



Universidade de Brasília



Laboratório
Compartilhado de Ensino e
Pesquisa em Telecomunicações

Análise e Transmissão de Sinais

Capítulo 3: Transformada de Fourier e Sistemas LTI

Prof. Daniel Costa Araújo

Universidade de Brasília
Laboratório de Telecomunicações

February 19, 2026



Sumário I

- 1 Transformada de Fourier de Sinais
- 2 Transformadas de Funções Úteis
- 3 Propriedades da Transformada de Fourier
- 4 Transmissão de Sinais através de Sistemas LTI
- 5 Filtros Ideais versus Práticos



Sumário II

- 6 Distorção de Sinal em Canais de Comunicação
- 7 Energia de Sinal e Densidade Espectral de Energia
- 8 Potência de Sinal e Densidade Espectral de Potência
- 9 Computação Numérica: DFT e FFT

Capítulo 3

Análise e Transmissão de Sinais

Transformada de Fourier, sistemas LTI e análise espectral



Por que a Transformada de Fourier?

A análise de sistemas de comunicação requer ferramentas para:

- Entender como os sinais se comportam em diferentes frequências
- Projetar filtros e sistemas de transmissão
- Calcular larguras de banda necessárias
- Analisar distorção e interferência

A **Transformada de Fourier** é a ferramenta fundamental que permite:

- Passar do domínio do tempo para o domínio da frequência
- Analisar o conteúdo espectral de sinais
- Simplificar a análise de sistemas lineares



Série de Fourier para Sinais Periódicos

Para um sinal periódico $f(t)$ com período T_0 e frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T_0$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

onde os coeficientes são:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ideia: Representar qualquer sinal periódico como soma de exponenciais complexas.

E sinais não-periódicos? Podemos pensar neles como sinais periódicos com $T_0 \rightarrow \infty$.



De Série para Transformada: Passo 1

Substituindo c_n na série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t}$$

Reorganizando:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \right] \frac{e^{jn\omega_0 t}}{T_0}$$

Como $\omega_0 = 2\pi/T_0$, temos $1/T_0 = \omega_0/(2\pi)$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(\tau) e^{-jn\omega_0\tau} d\tau \right] \frac{\omega_0}{2\pi} e^{jn\omega_0 t}$$



De Série para Transformada: Passo 2

Quando $T_0 \rightarrow \infty$:

- O espaçamento entre harmônicas $\omega_0 \rightarrow 0$ (espectro contínuo)
- A variável discreta $n\omega_0$ torna-se contínua: ω
- O intervalo de integração $[-T_0/2, T_0/2] \rightarrow [-\infty, \infty]$
- A soma $\sum(\cdots)\omega_0$ torna-se integral $\int(\cdots)d\omega$

Definindo a **Transformada de Fourier**:

$$F(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$



Par de Transformadas de Fourier

Definições

Transformada de Fourier (direta):

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Transformada Inversa de Fourier:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Notação: $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$



Condições de Existência

A transformada de Fourier $F(\omega)$ existe se $f(t)$ satisfaz as **condições de Dirichlet**:

- 1 $f(t)$ é absolutamente integrável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- 2 $f(t)$ tem número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito
- 3 $f(t)$ tem número finito de descontinuidades finitas em qualquer intervalo finito

Observação: Sinais de energia finita sempre têm transformada de Fourier. Para sinais de potência (como senoidais), usa-se a função delta de Dirac.



Representação Espectral

A transformada $F(\omega)$ é geralmente complexa:

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\phi(\omega)} = \text{Re}\{F(\omega)\} + j \text{Im}\{F(\omega)\}$$

onde:

- **Espectro de magnitude:** $|F(\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2\{F(\omega)\} + \text{Im}^2\{F(\omega)\}}$
- **Espectro de fase:** $\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{F(\omega)\}}{\text{Re}\{F(\omega)\}}\right)$

O espectro completo requer ambas informações: magnitude e fase.

Para sinais reais, temos simetrias úteis:

- $|F(-\omega)| = |F(\omega)|$ (magnitude par)
- $\phi(-\omega) = -\phi(\omega)$ (fase ímpar)



Exemplo 1: Pulso Retangular

Considere um pulso retangular de duração τ e amplitude A :

$$f(t) = \begin{cases} A & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} = A \cdot \text{rect}(t/\tau)$$

Cálculo da transformada:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} Ae^{-j\omega t} dt \\ &= A \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\tau/2}^{\tau/2} = A \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega} \end{aligned}$$



Exemplo 1: Pulso Retangular (continuação)

Usando a identidade de Euler: $\sin(\theta) = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= A \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} = A \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega} \\ &= A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \end{aligned}$$

Definindo a **função sinc**: $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$

Obtemos:

$$F(\omega) = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Conclusão: Pulso retangular no tempo \leftrightarrow função sinc na frequência.



Exemplo 1: Análise do Resultado

$$f(t) = A \text{rect}(t/\tau) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(\omega) = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Observações importantes:

- Primeiro zero em $\omega = \pm 2\pi/\tau$
- **Largura de banda:** $B \approx 1/\tau$ (inverso da duração)
- Quanto mais estreito o pulso no tempo, mais largo o espectro
- $F(0) = A\tau$ (área sob o pulso)
- Espectro real (fase zero ou π) porque o pulso é par

Veja: O espectro do pulso retangular ilustra esses pontos.



Exemplo 2: Exponencial Decrescente

Considere um sinal exponencial causal:

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

onde $u(t)$ é a função degrau unitário.

Cálculo da transformada:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \left[\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{-(a+j\omega)} \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$



Exemplo 2: Exponencial Decrescente (continuação)

Como $a > 0$, temos $e^{-(a+j\omega)t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$:

$$F(\omega) = 0 - \frac{1}{-(a+j\omega)} = \frac{1}{a+j\omega}$$

Racionalizando (multiplicando por conjugado):

$$F(\omega) = \frac{1}{a+j\omega} \cdot \frac{a-j\omega}{a-j\omega} = \frac{a-j\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$F(\omega) = \frac{a}{a^2+\omega^2} - j \frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

Espectro de magnitude:

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$



Exemplo 2: Análise do Resultado

$$f(t) = e^{-at} u(t) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Características do espectro:

- Magnitude: $|F(\omega)| = 1/\sqrt{a^2 + \omega^2}$ (forma Lorentziana)
- Fase: $\phi(\omega) = -\arctan(\omega/a)$
- Em $\omega = 0$: $|F(0)| = 1/a$ (valor máximo)
- Em $\omega = \pm a$: $|F(\omega)| = 1/(a\sqrt{2})$ (redução de 3 dB)
- Largura de banda: $B \approx a$ (relacionada à constante de decaimento)

Interpretação física: Decaimento rápido no tempo (a grande) \rightarrow espectro largo na frequência.



Exemplo 3: Pulso Exponencial Bilateral

Considere um pulso exponencial bilateral (simétrico):

$$f(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

Este sinal pode ser decomposto em:

$$f(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t) = e^{-at}u(t) + e^{-a(-t)}u(-t)$$

Cálculo:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Para } t < 0: \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt = \frac{1}{a-j\omega}$$

$$\text{Para } t > 0: \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega}$$



Exemplo 3: Resultado

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} = \frac{(a + j\omega) + (a - j\omega)}{(a - j\omega)(a + j\omega)} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Observações:

- $F(\omega)$ é **real** (fase zero) porque $f(t)$ é par
- Espectro Lorentziano centrado em $\omega = 0$
- $F(0) = 2/a$, $F(\pm a) = 1/a$

- Análise e Transmissão de Sinais gerada no tempo que o exponencial unilateral



Interpretação Física da Transformada de Fourier

A transformada pode ser vista como uma **correlação** do sinal com exponenciais complexas:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

- $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)$ é uma oscilação na frequência ω
- O produto $f(t)e^{-j\omega t}$ mede quanto de $f(t)$ "combina" com essa frequência
- A integral acumula essa correlação sobre todo o tempo
- $|F(\omega)|$ grande \rightarrow forte presença da frequência ω em $f(t)$
- $|F(\omega)|$ pequeno \rightarrow pouca presença da frequência ω

Analogia: A transformada de Fourier "decompõe" o sinal em componentes de frequência, assim como um prisma decompõe luz branca em cores.



Princípio da Incerteza Tempo-Frequência

Dos exemplos, observamos uma relação fundamental:

$$\text{Duração no tempo} \times \text{Largura de banda} \approx \text{constante}$$

Matematicamente (Desigualdade de Heisenberg-Gabor):

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$

onde Δt é a duração efetiva e $\Delta \omega$ é a largura de banda efetiva.

Consequências práticas:

- Pulsos curtos requerem grande largura de banda
- Sinais de banda estreita devem ter longa duração
- Compromisso fundamental em sistemas de comunicação



Resumo da Seção 3.1

Conceitos fundamentais:

- Transformada de Fourier: generalização da série de Fourier para sinais não-periódicos
- Par de transformadas: $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$
- Espectro: magnitude e fase descrevem conteúdo em frequência

Pares importantes derivados:

- $\text{rect}(t/\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tau \text{sinc}(\omega\tau/2\pi)$
- $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1/(a + j\omega)$
- $e^{-a|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2a/(a^2 + \omega^2)$

Princípio fundamental:

Sinal concentrado no tempo \leftrightarrow Espectro disperso em frequência



Funções Fundamentais em Sistemas de Comunicação

Certas funções aparecem frequentemente na análise de sinais e sistemas:

- **Função delta:** impulsos, amostragem
- **Constantes e senoidais:** portadoras, osciladores
- **Função degrau:** ligar/desligar, causalidade
- **Pulsos:** transmissão de dados digitais
- **Gaussiana:** ruído, pulsos em fibras ópticas

Conhecer as transformadas dessas funções permite:

- Análise rápida de sistemas complexos
- Uso de propriedades para derivar novas transformadas
- Compreensão do comportamento espectral



Função Delta de Dirac: Definição

A função delta de Dirac $\delta(t)$ não é uma função no sentido clássico, mas uma *distribuição* definida por suas propriedades:

- ❶ $\delta(t) = 0$ para todo $t \neq 0$
- ❷ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
- ❸ Propriedade de amostragem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Interpretação física: Impulso infinitamente estreito com área unitária.

Representação gráfica: Seta vertical com altura indicando a "força" (área).



Transformada da Delta de Dirac

Cálculo:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$$

Usando a propriedade de amostragem com $f(t) = e^{-j\omega t}$ e $t_0 = 0$:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = e^{-j\omega \cdot 0} = 1$$

Par de Transformadas

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

Interpretação: Um impulso no tempo contém **todas as frequências** com amplitude igual.



Transformada de uma Constante

Queremos encontrar a transformada de $f(t) = A$ (constante para todo t).

Problema: A integral $\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-j\omega t} dt$ não converge!

Solução: Usar a **dualidade**. Sabemos que:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1$$

A propriedade de dualidade afirma que se $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, então:

$$F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$$

Aplicando com $f(t) = \delta(t)$ e $F(\omega) = 1$:

$$1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$



Transformada da Exponencial Complexa

Considere $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ (senoidal complexa na frequência ω_0).

Usando deslocamento em frequência (propriedade que veremos depois) ou dualidade:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

Esta integral é $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$:

Par de Transformadas

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Interpretação: Uma senoidal de frequência ω_0 tem espectro com um único impulso em

$\omega = \omega_0$.



Transformadas de Cosseno e Seno

Usando a fórmula de Euler: $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$

Pela linearidade:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \\ &= \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]\end{aligned}$$

Similarmente para o seno: $\sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$

Pares de Transformadas



Função Degrau Unitário

A função degrau unitário (Heaviside):

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Relação com a função sinal:

A função sinal é definida como:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

Observe que: $u(t) = \frac{1+\text{sgn}(t)}{2}$ e $\text{sgn}(t) = 2u(t) - 1$



Transformada da Função Sinal

Para encontrar $\mathcal{F}\{u(t)\}$, primeiro calculamos $\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\}$.

Expressamos $\text{sgn}(t)$ como limite:

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0^+} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)]$$

Como $e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\omega}$ e $e^{at} u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a-j\omega}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{a+j\omega} - \frac{1}{a-j\omega} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{(a-j\omega) - (a+j\omega)}{(a+j\omega)(a-j\omega)} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

Para $\omega \neq 0$: $\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{-2j\omega}{\omega^2} = \frac{2}{j\omega}$



Transformada do Degrau Unitário

Usando $u(t) = \frac{1+\text{sgn}(t)}{2}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{u(t)\} &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\{1\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{j\omega} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\end{aligned}$$

Transformada do Degrau

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



Pulso Retangular

Já derivamos anteriormente:

$$\text{rect}(t/\tau) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

Transformada

$$\text{rect}(t/\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

onde $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

Propriedades:

- Lóbulo principal: $-2\pi/\tau < \omega < 2\pi/\tau$



Função Triangular

A função triangular:

$$\text{tri}(t/\tau) = \begin{cases} 1 - |t|/\tau & |t| \leq \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

Observação: $\text{tri}(t/\tau) = \text{rect}(t/\tau) * \text{rect}(t/\tau)$ (convolução de retângulo consigo mesmo).
Pela propriedade de convolução (que veremos na próxima seção):

$$\mathcal{F}\{\text{tri}(t/\tau)\} = \mathcal{F}\{\text{rect}(t/\tau)\} \cdot \mathcal{F}\{\text{rect}(t/\tau)\} = \left[\tau \text{sinc} \left(\frac{\omega\tau}{2\pi} \right) \right]^2$$

Transformada

$$\text{tri}(t/\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tau \text{sinc}^2 \left(\frac{\omega\tau}{2\pi} \right)$$



Pulso Gaussiano

A função Gaussiana:

$$f(t) = e^{-\alpha t^2}, \quad \alpha > 0$$

Cálculo da transformada:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-j\omega t} dt$$

Completando o quadrado no expoente:

$$-\alpha t^2 - j\omega t = -\alpha \left(t + \frac{j\omega}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\omega^2}{4\alpha}$$

$$F(\omega) = e^{-\omega^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left(t + \frac{j\omega}{2\alpha} \right)^2} dt$$



Pulso Gaussiano (continuação)

Mudança de variável: $u = t + j\omega/(2\alpha)$, $du = dt$:

$$F(\omega) = e^{-\omega^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2} du$$

A integral Gaussiana: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\pi/\alpha}$

Portanto:

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\omega^2/(4\alpha)}$$

Transformada da Gaussiana

$$e^{-\alpha t^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\omega^2/(4\alpha)}$$



Trem de Impulsos Periódico

Um **trem de impulsos** (impulse train) com período T :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Este sinal é periódico com período T e pode ser expandido em série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Os coeficientes são:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$



Transformada do Trem de Impulsos

Tomando a transformada de Fourier:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

Como $e^{jn\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\omega - n\omega_0)$:

$$F(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Trem de Impulsos



Tabela Resumo: Transformadas de Funções Úteis

Sinal $f(t)$	Transformada $F(\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a > 0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$



Tabela Resumo (continuação)

Sinal $f(t)$	Transformada $F(\omega)$
$\text{rect}(t/\tau)$	$\tau \text{sinc}(\omega\tau/2\pi)$
$\text{tri}(t/\tau)$	$\tau \text{sinc}^2(\omega\tau/2\pi)$
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\pi/\alpha} e^{-\omega^2/(4\alpha)}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/T)$

Essas transformadas são fundamentais!

Memorize os pares mais importantes e use propriedades (próxima seção) para derivar outros.



Observações e Padrões

Padrões observados:

1 Dualidade tempo-frequência:

- Impulso no tempo \leftrightarrow constante na frequência
- Constante no tempo \leftrightarrow impulso na frequência
- Impulsos periódicos \leftrightarrow impulsos periódicos

2 Decaimento:

- Decaimento exponencial \leftrightarrow Lorentziana
- Gaussiana \leftrightarrow Gaussiana

3 Suavidade:

- Descontinuidades \rightarrow decaimento lento do espectro ($1/\omega$)
- Continuidade \rightarrow decaimento mais rápido ($1/\omega^2$ ou exponencial)



Propriedades da Transformada de Fourier

As propriedades da Transformada de Fourier permitem:

- Derivar novas transformadas a partir de conhecidas
- Simplificar cálculos complexos
- Entender relações fundamentais entre tempo e frequência
- Analisar sistemas e operações sobre sinais

Propriedades principais a serem estudadas:

- 1 Linearidade
- 2 Deslocamento no tempo e na frequência
- 3 Escala temporal
- 4 Convolução (tempo e frequência)
- 5 Derivação e integração



Propriedade de Linearidade

Propriedade 1: Linearidade

Se $f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$ e $f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$, então:

$$af_1(t) + bf_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$$

para quaisquer constantes a e b .

Demonstração:

$$\mathcal{F}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Análise e Transmissão de Sinais} = a \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-j\omega t} dt$$



Exemplo: Linearidade

Problema: Encontrar a transformada de $f(t) = 3e^{-2t}u(t) + 5e^{-4|t|}$

Solução:

Sabemos que:

- $e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2+j\omega}$
- $e^{-4|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{8}{16+\omega^2}$

Pela linearidade:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 3 \cdot \frac{1}{2+j\omega} + 5 \cdot \frac{8}{16+\omega^2} \\ &= \frac{3}{2+j\omega} + \frac{40}{16+\omega^2} \end{aligned}$$

Sem linearidade: Teríamos que calcular integrais complexas!



Propriedade de Deslocamento no Tempo

Propriedade 2: Deslocamento Temporal

Se $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, então:

$$f(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Demonstração:

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt$$

Mudança de variável: $\tau = t - t_0$, então $t = \tau + t_0$ e $dt = d\tau$:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$



Interpretação do Deslocamento Temporal

$$f(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Observações importantes:

- **Magnitude não muda:** $|F(\omega)e^{-j\omega t_0}| = |F(\omega)|$
- **Fase é alterada:** $\angle[F(\omega)e^{-j\omega t_0}] = \angle F(\omega) - \omega t_0$
- Deslocamento no tempo \rightarrow mudança de fase linear na frequência
- A inclinação da fase adicional é $-t_0$

Exemplo prático: $\text{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) e^{-j\omega t_0}$

Um pulso atrasado tem o mesmo espectro de magnitude, mas fase alterada.



Propriedade de Deslocamento em Frequência (Modulação)

Propriedade 3: Deslocamento em Frequência

Se $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, então:

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega - \omega_0)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)\end{aligned}$$

Interpretação: Multiplicar por $e^{j\omega_0 t}$ no tempo desloca o espectro em ω_0 .



Modulação AM e o Teorema da Modulação

Para sinais reais, usamos $\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$:

$$f(t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} f(t) e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t) e^{-j\omega_0 t}$$

Pela linearidade e deslocamento em frequência:

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)$$

Teorema da Modulação

$$f(t) \cos(\omega_0 t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

Significado: Multiplicar por cosseno cria duas cópias do espectro deslocadas para $\pm\omega_0$.



Propriedade de Escala Temporal

Propriedade 4: Escala Temporal

Se $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ e $a \neq 0$, então:

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Demonstração para $a > 0$:

$$\mathcal{F}\{f(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

Mudança de variável: $\tau = at$, então $t = \tau/a$ e $dt = d\tau/a$:

$$\text{Análise e Transmissão de Sinais} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau/a} d\tau = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j(\omega/a)\tau} d\tau$$



Interpretação da Escala Temporal

$$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Casos importantes:

- ❶ **Compressão no tempo** ($a > 1$):
 - Sinal mais rápido/estrito no tempo
 - Espectro mais largo/expandido em frequência
 - Amplitude espectral reduzida por $1/a$
- ❷ **Expansão no tempo** ($0 < a < 1$):
 - Sinal mais lento/largo no tempo
 - Espectro mais estreito/comprimido em frequência
 - Amplitude espectral aumentada por $1/a$
- ❸ **Reversão temporal** ($a = -1$):



Exemplo: Escala Temporal

Problema: Se $\text{rect}(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{sinc}(\omega/2\pi)$, encontre a transformada de $\text{rect}(t/5)$.

Solução:

Temos $f(t) = \text{rect}(t)$ e queremos $\mathcal{F}\{\text{rect}(t/5)\} = \mathcal{F}\{f(t/5)\}$.

Isso corresponde a $a = 1/5$ na propriedade de escala:

$$f(t/5) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|1/5|} F\left(\frac{\omega}{1/5}\right) = 5F(5\omega)$$

Como $F(\omega) = \text{sinc}(\omega/2\pi)$:

$$\mathcal{F}\{\text{rect}(t/5)\} = 5\text{sinc}(5\omega/2\pi) = 5\text{sinc}(\omega/\frac{2\pi}{5})$$

Verificação: Pulso $5\times$ mais largo \rightarrow espectro $5\times$ mais estreito e $5\times$ mais alto.



Convolução no Tempo

A **convolução** de dois sinais:

$$[f_1 * f_2](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

Propriedade 5: Convolução no Tempo

Se $f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$ e $f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$, então:

$$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

Significado: Convolução no tempo \leftrightarrow multiplicação na frequência.

Importância: A resposta de um sistema LTI é a convolução da entrada com a resposta ao impulso:



Demonstração: Convolução no Tempo

Queremos mostrar que $\mathcal{F}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$.

$$\mathcal{F}\{f_1 * f_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

Trocando a ordem de integração:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

A integral interna é a transformada de $f_2(t - \tau)$. Pela propriedade de deslocamento:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = F_2(\omega) e^{-j\omega \tau}$$



Convolução em Frequência (Multiplicação no Tempo)

Propriedade 6: Convolução em Frequência

Se $f_1(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$ e $f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\omega)$, então:

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

onde a convolução em frequência é:

$$[F_1 * F_2](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda) F_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

Demonstração: Similar à anterior, usando a transformada inversa.

Dualidade com a propriedade anterior:

- Tempo: convolução \leftrightarrow Frequência: multiplicação



Propriedade de Derivação

Propriedade 7: Derivação no Tempo

Se $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, então:

$$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega F(\omega)$$

Demonstração:

Começamos com:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Derivando ambos os lados em relação a t :

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{d}{dt} [e^{j\omega t}] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot j\omega e^{j\omega t} d\omega$$



Interpretação e Generalização da Derivação

$$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega F(\omega)$$

Interpretação:

- Derivar no tempo = multiplicar por $j\omega$ na frequência
- Componentes de alta frequência são enfatizadas (proporcional a ω)
- Componente DC é eliminada ($\omega = 0$)

Generalização para n-ésima derivada:

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} (j\omega)^n F(\omega)$$

Aplicação: Resolver equações diferenciais!

Exemplo: $\frac{dy}{dt} + ay = x(t)$ torna-se $(j\omega + a)Y(\omega) = X(\omega)$



Propriedade de Integração

Propriedade 8: Integração no Tempo

Se $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$ e $F(0) = 0$, então:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

Se $F(0) \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0) \delta(\omega)$$

Interpretação:

- Integrar no tempo = dividir por $j\omega$ na frequência



Exemplo: Derivação e Integração

Problema: Sabendo que $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\omega}$, encontre a transformada de $te^{-at}u(t)$.

Solução: Use a propriedade de derivação na frequência (dual da derivação no tempo):

$$(-jt)f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

Portanto:

$$tf(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

Com $f(t) = e^{-at}u(t)$ e $F(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$:

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a+j\omega} \right] = \frac{-j}{(a+j\omega)^2}$$



Propriedade de Dualidade

Propriedade 9: Dualidade

Se $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, então:

$$F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$$

Demonstração:

Começamos com a transformada inversa:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Trocando t e ω :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{j\omega t} dt$$



Exemplos de Dualidade

A dualidade permite obter novos pares de transformadas:

Exemplo 1:

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1 \quad \Rightarrow \quad 1 \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Exemplo 2:

$$\text{rect}(t/\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tau \text{sinc}(\omega\tau/2\pi)$$

Pela dualidade:

$$\tau \text{sinc}(t\tau/2\pi) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \text{rect}(-\omega/\tau) = 2\pi \text{rect}(\omega/\tau)$$

Simplificando com $\tau = 2\pi/W$:

$$\frac{2W}{\pi} \text{sinc}(Wt/\pi) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi \text{rect}(\omega\pi/2W)$$

Conclusão: Função sinc no tempo \leftrightarrow retângulo na frequência (banda limitada!)



Propriedades de Simetria para Sinais Reais

Para um sinal **real** $f(t) = f^*(t)$, a transformada possui simetrias importantes:

Simetria Hermitiana

Se $f(t)$ é real, então:

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

Consequências:

- **Parte real:** $\text{Re}\{F(-\omega)\} = \text{Re}\{F(\omega)\}$ (par)
- **Parte imaginária:** $\text{Im}\{F(-\omega)\} = -\text{Im}\{F(\omega)\}$ (ímpar)
- **Magnitude:** $|F(-\omega)| = |F(\omega)|$ (par)
- **Fase:** $\angle F(-\omega) = -\angle F(\omega)$ (ímpar)

Implicação prática: Para sinais reais, basta conhecer $F(\omega)$ para $\omega \geq 0$!



Simetrias para Sinais Pares e Ímpares

Se $f(t)$ é real e par ($f(-t) = f(t)$):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt$$

A componente imaginária se cancela, então $F(\omega)$ é **real e par**.

Se $f(t)$ é real e ímpar ($f(-t) = -f(t)$):

$$F(\omega) = -j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

A componente real se cancela, então $F(\omega)$ é **imaginário puro e ímpar**.

Tabela resumo:



Teorema de Parseval (Conservação de Energia)

Teorema de Parseval

Se $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Interpretação:

- Lado esquerdo: **energia total no domínio do tempo**
- Lado direito: **energia total no domínio da frequência**
- A energia é conservada entre os dois domínios!

Generalização (Teorema de Rayleigh):



Demonstração do Teorema de Parseval

Começamos com:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt$$

Substituindo a transformada inversa para $f^*(t)$:

$$f^*(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

Então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

Trocando a ordem:

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) F(\omega) d\omega$$



Tabela Resumo: Propriedades da Transformada de Fourier

Propriedade	Relação
Linearidade	$af_1(t) + bf_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} aF_1(\omega) + bF_2(\omega)$
Deslocamento temporal	$f(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Deslocamento em freq.	$f(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega - \omega_0)$
Escala temporal	$f(at) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{ a } F(\omega/a)$
Convolução no tempo	$f_1(t) * f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)F_2(\omega)$
Multiplicação no tempo	$f_1(t)f_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} [F_1 * F_2](\omega)$
Derivação	$\frac{df(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega F(\omega)$
Integração	$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
Dualidade	$F(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-\omega)$
Simetria (real)	$f(t) = f^*(t) \Rightarrow F(-\omega) = F^*(\omega)$
Parseval	$\int f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int F(\omega) ^2 d\omega$



Resumo da Seção 3.3

As propriedades da Transformada de Fourier são ferramentas poderosas:

- **Linearidade:** Permite decompor problemas complexos
- **Deslocamentos:** Relacionam atrasos e modulação
- **Escala:** Quantifica compromisso tempo-frequência
- **Convolução:** Simplifica análise de sistemas LTI
- **Derivação/Integração:** Resolvem equações diferenciais
- **Dualidade:** Gera novos pares de transformadas
- **Parseval:** Conserva energia entre domínios

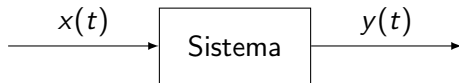
Dominando estas propriedades, você pode:

- Analisar sistemas complexos sem cálculos longos
- Entender comportamento espectral intuitivamente
- Analisar e transmitir sinais em sistemas de comunicação eficientes



O que é um Sistema LTI?

Um **sistema** transforma um sinal de entrada $x(t)$ em um sinal de saída $y(t)$.



Um sistema é **Linear e Invariante no Tempo (LTI)** se possui duas propriedades:

① **Linearidade:**

$$x(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \Rightarrow y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

② **Invariância no tempo:**

$$x(t - t_0) \Rightarrow y(t - t_0)$$

Exemplos: Filtros, amplificadores, canais de comunicação (sob condições ideais).



Resposta ao Impulso

A **resposta ao impulso** $h(t)$ é a saída do sistema quando a entrada é $\delta(t)$:

$$\delta(t) \xrightarrow{\text{Sistema LTI}} h(t)$$

Por que é importante?

Qualquer sinal pode ser representado como soma de impulsos deslocados:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Pela linearidade e invariância no tempo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = x(t) * h(t)$$



Função de Transferência (Resposta em Frequência)

Aplicando a transformada de Fourier na relação $y(t) = x(t) * h(t)$:

$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\}$$

Pela propriedade de convolução:

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

onde $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ é a **função de transferência** ou **resposta em frequência**.

Relação Entrada-Saída na Frequência

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Vantagem: Convolução no tempo \rightarrow multiplicação na frequência!



Interpretação da Função de Transferência

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

A função de transferência $H(\omega)$ é geralmente complexa:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

onde:

- $|H(\omega)|$: **ganho de magnitude** em cada frequência
- $\phi(\omega) = \arg[H(\omega)]$: **mudança de fase** em cada frequência

Efeito do sistema:

- Cada componente de frequência de $X(\omega)$ é multiplicada por $|H(\omega)|$
- A fase de cada componente é alterada por $\phi(\omega)$



Entrada Senoidal em Sistema LTI

Propriedade importante: A resposta de um sistema LTI a uma entrada senoidal é também senoidal na mesma frequência.

Se $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta)$, então:

$$y(t) = A|H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \theta + \phi(\omega_0))$$

onde:

- Amplitude multiplicada por $|H(\omega_0)|$
- Fase aumentada em $\phi(\omega_0)$
- Frequência permanece ω_0

Demonstração:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{Ae^{j(\omega_0 t + \theta)}\} = \operatorname{Re}\{Ae^{j\theta} e^{j\omega_0 t}\}$$



Causalidade

Um sistema é **causal** se a saída não depende de valores futuros da entrada:

$$h(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0$$

Significado físico: Sistemas físicos reais são sempre causais (não podem "ver o futuro").

Para sistemas causais:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

Consequência na frequência: A função de transferência $H(\omega)$ de um sistema causal satisfaz certas condições (critério de Paley-Wiener):



Estabilidade BIBO

Um sistema é **BIBO estável** (Bounded Input, Bounded Output) se toda entrada limitada produz saída limitada.

Critério de estabilidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

A resposta ao impulso deve ser absolutamente integrável.

Na frequência:

Para estabilidade BIBO, $H(\omega)$ deve existir e ser limitada:

$$|H(\omega)| < \infty \quad \text{para todo } \omega$$



Condição para Transmissão sem Distorção

Objetivo: Transmitir sinal sem alterar sua forma, apenas com ganho e atraso.

Desejamos:

$$y(t) = Kx(t - t_d)$$

onde K é um ganho constante e t_d é um atraso fixo.

Condição na frequência:

Aplicando a transformada de Fourier:

$$Y(\omega) = KX(\omega)e^{-j\omega t_d}$$

Como $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$:

$$H(\omega)X(\omega) = KX(\omega)e^{-j\omega t_d}$$



Função de Transferência Ideal

Para transmissão sem distorção:

Condição de Transmissão sem Distorção

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$$

Isto significa:

- **Magnitude constante:** $|H(\omega)| = K$ para todas as frequências
- **Fase linear:** $\phi(\omega) = -\omega t_d$ (proporcional a ω)

Interpretação física:

- Todas as componentes de frequência têm mesmo ganho
- Todas as componentes sofrem mesmo atraso t_d
- A forma de onda é preservada



Tipos de Distorção

Quando $H(\omega) \neq Ke^{-j\omega t_d}$, ocorre distorção:

① Distorção de Amplitude:

- $|H(\omega)|$ não é constante
- Algumas frequências são amplificadas/atenuadas mais que outras
- Altera o formato do sinal

② Distorção de Fase:

- $\phi(\omega)$ não é linear com ω
- Diferentes frequências sofrem atrasos diferentes
- Componentes chegam "fora de sincronia"

Ambos os tipos degradam o sinal!

Em sistemas práticos, busca-se minimizar distorção na banda de interesse.



Atraso de Grupo

O **atraso de grupo** quantifica o atraso de um "envelope" do sinal:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega}$$

Interpretação:

- Se $\phi(\omega) = -\omega t_d$ (linear), então $\tau_g = t_d$ (constante)
- Se $\tau_g(\omega)$ varia, diferentes frequências têm atrasos diferentes
- Causa distorção de fase

Para transmissão sem distorção de fase:

$$\tau_g(\omega) = \text{constante}$$



Largura de Banda de Sistemas

A **largura de banda** de um sistema mede a faixa de frequências que o sistema transmite eficientemente.

Definições comuns:

- ① **Largura de banda de 3 dB:**

$$|H(\omega)| \geq \frac{|H(\omega_{\max})|}{\sqrt{2}}$$

Frequências onde o ganho cai no máximo 3 dB (metade da potência).

- ② **Largura de banda de ruído:**

$$B_n = \frac{1}{|H(\omega_{\max})|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

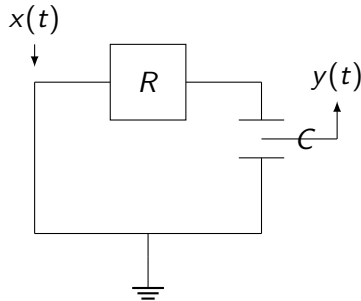
- ③ **Largura de banda absoluta:**

Faixa onde $|H(\omega)| > 0$ (pode ser infinita).



Exemplo 1: Filtro RC Passa-Baixas

Circuito RC série com saída no capacitor:



Equação diferencial:

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$



Exemplo 1: Função de Transferência do Filtro RC

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Definindo a **frequência de corte**: $\omega_c = 1/(RC)$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c} = \frac{\omega_c}{\omega_c + j\omega}$$

Magnitude:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}}$$

Fase:

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega/\omega_c)$$



Exemplo 1: Resposta ao Impulso do Filtro RC

A resposta ao impulso é a transformada inversa de $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{\omega_c}{\omega_c + j\omega}$$

Reconhecemos: $\frac{1}{a+j\omega} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-at}u(t)$

Portanto:

$$h(t) = \omega_c e^{-\omega_c t} u(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} u(t)$$

Propriedades:

- Causal: $h(t) = 0$ para $t < 0$
- Estável: $\int_0^\infty h(t) dt = 1 < \infty$
- Decai exponencialmente com constante de tempo $\tau = RC$



Exemplo 2: Filtro Ideal Passa-Baixas

Um filtro passa-baixas ideal tem função de transferência:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} = \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)$$

Resposta ao impulso:

Pela dualidade, sabemos que $\text{rect}(t/\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tau \text{sinc}(\omega\tau/2\pi)$

Aplicando dualidade inversa:

$$h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

Problema: $h(t) \neq 0$ para $t < 0 \rightarrow$ **não-causal!**

Filtro ideal passa-baixas é fisicamente irrealizável.



Exemplo 2: Por que o Filtro Ideal é Irrealizável?

$$h(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

Problemas:

① Não-causalidade:

- $h(t) \neq 0$ para todo $t < 0$
- Sistema responde antes do impulso ser aplicado!
- Violação da causalidade física

② Duração infinita:

- $h(t)$ não decai a zero em tempo finito
- Oscila indefinidamente como $1/t$
- Impossível implementar exatamente

Solução prática: Usar filtros aproximados (Butterworth, Chebyshev) que são causais e



Resumo da Seção 3.4

Conceitos fundamentais de sistemas LTI:

- No tempo: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Na frequência: $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$
- Análise na frequência simplifica cálculos!

Propriedades importantes:

- Causalidade: $h(t) = 0$ para $t < 0$
- Estabilidade BIBO: $\int |h(t)|dt < \infty$
- Transmissão sem distorção: $H(\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$

Tipos de distorção:

- Amplitude: $|H(\omega)|$ não constante
- Fase: $\phi(\omega)$ não linear



Tipos de Filtros Ideais

Filtros ideais têm resposta em frequência perfeitamente seletiva:

1 Passa-Baixas (Low-Pass):

$$H_{LP}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

2 Passa-Altas (High-Pass):

$$H_{HP}(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| < \omega_c \\ 1 & |\omega| \geq \omega_c \end{cases}$$

3 Passa-Faixas (Band-Pass):

$$H_{BP}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Características de Filtros Ideais

Propriedades dos filtros ideais:

- Banda passante: $|H(\omega)| = 1$ (ganho unitário, sem atenuação)
- Banda de rejeição: $|H(\omega)| = 0$ (atenuação infinita)
- Banda de transição: Largura zero (mudança instantânea)
- Fase linear: $\phi(\omega) = -\omega t_d$ na banda passante
- Seletividade perfeita: Separa exatamente as frequências desejadas

Aplicações teóricas:

- Análise de sistemas de comunicação
- Determinação de limites de desempenho
- Referência para comparação com filtros reais

Problema: Filtros ideais são fisicamente irrealizáveis!



Resposta ao Impulso do Filtro Passa-Baixas Ideal

Já vimos que para $H_{LP}(\omega) = \text{rect}(\omega/2\omega_c)$:

$$h_{LP}(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

Análise da resposta:

- Máximo em $t = 0$: $h_{LP}(0) = \omega_c/\pi$
- Zeros em $t = \pm n\pi/\omega_c$ para $n = 1, 2, 3, \dots$
- **Existe para todo** $t \in (-\infty, \infty)$
- Decai como $1/t$ (lentamente)

Problema crítico:

$$h_{LP}(t) \neq 0 \quad \text{para} \quad t < 0$$



Cr terio de Paley-Wiener

Teorema (Paley-Wiener):

Um filtro com função de transferência $H(\omega)$ é causalmente realizável se e somente se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln |H(\omega)||}{1 + \omega^2} d\omega < \infty$$

Consequências práticas:

- 1 $|H(\omega)|$ não pode ser zero em nenhuma banda finita de frequências
- 2 A transição de banda passante para banda de rejeição deve ser gradual
- 3 $|H(\omega)|$ não pode cair a zero "rápido demais"

Para filtro ideal passa-baixas:

$$H(\omega) = 0 \text{ para } |\omega| > \omega_c \rightarrow \ln |H(\omega)| = -\infty$$

A integral diverge \rightarrow não satisfaz o cr terio \rightarrow não-causal.



Aproximação de Filtros Ideais

Como filtros ideais são irrealizáveis, usamos **aproximações causais**:

Estratégias de aproximação:

❶ **Permitir banda de transição finita:**

Mudança gradual entre passante e rejeição

❷ **Permitir ondulação (ripple):**

$|H(\omega)|$ não perfeitamente constante

❸ **Atenuação finita na banda de rejeição:**

$|H(\omega)| \neq 0$, mas muito pequeno

❹ **Fase não perfeitamente linear:**

Alguma distorção de fase aceitável

Compromissos inevitáveis:

Não podemos ter simultaneamente: seletividade perfeita, causalidade, fase linear e



Especificações de Filtros Práticos

Um filtro prático passa-baixas é especificado por:

- **Banda passante:** $0 \leq \omega \leq \omega_p$
 - Variação permitida: $1 - \delta_1 \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta_1$
 - Ripple típico: $\delta_1 = 0.1$ (ondulação de 1 dB)
- **Banda de transição:** $\omega_p < \omega < \omega_s$
 - Região onde $|H(\omega)|$ muda de passante para rejeição
 - Quanto mais estreita, mais complexo o filtro
- **Banda de rejeição:** $\omega \geq \omega_s$
 - Atenuação mínima: $|H(\omega)| \leq \delta_2$
 - Atenuação típica: $\delta_2 = 0.01$ (40 dB)

Parâmetros de projeto:

- Frequência de corte passante: ω_p ou f_p
- Frequência de corte de rejeição: ω_s ou f_s



Filtro de Butterworth

O filtro de Butterworth maximiza a planura na banda passante.

Função de transferência:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}$$

onde n é a ordem do filtro e ω_c é a frequência de corte de 3 dB.

Propriedades:

- Em $\omega = 0$: $|H(0)| = 1$ (ganho unitário em DC)
- Em $\omega = \omega_c$: $|H(\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$ (-3 dB)
- **Resposta maximally flat:** Primeiras $2n - 1$ derivadas são zero em $\omega = 0$
- Decaimento: $20n$ dB/década para $\omega \gg \omega_c$
- Sem ondulação na banda passante ou de rejeição



Butterworth: Efeito da Ordem

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2n}}$$

Análise por ordem:

- $n = 1$: Filtro RC simples, decaimento 20 dB/década
- $n = 2$: Decaimento 40 dB/década, transição mais rápida
- $n \rightarrow \infty$: Aproxima-se do filtro ideal (mas sempre causal)

Relação ordem-transição:

Para especificações dadas $(\omega_p, \omega_s, \delta_1, \delta_2)$, a ordem necessária é:

$$n \geq \frac{\log \left[\frac{(1/\delta_2)^2 - 1}{(1/\delta_1)^2 - 1} \right]}{2 \log(\omega_s/\omega_p)}$$



Filtro de Chebyshev Tipo I

O filtro de Chebyshev Tipo I permite ondulação na banda passante para obter transição mais rápida.

Função de transferência:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\omega/\omega_c)}$$

onde:

- $T_n(x)$ é o polinômio de Chebyshev de ordem n
- ϵ controla a ondulação na banda passante

Propriedades:

- **Ondulação equi-ripple** na banda passante: oscila entre 1 e $1/\sqrt{1 + \epsilon^2}$
- Banda de rejeição monótona (sem ondulação)
- Deixa passar mais energia que Butterworth de mesma ordem



Filtro de Chebyshev Tipo II (Inverso)

O filtro de Chebyshev Tipo II permite ondulação na banda de rejeição.

Características:

- Banda passante monótona (sem ondulação)
- Ondulação equi-ripple na banda de rejeição
- Transição mais gradual que Tipo I
- Zeros de transmissão na banda de rejeição

Comparação dos tipos:

Característica	Tipo I	Tipo II
Banda passante	Ondulação	Monótona
Banda de rejeição	Monótona	Ondulação
Transição	Mais rápida	Mais gradual



Filtro de Bessel (Thomson)

O filtro de Bessel maximiza a linearidade da fase.

Objetivo: Minimizar distorção de fase, ideal para pulsos.

Propriedades:

- Fase aproximadamente linear na banda passante
- Atraso de grupo aproximadamente constante: $\tau_g(\omega) \approx \tau_0$
- Resposta ao degrau com mínimo overshoot e ringing
- Preserva melhor a forma de pulsos

Desvantagem:

- Seletividade pior que Butterworth ou Chebyshev
- Para mesmas especificações, requer ordem maior
- Banda de transição mais larga



Filtro Elíptico (Cauer)

O **filtro elíptico** permite ondulação tanto na banda passante quanto na de rejeição.

Características:

- Ondulação equi-ripple em **ambas** as bandas
- **Transição mais rápida** entre todas as aproximações
- Para especificações dadas, requer a **menor ordem**
- Zeros de transmissão na banda de rejeição e no eixo $j\omega$

Função de transferência:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\omega/\omega_c)}$$

onde R_n é uma função racional (razão de polinômios).

Aplicação: a ordem mínima é crítica (custo, consumo de energia)



Comparação de Aproximações de Filtros

Para mesma ordem n e frequência de corte ω_c :

Característica	Butter.	Cheby I	Bessel	Elíptico
Planura passante	Boa	Ripple	Melhor	Ripple
Seletividade	Média	Boa	Fraca	Melhor
Fase linear	Média	Fraca	Melhor	Fraca
Ordem necessária	Média	Baixa	Alta	Mínima
Complexidade	Média	Média	Baixa	Alta

Escolha do filtro depende da aplicação:

- **Áudio:** Butterworth ou Bessel (fase linear)
- **Comunicação digital:** Bessel (preserva pulsos)
- **Separação espectral:** Chebyshev ou Elíptico (seletividade)

• **Análise e Transmissão de Sinais** (compromisso balanceado)



Determinação da Ordem do Filtro

Problema: Dadas especificações, determinar a ordem mínima necessária.

Para filtro Butterworth passa-baixas:

Especificações:

- Passante: $|H(\omega)| \geq 1 - \delta_1$ para $\omega \leq \omega_p$
- Rejeição: $|H(\omega)| \leq \delta_2$ para $\omega \geq \omega_s$

A ordem necessária é:

$$n = \left\lceil \frac{\log \left[\frac{(1/\delta_2)^2 - 1}{(1/\delta_1)^2 - 1} \right]}{2 \log(\omega_s/\omega_p)} \right\rceil$$

onde $\lceil \cdot \rceil$ é a função teto (arredondamento para cima).

Simplificação prática: Para $\delta_1, \delta_2 \ll 1$:



Exemplo: Projeto de Filtro Butterworth

Especificações:

- Frequência de passante: $f_p = 1$ kHz
- Frequência de rejeição: $f_s = 3$ kHz
- Ondulação na passante: máx 1 dB ($\delta_1 = 0.1$, i.e., $|H| \geq 0.891$)
- Atenuação na rejeição: mín 30 dB ($\delta_2 = 0.0316$, i.e., $|H| \leq 0.0316$)

Cálculo da ordem:

$$\begin{aligned} n &= \left\lceil \frac{\log[(1/0.0316)^2 - 1] - \log[(1/0.891)^2 - 1]}{2 \log(3000/1000)} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{\log(1001) - \log(0.259)}{2 \log(3)} \right\rceil = \left\lceil \frac{3.00 - (-0.587)}{2 \times 0.477} \right\rceil \end{aligned}$$



Implementação de Filtros

Formas de implementação:

① Filtros analógicos (tempo contínuo):

- Resistores, capacitores, indutores, amplificadores operacionais
- Implementação direta da função de transferência $H(s)$
- Limitados por componentes físicos

② Filtros digitais (tempo discreto):

- Algoritmos implementados em DSP, FPGA, software
- Versão discreta após conversão A/D
- Maior flexibilidade, estabilidade, reprodutibilidade

Estruturas de implementação:

- Cascata (série de seções de 2ª ordem)
- Paralela (soma de seções)
- Ladder (escada), para filtros passivos



Resumo da Seção 3.5

Filtros ideais:

- Seletividade perfeita, mas fisicamente irrealizáveis
- Violam causalidade (critério de Paley-Wiener)
- Servem como referência teórica

Filtros práticos (aproximações causais):

- **Butterworth:** Resposta plana, compromisso geral
- **Chebyshev:** Ripple para maior seletividade
- **Bessel:** Fase linear, preserva pulsos
- **Elíptico:** Ordem mínima, máxima seletividade

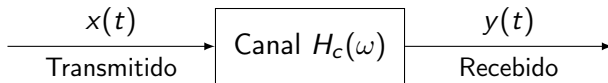
Compromissos inevitáveis:

Seletividade \leftrightarrow Fase linear \leftrightarrow Complexidade



Canal como Sistema LTI

Em um sistema de comunicação, o canal pode ser modelado como um sistema LTI:



Relação entrada-saída:

No tempo: $y(t) = x(t) * h_c(t)$

Na frequência: $Y(\omega) = H_c(\omega)X(\omega)$

Canal ideal:

$$H_c(\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$$

Apenas amplifica e atrasa o sinal, sem alterar sua forma.

Canal real: $H_c(\omega)$ tem $|H_c(\omega)|$ e $\phi_c(\omega)$ variáveis, causando distorção.



Distorção de Amplitude

Causa: $|H_c(\omega)|$ não é constante na banda do sinal.

Efeito:

Diferentes componentes de frequência são amplificadas/atenuadas diferentemente:

$$|Y(\omega)| = |H_c(\omega)| \cdot |X(\omega)|$$

Consequências práticas:

- Alteração do formato da forma de onda
- Componentes importantes podem ser atenuadas
- Interferência entre símbolos (ISI) em comunicação digital
- Degradação da relação sinal-ruído

Exemplo típico:

Canal telefônico: atenuação aumenta com frequência (efeito de cabo)



Exemplo: Distorção de Amplitude

Situação: Pulso quadrado transmitido através de canal passa-baixas.

Pulso quadrado contém harmônicas ímpares: $\omega_0, 3\omega_0, 5\omega_0, \dots$

Canal com resposta:

$$|H_c(\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 3\omega_0 \\ 0.5 & 3\omega_0 < |\omega| \leq 5\omega_0 \\ 0.1 & |\omega| > 5\omega_0 \end{cases}$$

Efeito na recepção:

- Fundamental (ω_0): passa sem alteração
- 3ª harmônica ($3\omega_0$): atenuada a 50%
- 5ª harmônica e superiores: fortemente atenuadas

Resultado: Bordas do pulso ficam arredondadas, perdendo "nitidez".



Distorção de Fase

Causa: $\phi_c(\omega) = \arg[H_c(\omega)]$ não é linear com ω .

Condição ideal:

$$\phi_c(\omega) = -\omega t_d \quad (\text{fase linear})$$

Todas as frequências sofrem o mesmo atraso temporal t_d .

Fase não-linear:

Se $\phi_c(\omega) \neq -\omega t_d$, diferentes frequências chegam em tempos diferentes.

Consequências:

- Distorção da forma de onda mesmo sem distorção de amplitude
- Componentes do sinal ficam "fora de sincronismo"
- Especialmente problemático para sinais com muitas componentes espectrais
- Crítico em comunicação digital (pulsos se dispersam)



Atraso de Grupo

O **atraso de grupo** mede o atraso de envelopes de sinais:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi_c(\omega)}{d\omega}$$

Interpretação física:

- Para fase linear $\phi = -\omega t_d$: $\tau_g = t_d$ (constante)
- Todas as componentes de frequência "viajam juntas"
- Para $\tau_g(\omega)$ variável: dispersão temporal das componentes

Efeito em sinais modulados:

Sinal modulado: $x(t) = m(t) \cos(\omega_c t)$

Se τ_g varia na banda de $m(t)$, o envelope $m(t)$ é distorcido.



Exemplo: Distorção de Fase

Sinal: Soma de duas senoides:

$$x(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

Canal ideal: $H_c(\omega) = e^{-j\omega t_d}$

$$y(t) = \cos[\omega_1(t - t_d)] + \cos[\omega_2(t - t_d)]$$

Ambas componentes atrasadas igualmente \rightarrow forma preservada.

Canal com fase não-linear:

$$\phi_c(\omega_1) = -\omega_1 t_1, \phi_c(\omega_2) = -\omega_2 t_2 \text{ com } t_1 \neq t_2$$

$$y(t) = \cos[\omega_1(t - t_1)] + \cos[\omega_2(t - t_2)]$$



Classificação da Distorção

1 Distorção Linear:

- Causada por $|H_c(\omega)|$ variável ou $\phi_c(\omega)$ não-linear
- Canal ainda é sistema LTI
- Não cria novas frequências
- Apenas modifica componentes existentes
- **Pode ser compensada** por equalização linear

2 Distorção Não-Linear:

- Canal não obedece princípio da superposição
- Exemplos: saturação, compressão, intermodulação
- **Cria novas frequências** (harmônicas, produtos de intermodulação)
- Muito mais difícil de compensar
- Requer equalização não-linear ou evitar operação não-linear

Foco desta seção: Distorção linear (mais comum e tratável).

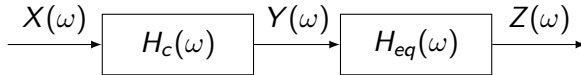


Conceito de Equalização

Objetivo: Compensar a distorção introduzida pelo canal.

Princípio:

Inserir um **filtro equalizador** $H_{eq}(\omega)$ no receptor que "inverte" o efeito do canal.



Função de transferência total:

$$Z(\omega) = H_{eq}(\omega) \cdot H_c(\omega) \cdot X(\omega)$$

Condição ideal:

$$H_{eq}(\omega) \cdot H_c(\omega) = Ke^{-j\omega t_d}$$



Equalização Ideal

Equalizador ideal:

$$H_{eq}(\omega) = \frac{1}{H_c(\omega)} = \frac{1}{|H_c(\omega)|} e^{-j\phi_c(\omega)}$$

Efeitos:

- **Equalização de magnitude:** $|H_{eq}(\omega)| = 1/|H_c(\omega)|$
 - Frequências atenuadas pelo canal são amplificadas
 - Frequências amplificadas pelo canal são atenuadas
- **Equalização de fase:** $\phi_{eq}(\omega) = -\phi_c(\omega)$
 - Cancela a fase não-linear do canal
 - Restaura relações de fase corretas

Limitações práticas:

- $H_c(\omega)$ deve ser conhecido (estimacão de canal)



Tipos de Equalizadores

1 Equalizador Fixo:

- Projetado para canal conhecido e estático
- Coeficientes fixos
- Simples, baixo custo
- Exemplo: cabo de comprimento conhecido

2 Equalizador Adaptativo:

- Ajusta coeficientes automaticamente
- Rastreia variações do canal
- Usa sequência de treinamento ou decisões
- Algoritmos: LMS, RLS, CMA
- Aplicação: canais móveis, fibra óptica

3 Equalizador de Decisão Realimentada (DFE):

- Usa decisões passadas para cancelar ISI
- Não amplifica ruído em frequências com $|H_c| \approx 0$



Exemplo 1: Canal Telefônico

Características típicas do canal telefônico (PSTN):

- Banda nominal: 300 Hz a 3400 Hz
- Atenuação: aumenta com frequência (skin effect)
- Fase: não-linear próximo aos extremos da banda
- Atraso de grupo: variação de até 2 ms na banda

Modelo simplificado:

$$|H_c(f)| \approx e^{-\alpha f} \quad \text{para} \quad 300 \text{ Hz} < f < 3400 \text{ Hz}$$

com α dependendo do comprimento do cabo.

Equalização:

Modems de linha discada (V.32, V.34, V.90) usam equalizadores adaptativos complexos para



Exemplo 2: Canal em Cabo Coaxial

Características de cabo coaxial (TV a cabo, Ethernet):

- Atenuação: $\alpha(f) = k_1\sqrt{f} + k_2f$ (dB/km)
 - Termo \sqrt{f} : perdas dielétricas
 - Termo f : efeito pelicular (skin effect)
- Fase: aproximadamente linear
- Dispersão: mínima em frequências mais baixas

Exemplo numérico: RG-59 a 100 MHz e 1 km

Atenuação ≈ 20 dB $\rightarrow |H_c| \approx 0.1$

Equalização:

Amplificadores em linha com resposta pré-distorcida:



Exemplo 3: Canal sem Fio com Multipercurso

Efeito multipercurso:

Sinal chega ao receptor por múltiplos caminhos com diferentes atrasos e atenuações.

Modelo de canal:

$$h_c(t) = \sum_{i=1}^N a_i \delta(t - \tau_i)$$

Resposta em frequência:

$$H_c(\omega) = \sum_{i=1}^N a_i e^{-j\omega\tau_i}$$

Características:



Compromisso: Equalização versus Ruído

Problema fundamental:

Equalização amplifica sinal **E** ruído nas frequências atenuadas pelo canal.

Análise:

Canal: $Y(\omega) = H_c(\omega)X(\omega) + N(\omega)$

Após equalização: $Z(\omega) = H_{eq}(\omega)Y(\omega)$

$$Z(\omega) = H_{eq}(\omega)H_c(\omega)X(\omega) + H_{eq}(\omega)N(\omega)$$

Se $|H_c(\omega_0)| \approx 0$ (null espectral):

- Equalizador requer $|H_{eq}(\omega_0)| \rightarrow \infty$
- Ruído nessa frequência é amplificado enormemente
- SNR deteriora drasticamente

Solução: Minimização do erro quadrático médio (MMSE) que balanceia distorção



Resumo da Seção 3.6

Tipos de distorção em canais:

- Distorção de amplitude: $|H_c(\omega)|$ variável
- Distorção de fase: $\phi_c(\omega)$ não-linear
- Ambas alteram formato do sinal

Atraso de grupo: $\tau_g(\omega) = -d\phi_c/d\omega$

Deve ser constante para evitar distorção de fase.

Equalização:

- Compensa distorção: $H_{eq}(\omega) \approx 1/H_c(\omega)$
- Pode ser fixa ou adaptativa
- Compromisso: correção vs. amplificação de ruído



Classificação de Sinais por Energia e Potência

Sinais podem ser classificados em duas categorias:

① Sinais de Energia:

- Energia finita: $0 < E < \infty$
- Potência média: $P = 0$
- Exemplos: pulsos, sinais transitórios, sinais causais decrescentes

② Sinais de Potência:

- Energia infinita: $E = \infty$
- Potência média finita: $0 < P < \infty$
- Exemplos: sinais periódicos, constantes, aleatórios estacionários

Nota: Alguns sinais (como t ou e^t) não se enquadram em nenhuma categoria: energia e potência infinitas.

Foco desta seção: Sinais de energia.



Energia de um Sinal no Domínio do Tempo

A **energia** de um sinal $f(t)$ é definida como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

Interpretação física:

- Para sinal de tensão $v(t)$ em resistor de 1Ω : energia dissipada
- $|f(t)|^2$ é a potência instantânea
- Integral acumula energia total ao longo do tempo

Unidades:

- Se $f(t)$ é tensão em volts: energia em joules
- Se $f(t)$ é normalizado: energia adimensional



Exemplos: Energia de Sinais

Exemplo 1: Pulso retangular

$$f(t) = \text{Arect}(t/\tau)$$

$$E = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A^2 dt = A^2 \tau$$

Energia proporcional à amplitude ao quadrado e à duração.

Exemplo 2: Exponencial decrescente

$$f(t) = e^{-at} u(t), a > 0$$

$$E = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \left[-\frac{e^{-2at}}{2a} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2a}$$

Energia inversamente proporcional à taxa de decaimento.



Energia no Domínio da Frequência

Teorema de Parseval relaciona energia nos domínios do tempo e frequência.

Teorema de Parseval

Se $f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$, então:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

Significado:

- A energia total é a mesma calculada no tempo ou na frequência
- A energia é conservada entre os domínios
- $|F(\omega)|^2/(2\pi)$ representa densidade de energia por unidade de frequência



Demonstração do Teorema de Parseval (revisão)

Começamos com a definição de energia:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt$$

Substituindo a transformada inversa para $f^*(t)$:

$$f^*(t) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

Portanto:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

Trocando a ordem de integração:



Demonstração do Teorema de Parseval (conclusão)

A integral interna é justamente $F(\omega)$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) F(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}$$

Conclusão: A energia pode ser calculada em qualquer domínio, com resultado idêntico.

Importância prática: Às vezes é mais fácil calcular energia na frequência que no tempo



Definição de Densidade Espectral de Energia

A **Densidade Espectral de Energia (DEE)** ou *Energy Spectral Density (ESD)* é definida como:

Densidade Espectral de Energia

$$\Psi(\omega) = |F(\omega)|^2$$

Unidades: Energia por Hz (ou por rad/s, dependendo se usa f ou ω).

Interpretação:

- $\Psi(\omega)$ indica quanto de energia está concentrado em cada frequência
- Áreas sob $\Psi(\omega)$ representam energia em bandas de frequência
- Pelo Teorema de Parseval:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) d\omega$$



Exemplo: DEE de Pulso Retangular

Sinal: $f(t) = A \text{rect}(t/\tau)$

Já sabemos que:

$$F(\omega) = A\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Densidade espectral de energia:

$$\Psi(\omega) = |F(\omega)|^2 = A^2\tau^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Características:

- Máximo em $\omega = 0$: $\Psi(0) = A^2\tau^2$
- Zeros em $\omega = \pm 2\pi n/\tau$ para $n = 1, 2, 3, \dots$
- Maior parte da energia no lóbulo principal: $|\omega| < 2\pi/\tau$
- Decai como $1/\omega^2$ para grandes ω

Verificação: $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) d\omega = A^2\tau$ (energia total)



Exemplo: DEE de Exponencial Decrescente

Sinal: $f(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$

Transformada:

$$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

Densidade espectral de energia:

$$\Psi(\omega) = |F(\omega)|^2 = \frac{1}{|a + j\omega|^2} = \frac{1}{a^2 + \omega^2}$$

Características:

- Forma Lorentziana
- Máximo em $\omega = 0$: $\Psi(0) = 1/a^2$
- Em $\omega = \pm a$: $\Psi(a) = 1/(2a^2)$ (metade do máximo)
- Decai como $1/\omega^2$ para $\omega \rightarrow \infty$



Conceito de Largura de Banda

A **largura de banda** de um sinal quantifica a faixa de frequências que contém sua energia significativa.

Definições comuns:

❶ **Largura de banda absoluta:**

Menor intervalo $[-W, W]$ onde $F(\omega) \neq 0$
(pode ser infinita)

❷ **Largura de banda de 3 dB:**

Faixa onde $\Psi(\omega) \geq \Psi_{\max}/2$

❸ **Largura de banda de ruído:**

Largura de um retângulo equivalente de mesma área e altura máxima:

$$B_n = \frac{1}{\Psi(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) d\omega = \frac{2\pi E}{\Psi(0)}$$



Cálculo de Largura de Banda de X%

Definição: Encontrar W_x tal que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-W_x}^{W_x} \Psi(\omega) d\omega = \alpha E$$

onde α é a fração desejada (ex: 0.90 para 90%, 0.99 para 99%).

Exemplo: Pulso retangular

Para $f(t) = \text{rect}(t/\tau)$ com $\Psi(\omega) = \tau^2 \text{sinc}^2(\omega\tau/2\pi)$:

- Lóbulo principal ($|\omega| < 2\pi/\tau$) contém $\approx 90\%$ da energia
- $W_{90\%} \approx 2\pi/\tau$ ou $B_{90\%} \approx 1/\tau$ em Hz

Princípio geral:



Desigualdade de Heisenberg-Gabor

Duração efetiva de um sinal:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}}$$

Largura de banda efetiva:

$$\Delta \omega = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}}$$

Desigualdade de Heisenberg-Gabor

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$$



Sinal Ótimo: Gaussiana

O pulso Gaussiano atinge a igualdade na desigualdade:

$$f(t) = e^{-\alpha t^2} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \quad F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\omega^2/(4\alpha)}$$

Para este sinal:

$$\Delta t \cdot \Delta \omega = \frac{1}{2}$$

Propriedades da Gaussiana:

- Gaussiana no tempo \leftrightarrow Gaussiana na frequência
- Melhor localização simultânea tempo-frequência
- Mínima incerteza
- Usada em comunicações ópticas e rádio



Energia através de Sistema LTI

Sistema: Entrada $x(t)$ com transformada $X(\omega)$, saída $y(t)$.

Relação: $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$

Energia da entrada:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Energia da saída:

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2 d\omega$$

Relação Entrada-Saída



Exemplo: Pulso através de Filtro RC

Entrada: Pulso $x(t) = \delta(t)$ (impulso unitário)

$$X(\omega) = 1, \Psi_x(\omega) = 1$$

Sistema: Filtro RC passa-baixas

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

DEE da saída:

$$\Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2}$$

Energia da saída:

$$E_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} d\omega$$



Energia em Banda Limitada

Problema: Qual fração da energia passa por um filtro passa-baixas ideal?

Filtro: $H(\omega) = \text{rect}(\omega/2W)$ com largura de banda W

Energia transmitida:

$$E_{\text{pass}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \Psi_x(\omega) d\omega$$

Fração da energia:

$$\eta = \frac{E_{\text{pass}}}{E_{\text{total}}} = \frac{\int_{-W}^W \Psi_x(\omega) d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_x(\omega) d\omega}$$

Exemplo: Exponencial $e^{-a|t|}$ com $\Psi(\omega) = 4a^2/(a^2 + \omega^2)^2$



Função de Autocorrelação

A função de autocorrelação de um sinal de energia $f(t)$ é:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t - \tau)dt$$

Propriedades:

- $R(0) = E$ (energia total)
- $R(\tau) = R^*(-\tau)$ (simetria Hermitiana)
- Para sinais reais: $R(\tau) = R(-\tau)$ (par)
- $|R(\tau)| \leq R(0) = E$

Interpretação: Mede similaridade do sinal com versão deslocada de si mesmo.

Teorema de Wiener-Khinchin (Energia)



Resumo da Seção 3.7

Conceitos fundamentais:

- Energia no tempo: $E = \int |f(t)|^2 dt$
- Energia na frequência: $E = \frac{1}{2\pi} \int |F(\omega)|^2 d\omega$
- Teorema de Parseval: Energia conservada entre domínios

Densidade Espectral de Energia:

- $\Psi(\omega) = |F(\omega)|^2$
- Indica distribuição de energia em frequência
- Em sistemas LTI: $\Psi_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \Psi_x(\omega)$

Princípios importantes:

- Relação de incerteza: $\Delta t \cdot \Delta \omega \geq 1/2$
- Gaussiana é ótima (atinge igualdade)



Potência Média de um Sinal

Para sinais que não têm energia finita (sinais de potência), define-se a **potência média**:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt$$

Exemplos de sinais de potência:

- Sinais periódicos: $\cos(\omega_0 t)$, ondas quadradas
- Constantes: $f(t) = A$
- Sinais aleatórios estacionários: ruído branco, processos ergódicos

Diferença fundamental:

	Energia	Potência
Sinais de energia	Finita	Zero
Sinais de potência	Infinita	Finita



Exemplos: Potência de Sinais

Exemplo 1: Senoide

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \cos^2(\omega_0 t) dt$$

Usando $\cos^2(\theta) = (1 + \cos(2\theta))/2$ e integrando sobre período inteiro:

$$P = A^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{A^2}{2}$$

Exemplo 2: Constante

$$f(t) = A$$



Necessidade da PSD

Problema: Para sinais de potência, a transformada de Fourier padrão não existe!

Para $f(t) = A \cos(\omega_0 t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |A \cos(\omega_0 t)| dt = \infty$$

Não satisfaz condição de Dirichlet.

Solução: Usar funções generalizadas (distribuições) ou definir potência no domínio da frequência através da **Densidade Espectral de Potência (PSD)**.

PSD $S(\omega)$ indica como a potência está distribuída em frequência.

Relação fundamental:



Definição da PSD

Para um sinal de potência $f(t)$, define-se:

Sinal truncado:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & |t| \leq T/2 \\ 0 & |t| > T/2 \end{cases}$$

$f_T(t)$ tem energia finita, logo possui transformada $F_T(\omega)$.

Densidade Espectral de Potência

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

Interpretação:

• A DFE normaliza o sinal pelo tempo de observação



PSD de Sinais Periódicos

Para sinal periódico com série de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

A PSD é:

PSD de Sinal Periódico

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$

Características:

- Espectro discreto (impulsos nas harmônicas)



Exemplo: PSD de Senoide

Sinal: $f(t) = A \cos(\omega_0 t)$

Escrevendo em forma exponencial:

$$f(t) = \frac{A}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

Coeficientes: $c_1 = c_{-1} = A/2$, $c_n = 0$ para $n \neq \pm 1$

PSD:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 2\pi \left[\left| \frac{A}{2} \right|^2 \delta(\omega - \omega_0) + \left| \frac{A}{2} \right|^2 \delta(\omega + \omega_0) \right] \\ &= \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$



Função de Autocorrelação para Sinais de Potência

A função de autocorrelação para um sinal de potência é:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f^*(t - \tau) dt$$

Propriedades:

- $R(0) = P$ (potência média)
- $R(\tau) = R^*(-\tau)$ (simetria Hermitiana)
- Para sinais reais: $R(\tau) = R(-\tau)$ (par)
- $|R(\tau)| \leq R(0) = P$

Interpretação física:

- Mede correlação temporal do sinal
- $R(\tau)$ fornece valores em t e $t + \tau$ correlacionados



Teorema de Wiener-Khinchin

Teorema de Wiener-Khinchin

A PSD e a função de autocorrelação formam um par de transformadas de Fourier:

$$R(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(\omega)$$

Ou seja:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Importância:



Demonstração do Teorema (esboço)

Começando com a definição de PSD:

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

Expandindo $|F_T(\omega)|^2 = F_T(\omega)F_T^*(\omega)$:

$$|F_T(\omega)|^2 = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)e^{-j\omega t} dt \int_{-T/2}^{T/2} f_T^*(t')e^{j\omega t'} dt'$$

Combinando as integrais e mudando variável $\tau = t - t'$:

$$|F_T(\omega)|^2 = \int \int f_T(t)f_T^*(t')e^{-j\omega(t-t')} dt' dt$$

Após aplicar o limite $T \rightarrow \infty$:



Exemplo: Autocorrelação de Senoide

Sinal: $f(t) = A \cos(\omega_0 t)$

Autocorrelação:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 t) \cdot A \cos(\omega_0(t - \tau)) dt$$

Usando identidade $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$:

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t - \omega_0 \tau)] dt$$

O segundo termo integra a zero sobre período completo:

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$



Transformação de PSD por Sistema LTI

Sistema: Entrada $x(t)$ com PSD $S_x(\omega)$, saída $y(t)$ com PSD $S_y(\omega)$.

Relação na frequência: $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$

Derivação:

Para sinal truncado: $Y_T(\omega) = H(\omega)X_T(\omega)$

$$|Y_T(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X_T(\omega)|^2$$

Tomando limite:

$$S_y(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|Y_T(\omega)|^2}{T} = |H(\omega)|^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T}$$

Relação Entrada-Saída para PSD



Potência na Saída de Sistema LTI

A potência na saída é:

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega$$

Substituindo $S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$:

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega$$

Interpretação:

- Cada componente espectral da entrada é filtrada por $|H(\omega)|^2$
- Frequências amplificadas pelo sistema contribuem mais à potência de saída
- Frequências atenuadas contribuem menos



Ruído Branco

Ruído branco ideal: Processo aleatório com PSD constante para todas as frequências.

PSD de Ruído Branco

$$S_n(\omega) = \frac{N_0}{2} \quad \text{para todo } \omega$$

onde N_0 é a densidade espectral de potência bilateral.

Características:

- Potência infinita: $P = \int_{-\infty}^{\infty} (N_0/2)/(2\pi) d\omega = \infty$
- Todas as frequências igualmente representadas
- Analogia: Luz branca contém todas as cores
- Modelo idealizado (fisicamente irrealizável)



Ruído Branco Filtrado

Situação prática: Ruído branco passa por filtro (canal, receptor).

Entrada: Ruído branco $n(t)$ com $S_n(\omega) = N_0/2$

Saída: $y(t) = n(t) * h(t)$

PSD da saída:

$$S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 \cdot \frac{N_0}{2}$$

Potência do ruído na saída:

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 \frac{N_0}{2} d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

Pela relação de Parseval:



Exemplo: Ruído Branco em Filtro RC

Filtro: RC passa-baixas com $H(\omega) = 1/(1 + j\omega RC)$

Entrada: Ruído branco $S_n(\omega) = N_0/2$

PSD na saída:

$$S_y(\omega) = \frac{N_0/2}{1 + (\omega RC)^2}$$

Potência do ruído na saída:

$$P_y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0/2}{1 + (\omega RC)^2} d\omega$$

Com $\omega_c = 1/(RC)$:

$$P_y = \frac{N_0}{2\pi} \cdot 2\pi = \frac{N_0}{2} = \frac{N_0}{2} \cdot RC = \frac{N_0 \cdot BW}{2}$$



Relação Sinal-Ruído

A Relação Sinal-Ruído (SNR) quantifica qualidade do sinal:

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{sinal}}}{P_{\text{ruído}}}$$

Em decibéis:

$$\text{SNR}_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{\text{sinal}}}{P_{\text{ruído}}} \right)$$

Importância:

- Medida fundamental de qualidade em comunicações
- Determina taxa de erro e capacidade do canal
- SNR alta: comunicação confiável



SNR em Sistemas de Banda Limitada

Sistema: Sinal $s(t)$ com potência P_s + ruído branco $n(t)$ com PSD $N_0/2$.

Após filtro passa-baixas ideal de largura W :

Potência do sinal: P_s (assumindo sinal banda-limitada em W)

Potência do ruído:

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W \frac{N_0}{2} d\omega = \frac{N_0 \cdot 2W}{4\pi} = \frac{N_0 W}{2\pi}$$

Em Hz ($f = \omega/2\pi$):

$$P_n = N_0 B$$

onde $B = W/(2\pi)$ é a largura de banda em Hz.

SNR:



Exemplo: Comunicação em Canal Ruidoso

Sistema:

- Sinal transmitido: $s(t) = A \cos(\omega_c t)$, potência $P_s = A^2/2$
- Canal: Atenuação α , ruído branco aditivo $N_0/2$
- Filtro receptor: Passa-faixas centrado em ω_c , largura $2B$

Sinal recebido (antes do filtro):

$$r(t) = \alpha s(t) + n(t)$$

Após filtro:

Potência do sinal: $P_{s,out} = \alpha^2 P_s = \alpha^2 A^2/2$

Potência do ruído: $P_{n,out} = N_0 B$ (banda bilateral $2B$, mas simetria)

SNR na saída:



Resumo da Seção 3.8

Conceitos de potência:

- **Potência média:** $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int |f(t)|^2 dt$
- Para sinais periódicos: $P = \sum |c_n|^2$

Densidade Espectral de Potência (PSD):

- $S(\omega)$: distribuição de potência em frequência
- $P = \frac{1}{2\pi} \int S(\omega) d\omega$
- Sinais periódicos: espectro discreto (impulsos)

Teorema de Wiener-Khinchin: $R(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(\omega)$

Sistemas LTI: $S_y(\omega) = |H(\omega)|^2 S_x(\omega)$



Por que Transformada Discreta?

Transformada de Fourier contínua:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

Problemas para implementação computacional:

- ❶ **Integral infinita:** Computadores não processam intervalos infinitos
- ❷ **Tempo contínuo:** Necessário amostrar o sinal discretamente
- ❸ **Frequência contínua:** Impossível calcular para todo ω

Solução: Transformada Discreta de Fourier (DFT)

- Opera em sequências finitas de amostras
- Produz espectro em frequências discretas
- Computável em tempo finito



Teorema da Amostragem (Nyquist-Shannon)

Problema: Converter sinal contínuo $f(t)$ em amostras discretas $f[n]$.

Teorema de Nyquist-Shannon

Um sinal de banda limitada $f(t)$ com frequência máxima f_{max} pode ser perfeitamente reconstruído a partir de suas amostras se a taxa de amostragem f_s satisfizer:

$$f_s \geq 2f_{max}$$

Definições:

- **Taxa de Nyquist:** $f_N = 2f_{max}$ (taxa mínima)
- **Período de amostragem:** $T_s = 1/f_s$
- **Amostras:** $f[n] = f(nT_s)$ para $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

Consequência: Se $f_s < 2f_{max}$, ocorre **aliasing** (distorção espectral).



Aliasing

Aliasing ocorre quando a taxa de amostragem é insuficiente.

Efeito:

Frequências acima de $f_s/2$ aparecem como frequências mais baixas (aliases):

$$f_{alias} = |f_{sinal} - kf_s|$$

para algum inteiro k que minimiza f_{alias} .

Exemplo clássico: Rodas de carroça em filmes aparecem girando para trás.

Prevenção:

- 1 **Filtro anti-aliasing:** Passa-baixas antes da amostragem
Remove componentes acima de $f_s/2$
- 2 **Sobreamostragem:** Usar $f_s \gg 2f_{max}$



Definição da DFT

Dado sequência finita de N amostras: $x[0], x[1], \dots, x[N-1]$

Transformada Discreta de Fourier (DFT)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT Inversa (IDFT)

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$



Interpretação da DFT

Frequências discretas:

A DFT avalia o espectro em N frequências igualmente espaçadas:

$$f_k = \frac{kf_s}{N} = \frac{k}{NT_s}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

ou em frequência angular:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{NT_s}$$

Resolução em frequência:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{T_{obs}}$$



Propriedades da DFT

Periodicidade:

$$X[k + N] = X[k], \quad x[n + N] = x[n]$$

A DFT assume sinais periódicos com período N .

Simetria (para sinais reais):

Se $x[n]$ é real, então:

$$X[N - k] = X^*[k]$$

Logo, $|X[N - k]| = |X[k]|$ (espectro de magnitude simétrico).

Basta calcular $k = 0, 1, \dots, N/2$ (metade dos pontos).

Linearidade:



Relação DFT-TF Contínua

Aproximação: A DFT aproxima a Transformada de Fourier contínua.

Para sinal amostrado $f(t)$ com $f[n] = f(nT_s)$:

$$X[k] \approx T_s F(\omega_k)$$

onde $\omega_k = 2\pi k/(NT_s)$.

Derivação intuitiva:

A integral da TF é aproximada por uma soma (regra do retângulo):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \approx T_s \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)e^{-j\omega nT_s}$$

Avaliando em $\omega = \omega_k = 2\pi k/(NT_s)$:



Complexidade Computacional

Cálculo direto da DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

Para cada k , são necessárias:

- N multiplicações complexas
- $N - 1$ adições complexas

Para todos os N valores de k :

Complexidade: $O(N^2)$

Exemplo: Para $N = 1024$:

DFT direta: $\approx 1.048.576$ operações



Fast Fourier Transform (FFT)

A **FFT** é um algoritmo eficiente para calcular a DFT.

Ideia fundamental (Cooley-Tukey):

Explorar simetrias e periodicidades de $e^{-j2\pi/N}$ (fator de rotação).

Dividir DFT de tamanho N em:

- Duas DFTs de tamanho $N/2$ (pares e ímpares)
- Combinar resultados com multiplicações simples
- Repetir recursivamente

Complexidade FFT: $O(N \log_2 N)$

Requisito: N deve ser potência de 2 (para FFT radix-2).

$N = 2^m$ para algum inteiro m .

Ganho de velocidade:



Algoritmo FFT (esboço)

Decomposição butterfly (radix-2):

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}$$

onde $W_N = e^{-j2\pi/N}$ (twiddle factor).

Separando índices pares e ímpares:

$$X[k] = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_N^{k(2r)} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_N^{k(2r+1)}$$

$$= \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r] W_{N/2}^{kr} + W_N^k \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1] W_{N/2}^{kr}$$



Implementação Prática da FFT

Bibliotecas disponíveis:

- **Python:** `numpy.fft.fft()`, `scipy.fft`
- **MATLAB:** `fft()`
- **C/C++:** FFTW (Fastest Fourier Transform in the West)
- **Hardware:** DSPs, FPGAs com blocos FFT dedicados

Uso típico em Python:

```
import numpy as np
```

```
# Sinal no tempo
```

```
x = np.array([...]) # N amostras
```

```
N = len(x)
```



Vazamento Espectral (Spectral Leakage)

Problema: DFT assume sinal periódico com período N .

Se o sinal não é periódico em N ou não contém número inteiro de ciclos:

Vazamento espectral: Energia de uma frequência "vaza" para outras.

Causa:

Truncamento do sinal = multiplicação por janela retangular.

No domínio da frequência: convolução com sinc.

Lóbulos laterais do sinc espalham energia.

Consequências:

- Picos espectrais alargados
- Componentes espúrias
- Resolução reduzida



Janelamento (Windowing)

Técnica: Multiplicar sinal por função janela antes da DFT.

$$x_w[n] = x[n] \cdot w[n]$$

Janelas comuns:

- ① **Retangular:** $w[n] = 1$ (sem janelamento)
Melhor resolução, pior vazamento
- ② **Hanning (Hann):** $w[n] = 0.5[1 - \cos(2\pi n/N)]$
Compromisso, muito usada
- ③ **Hamming:** $w[n] = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n/N)$
Lóbulos laterais menores
- ④ **Blackman:** Combinação de cossenos
Melhor supressão de lóbulos, resolução pior



Efeito Cerca (Picket Fence Effect)

Problema: DFT calcula apenas em N frequências discretas.

Se componente espectral cai entre dois bins de frequência:

Efeito: Amplitude subestimada, distribuída entre bins adjacentes.

Analogia: Ver paisagem através de cerca — perde informação entre ripas.

Soluções:

- ➊ **Aumentar N :** Mais bins, menor espaçamento Δf
Requer mais amostras (tempo maior)
- ➋ **Zero-padding:** Adicionar zeros ao final do sinal
Aumenta N sem coletar mais dados
Interpola espectro (não aumenta informação real!)
- ➌ **Algoritmos de estimação:** Interpolação parabólica, ajuste de curvas



Zero-Padding

Técnica: Adicionar zeros ao final da sequência.

Sequência original: $x[0], \dots, x[N - 1]$

Após zero-padding: $x[0], \dots, x[N - 1], 0, \dots, 0$ (total $M > N$ pontos)

Efeito:

- DFT de tamanho M (mais bins)
- Resolução $\Delta f = f_s/M$ (menor que antes)
- **Interpola** o espectro entre bins originais
- **Não adiciona informação nova!** (apenas interpola)

Uso:

- Visualização mais suave do espectro
- Facilitar a detecção de picos



Exemplo 1: DFT de Senoide

Sinal: $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ com $f_0 = 10$ Hz

Amostragem: $f_s = 100$ Hz, $N = 128$ amostras

Parâmetros:

- $T_s = 1/f_s = 0.01$ s
- $T_{obs} = NT_s = 1.28$ s
- $\Delta f = f_s/N = 100/128 \approx 0.78$ Hz

Resultado esperado:

Dois picos em $f = \pm 10$ Hz (ou equivalentemente em $k = 13$ e $k = 115$).

$$k_0 = \frac{f_0 N}{f_s} = \frac{10 \times 128}{100} = 12.8 \approx 13$$

Observação: Como f_0 não é múltiplo exato de Δf , haverá algum vazamento espectral.

Uso de janela Hannings reduz vazamento.



Exemplo 2: Análise Espectral de Áudio

Aplicação: Análise de nota musical (440 Hz = Lá central)

Parâmetros:

- Taxa de amostragem: $f_s = 44100$ Hz (padrão CD)
- Tamanho da janela: $N = 4096$ amostras
- Resolução: $\Delta f = 44100/4096 \approx 10.77$ Hz

Procedimento:

- 1 Aplicar janela Hamming
- 2 Calcular FFT (4096 pontos)
- 3 Encontrar pico dominante
- 4 Estimar frequência fundamental
- 5 Identificar harmônicas

Resultado: Pico em $k = 41$ corresponde a:



Exemplo 3: Espectrograma

Espectrograma: Representação tempo-frequência.

Ideia: Dividir sinal longo em janelas curtas, calcular FFT de cada janela.

Algoritmo (STFT - Short-Time Fourier Transform):

- 1 Dividir sinal em segmentos sobrepostos
- 2 Aplicar janela a cada segmento
- 3 Calcular FFT de cada segmento
- 4 Empilhar resultados em matriz 2D
- 5 Visualizar como imagem (cor = magnitude)

Parâmetros típicos:

- Tamanho da janela: 1024-4096 amostras
- Sobreposição: 50-75% (melhor continuidade temporal)

Aplicações:



Considerações Práticas

Escolha de parâmetros:

❶ **Taxa de amostragem f_s :**

Pelo menos $2 \times$ frequência máxima de interesse

Margem típica: $f_s = 2.5$ a $4 \times 2f_{max}$

❷ **Número de amostras N :**

Determina resolução: $\Delta f = f_s / N$

Para FFT: usar $N = 2^m$ (potência de 2)

Compromisso: resolução vs. localização temporal

❸ **Janela:**

Hanning/Hamming: uso geral

Blackman: melhor supressão de lóbulos

Retangular: apenas se sinal já é periódico em N



Resumo da Seção 3.9

Conceitos fundamentais:

- **Amostragem:** $f_s \geq 2f_{max}$ (Teorema de Nyquist)
- **DFT:** $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}$
- **FFT:** Algoritmo rápido, $O(N \log N)$ vs. $O(N^2)$

Parâmetros importantes:

- Resolução: $\Delta f = f_s/N$
- Faixa: 0 a $f_s/2$ (Nyquist)

Fenômenos práticos:

- **Aliasing:** Subamostragem causa distorção
- **Vazamento:** Sinal não-periódico espalha energia
- **Efeito cerca:** Frequências entre bins subestimadas



Agradecimentos

Obrigado pela atenção!

Contato:

daniel.araujo@unb.br





Laboratório de Telecomunicações

Universidade de Brasília

Dúvidas?



Referências I

-  B. P. Lathi and Z. Ding, *Modern Digital and Analog Communication Systems*. New York, NY: Oxford University Press, 5th ed., 2019.
-  J. G. Proakis and M. Salehi, *Fundamentals of Communication Systems*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2nd ed., 2007.
-  A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and Systems*. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2nd ed., 2010.
-  S. Haykin and M. Moher, *Communication Systems*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 5th ed., 2009.



Referências II

-  L. W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*.
Upper Saddle River, NJ: Pearson, 8th ed., 2013.
-  R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*.
New York, NY: McGraw-Hill, 3rd ed., 2000.
-  J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications*.
Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 4th ed., 2001.



Referências III



J. W. Cooley and J. W. Tukey, *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, vol. 19.

American Mathematical Society, 1965.



A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*.

New York, NY: McGraw-Hill, 4th ed., 2002.



A. B. Carlson and P. B. Crilly, *Communication Systems: An Introduction to Signals and Noise in Electrical Communication*.

Boston, MA: McGraw-Hill, 4th ed., 2002.



Referências IV



C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, 1948.



R. E. Ziemer and W. H. Tranter, *Principles of Communications*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 7th ed., 2015.