# Projeto e Análise de Algoritmos
Continuação de Algoritmos de Ordenação

Matheus Gabriel

Agosto de 2024

# 1 Continuação com exercícios de Análise Assintótica

## 1.1 Exercício 1

### 1.1.1 Enunciado

Coloque em ordem assintoticamente crescente:

- 300
- $n^2$
- $10^9 0$
- $O(1)$
- $n$
- $n^3$
- $n \lg n$
- $\lg n$
- $n^n$
- $\frac{n}{2}$
- $n!$
- $n^2 \lg n$

### 1.1.2 Resposta

$$
\begin{aligned}
300 = 10^9 0 = O(1) < \lg n = 20 \lg n = O(\lg n) \\
< n = \frac{n}{2} = O(n) < O(n \lg n) < O(n^2) \\
O(n^2 \lg n) < O(n^3) < O(2^n) < O(n!) < O(n^n)
\end{aligned}
$$

## 1.2 Exercício 2

### 1.2.1 Enunciado

Encontre a fórmula fechada para:

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 2T(n-1) + 1 \end{aligned}$$

### 1.2.2 Resposta

Mas:

$$\begin{aligned} T(n-1) &= 2T(n-2) + 1 \\ \therefore T(n) &= 2(2T(n-2) + 1) + 1 \\ T(n) &= 2^2T(n-2) + 2 + 1 \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} T(n-2) &= 2T(n-2) + 1 \\ \therefore T(n) = 2^2(2T(n-3)+1) + 2 + 1 &= 2^3T(n-3) + 2^2 + 2^1 + 2^0 \\ \text{Generalizando: } T(n) &= 2^iT(n-i) + \sum_{k=0}^{(i^{-1})} 2^k \\ \text{E vai parar quando } n - i = 1 &\rightarrow \boxed{i = n-1} \\ \therefore T(n) = 2^{n-1} \cdot [T(1) \rightarrow 1] + \sum_{k=0}^{n-2} 2^k = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 &= 2^n - 1 \\ \therefore &\boxed{T(n) = \Theta(2^n)} \end{aligned}$$

## 1.3 Exercício 3

### 1.3.1 Enunciado

Idem para:

$$\begin{aligned} T(1) &= 1 \\ T(n) &= 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \end{aligned}$$

### 1.3.2 Resposta

Mas

$$T(\frac{n}{2}) = 4T(\frac{n}{2^2}) + (\frac{n}{2})^2$$

$$\therefore T(n) = 4(4T(\frac{n}{2^2} + \frac{n^2}{4}) + n^{=}4^2T(\frac{n}{2^2}) + n^2 + n^2$$

$$\text{Mas } T(\frac{n}{2}) = 4T(\frac{n}{2^3}) + (\frac{n}{2^2})^2$$

$$\therefore T(n) = 4^2(4T(\frac{n}{2^3}) + \frac{n^2}{4^2}) + n^2 + n^2 = 4^3T(\frac{n}{2^3}) + n^2 + n^2 + n^2$$

$$\text{Generalizando, temos: } T(n) = 4^iT(\frac{n}{2^i}) + \sum_{k=1}^{i} n^2$$

$$\text{E vai parar quando } \frac{n}{2^i} = 1 \to \boxed{i = \log_2 n}$$

$$\therefore T(n) = 4^{\log_2 n} \cdot [T(1) \to 1] + \sum_{k=1}^{\log_2 n} n^2$$

$$T(n) = n^{\log_2 4} + n^2 \log_2 n = n^2 + n^2 \lg n$$

$$\boxed{T(n) = \Theta(n^2 \lg n)}$$

Lembrando que $a^{\log_b^c} = c^{\log_b^a}$