Projeto e Análise de Algoritmos

Teorema Mestre E Mais Problemas Com Recursão

Matheus Gabriel

Agosto de 2024

1 Problema com recorrência

1.1 Enunciado

Resolver:

$$\begin{cases} T(n) = 8T(\frac{n}{2}) + n \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

1.2 Resolução

$$\begin{aligned}
\text{Mas } T(\frac{n}{2}) &= 8T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2} \\
\therefore T(n) &= 8(8T(\frac{n}{2^2}) + \frac{n}{2}) + n \\
T(n) &= 8^2T(\frac{n}{2^2}) + 4n + n \\
\text{Mas } T(\frac{n}{2^2}) &= 8T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2} \\
\therefore T(n) &= 8^2(8T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n}{2^2}) + 4n + n \\
T(n) &= 8^3T(\frac{n}{2^3}) + 16n + 4n + n \\
T(n) &= 8^3(\frac{n}{2^3}) + n(4^2 + 4^1 + 4^0)
\end{aligned}$$

Generalizando, temos:

$$T(n) = 8^iT(\frac{n}{2^i}) + n\sum_{k=0}^{i-1} 4^k$$

E vai parar quando

$$\frac{n}{2^i} = 1$$

ou

$$\boxed{i = \log_2 n}$$

Tendo em mente que $\boxed{\sum_{k=0}^{n} c^k = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}}$, vamos finalizar:

$$T(n) = 8^{\log_2 n} \cdot [T(1) \to 1] + n \sum_{k=0}^{\log_2 n - 1} 4^k$$

Usando a fórmula dada:

$$T(n) = n^{\log_2 8} + n(\frac{4^{\log_2 n} - 1}{4-1})$$

$$T(n) = n^3 + n(\frac{n^{\log_2 4} - 1}{3})$$

$$= n^3 + n(\frac{n^2 - 1}{3})$$

$$T(n) = \frac{3n^3 + n^3 - n}{3}$$

$$= \frac{4n^3 - n}{3}$$

$$\therefore \boxed{T(n) = \Theta(n^3)}$$

2 Teorema mestre

2.1 O que é

O método resolve recorrências da forma:

$$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$$

Ou seja,

- **Use apenas em recorrências com divisão e conquista!**
- **É extremamente importante dizer o caso do teorema mestre usado!**
- lg **é sempre base 2**

Casos:

1. Se $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ para alguma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) = O(n^{log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.
3. Se $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$, para alguma constante $\epsilon > 0$, e se $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ para alguma constante $c > 1$ e n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

2.2 Exemplos

2.2.1 Primeiro exemplo

Exemplo incompleto, consulte o segundo.

Resolva para: $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$

Temos:

$$\begin{aligned} a &= 9 \\ b &= 3 \\ f(n) &= n \end{aligned}$$

Então resolvemos como:

$$n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$$

Como $f(n) \ldots$

2.2.2 Segundo exemplo

$$\begin{aligned} T(n) &= T(\frac{2n}{3}) + 1 \\ a &= 1 \\ b &= \frac{3}{2} \\ f(n) &= 1 \end{aligned}$$

Vamos encontrar o caso:

$$n^{\log_{\frac{3}{2}} 1} = n^0 = 1$$

Pelo *caso 2* do teorema mestre:

$$T(n) = \Theta(\lg n)$$

2.2.3 Terceiro exemplo

$$T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n \lg n$$
$$a = 3$$
$$b = 4$$
$$f(n) = n \lg n$$

Vamos encontrar o caso:

$$n^{\log_4 3} = n^{0,8\ldots}$$

Pelo *caso 3* do teorema mestre:

$$T(n) = \Theta(n \lg n)$$