Modelagem Matemática I

Método Simplex

Matheus Gabriel

Agosto 2024

1 Etapas

1.1 Enunciado

Uma marcenaria produz dois produtos: mesa e armário. Para produzir uma mesa são gastos 2 m2 de madeira e 2 h de mão de obra e para produzir um armário são gastos 3 m2 de madeira e 1 h de mão de obra. Sabendo que a disponibilidade de madeira é de 12 m2 e a disponibilidade de mão de obra é de 8 h. Determinar quanto deve ser produzido de cada um dos produtos para maximizar a margem de contribuição total (lucro) da empresa, sabendo que cada mesa vendida a margem é de R$ 4,00 e que cada armário vendido fornece uma margem de R$ 1,00.

1.2 Modelo

Modelo: Variáveis de decisão: x_1 representa a quantidade de mesas a produzir; x_2 representa a quantidade de armários a produzir;

$$\text{Maximizar } L = 4x_1 + x_2$$

1.3 Passo 1

Para cada restrição tipo $\leq$ inserir uma variável de folga.

Assim:

- x_3 representa a folga (ou sobra) de madeira
- x_4 representa a folga (ou a sobra) de horas de mão de obra.

1.4 Passo 2

Reescrevemos o modelo com as variáveis de folga:

$$\text{Maximizar } L = 4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 0x_4 &= 12 \\ 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1; x_2; x_3; x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.5 Passo 3

Para obtermos a **solução inicial**, consideramos que nada foi produzido ainda, ou seja, as variáveis de decisão são nulas e, portanto, as variáveis de folga são os valores totais dos recursos (madeira e mão de obra). De modo que o lucro inicial é nulo.

Assim:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0 \\
x_2 &= 0 \quad \text{variáveis não-básicas} \\
x_3 &= 12, \quad x_4 = 8 \quad \text{variáveis básicas} \\
L &= 0
\end{aligned}
$$

Ou seja:

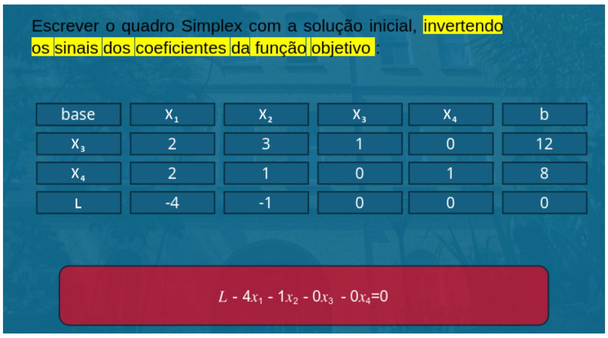
$$S_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4; L) = (0, 0, 12, 8; 0)$$

1.6 Passo 4

Escrever o quadro Simplex com a solução inicial, invertendo os sinais dos coeficientes da função objetivo:

Aviso

As imagens usadas nessas etapas estão no `.pptx` do professor, nesse e em outros documentos incluo apenas o resultado final.



Essa tabela vai ser usada ao longo de todo desse exercício específico, consulte ela.

1.7 Passo 5

Vamos obter uma nova solução:

- Colocamos na base a variável com o lucro mais negativo. **De modo que x_1 entra na base**.
- Se alguma variável entra na base, alguma tem que sair, pois só há 2 lugares na base.
- A variável que sai da base é a com menor $\frac{b}{x_i}$, onde x_i é a coluna da variável que está entrando na base.
- **Logo, x_4 sai da base**.

Consulte a imagem do passo 4.

1.8 Passo 6

Vamos montar o quadro Simplex com x_1 no lugar de x_4:

Para obtermos a nova solução devemos usar as 3 operações elementares de matrizes:

1. Trocamos 2 linhas de posição
2. Multiplicamos uma linha por um número real diferente de zero
3. Substituímos uma linha pela soma dela com um múltiplo de outra linha

	base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
	x_3	2	3	1	0	12
Linha pivô	x_1	2	1	0	1	8
	L	-4	-1	0	0	0

1.9 Passo 7

Usando a primeira operação vamos colocar a linha pivô na primeira linha:

	base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Linha pivô	x_1	2	1	0	1	8
	x_3	2	3	1	0	12
	L	-4	-1	0	0	0

	base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Linha pivô	x_1	2 1	1	0	1	8
	x_3	2 0	3	1	0	12
	L	-4 0	-1	0	0	0

Para obtermos uma nova solução, a coluna da variável pivô deve mudar para ficar 1 onde x_1 cruza com x_1, e 0 em todas as outras linhas.

1.10 Passo 8

O pivô deve ser igual a 1, então vamos dividir a primeira linha por 2, usando a segunda operação elementar:

	base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
Linha pivô	x_1	1	1/2	0	1/2	4
	x_3	2	3	1	0	12
	L	-4	-1	0	0	0

1.11 Passo 9

Para arrumar as outras linhas, devemos lembrar que os valores, que não o pivô, devem ser zero na coluna pivô. Assim, para que isso ocorra, devemos trocar a linha 2 por ela menos 2 vezes a linha pivô e, trocar a terceira linha por ela mais 4 vezes a linha pivô, ou seja:

$$L_2 \leftrightarrow L_2 - 2L_1 \tag{1}$$

base	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	1/2	0	1/2	4
x_3	0	2	1	-1	4
L	0	1	0	2	16

Obtemos uma nova solução, pois todas as colunas das variáveis básicas estão na forma correta, isto é, valem 1 onde a linha da variável cruza com a sua coluna, e zero nas outras posições.

$$S_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4; L) = (4, 0, 4, 0; 16) \tag{2}$$

Como não há mais valores negativos na linha "L", a solução é a solução ótima.

Se após acharmos uma solução, ainda houver valores negativos na linha "L", devemos obter nova solução, voltando ao passo 5. Fazemos isso iterativamente até que não haja mais valores negativos na linha do lucro.