Modulações Analógicas

Capítulo 4: AM, FM e Aplicações

Prof. Daniel Costa Araújo

Universidade de Brasília
Laboratório de Telecomunicações

February 19, 2026

Sumário

Capítulo 4

Modulações Analógicas

AM, FM e Aplicações em Sistemas de Comunicação

Por que Modular Sinais?

Comunicação Banda Base vs. Comunicação por Portadora

Razões para modulação:

1. **Multiplexação (FDM)**:
   - Múltiplos sinais compartilham mesmo meio
   - Cada sinal em frequência diferente
2. **Propagação e Antenas**:
   - Antena eficiente: tamanho $\approx \lambda/4$
   - Sinal de 1 kHz: $\lambda = 300$ km $\rightarrow$ antena impraticável
   - Portadora de 1 MHz: $\lambda = 300$ m $\rightarrow$ antena de 75 m
3. **Largura de Banda vs. Frequência**:
   - Aloca sinais em bandas apropriadas
   - Reduz ruído e interferência
4. **Processamento de Sinal**:

Classificação das Modulações

Modulação Analógica: Parâmetro da portadora varia continuamente com mensagem

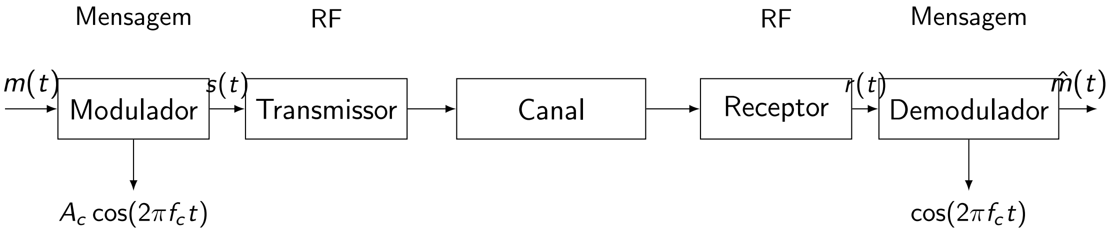
Portadora: $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \phi_c)$

Três parâmetros moduláveis:

1. **Amplitude** A_c:
   - Modulação em Amplitude (AM)
   - Variantes: DSB-SC, DSB-LC, SSB, VSB
2. **Frequência** f_c:
   - Modulação em Frequência (FM)
3. **Fase** ϕ_c:
   - Modulação em Fase (PM)

Nesta seção: Modulação em Amplitude e suas variantes

Diagrama de Blocos: Sistema de Comunicação



Componentes principais:

- **Modulador:** Combina mensagem $m(t)$ com portadora
- **Canal:** Meio de transmissão (ar, cabo, fibra)
- **Demodulador:** Recupera $m(t)$ do sinal modulado

AM DSB-SC: Double Sideband Suppressed Carrier

Definição

Modulação DSB-SC:

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

onde:

- $m(t)$: sinal modulante (mensagem) com largura de banda W
- A_c: amplitude da portadora
- f_c: frequência da portadora ($f_c \gg W$)

Características:

- Amplitude varia linearmente com $m(t)$
- Portadora suprimida (não transmitida)

Análise Espectral do DSB-SC

Transformada de Fourier de $s(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$:

Usando $\cos(2\pi f_c t) = \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2}$:

$$s(t) = A_c m(t)\frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2}$$

Pela propriedade de deslocamento em frequência:

$$m(t)e^{j2\pi f_c t} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} M(f - f_c)$$

Portanto:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

Interpretação:

- Espectro de $m(t)$ deslocado para $\pm f_c$

Largura de Banda do DSB-SC

$$\boxed{S(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)]}$$

Análise da largura de banda:

- Mensagem $m(t)$ tem largura de banda W (de $-W$ a W)
- Após modulação:
  - USB ocupa: f_c a $f_c + W$
  - LSB ocupa: $f_c - W$ a f_c
- Largura de banda total do sinal modulado:

$$\boxed{B_{\text{DSB}} = 2W}$$

Observações:

- Ambas bandas laterais carregam a mesma informação

Potência do DSB-SC

Potência transmitida:

$$P_s = \frac{1}{T}\int_0^T |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T A_c^2 m^2(t)\cos^2(2\pi f_c t) dt$$

Usando $\langle \cos^2(2\pi f_c t) \rangle = 1/2$:

$$P_s = \frac{A_c^2}{2}\langle m^2(t) \rangle = \frac{A_c^2}{2} P_m$$

onde P_m é a potência média de $m(t)$.

Potência do DSB-SC

$$\boxed{P_s = \frac{A_c^2 P_m}{2}}$$

Exemplo 1: DSB-SC com Tom Único

Sinal modulante: $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$

Sinal DSB-SC:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_m t)\cos(2\pi f_c t)$$

Usando identidade trigonométrica:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

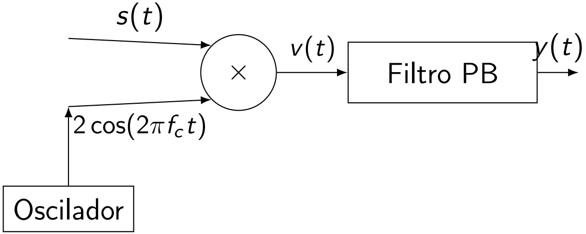
$$s(t) = \frac{A_c}{2}[\cos(2\pi(f_c - f_m)t) + \cos(2\pi(f_c + f_m)t)]$$

Componentes espectrais:

- LSB em $f_c - f_m$: amplitude $A_c/2$
- USB em $f_c + f_m$: amplitude $A_c/2$
- Não há componente em f_c!

Demodulação Coerente do DSB-SC

Detector de Produto (Síncrono):



Análise matemática:

Sinal recebido: $r(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$

Após multiplicação com $2\cos(2\pi f_c t)$:

$$v(t) = 2A_c m(t)\cos^2(2\pi f_c t) = A_c m(t)[1 + \cos(4\pi f_c t)]$$

Efeito de Erro de Fase na Demodulação

Oscilador local com erro de fase: $2\cos(2\pi f_c t + \theta)$

Após multiplicação:

$$v(t) = 2A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c t + \theta)$$

Usando $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$:

$$v(t) = A_c m(t)[\cos\theta + \cos(4\pi f_c t + \theta)]$$

Após filtro passa-baixas:

$$\boxed{y(t) = A_c m(t)\cos\theta}$$

Observações:

- Atenuação por fator $\cos\theta$
- Para $\theta = 90^\circ$: $y(t) = 0$ (perda total!)
- Para θ *pequeno*: $\cos\theta \approx 1$ (pouca degradação)

AM Convencional (DSB-LC)

Motivação: DSB-SC requer sincronização perfeita. Podemos simplificar o receptor?

Definição: AM Convencional

$$s(t) = A_c[1 + k_a m(t)]\cos(2\pi f_c t)$$

onde:

- k_a: sensibilidade ou constante de modulação
- $1 + k_a m(t)$: envelope do sinal
- Condição: $|k_a m(t)| \leq 1$ (evitar supermodulação)

Diferença fundamental:

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos(2\pi f_c t)}_{} + \underbrace{A_c k_a m(t) \cos(2\pi f_c t)}_{}$$

Índice de Modulação

Normalização: Assumir $m(t)$ normalizado tal que $\max|m(t)| = 1$

Índice de modulação:

$$\mu = k_a \max|m(t)| = k_a$$

Para $0 \leq \mu \leq 1$:

$$\boxed{s(t) = A_c[1 + \mu m_n(t)]\cos(2\pi f_c t)}$$

onde $m_n(t)$ é $m(t)$ normalizado ($\max|m_n(t)| = 1$).

Envelope:

$$A(t) = A_c[1 + \mu m_n(t)]$$

- $\mu = 0$: portadora não modulada
- $\mu = 1$: modulação 100% (envelope vai a zero)

Supermodulação

Condição de supermodulação: $\mu > 1$ ou $|k_a m(t)| > 1$
Problema:

$$1 + k_a m(t) < 0 \quad \text{para alguns valores de } t$$

Envelope torna-se negativo $\rightarrow$ inversão de fase $\rightarrow$ distorção

Consequências:

- Detector de envelope produz saída distorcida
- Espectro contém componentes espúrias
- Ineficiência de potência
- **Deve ser evitada!**

Solução: Controle automático de ganho (AGC) no transmissor
Veja figura: Comparação de envelopes para $\mu = 0,5$, $1,0$ e $1,5$

Espectro do AM Convencional

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + A_c k_a m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Transformada de Fourier:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] + \frac{A_c k_a}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)]$$

Componentes:

- **Portadora:** impulsos em $\pm f_c$ com amplitude $A_c/2$
- **Bandas laterais:** versões deslocadas de $M(f)$
  - USB: f_c a $f_c + W$
  - LSB: $f_c - W$ a f_c

Largura de banda:

$$B_{\text{AM}} = 2W \quad \text{(mesma que DSB-SC)}$$

Potência do AM Convencional

$$s(t) = A_c[1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Potência total:

$$P_s = \left\langle A_c^2[1 + k_a m(t)]^2 \cos^2(2\pi f_c t) \right\rangle$$

$$= \frac{A_c^2}{2} \left\langle [1 + k_a m(t)]^2 \right\rangle$$

$$= \frac{A_c^2}{2} \left[1 + 2k_a \langle m(t) \rangle + k_a^2 \langle m^2(t) \rangle \right]$$

Se $\langle m(t) \rangle = 0$ (sem componente DC):

$$P_s = \frac{A_c^2}{2} [1 + k_a^2 P_m]$$

Eficiência de Potência do AM

Eficiência: Fração da potência total que carrega informação

$$\eta = \frac{P_{sb}}{P_s} = \frac{P_{sb}}{P_c + P_{sb}}$$

$$= \frac{\frac{A_c^2 k_a^2 P_m}{2}}{\frac{A_c^2}{2} + \frac{A_c^2 k_a^2 P_m}{2}} = \frac{k_a^2 P_m}{1 + k_a^2 P_m}$$

Para tom único $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$: $P_m = 1/2$

$$\eta = \frac{\mu^2/2}{1 + \mu^2/2} = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2}$$

Eficiências típicas:

- $\mu = 0.5$: $\eta = 11\%$

Exemplo 2: AM Convencional com Tom Único

Dado: $m(t) = \cos(2\pi f_m t)$, $\mu = 0.8$, $A_c = 100$ V

Sinal AM:

$$s(t) = 100[1 + 0.8\cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_c t)$$

Espectro:

- Portadora em f_c: amplitude 50 V
- LSB em $f_c - f_m$: amplitude $40 \times 0.5 = 20$ V
- USB em $f_c + f_m$: amplitude 20 V

Potências:

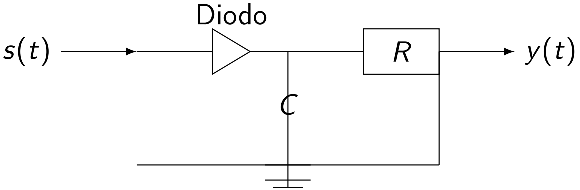
$$P_c = \frac{100^2}{2} = 5000\ \text{W (em 1 }\Omega)$$

$$P_{sb} = \frac{0.8^2}{2} \times 5000 = 1600\ \text{W}$$

$$P = 5000 + 1600 = 6600\ \text{W}$$

Detector de Envelope

Vantagem do AM convencional: Demodulação simples com detector de envelope



Funcionamento:

- Diodo retifica o sinal (permite apenas semi-ciclos positivos)
- Capacitor C carrega rapidamente nos picos
- Descarrega lentamente através de R
- Saída segue o envelope $A_c[1 + k_a m(t)]$

AM SSB: Single Sideband

Observação fundamental:
No DSB-SC, ambas bandas laterais (USB e LSB) carregam a mesma informação.

Ideia do SSB:
Transmitir apenas uma banda lateral $\rightarrow$ economiza largura de banda!

Vantagens do SSB:

- Largura de banda: $B_{\text{SSB}} = W$ (metade do DSB!)
- Potência concentrada em uma banda
- Menos interferência
- Melhor para canais seletivos em frequência

Desvantagens:

- Geração mais complexa

Representação Matemática do SSB

SSB pode ser gerado de duas formas:

1. Filtragem de DSB-SC 2. Método de Hilbert (phasing)

Representação usando Transformada de Hilbert:

SSB-USB (Upper Sideband)

$$s_{\mathrm{USB}}(t) = \frac{A_c}{2}[m(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)]$$

SSB-LSB (Lower Sideband)

$$s_{\mathrm{LSB}}(t) = \frac{A_c}{2}[m(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)]$$

Transformada de Hilbert

Definição no Tempo

$$\hat{m}(t) = m(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{m(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Definição na Frequência

$$\hat{M}(f) = -j\text{sgn}(f)M(f) = \begin{cases} -jM(f) & f > 0 \\ +jM(f) & f < 0 \end{cases}$$

Interpretação:

- Defasador de -90° para todas as frequências
- Para $f > 0$: fase reduzida em 90°

Derivação do SSB-USB

Partindo do DSB-SC: $s_{\mathrm{DSB}}(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$
Espectro: $S_{\mathrm{DSB}}(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)]$

Para obter USB: Aplicar filtro passa-altas ideal centrado em f_c

$$H_{\mathrm{USB}}(f) = \begin{cases} 1 & f > f_c \\ 0 & f < f_c \end{cases}$$

No tempo (método de Hilbert):
$m(t)\cos(2\pi f_c t)$ contribui para USB e LSB
$\hat{m}(t)\sin(2\pi f_c t)$ contribui para USB e LSB com fases opostas

Combinação que cancela LSB:

Espectro do SSB

SSB-USB:

$$S_{\text{USB}}(f) = \begin{cases} \frac{A_c}{2} M(f - f_c) & f > 0 \\ \frac{A_c}{2} M(f + f_c) & f < 0 \end{cases}$$

Apenas banda superior em torno de f_c!

Largura de banda:

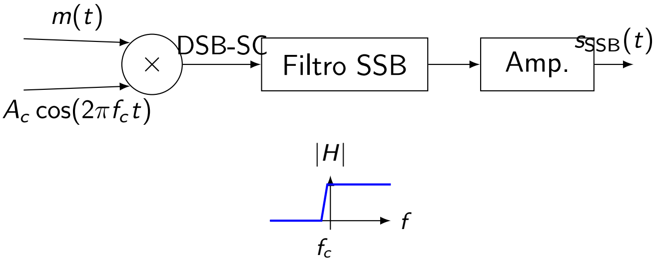
$$\boxed{B_{\text{SSB}} = W}$$

Economia de 50% comparado a DSB!

Potência:

$$P_{\text{SSB}} = \frac{A_c^2 P_m}{4}$$

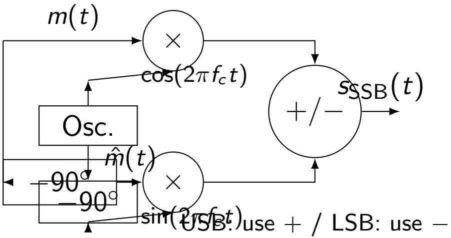
Geração de SSB: Método do Filtro



Processo:

1. Gerar DSB-SC: $A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$
2. Filtrar com passa-faixas centrado em f_c
   - USB: passa alta de f_c
   - LSB: passa baixa de f_c

Geração de SSB: Método de Hilbert

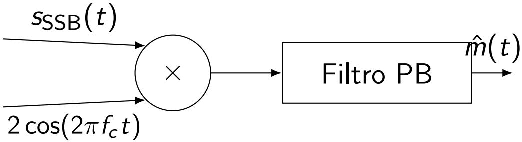


Características:

- Não requer filtros seletivos
- Defasador de $-90°$ (implementado com all-pass networks)
- Dois osciladores em quadratura (defasados $90°$)
- Escolha do sinal no somador determina USB ou LSB

Demodulação do SSB

SSB requer detecção coerente:



Sensibilidade a erro de frequência:

Se oscilador local tem erro Δf:

$$\hat{m}(t) = m(t)\cos(2\pi\Delta f \cdot t)$$

Sinal recuperado tem modulação residual em Δf!

Para voz: $\Delta f \leq 20$ Hz é aceitável

Exemplo 3: Comparação DSB vs SSB

Sinal modulante: $m(t)$ com largura de banda $W = 5$ kHz
Frequência da portadora: $f_c = 1$ MHz

Comparação:

Característica	DSB-SC	SSB
Largura de banda	$2W = 10$ kHz	$W = 5$ kHz
Potência (relativa)	1.0	0.5
Geração	Simples	Complexa
Demodulação	Coerente	Coerente
Sensibilidade Δf	Baixa	Alta
Aplicações	Estéreo FM	Rádio amador Comunicação longa distância

AM VSB: Vestigial Sideband

Problema com SSB:
Filtragem abrupta em f_c é difícil, especialmente para sinais com componentes DC ou de muito baixa frequência (ex: vídeo).

Solução: VSB
Transmitir uma banda lateral completa + "vestígio" da outra.

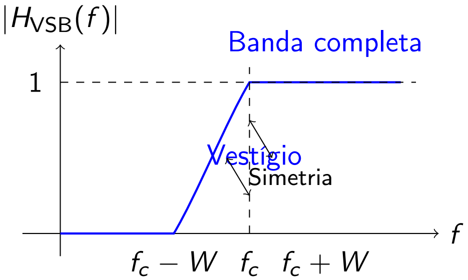
Definição

VSB é um compromisso entre DSB e SSB:

- Largura de banda: $W < B_{\text{VSB}} < 2W$
- Transmite USB completa + parte da LSB (ou vice-versa)
- Filtro com roll-off gradual em f_c

Filtro VSB

Característica do filtro VSB:



Condição de simetria vestigial:

$$H_{\text{VSB}}(f_c + f) + H_{\text{VSB}}(f_c - f) = \text{constante}$$

Análise Matemática do VSB

Sinal VSB:

$$s_{\mathrm{VSB}}(t) = [A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)] * h_{\mathrm{VSB}}(t)$$

No domínio da frequência:

$$S_{\mathrm{VSB}}(f) = \frac{A_c}{2}[M(f - f_c) + M(f + f_c)]H_{\mathrm{VSB}}(f)$$

Demodulação coerente com $2\cos(2\pi f_c t)$:

Produto resulta em:

$$v(t) = s_{\mathrm{VSB}}(t) \cdot 2\cos(2\pi f_c t)$$

Após passa-baixas, se H_{VSB} satisfaz condição de simetria:

$$\boxed{y(t) = A_c m(t)}$$

Recuperação perfeita!

VSB na TV Analógica

Sistema NTSC (EUA):

- Sinal de vídeo: 0 a 4.2 MHz
- Frequência de portadora visual: f_v
- Largura do canal: 6 MHz total

Alocação espectral:

- Vestígio LSB: 1.25 MHz abaixo de f_v
- USB completa: 4.2 MHz acima de f_v
- Portadora de áudio FM: 4.5 MHz acima de f_v

Economia de banda:

- DSB precisaria: $2 \times 4.2 = 8.4$ MHz
- VSB usa: $1.25 + 4.2 = 5.45$ MHz
- Economia: $\approx 35\%$

Largura de Banda do VSB

Largura de banda geral:

$$B_{\mathrm{VSB}} = W + f_{vest}$$

onde f_{vest} é a largura do vestígio.

Limites:

- Se $f_{vest} = W$: $B_{\mathrm{VSB}} = 2W$ (torna-se DSB)
- Se $f_{vest} = 0$: $B_{\mathrm{VSB}} = W$ (torna-se SSB)

Típico: $f_{vest} = 0.2W$ a $0.3W$

$$\boxed{W < B_{\mathrm{VSB}} < 2W}$$

Exemplo NTSC:

- $W = 4.2$ MHz

Tabela Comparativa: Tipos de AM

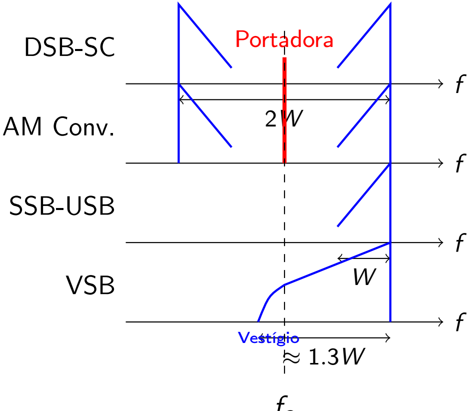
Tipo	**DSB-SC**	**AM Conv.**	**SSB**	**VSB**
Largura de banda	$2W$	$2W$	W	$W < B < 2W$
Potência (relativa)	1.0	> 3.0	0.5	≈ 0.7
Eficiência potência	Alta	Baixa ($< 33\%$)	Máxima	Alta
Geração	Simples	Simples	Complexa	Moderada
Demodulação	Coerente	Envelope	Coerente	Coerente
Complexidade RX	Média	Mínima	Alta	Média
Sensibilidade Δf	Baixa	N/A	Alta	Média
Aplicações	-	Rádio AM broadcast	Rádio amador	TV analógica

Escolha depende de:

- Largura de banda disponível
- Potência disponível

Comparação Espectral Visual

Para mesmo sinal modulante $m(t)$ com banda W:



Aplicações Práticas das Variantes AM

AM Convencional (DSB-LC):

- Rádio AM broadcast (535-1705 kHz)
- Receptor muito simples e barato
- Ainda usado em países em desenvolvimento

SSB:

- Rádio amador (HF: 3-30 MHz)
- Comunicações marítimas e aeronáuticas
- Comunicações militares de longa distância
- Telefonia por satélite (histórico)

VSB:

- TV analógica terrestre (NTSC, PAL, SECAM)
- Modems de alta velocidade (histórico)
- Base para VSB digital (ATSC)

Resumo: Modulação em Amplitude

Conceitos fundamentais:

- Modulação desloca espectro de banda base para RF
- Facilita multiplexação, propagação e processamento

Quatro variantes principais:

1. **DSB-SC**: $s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$
   - Simples, mas requer detecção coerente
2. **AM Convencional:** $s(t) = A_c[1 + k_a m(t)] \cos(2\pi f_c t)$
   - Detector de envelope, mas ineficiente ($\eta \leq 33\%$)
3. **SSB**: Usa transformada de Hilbert
   - Economiza largura de banda (50%)
4. **VSB**: Compromisso DSB-SSB
   - Ideal para sinais com componentes DC/baixa frequência

Escolha baseada em: Banda disponível, potência, complexidade, custo

Modulação Angular vs. Modulação em Amplitude

AM: Amplitude varia, frequência e fase fixas

$$s_{\text{AM}}(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t)$$

Modulação Angular: Amplitude fixa, ângulo (fase ou frequência) varia

$$s(t) = A_c \cos[\theta(t)] = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

onde $\phi(t)$ é a fase modulada.

Duas variantes:

1. **FM (Modulação em Frequência):**
   Frequência instantânea varia com $m(t)$
2. **PM (Modulação em Fase):**
   Fase instantânea varia diretamente com $m(t)$

Fase e Frequência Instantâneas

Para sinal modulado $s(t) = A_c \cos[\theta(t)]$:

Definições

Fase instantânea:

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \phi(t)$$

Frequência instantânea:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} = f_c + \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt}$$

Interpretação:

- $\theta(t)$: argumento da função cosseno
- $f_i(t)$: taxa instantânea de oscilação

Definição de FM

Modulação em Frequência (FM)

A frequência instantânea é proporcional à mensagem:

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

onde k_f é a constante de sensibilidade de frequência (Hz/V).

Desvio de frequência:

$$\Delta f(t) = k_f m(t)$$

Desvio máximo:

$$\Delta f = k_f \max |m(t)|$$

Derivando $\phi(t)$ de $f_i(t)$:

Sinal FM no Domínio do Tempo

Sinal FM

$$s_{\text{FM}}(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau\right]$$

Ou definindo o **índice de fase**:

$$\beta(t) = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)d\tau$$

$$s_{\text{FM}}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta(t)]$$

Características:

- Amplitude constante: $|s_{\text{FM}}(t)| = A_c$
- Toda informação está na fase

Modulação em Fase (PM)

Modulação em Fase (PM)

A fase instantânea é diretamente proporcional à mensagem:

$$\phi(t) = k_p m(t)$$

onde k_p é a constante de sensibilidade de fase (rad/V).

Sinal PM:

$$s_{\mathrm{PM}}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)]$$

Frequência instantânea:

$$f_i(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi}\frac{dm(t)}{dt}$$

Relação FM-PM:

Relação entre FM e PM

FM pode ser vista como PM do integral:

$$\text{FM de } m(t) = \text{PM de } \int m(t)dt$$

PM pode ser vista como FM da derivada:

$$\text{PM de } m(t) = \text{FM de } \frac{dm(t)}{dt}$$

Conversão prática:

FM com Tom Único: Configuração

Sinal modulante: $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

Sinal FM:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f A_m \int_{-\infty}^{t} \cos(2\pi f_m \tau) d\tau\right]$$

Integrando:

$$\int \cos(2\pi f_m \tau) d\tau = \frac{\sin(2\pi f_m t)}{2\pi f_m}$$

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \frac{k_f A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t)\right]$$

Definindo o **índice de modulação**:

$$\beta = \frac{k_f A_m}{f_m} = \frac{\Delta f}{f_m}$$

Expansão de Bessel

Para analisar o espectro, usamos a identidade:

$$\cos[\beta \sin(\omega_m t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos(n\omega_m t)$$

onde $J_n(\beta)$ são **funções de Bessel de primeira espécie de ordem** n.

Aplicando a $s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$:
Usando $\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$:

$$s(t) = A_c[\cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin(2\pi f_m t))]$$

E as identidades:

$$\cos[\beta \sin(\omega_m t)] = J_0(\beta) + 2 \sum^{\infty} J_{2n}(\beta) \cos(2n\omega_m t)$$

Espectro FM: Resultado Final

Após manipulação algébrica:

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t]$$

Interpretação do espectro:

- **Portadora** em f_c: amplitude $A_c J_0(\beta)$
- **Bandas laterais** em $f_c \pm nf_m$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$
- Amplitude da n-ésima banda: $A_c J_n(\beta)$
- **Infinitas bandas laterais teoricamente**
- Na prática: $J_n(\beta) \approx 0$ para $n > \beta + 1$

Diferença fundamental de AM:

- AM: 2 bandas laterais (USB, LSB)

Funções de Bessel

Propriedades importantes:

- $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$ (simetria)
- $J_n(-\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$ (conservação de potência!)
- Para $\beta \ll 1$: $J_0(\beta) \approx 1$, $J_1(\beta) \approx \beta/2$, $J_n(\beta) \approx 0$ para $n \geq 2$

Valores típicos:

β	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
0.5	0.94	0.24	0.03	0.00	-	-
1.0	0.77	0.44	0.11	0.02	0.00	-
2.0	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03	0.01
5.0	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26

Veja figura: Gráfico de $J_n(\beta)$ vs. β para diferentes n

Largura de Banda de FM

Problema: Teoricamente, espectro FM tem largura infinita!
Na prática: Bandas com $|J_n(\beta)| < 0.01$ são desprezíveis.

Número significativo de bandas laterais:
Aproximadamente $n_{\text{max}} \approx \beta + 1$
Largura de banda aproximada:

$$B \approx 2n_{\text{max}} f_m = 2(\beta + 1) f_m$$

Regra de Carson

$$\boxed{B_{\text{FM}} \approx 2(\Delta f + f_m) = 2f_m(\beta + 1)}$$

onde $\Delta f = k_f A_m$ é o desvio de frequência.

NBFM vs. WBFM

Dois regimes de operação:

1. **NBFM (Narrowband FM):** $\beta \ll 1$
   - $B \approx 2f_m$ (similar a AM)
   - Poucas bandas laterais significativas
   - Comportamento quase linear
2. **WBFM (Wideband FM):** $\beta \gg 1$
   - $B \approx 2\Delta f$ (dominado pelo desvio)
   - Muitas bandas laterais
   - Melhor desempenho em ruído

Comparação com AM:

- AM: $B = 2W$ (independente de A_c ou μ)
- FM: $B = 2\Delta f(1 + 1/\beta)$ (depende de Δf!)
- FM troca largura de banda por melhor SNR

Exemplo 1: FM com Tom Único

Dados:

- $m(t) = \cos(2\pi \times 5000 \cdot t)$ (5 kHz)
- $\Delta f = 75$ kHz (desvio máximo)
- $f_c = 100$ MHz (portadora)

Cálculo do índice de modulação:

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{75\text{ kHz}}{5\text{ kHz}} = 15$$

Largura de banda (Carson):

$$B \approx 2(\Delta f + f_m) = 2(75 + 5) = 160\text{ kHz}$$

Número de bandas significativas:

$$n_{\max} \approx \beta + 1 = 16$$

Exemplo 2: Rádio FM Comercial

Padrão FCC para FM broadcast:

- Desvio máximo: $\Delta f = 75$ kHz
- Frequência máxima de áudio: $f_m = 15$ kHz
- Alocação de canal: 200 kHz

Índice de modulação:

$$\beta = \frac{75 \text{ kHz}}{15 \text{ kHz}} = 5$$

Largura de banda necessária:

$$B = 2(\Delta f + f_m) = 2(75 + 15) = 180 \text{ kHz}$$

Observação: Canal de 200 kHz acomoda 180 kHz + bandas de guarda

Banda FM: 88-108 MHz, espaçamento de 200 kHz

Princípios de Demodulação FM

Objetivo: Recuperar $m(t)$ de $s_{\text{FM}}(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int m(\tau) d\tau]$

Métodos principais:

1. **Discriminador de frequência (slope detector)**
   - Converte FM em AM, depois detecta envelope
2. **Detector PLL (Phase-Locked Loop)**
   - VCO "segue" a frequência de entrada
   - Saída do VCO é proporcional a $m(t)$
3. **Detector de Foster-Seeley**
   - Usa transformador balanceado
4. **Detector de razão (ratio detector)**
   - Variante do Foster-Seeley
   - Menos sensível a variações de amplitude

Discriminador de Frequência

Princípio: Converter variação de frequência em variação de amplitude

$$s_{\mathrm{FM}}(t) \longrightarrow \boxed{\text{Derivador}} \xrightarrow{\text{AM}} \boxed{\text{Det. Envelope}} \longrightarrow \hat{m}(t)$$

Análise matemática:

$$\frac{ds_{\mathrm{FM}}(t)}{dt} = -A_c \cdot 2\pi f_i(t) \sin[2\pi f_c t + \phi(t)]$$

Amplitude do sinal derivado:

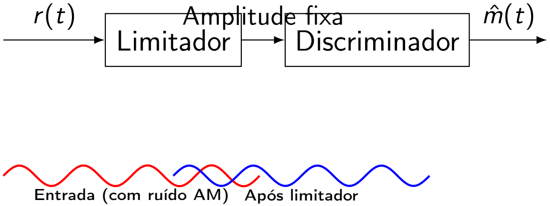
$$A(t) = 2\pi A_c f_i(t) = 2\pi A_c [f_c + k_f m(t)]$$

Após detector de envelope e filtro DC:

$$\hat{m}(t) = K \cdot k_f m(t)$$

Limitador de Amplitude

Propósito: Remover variações de amplitude antes da demodulação FM



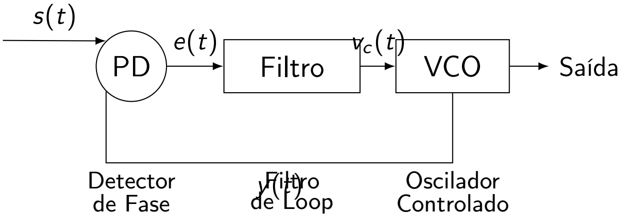
Implementação:

- Amplificador com saturação (clipper)
- Mantém informação de FM
- Remove variações de amplitude

Vantagem de FM: Informação na frequência, não na amplitude!

Conceito do PLL

PLL (Phase-Locked Loop): Sistema de controle realimentado que sincroniza um oscilador local com sinal de entrada.



Componentes:

- **Detector de fase (PD):** Compara fases de entrada e VCO
- **Filtro de loop:** Passa-baixas, define dinâmica
- **VCO:** Frequência controlada por tensão

Análise do PLL

Sinal de entrada FM:

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi_i(t)]$$

Saída do VCO:

$$y(t) = A_v \cos[2\pi f_c t + \phi_o(t)]$$

Detector de fase (multiplicador):

$$e(t) = K_d \sin[\phi_i(t) - \phi_o(t)] \approx K_d[\phi_i(t) - \phi_o(t)]$$

para pequenos erros de fase.

VCO:

$$\frac{d\phi_o(t)}{dt} = 2\pi K_v v_c(t)$$

onde K_v é a sensibilidade do VCO (Hz/V).

Equação Diferencial do PLL

Filtro de loop: $V_c(s) = F(s)E(s)$
Análise em regime travado (locked):

$$\phi_o(t) \approx \phi_i(t)$$

Para FM: $\phi_i(t) = 2\pi k_f \int m(\tau)d\tau$
VCO produz: $\frac{d\phi_o}{dt} = 2\pi K_v v_c(t)$
Igualando:

$$v_c(t) = \frac{k_f}{K_v} m(t)$$

Conclusão: $v_c(t)$ é proporcional a $m(t) \rightarrow$ demodulação FM!

Saída do PLL para FM

Função de Transferência do PLL

No domínio de Laplace:

Erro de fase: $E(s) = K_d[\Phi_i(s) - \Phi_o(s)]$

Filtro: $V_c(s) = F(s)E(s)$

VCO: $\Phi_o(s) = \frac{2\pi K_v}{s} V_c(s)$

Função de transferência em malha fechada:

$$H(s) = \frac{\Phi_o(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{K_d K_v F(s)}{s + K_d K_v F(s)}$$

Para filtro simples $F(s) = 1$ (proporcional):

$$H(s) = \frac{K_d K_v}{s + K_d K_v}$$

Parâmetros do PLL

Largura de banda de captura (capture range):
Faixa de frequências onde o PLL pode adquirir lock.

$$\Delta f_{capture} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{2K_d K_v F(0)}$$

Largura de banda de lock (lock range):
Faixa onde o PLL mantém lock após adquirido.

$$\Delta f_{lock} \approx \frac{K_d K_v}{2\pi}$$

Sempre: $\Delta f_{lock} > \Delta f_{capture}$

Largura de banda de loop:
Determina resposta dinâmica e rejeição de ruído.

Aplicações do PLL

O PLL é versátil e amplamente usado:

1. **Demodulação FM:**
   - Receptores FM de rádio e TV
   - Excelente linearidade e rejeição de amplitude
2. **Síntese de frequência:**
   - Gerar múltiplos de frequência de referência
   - Usado em geradores de RF
3. **Recuperação de portadora:**
   - Sistemas de comunicação digital
   - Demodulação coerente
4. **Recuperação de clock:**
   - Sincronização de dados
   - Interfaces seriais
5. **Controle de motor:**

Geração Direta de FM

Método: Modulador Direto com VCO

$$f_{out} = f_c + k_v m(t)$$

Características:

- Simples e direto
- $f_{out} = f_c + k_v m(t)$
- VCO implementado com: varactor diode, capacitor variável, etc.

Problema: Instabilidade de frequência

- f_c pode derivar com temperatura, componentes

Método de Armstrong (Indireto)

Ideia: Gerar NBFM estável, depois converter para WBFM

Processo:

1. Gerar NBFM com β pequeno e f_c estável (cristal)
2. Multiplicar frequência por n:
   - $f_c \to nf_c$
   - $\beta \to n\beta$
   - $\Delta f \to n\Delta f$
3. Converter para banda desejada (mixing)
4. Repetir multiplicação se necessário

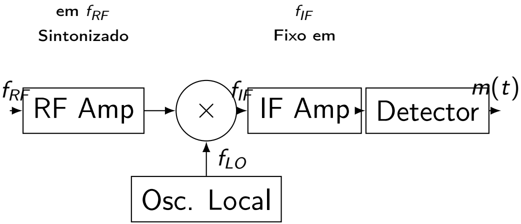
Exemplo:

Gerar FM com $f_c = 100$ MHz, $\Delta f = 75$ kHz:

- NBFM: $f_1 = 200$ kHz, $\Delta f_1 = 25$ Hz
- Multiplicar por 64: $f = 12.8$ MHz, $\Delta f = 1.6$ kHz

Princípio do Receptor Superheterodino

Problema: Demodular diretamente em f_c variável é complexo
Solução: Converter todas as frequências recebidas para uma **frequência intermediária (IF)** fixa



$$f_{LO} = f_{RF} \pm f_{IF}$$

Relação:

Vantagens do Superheterodino

Vantagens:

1. **Seletividade:**
   - Filtro IF fixo pode ser muito seletivo
   - Não precisa ajustar filtro ao trocar estação
2. **Sensibilidade:**
   - Amplificação concentrada em frequência fixa
   - Melhor controle de ganho (AGC)
3. **Estabilidade:**
   - Osciladores em frequência fixa são mais estáveis

Problema: Frequência Imagem

Duas frequências produzem mesmo f_{IF}:

- Desejada: $f_s = f_{LO} + f_{IF}$
- Imagem: $f_{im} = f_{LO} - f_{IF}$

Solução: Filtro de RF rejeita frequência imagem antes do mixer

Exemplo: Receptor FM Superheterodino

Rádio FM comercial:

- Banda FM: 88-108 MHz
- IF padrão: $f_{IF} = 10.7$ MHz

Para receber $f_{RF} = 100.0$ MHz:

$$f_{LO} = f_{RF} + f_{IF} = 100.0 + 10.7 = 110.7 \text{ MHz}$$

Frequência imagem:

$$f_{im} = f_{LO} + f_{IF} = 110.7 + 10.7 = 121.4 \text{ MHz}$$

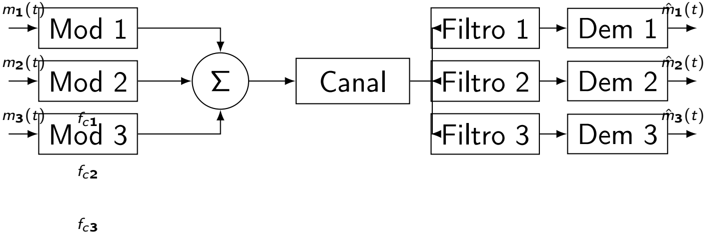
Fora da banda FM (88-108 MHz) $\rightarrow$ filtro RF facilmente rejeita

Processamento:

- Amplificador RF sintonizado em 100 MHz

Multiplexação por Divisão de Frequência

FDM (Frequency Division Multiplexing):
Múltiplos sinais compartilham mesmo canal, cada um em frequência diferente.



Requisito: f_{ci} suficientemente espaçadas para evitar sobreposição espectral
Aplicações: TV a cabo, telefonia analógica (hierarquia FDM)

Exemplo: FDM em Telefonia

Hierarquia FDM analógica (histórica):

- **Grupo:** 12 canais de voz (4 kHz cada)
  - SSB-LSB, espaçamento de 4 kHz
  - Faixa: 60-108 kHz
  - Banda total: 48 kHz
- **Supergrupo:** 5 grupos = 60 canais
  - Faixa: 312-552 kHz
  - Banda: 240 kHz
- **Grupo mestre:** 10 supergrupos = 600 canais
  - Faixa: 564-3084 kHz
  - Banda: 2520 kHz

Nota: Substituído por sistemas digitais (TDM, SONET/SDH), mas princípio permanece em sistemas ópticos (WDM).

Resumo: Modulação Angular

FM vs. PM:

- FM: frequência $\propto m(t)$, fase $\propto \int m(t)$
- PM: fase $\propto m(t)$, frequência $\propto dm(t)/dt$
- FM mais comum (melhor em ruído)

Espectro FM:

- Infinitas bandas laterais (Bessel)
- Largura de banda: $B \approx 2(\Delta f + f_m)$ (Carson)
- NBFM: $\beta \ll 1$, WBFM: $\beta \gg 1$

Demodulação:

- Discriminador de frequência
- PLL (mais usado atualmente)

Capítulo 5

Efeito do Ruído em Sistemas de Comunicação

SNR, figura de ruído e perdas de transmissão

Modelo de canal com ruído aditivo

Sistema de comunicação em banda base: sinal $m(t)$ transmitido, ruído aditivo no canal.
Sinal recebido:

$$r(t) = m(t) + n(t)$$

onde $n(t)$ é ruído branco gaussiano (AWGN) com densidade espectral de potência bilateral $N_0/2$ (W/Hz).

Receptor: Filtro passa-baixas ideal com largura de banda W (igual à banda de $m(t)$).
Potência do sinal na saída do filtro: P_m (potência média de $m(t)$).
Potência do ruído na saída: Ruído filtrado em $[-W, W]$ tem potência

$$N = \int_{-W}^{W} \frac{N_0}{2} df = N_0 W$$

SNR em banda base

Relação sinal-ruído na saída (SNR de referência):

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_m}{N_0 W}$$

Definição: SNR de entrada

Chamamos de γ a relação sinal-ruído na entrada do demodulador (após filtro de recepção, na banda do sinal):

$$\gamma = \frac{P_r}{N_0 W}$$

onde P_r é a potência do sinal recebido (na banda útil).

Para banda base, $P_r = P_m$, logo $(S/N)_o = \gamma$. Este valor serve de **referência** para comparar

Exemplo: SNR banda base

Dados: Sinal de voz com $P_m = 10$ mW, banda $W = 4$ kHz. Canal com $N_0 = 10^{-12}$ W/Hz.
Potência do ruído na saída do filtro:

$$N = N_0 W = 10^{-12} \times 4000 = 4 \times 10^{-9}\ \mathrm{W} = 4\ \mathrm{nW}$$

SNR na saída:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{10 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-9}} = 2{,}5 \times 10^6 \approx 64\ \mathrm{dB}$$

Parâmetro γ:

$$\gamma = \frac{P_m}{N_0 W} = \left(\frac{S}{N}\right)_o = 64\ \mathrm{dB}$$

Em sistemas reais, perdas de propagação reduzem P_r e portanto γ e $(S/N)_o$.

Receptor DSB-SC com ruído

Sinal recebido: $r(t) = s(t) + n(t)$, com $s(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$.
Ruído $n(t)$ em banda passante (centrado em f_c): pode ser escrito na forma em quadratura:

$$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

onde $n_c(t)$ e $n_s(t)$ são ruídos de banda base, independentes, cada um com PSD N_0 em $[-W, W]$ e potência $N_0 W$.

Demodulação coerente: Multiplicar por $2\cos(2\pi f_c t)$ e filtrar passa-baixas em W.
Saída do multiplicador:

$$\begin{aligned} r(t)\cdot 2\cos(2\pi f_c t) &= 2A_c m(t)\cos^2(2\pi f_c t) + 2n(t)\cos(2\pi f_c t) \\ &= A_c m(t)[1+\cos(4\pi f_c t)] + n_c(t)[1+\cos(4\pi f_c t)] + n_s(t)\sin(4\pi f_c t) \end{aligned}$$

Após filtro passa-baixas (remove componentes em $2f_c$):

SNR na saída do DSB-SC

Saída do demodulador: $y(t) = A_c m(t) + n_c(t)$.
Potência do sinal na saída: $P_{so} = A_c^2 P_m$.
Potência do ruído na saída: $n_c(t)$ tem PSD N_0 em $[-W, W]$, logo $N_o = N_0 W$.
SNR na saída:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{A_c^2 P_m}{N_0 W}$$

Potência recebida (sinal DSB-SC): $P_r = \frac{A_c^2 P_m}{2}$ (em 1Ω). Assim $A_c^2 P_m = 2P_r$.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{2P_r}{N_0 W} = 2\gamma$$

Resultado

Para DSB-SC com demodulação coerente: $(S/N)_o = 2\gamma$. Ou seja, **3 dB melhor** que o sistema

Comparação banda base vs. DSB-SC

Banda base: $(S/N)_o = P_m/(N_0 W)$. Se a potência recebida é P_m, então $(S/N)_o = \gamma$.
DSB-SC: Potência transmitida em banda lateral é $P_r = A_c^2 P_m/2$. SNR na saída:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{A_c^2 P_m}{N_0 W} = \frac{2P_r}{N_0 W} = 2\gamma$$

Interpretação: No DSB-SC, após multiplicação por portadora e filtragem, apenas a componente em fase do ruído (n_c) passa; a componente em quadratura (n_s) é rejeitada. O sinal útil é recuperado com ganho. O fator 2 em relação a γ aparece porque γ foi definido como $P_r/(N_0 W)$ e P_r é a potência do sinal modulado (que é metade da potência na saída do demodulador em termos de contribuição útil $A_c^2 P_m = 2P_r$).
Em resumo: Para mesma potência recebida P_r, o DSB-SC coerente oferece $(S/N)_o = 2\gamma$, ou seja, o dobro da SNR de um sistema banda base com a mesma potência de sinal na banda W.

Ruído em SSB AM

No SSB, o sinal ocupa apenas metade da banda do DSB (largura W em vez de $2W$).
Sinal recebido: $r(t) = s_{\mathrm{SSB}}(t) + n(t)$, com s_{SSB} em banda W (USB ou LSB).
Demodulação coerente: Mesmo que DSB-SC (multiplicar por portadora em fase e filtrar em W).
Análise: O ruído em banda passante na banda do SSB tem as componentes n_c e n_s; após demodulação coerente, apenas n_c contribui na saída, com potência $N_0 W$ (a banda do filtro é W).
Potência do sinal: $P_r = A_c^2 P_m/4$ (SSB tem metade da potência de um DSB com mesma amplitude de portadora, pois só uma banda lateral). Saída útil: proporcional a $A_c m(t)$, com potência $A_c^2 P_m/4 = P_r$.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{P_r}{N_0 W} = \gamma$$

Receptor AM convencional com ruído

Sinal AM: $s(t) = A_c[1 + \mu m_n(t)]\cos(2\pi f_c t)$. Receptor usa **detector de envelope**.
Entrada do detector: $r(t) = s(t) + n(t)$. Escrevendo
$n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$:

$$r(t) = [A_c(1 + \mu m_n) + n_c(t)]\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Envelope de $r(t)$:

$$E(t) = \sqrt{[A_c(1 + \mu m_n) + n_c]^2 + n_s^2}$$

Para **SNR de entrada alta** ($\gamma \gg 1$), o termo dominante é $A_c(1 + \mu m_n)$ e o ruído perturba pouco. Aproximação linear mostra que a componente de ruído na saída é essencialmente $n_c(t)$ (em fase com a portadora).

Potência da portadora recebida: $A_c^2/2$. Potência nas bandas laterais: $A_c^2\mu^2 P_{m_n}/2$. Potência total:

SNR na saída do AM convencional

Para AM com detector de envelope e alta SNR, a análise mostra:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o \approx \frac{\mu^2 P_{m_n}}{1+\mu^2 P_{m_n}}\,\gamma$$

Para tom único com μ (mensagem normalizada): $P_{m_n} = 1/2$,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o \approx \frac{\mu^2}{2+\mu^2}\,\gamma$$

Eficiência e SNR

O fator $\frac{\mu^2}{2+\mu^2}$ é exatamente a **eficiência de potência** η do AM. Como $\eta \leq 1/3$ (máximo em $\mu = 1$), temos $(S/N)_o \leq \gamma/3$. Ou seja, AM convencional é **pior** que banda base, DSB-SC e SSB para mesma γ.

Modelo de ruído em FM

Sinal FM recebido: $r(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \phi(t)] + n(t)$, com $\phi(t) = 2\pi k_f \int m(\tau)d\tau$.
Ruído em banda passante: $n(t) = n_c(t)\cos(2\pi f_c t) - n_s(t)\sin(2\pi f_c t)$.
Representação de $r(t)$ em envelope e fase:

$$r(t) = E(t)\cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

onde $E(t)$ é o envelope e $\psi(t)$ a fase. Para **SNR de entrada alta**, $E(t) \approx A_c$ e a perturbação de fase devido ao ruído é

$$\psi(t) \approx \phi(t) + \frac{n_s(t)}{A_c}$$

(componente n_s em quadratura modula a fase). O demodulador FM recupera $\frac{1}{2\pi}\frac{d\psi}{dt}$; o ruído na saída está relacionado a $\frac{1}{A_c}\frac{dn_s}{dt}$ (derivada do ruído), cuja PSD aumenta com f^2 na banda de mensagem.

SNR na saída do FM (WBFM)

A análise completa (Proakis, Cap. 6) para FM com tom único $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ e desvio $\Delta f = k_f A_m$ resulta em:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = 3\beta^2 \left(\frac{\Delta f}{f_m}\right)^2 \gamma = 3\beta^2\gamma$$

(pois $\beta = \Delta f / f_m$).

Relação SNR em FM

Para FM com índice de modulação β e mesma $\gamma = P_r/(N_0 W)$ (usando W como banda da mensagem):

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_o = 3\beta^2\gamma}$$

Exemplo: SNR em FM

Dados: FM com $\beta = 5$, $\gamma = 100$ (20 dB). Banda da mensagem $f_m = 15$ kHz.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = 3 \times 25 \times 100 = 7500 \approx 38{,}75 \text{ dB}$$

Ganho sobre banda base: $38{,}75 - 20 = 18{,}75$ dB (melhoria substancial).
Preço: Banda FM $B \approx 2 \times 15 \times (5 + 1) = 180$ kHz, enquanto banda base seria $2 \times 15 = 30$ kHz. FM usa 6 vezes mais banda e ganha $\approx 3\beta^2 = 75$ em potência de SNR (cerca de 19 dB).
Comparação com AM: Para mesmo γ, AM convencional daria $(S/N)_o \approx \eta\gamma \leq \gamma/3$; FM com $\beta = 5$ dá 75γ, ou seja, FM pode ser muito superior em SNR quando há banda disponível.

Efeito de limiar na demodulação FM

Para **SNR de entrada baixa**, a aproximação $E(t) \approx A_c$ e $\psi(t) \approx \phi + n_s/A_c$ deixa de ser válida. O envelope e a fase sofrem distorções não lineares.

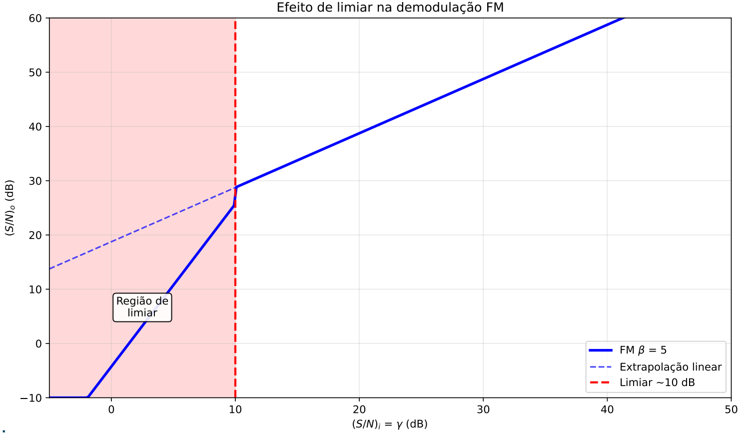
Comportamento típico:

- Acima de um certo **SNR de entrada** (limiar), $(S/N)_o$ segue a curva $3\beta^2\gamma$.
- Abaixo do limiar, $(S/N)_o$ cai rapidamente (degradação súbita).

O limiar depende de β: quanto maior β, maior tende a ser o SNR de entrada necessário para operar acima do limiar.

Causa: Quando o ruído é forte, o vetor (sinal + ruído) pode "inverter" a fase; o discriminador FM interpreta isso como desvio de frequência espúrio, gerando picos de ruído (clique noise) e degradando $(S/N)_o$.

Curva de limiar (qualitativa)



Motivação: ruído em FM e espectro

Na saída do demodulador FM, a PSD do ruído é aproximadamente **quadrática** em frequência: $S_{n_o}(f) \propto f^2$ na banda $[0, W]$. Assim, as **altas frequências** da mensagem sofrem mais ruído que as baixas.

Ideia: Pré-ênfase no transmissor (amplificar altas frequências antes de modular) e pós-ênfase no receptor (atenuar altas frequências após demodular) de forma que a resposta global seja plana e o ruído seja "achatado" na banda, melhorando o SNR percebido para altas frequências.

Filtros de pré-ênfase e pós-ênfase

Pré-ênfase (no transmissor): filtro passa-altas suave, por exemplo

$$H_{pe}(f) = 1 + j\frac{f}{f_0} \quad \Rightarrow \quad |H_{pe}(f)|^2 = 1 + (f/f_0)^2$$

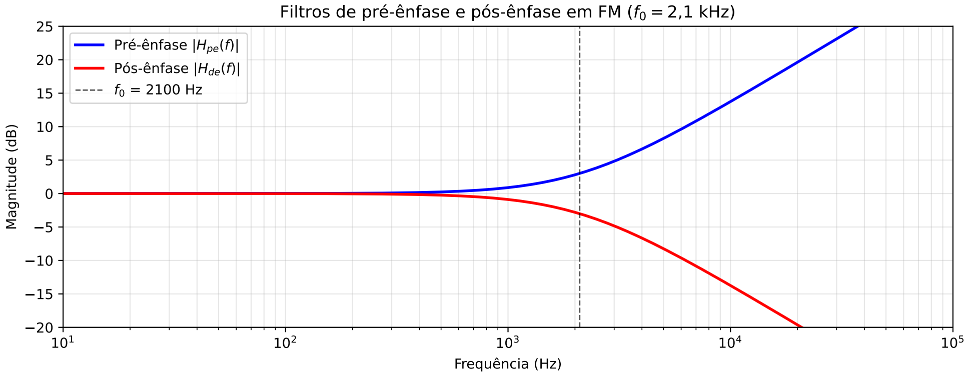
com f_0 da ordem de 2–3 kHz (áudio). Assim, altas frequências são enfatizadas antes da modulação FM.

Pós-ênfase (no receptor): filtro inverso (passa-baixas) para equalizar:

$$H_{de}(f) = \frac{1}{H_{pe}(f)} = \frac{1}{1 + jf/f_0}$$

Após demodulação FM, o sinal passa por $H_{de}(f)$; a resposta global para o sinal é plana, e a PSD do ruído (que era $\propto f^2$) é multiplicada por $|H_{de}(f)|^2$, resultando em ruído mais uniforme na banda e melhor SNR médio, especialmente nas altas frequências.

Resposta em frequência típica



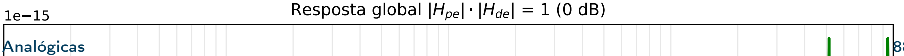


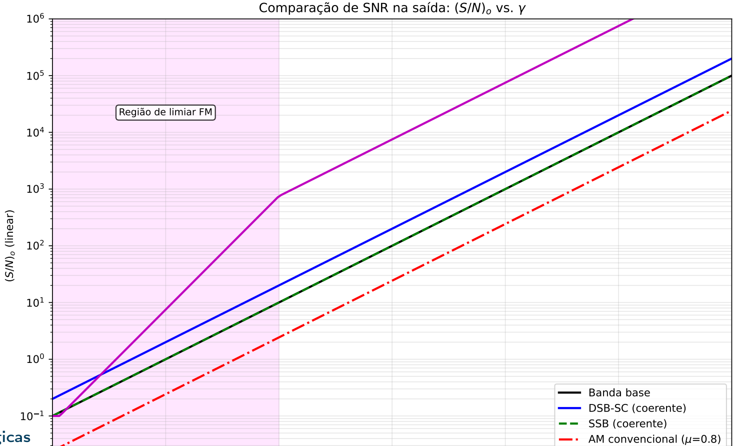
Tabela comparativa: SNR e banda

Para mesma potência recebida P_r e mesma banda de mensagem W, definindo $\gamma = P_r/(N_0 W)$:

Sistema	$(S/N)_o$	**Banda do sinal**
Banda base	γ	W
DSB-SC (coerente)	2γ	$2W$
SSB (coerente)	γ	W
AM convencional (envelope)	$\eta\gamma \leq \gamma/3$	$2W$
FM (WBFM, índice β)	$3\beta^2\gamma$	$\approx 2(\Delta f + f_m)$

FM troca banda por SNR; AM convencional tem pior SNR que banda base e DSB-SC. SSB iguala banda base em SNR com metade da banda do DSB.

Gráfico comparativo (placeholder)



Caracterização do ruído térmico

Ruído térmico em resistores e dispositivos: modelo de **ruído branco gaussiano** em banda limitada.

Densidade espectral de potência (bilateral):

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad \text{(W/Hz)}$$

$N_0 = kT$ em W/Hz, com $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K (Boltzmann) e T a temperatura em Kelvin. Para $T = 290$ K: $N_0 \approx 4 \times 10^{-21}$ W/Hz.

Potência de ruído em banda B (positiva):

$$N = \frac{N_0}{2} \times 2B = N_0 B$$

(integrando de $-B$ a B na forma bilateral).

Figura: PSD do ruído térmico

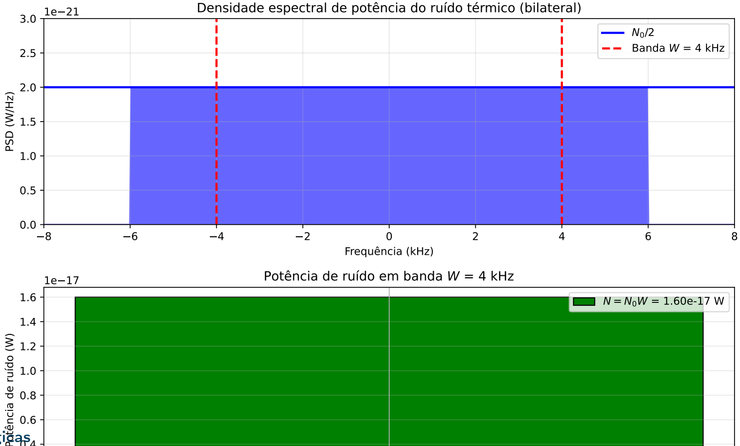


Figura de ruído

Um amplificador (ou dispositivo) não é ideal: adiciona ruído interno. A **figura de ruído** F mede a degradação de SNR.

Definição (ganho disponível): Com entrada à temperatura de referência $T_0 = 290$ K,

$$F = \frac{(S_i/N_i)}{(S_o/N_o)}$$

onde S_i/N_i é a SNR de entrada e S_o/N_o a SNR de saída (ambas em potência). Para amplificador ideal, $F = 1$. Em dB: $\mathrm{NF} = 10\log_{10} F$.

Interpretação: F é a razão entre a SNR de entrada e a SNR de saída. Quanto maior F, pior o bloco para o ruído.

Temperatura equivalente de ruído

Em vez de F, pode-se usar a **temperatura equivalente de ruído** T_e:

$$F = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad \Leftrightarrow \quad T_e = (F - 1)T_0$$

Interpretação: o ruído interno do dispositivo equivale a colocar na entrada uma fonte térmica à temperatura T_e (além de T_0). Ruído total de entrada equivalente: $N_0 B$ com $N_0 = k(T_0 + T_e)$.
Exemplo: $F = 2$ (3 dB) $\Rightarrow T_e = 290$ K. $F = 1{,}1 \Rightarrow T_e = 29$ K.

Cascata de estágios (Fórmula de Friis)

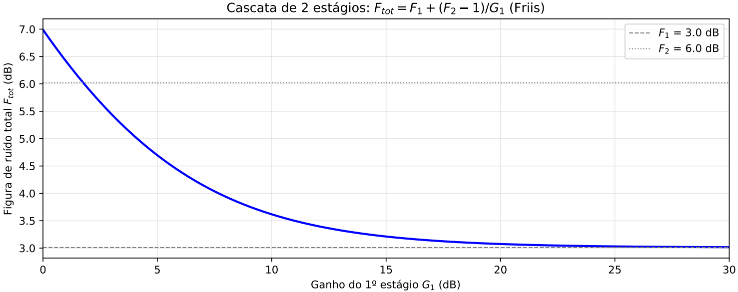
Para estágios em cascata com ganhos disponíveis $G_1, G_2, \ldots$ e figuras de ruído $F_1, F_2, \ldots$, a figura de ruído total é

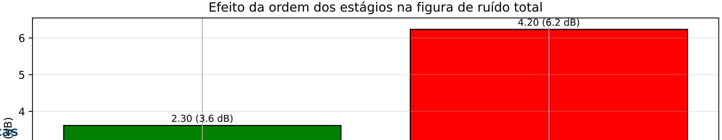
$$F_{tot} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \cdots$$

O primeiro estágio domina se G_1 for alto: é importante ter baixo ruído (pequeno F_1) no primeiro estágio (ex.: LNA no receptor).

Exemplo: Dois estágios: $F_1 = 2$, $G_1 = 10$; $F_2 = 4$. $F_{tot} = 2 + (4 - 1)/10 = 2{,}3$. Trocar a ordem (pior estágio primeiro) daria $F_{tot} = 4 + (2 - 1)/G_2$; se G_2 for pequeno, a figura total piora muito.

Figura: cascata e Friis





Atenuação e impacto na SNR

Enlace com **perda de transmissão** L (adimensional, $L > 1$): potência recebida $P_r = P_t/L$, onde P_t é a potência transmitida.

Ruído: Assume-se que o ruído é adicionado principalmente no receptor (temperatura de ruído do receptor). Então a potência de ruído na entrada do receptor não depende de L; apenas o sinal é atenuado.

SNR na entrada do receptor:

$$\gamma = \frac{P_r}{N_0 W} = \frac{P_t/L}{N_0 W}$$

Ou seja, um aumento de L (mais perda) reduz γ na mesma proporção. Em dB: perda de 3 dB $\Rightarrow \gamma$ cai 3 dB.

Tratamento como "bloco" de ruído: Um atenuador à temperatura T_0 tem figura de ruído $F = L$ e temperatura equivalente $T_e = (L-1)T_0$, útil na cadeia de Friis.

Repetidores em enlaces analógicos

Para enlaces longos, a atenuação pode ser grande demais. **Repetidores** são usados para reamplificar o sinal.

Repetidor analógico (amplificador): Amplifica sinal + ruído. O ruído é amplificado junto; cada repetidor adiciona ruído interno (figura de ruído). A SNR degrada a cada estágio. Em cascata de n repetidores iguais, a figura total cresce e a SNR final pode ficar limitada.

Repetidor regenerativo (digital): Detecta e regenera símbolos; o ruído não se acumula da mesma forma (cada regeneração "limpa" o sinal, desde que a taxa de erro seja baixa). Em sistemas digitais, repetidores regenerativos são preferidos para enlaces longos.

Resumo: Em comunicação analógica, repetidores amplificadores degradam progressivamente a SNR; o número de repetidores é limitado pelo SNR mínimo aceitável no destino.

Resumo: Efeito do ruído

- **Banda base:** $(S/N)_o = P_m/(N_0 W) = \gamma$ (referência).
- **DSB-SC (coerente):** $(S/N)_o = 2\gamma$.
- **SSB (coerente):** $(S/N)_o = \gamma$; mesma SNR que banda base, metade da banda do DSB.
- **AM convencional:** $(S/N)_o \approx \eta\gamma \leq \gamma/3$; pior que os demais.
- **FM (WBFM):** $(S/N)_o = 3\beta^2\gamma$; ganho em SNR em troca de banda; efeito de limiar.
- **Pré/pós-ênfase:** Melhora SNR em altas frequências em FM.
- **Figura de ruído e Friis:** $F_{tot} = F_1 + (F_2 - 1)/G_1 + \cdots$; primeiro estágio crítico.
- **Perdas:** Reduzem γ; repetidores analógicos degradam SNR ao longo da cascata.

Agradecimentos

Obrigado pela atenção!

Contato:
daniel.araujo@unb.br

Laboratório de Telecomunicações
Universidade de Brasília

Dúvidas?

Referências I

Marcelo Sampaio de Alencar.
Princípios de Comunicações.
Érica, São Paulo, 2nd edition, 2011.

Edwin H. Armstrong.
The super-heterodyne—its origin, development, and some recent improvements.
Proceedings of the IRE, 12(5):539–552, 1924.

Edwin H. Armstrong.
A method of reducing disturbances in radio signaling by a system of frequency modulation.
Proceedings of the IRE, 24(5):689–740, 1936.

Referências II

William R. Bennett.
The frequency division multiplex hierarchy in telephone systems.
Bell System Technical Journal, 49(4):631–652, 1970.

Friedrich Wilhelm Bessel.
Über eine besondere gattung algebraischer funktionen.
Astronomische Nachrichten, 1:185–204, 1824.

Roland E. Best.
Phase-Locked Loops: Design, Simulation, and Applications.
McGraw-Hill, New York, 6th edition, 2007.

Referências III

Ronald N. Bracewell.
The Fourier Transform and Its Applications.
McGraw-Hill, New York, 3rd edition, 2000.

A. Bruce Carlson and Paul B. Crilly.
Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication.
McGraw-Hill, New York, 5th edition, 2010.

Referências IV

John R. Carson.
Notes on the theory of modulation.
Proceedings of the IRE, 10(1):57–64, 1922.

Leon W. Couch.
Digital and Analog Communication Systems.
Pearson, Upper Saddle River, NJ, 8th edition, 2013.

Henri de Bellescize.
La réception synchrone.
L'Onde Électrique, 11:230–240, 1932.

Referências V

Federal Communications Commission.
Fcc rules and regulations: Title 47, part 73 - radio broadcast services.
Technical report, FCC, Washington, DC, 2002.

Roger L. Freeman.
Radio System Design for Telecommunications.
John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 3rd edition, 2004.

Floyd M. Gardner.
Phaselock Techniques.
John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 3rd edition, 2005.

Referências VI

Simon Haykin and Michael Moher.
Communication Systems.
John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 5th edition, 2013.

David Hilbert.
Grundzüge einer allgemeinen theorie der linearen integralgleichungen.
Teubner, 1912.

International Telecommunication Union.
Recommendation itu-r sm.328-11: Spectra and bandwidth of emissions.
Technical report, ITU, Geneva, Switzerland, 1982.

Referências VII

B. P. Lathi and Zhi Ding.
Modern Digital and Analog Communication Systems.
Oxford University Press, New York, 4th edition, 2009.

Robert Levy.
Image-rejection and ssb mixer design.
Proceedings of the IRE, 48(6):1126–1128, 1960.

Júlio César de Oliveira Medeiros.
Princípios de Telecomunicações: Teoria e Prática.
Érica, São Paulo, 4th edition, 2007.

Referências VIII

Juarez do Nascimento.
Comunicações Digitais.
Novatec, São Paulo, 1st edition, 2014.

National Television System Committee.
Ntsc signal specifications.
Technical report, FCC, Washington, DC, 1953.

H. Nyquist.
The application of the vestigial sideband transmission method to television.
In *IRE Convention*, 1938.

Referências IX

Alan V. Oppenheim and Ronald W. Schafer.
Discrete-Time Signal Processing.
Pearson, Upper Saddle River, NJ, 3rd edition, 2010.

Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai.
Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.
McGraw-Hill, New York, 4th edition, 2002.

Referências X

John G. Proakis and Masoud Salehi.
Fundamentals of Communication Systems.
Pearson, Upper Saddle River, NJ, 2008.
Cap. 6: Effect of Noise on Analog Communication Systems.

John G. Proakis and Masoud Salehi.
Communication Systems Engineering.
Pearson, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 2014.

Referências XI

Ulrich L. Rohde, Ajay K. Poddar, and Georg Bock.
RF/Microwave Circuit Design for Wireless Applications.
John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2nd edition, 2005.

Mischa Schwartz.
Information Transmission, Modulation, and Noise.
McGraw-Hill, New York, 4th edition, 1996.

Claude E. Shannon.
A mathematical theory of communication.
Bell System Technical Journal, 27(3):379–423, 1948.

Referências XII

Bernard Sklar.
Digital Communications: Fundamentals and Applications.
Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition, 2001.

Andrew J. Viterbi.
Principles of Coherent Communication.
McGraw-Hill, 1966.

Referências XIII

George Neville Watson.
A Treatise on the Theory of Bessel Functions.
Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd edition, 1995.
Originally published 1944.

Donald K. Weaver.
A third method of generation and detection of single-sideband signals.
Proceedings of the IRE, 44(12):1703–1705, 1956.

Referências XIV

Rodger E. Ziemer and William H. Tranter.
Principles of Communications: Systems, Modulation, and Noise.
John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 7th edition, 2014.