Modelagem Matemática I

Método Simplex em prática

Matheus Gabriel

Agosto 2024

1 Exercício 1

1.1 Enunciado

Maximize: $Z = 2x_1 + x_2$

Sujeito às restrições:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leq 6 \\ 6x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.2 Modelagem e resolução

O objetivo é encontrar a solução ótima, através de várias soluções viáveis. Para encontrar a linha pivô existe uma linha de decisão, mas não pensei em anotar.

Encontramos a solução ótima quando não existem mais valores negativos na linha Z da tabela.

$$Z - 2x_1 - x_2 = 0$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 0x_4 &= 6 \\ 6x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução inicial básica $= (0, 0, 6, 3)$

Agora colocando isso tudo na tabela:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	3	4	1	0	6
x_4	6	1	0	1	3
Z	-2	-1	0	0	0

As linhas aqui são denominadas como L1, L2 e L3.

"a" e "b" são coordenadas na tabela, o "a" representa a parte dos xis:

$$\boxed{\frac{b_1}{a_1 1} = \frac{6}{3} = 2}$$

$$\boxed{\frac{b_2}{a_2 1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$$

Em um problema real, você escreveria várias tabelas de acordo com o seu progresso.

Agora fazendo isso:

$$\begin{aligned} L_1 &\leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 &\leftarrow L_3 + 2L_2 \end{aligned}$$

Aplicamos para a tabela

base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	3	4	1	0	6
x_4	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
Z	-2	-1	0	0	0

E então,

base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	0	$\frac{7}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
Z	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1

Analisando a tabela, vemos quais valores x têm valores usáveis para a solução, como no caso do x_1 e x_3, que valem 1, então colocamos eles na solução viável. Nova solução viável: $= (\frac{1}{2}, 0, \frac{9}{2}, 0)$

Vamos formar uma nova tabela:

$$\boxed{\frac{b_1}{a_2 1} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{9}{7}}$$

$$\frac{b_2}{a_2 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{1} = 3$$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	0	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{9}{7}$
x_1	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
Z	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{6}L_1$$

$$-\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{7} = -\frac{1}{21}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{6}[1 + \frac{1}{7}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{8}{7} = \frac{4}{21}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{7} = \frac{1}{2} - \frac{3}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_1$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{21}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{3}[1 - \frac{2}{7}] = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{21}$$

$$1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{7} = 1 + \frac{6}{7} = \frac{13}{7}$$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_2	0	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{9}{7}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{7}$
Z	0	0	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{13}{7}$

Solução ótima $= (\mathbf{\frac{2}{7}}, \mathbf{\frac{9}{7}})$

$$\boxed{Z = \frac{13}{7}}$$