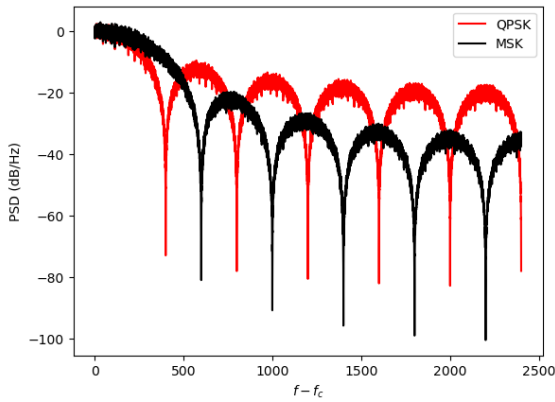


Figure 9: Densidade espectral de potência da modulação MSK.

4. Gaussian Minimum Shift Keying - GMSK

A modulação GMSK é semelhante a modulação MSK, pois é uma modificação da mesma, onde sequência de bits de entrada passa por um filtro passas baixas Gaussiano. O objetivo de utilizar a modulação GMSK é suavizar as transições de frequência, ela também reduz a complexidade dos sistemas tornando seu custo muito baixo em relação às demais modulações existentes. Possui memória.

Na figura 10 podemos observar que o modulador

GMSK consiste em um modulador MSK com a adição do filtro passa baixa gaussiano.

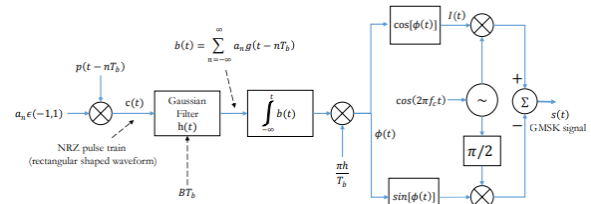


Figure 10: Arquitetura do Modulador GMSK

Já para a demodulação podemos observar na Figura 11, onde, através de um filtro de passagem de banda, o sinal de entrada é convertido para uma frequência intermediária. Com a portadora recuperada o sinal é traduzido para a banda base, os filtros LPF servem para remover a componente de frequência $2f_{if}$. Por fim os sinais de banda básica são utilizados pelo algoritmo de decisão para a detecção de dados.

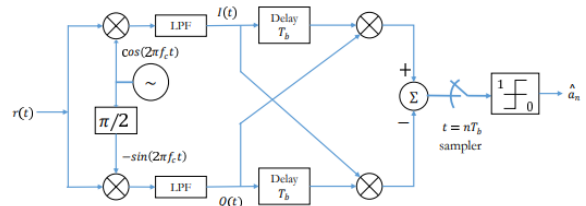


Figure 11: Arquitetura do Demodulador GMSK

Para a modulação GMSK, temos os seguintes gráficos na figura 12, onde é possível analisar um comportamento contínuo, outro ponto interessante é o formato de um círculo na sua constelação, isso se dá principalmente pelo fato da modulação GMSK ter uma amplitude constante.

A taxa de erro de bits (BER), para a modulação GMSK, é observada na figura 13. Temos então que a probabilidade de erros aumenta com o aumento de bits transmitidos.

A densidade espectral de potência da modulação GMSK é calculada usando o método de estimativa de espectro Welch em janela. Na Figura 14 temos o espectro para diferentes valores de BT_b , todos menores ou iguais a 0.3

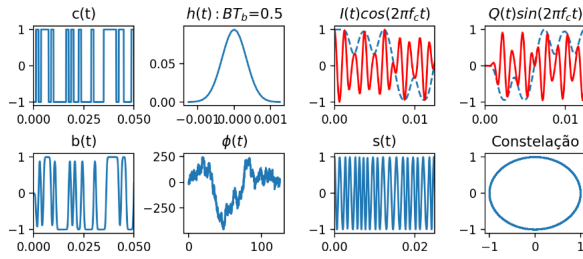


Figure 12: Gráficos da Modulação GMSK

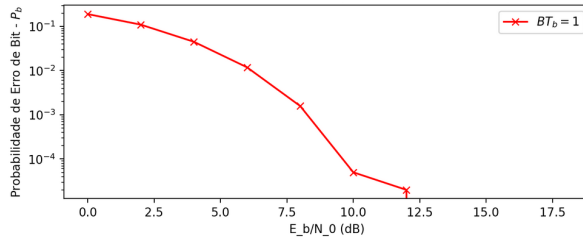


Figure 13: Probabilidade de Erro de Bits GMSK

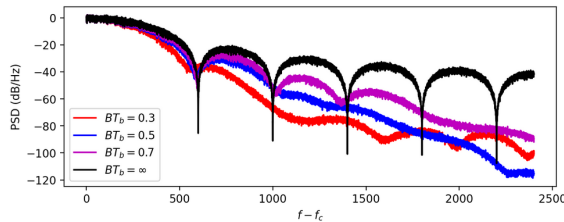


Figure 14: Densidade Espectral de Potência da Modulação GMSK

5. Conclusão

As modulações analisadas possuem todas o seu propósito. A CPFSK é uma modulação geral, que pode abranger uma vasta gama de requerimentos de projetos. A MSK é uma modulação bastante específica, mas que gera artifícios no design de receptores ao diferenciar entre uma transição de fase positiva e uma negativa sem ambiguidade, provando ser um atalho na concepção dos mesmos. Entretanto, é uma modulação que pode causar bastante interferência fora de sua banda para sistemas com canais adjacentes pouco espaçados.

A GMSK entra como uma manipulação do espectro da MSK para satisfazer o problema do espectro pouco

compacto da mesma. Para isso, ela utiliza-se de um filtro passa-baixas gaussiano e soluciona o problema a custo de uma maior complexidade no design de receptores e transmissores. Todas possuem taxas de erro de bits similares tomando valores médios.

Cabe ao projetista comparar os diferentes tipos e escolher a melhor para sua aplicação, levando em conta os requerimentos do projeto e as dificuldades não apenas do sistema no qual está trabalhando, mas sistemas adjacentes que podem sofrer com demasiada interferência.

6. revisão bibliográfica

J. Proakis, Digital Communications, sér. Electrical engineering series. McGraw-Hill, 2001

M. Viswanathan, Digital modulations using Python, en. 2019

Appendix A.

Função da Modulação GMSK

```
# Função da Modulação

def gmsk_mod(a,fc,L,ST,enable_plot=False):
    """
    Function to modulate a binary stream using GMSK modulation
    Parameters:
        ST : ST product (bandwidth x bit period) for GMSK
        a : input binary data stream (0's and 1's) to modulate
        fc : RF carrier frequency in Hertz
        L : oversampling factor
        enable_plot: True = plot transmitter waveforms (default False)
    Returns:
        (s_t,s_complex) : tuple containing the following variables
            s_t : GMSK modulated signal with carrier s(t)
            s_complex : baseband GMSK signal (I+JQ)
    """
    fs = L*fc; Ts=1/fs;Tb = L*Ts; # derived waveform timing parameters
    c_t = upfirdn(hs[1]*L, x=2*a-1, up = L) #NRZ pulse train c(t)

    k=1 # truncation length for Gaussian LPF
    h_t = gaussianLPF(ST,Tb,L,k) # Gaussian LPF with ST=0.25
    b_t = np.convolve(h_t,c_t,'full') # convolve c(t) with Gaussian LPF to get b(t)
    bnorm_t = b_t/max(abs(b_t)) # normalize the output of Gaussian LPF to +/-1

    h = 0.5;
    # integrate to get phase information
    phi_t = lfilter(b = [1], a = [1,-1], x = bnorm_t*Ts) * h*np.pi/Tb

    I = np.cos(phi_t)
    Q = np.sin(phi_t) # cross-correlated baseband I/Q signals

    s_complex = I - 1j*Q # complex baseband representation
    t = Ts*np.arange(start = 0, stop = len(I)) # time base for RF carrier
    sI_t = I*np.cos(2*np.pi*fc*t); sQ_t = Q*np.sin(2*np.pi*fc*t)
    s_t = sI_t - sQ_t # s(t) - GMSK with RF carrier

    if enable_plot:
        fig, axs = plt.subplots(2, 4)
        axs[0,0].plot(np.arange(0,len(c_t))*Ts,c_t);
        axs[0,0].set_title('c(t)');axs[0,0].set_xlin(0,40*Tb)
        axs[0,1].plot(np.arange(-k*Tb,k*Tb+Ts),h_t);
        axs[0,1].set_title('h(t): ST_b$'+str(ST))
        axs[0,2].plot(t,I,'--');axs[0,2].plot(t,sI_t,'r');
        axs[0,2].set_title('$I(t)cos(2 \pi f_c t)$');axs[0,2].set_xlin(0,10*Tb)
        axs[0,3].plot(t,Q,'--');axs[0,3].plot(t,sQ_t,'r');
        axs[0,3].set_title('$Q(t)sin(2 \pi f_c t)$');axs[0,3].set_xlin(0,10*Tb)
        axs[1,0].plot(np.arange(0,len(bnorm_t))*Ts,bnorm_t);
        axs[1,0].set_title('b(t)');axs[1,0].set_xlin(0,40*Tb)
        axs[1,1].plot(np.arange(0,len(phi_t))*Ts, phi_t);
        axs[1,1].set_title('$\phi(t)$')
        axs[1,2].plot(t,s_t);axs[1,2].set_title('s(t)');
        axs[1,2].set_xlin(0,20*Tb)
        axs[1,3].plot(I,Q);axs[1,3].set_title('Constelação')
        fig.show()
    return (s_t,s_complex)
```

Appendix B.

Modulação MSK em Python

```
import numpy as np
def awgn(s,SNRdB,L=1):
    gamma = 10**(SNRdB/10) #SNR to Linear scale

    if s.ndim==1:# if s is single dimensional vector
        P=L*sum(abs(s)**2)/len(s) #Actual power in the vector
    else: # multi-dimensional signals like MFSK
        P=L*sum(sum(abs(s)**2))/len(s) # if s is a matrix [MxN]

    N0=P/gamma # Find the noise spectral density
    if np.isrealobj(s):# check if input is real/complex object type
        n = np.sqrt(N0/2)*np.random.standard_normal(s.shape) # computed noise
    else:
        n = np.sqrt(N0/2)*(np.random.standard_normal(s.shape)+1j*np.random.standard_normal(s.shape))
    r = s + n # received signal
    return r
import matplotlib.pyplot as plt
def msk_mod(a, fc, OF, enable_plot = False):

    ak = 2*a-1 # 0->-1 1->+1
    ai = ak[0::2]; aq = ak[1::2] # dividir pares e impares
    L = 2*OF # duração do símbolo é o dobro da duração do bit

    #upsample por L
    from scipy.signal import upfirdn, lfilter
    ai = upfirdn(hs[1], x=ai, up = L)
    aq = upfirdn(hs[1], x=aq, up = L)

    aq = np.pad(aq, (L/2,0), 'constant') # delay em Tb (L/2)
    ai = np.pad(ai, (0,L/2), 'constant') # igualar o tamanho dos vetores

    #filtros passa-baixa
    Fs = OF*fc;Ts = 1/Fs;Tb = OF*Ts
    t = np.arange(0,2*Tb+Ts,Ts)
    h = np.sin(np.pi*t/(2*Tb))# filtro LPF
    sI_t = lfilter(b = h, a = [1], x = ai) # banda básica em fase
    sQ_t = lfilter(b = h, a = [1], x = aq) # banda básica em quadratura

    t=np.arange(0, Ts*len(sI_t), Ts) # portadora
    sIc_t = sI_t*np.cos(2*np.pi*fc*t) #com portadora
    sQc_t = sQ_t*np.sin(2*np.pi*fc*t) #com portadora
    s_t = sIc_t - sQc_t# sinal em banda passante

    if enable_plot:
        fig, (ax1,ax2,ax3) = plt.subplots(3, 1)

        ax1.plot(t,sI_t);ax1.plot(t,sIc_t,'r')
        ax2.plot(t,sQ_t);ax2.plot(t,sQc_t,'r')
        ax3.plot(t,s_t,'--')
        ax1.set_ylabel('$s_I(t)$');ax2.set_ylabel('$s_Q(t)$')
        ax3.set_ylabel('$s(t)$')
        ax1.set_xlin([-Tb,20*Tb]);ax2.set_xlin([-Tb,20*Tb])
        ax3.set_xlin([-Tb,20*Tb])
        ax1.set_xlabel('$t$');ax2.set_xlabel('$t$')
        ax3.set_xlabel('$t$')
        fig.show()

    result = dict()
    result['s_t']=s_t;result['sI(t)']=sI_t;result['sQ(t)']=sQ_t;result['t']=t
    return result
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import erfc

N = 100000 # Números de símbolos a serem transmitidos
EbN0dB = np.arange(start=-4,stop = 11,step = 2) # range de Eb/N0 pra simulação
fc = 800
OF = 32 # fator de oversampling

BER = np.zeros(len(EbN0dB)) # valores de BER pra cada Eb/N0

a = np.random.randint(2, size=N) # símbolos 0s e 1s uniformes
result = msk_mod(a,fc,OF,enable_plot=True)
s = result['s_t']
```


Appendix C.

Taxa de erros de bits MSK em Octave

```

2 clear
3 N = 5*10^5; % número de bits / símbolos
4
5 fsHz = 1; % período de amostragem
6 T = 4; % duração do símbolo
7
8 Eb_N0_dB = [0:10]; % múltiplos valores Eb/N0
9 ct = cos(pi*(-T:N*T-1)/(2*T));
10 st = sin(pi*(-T:N*T-1)/(2*T));
11
12 for ii = 1:length(Eb_N0_dB)
13
14     % transmissor MSK
15     ipBit = rand(1,N)>0.5; % 0s e 1s com igual probabilidade
16     ipMod = 2*ipBit - 1; % 0->-1 e 1->0
17
18     ai = kron(ipMod(1:2:end),ones(1,2*T)); % bit par
19     aq = kron(ipMod(2:2:end),ones(1,2*T)); % bit ímpar
20
21     ai = [ai zeros(1,T)]; % igualar as dimensões das matrizes
22     aq = [zeros(1,T) aq]; % Delay na quadratura
23
24     % forma de onda a ser transmitida
25     xt = 1/sqrt(T)*(ai.*ct + j*aq.*st);
26
27     % AWGN
28     nt = 1/sqrt(2)*(randn(1,N*T+T) + j*randn(1,N*T+T)); % variancia 0db
29
30     % ruído
31     yt = xt + 10^((-Eb_N0_dB(ii)/20)*nt); % AWGN
32
33     %% receptor
34     % multiplicar pelas senóides
35     mE = conv(real(yt).*ct,ones(1,2*T));
36     mO = conv(imag(yt).*st,ones(1,2*T));
37
38     bHat = zeros(1,N);
39     bHat(1:2:end) = mE(2*T+1:2*T:end-2*T) > 0; % bits pares
40     bHat(2:2:end) = mO(2*T+1:2*T:end-T) > 0; % bits ímpares
41
42     % contagem de erros
43     nErr(ii) = size(find([ipBit - bHat]),2);
44
45 end
46
47 simBer = nErr/N; % ber simulada
48 theoryBer = 0.5*erfc(sqrt(10.^(Eb_N0_dB/10))); % ber teorica
49
50 % plot
51 close all
52 figure
53 semilogy(Eb_N0_dB,theoryBer,'bs-','LineWidth',2);
54 hold on
55 semilogy(Eb_N0_dB,simBer,'mx-','LineWidth',2);
56 axis([0 10 10^-5 0.5])
57 grid on
58 legend('theory - bpsk', 'simulation - msk','fontsize', 20);
59 xlabel('Eb/No, dB','fontsize',24);
60 ylabel('Bit Error Rate','fontsize', 24);
61 title('Bit error probability curve for MSK modulation','fontsize', 20);

```

Appendix D.

Função da demodulação GMSK

```

# Função da Demodulação
def gmsk_demod(r_complex,L):
    """
    Function to demodulate a baseband GMSK signal
    Parameters:
    r_complex : received signal at receiver front end (complex form - I+jQ)
    L : oversampling factor
    Returns:
    a_hat : detected binary stream
    """
    I = np.real(r_complex); Q = np.imag(r_complex); # I,Q streams
    z1 = Q * np.hstack((np.zeros(L), I[0:len(I)-L]))
    z2 = I * np.hstack((np.zeros(L), Q[0:len(I)-L]))
    z = z1 - z2
    a_hat = (z[2*L-1:L:L] > 0).astype(int) # sampling and hard decision
    #sampling indices depend on the truncation length (R) of Gaussian LPF defined in the modulator
    return a_hat

```

Appendix E.

Função da probabilidade de erro de bits da GMSK

```

N=100000
EbN0dB = np.arange(start=0,stop = 19, step = 2) # Eb/N0 range in dB for simulation
BTs = [0.1, 0.3, 0.5, 1] # Gaussian LPF's BT products
fc = 800 # Carrier frequency in Hz (must be < fs/2 and > fg)
L = 16 # oversampling factor

fig, axs = plt.subplots(nrows=1,ncols = 1)
lineColors = ['g','b','k','r']

for i,BT in enumerate(BTs):
    a = np.random.randint(2, size=N) # uniform random symbols from 0's and 1's
    (s_t,s_complex) = gmsk_mod(a,fc,L,BT) # GMSK modulation
    BER = np.zeros(len(EbN0dB)) # For BER values for each Eb/N0

    for j,EbN0 in enumerate(EbN0dB):
        r_complex = awgn(s_complex,EbN0) # refer Chapter section 4.1
        a_hat = gmsk_demod(r_complex,L) # Baseband GMSK demodulation
        BER[j] = np.sum(a!=a_hat)/N # Bit Error Rate Computation

axs.semilogy(EbN0dB,BER,lineColors[i]+'-x',label='$BT_b=$'+str(BT))
axs.set_title('Probabilidade de Erro de Bit para a modulação GMSK')
axs.set_xlabel('E_b/N_0 (dB)');axs.set_ylabel('Probabilidade de Erro de Bit - $P_b$')
axs.legend();fig.show()

```

Appendix F.

Função da densidade de espectro da GMSK

```
def plotWelchPSD(x,fs,fc,ax = None,color='b', label=None):  
    from scipy.signal import hanning, welch  
    from numpy import log10  
    nx = max(x.shape)  
    na = 16 # averaging factor to plot averaged welch spectrum  
    w = hanning(nx//na) #// is for integer floor division  
    # Welch PSD estimate with Hanning window and no overlap  
    f, Pxx = welch(x,fs>window = w,noverlap=0)  
    indices = (f>=fc) & (f<4*fc) # To plot PSD from Fc to 4*Fc  
    Pxx = Pxx[indices]/Pxx[indices][0] # normalized psd w.r.t Fc  
    ax.plot(f[indices]-fc,10*log10(Pxx),color,label=label) #Plot in the given axes  
  
N = 100000 # Number of symbols to transmit  
fc = 800 # carrier frequency in Hertz  
L = 16 # oversampling factor,use L= Fs/Fc, where Fs >> 2xFc  
fs = L*fc  
a = np.random.randint(2, size=N) # uniform random symbols from 0's and 1's  
# '':unused output variable  
(s1, _) = gmsk_mod(a,fc,L,BT=0.3, enable_plot=False) # BT_b=0.3  
(s2, _) = gmsk_mod(a,fc,L,BT=0.5) # BT_b=0.5  
(s3, _) = gmsk_mod(a,fc,L,BT=0.7) # BT_b=0.7  
(s4, _) = gmsk_mod(a,fc,L,BT=10000) # BT_b=very value value (MSK)  
# Compute and plot PSDs for each of the modulated versions  
fig, ax = plt.subplots(1, 1)  
plotWelchPSD(s1,fs,fc, ax = ax, color = 'r', label = '$BT_b=0.3$')  
plotWelchPSD(s2,fs,fc, ax = ax, color = 'b', label = '$BT_b=0.5$')  
plotWelchPSD(s3,fs,fc, ax = ax, color = 'm', label = '$BT_b=0.7$')  
plotWelchPSD(s4,fs,fc, ax = ax, color = 'k', label = '$BT_b=\\infty$')  
ax.set_xlabel('$f-f_c$'); ax.set_ylabel('PSD (dB/Hz)')  
ax.legend(); fig.show()
```

Appendix G.

Função da modulação do CPFSK

```
import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
from scipy.signal import lfilter  
L = 50 # oversampling factor  
Tb = 0.5 # bit period in seconds  
fs = L/Tb # sampling frequency in Hertz  
fc = 2/Tb # carrier frequency  
N = 8 # number of bits to transmit  
h = 1 # modulation index  
b = 2*np.random.randint(2, size=N)-1 # random information sequence in +1/-1 format  
b = np.tile(b, (L,1)).flatten('F')  
b_integrated = lfilter([1.0],[1.0,-1.0],b)/fs #Integrate b using filter  
theta = np.pi*h/Tb*b_integrated  
t = np.arange(0, Tb*N, 1/fs) # time base  
s = np.cos(2*np.pi*fc*t + theta) # CPFSK signal  
fig, (ax1,ax2,ax3) = plt.subplots(3, 1)  
ax1.plot(t,b);ax1.set_xlabel('t');ax1.set_ylabel('b(t)')  
ax2.plot(t,theta);ax2.set_xlabel('t');ax2.set_ylabel('$\\theta(t)$')  
ax3.plot(t,s);ax3.set_xlabel('t');ax3.set_ylabel('s(t)')  
fig.show()
```