São João del Rei/MG, 01 de outubro de 2017

Curso: Ciência da Computação

Fundamentos de Mecânica Clássica

Atividade extraturno:

Resolução numérica de uma equação de movimento clássico – método de Euler

INTRODUÇÃO

Um dos problemas fundamentais da Mecânica Clássica, ou seja, daquela baseada nos princípios de Newton, é descrever o movimento de corpos que interagem entre si. Descrever o movimento significa, dado um corpo de massa m e conhecidas as condições iniciais, ou o estado inicial, posição ($\vec{r}_0$) e velocidade ($\vec{v}_0$) em determinado instante de tempo (t_0) - medidos em relação a um referencial O -, e conhecidas as forças que atuam sobre esse corpo, poder prever a posição e velocidade para outros instantes de tempo, ou seja, o estado do corpo num tempo t qualquer.

Assim, por exemplo, um corpo de massa m, rígido, cujas dimensões físicas podem ser desprezadas em relação ao espaço por ele ocupado e das distâncias entre ele e outro corpo, quando solto de determinada altura h, muito próxima da superfície da Terra, está sujeito essencialmente pela força de atração gravitacional da Terra, denominada força peso ($\vec{P}$). Considerando o referencial para descrever o movimento desse corpo como sendo inercial, e adotando um sistema de coordenadas cartesiano, com o eixo vertical OY com orientação de baixo para cima, então a força peso poderá ser escrita como $\vec{P} = -mg\hat{\jmath}$, em que $\hat{\jmath}$ é vetor unitário que dá sentido da orientação do eixo OY. Nesse sistema de coordenadas, as condições iniciais, posição e velocidade do corpo, podem ser expressas, respectivamente, como $\vec{r}_0 = h\hat{\jmath}$ e $\vec{v}_0 = 0\hat{\jmath}$, no instante de tempo $t_0 = 0$. Com essas condições, aplicando-se a 2ª. Lei de Newton, temos:

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{P} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Substituindo a expressão da força peso em termos das grandezas massa do corpo e aceleração da gravidade g, obtém-se:

$$-mg\hat{\jmath} = m\vec{a}. \qquad (2)$$

Ou seja, resultando na equação de movimento para o corpo em queda livre, que independe da massa do corpo:

$$\vec{a} = -g\hat{\jmath}. \qquad (3)$$

Sendo $\vec{a}$ a taxa de variação da velocidade no tempo ($\vec{a} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}$), então a equação (3) fica:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} = -g\hat{\jmath}. \qquad (3')$$

A equação (3´) trata-se de uma equação diferencial, cuja solução geral é:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = -gt\hat{\jmath} + \vec{v}_0 t. \qquad (4)$$

Como, por sua vez, a velocidade é a taxa de variação no tempo do vetor posição ($\vec{v} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$), que localiza o corpo em relação à origem do sistema de coordenadas adotado, a equação (4) fica:

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = -gt\hat{\jmath} + \vec{v}_0. \qquad (4')$$

A equação resultante (4´), por sua vez, possui a seguinte solução geral:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = -\frac{g}{2}t^2\hat{\jmath} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0\ . \qquad (5)$$

Finalmente, com as condições iniciais de estado de movimento do corpo, $\vec{r}_0 = h\hat{\jmath}$ e $\vec{v}_0 = 0\hat{\jmath}$, obtém-se o seguinte resultado, ao substituir esses dados na solução geral (5):

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = -\frac{g}{2}t^2\hat{\jmath} + h\hat{\jmath} = \left(h - \frac{g}{2}t^2\right)\hat{\jmath} \qquad (6)$$

Ou seja, eliminando-se a notação vetorial, ao considerar que o movimento se dá em uma dimensão (na direção vertical em relação à superfície), finalmente obtemos:

$$y(t) = \left(h - \frac{g}{2}t^2\right). \qquad (7)$$

Assim, vemos que o corpo em queda livre, sujeito à força peso, irá se deslocar, ocupando posições no espaço, proporcional ao quadrado do instante de tempo t medido a partir do instante inicial $t_0 = 0$.

Além disso, sua velocidade no instante de tempo t será dada por:

$$v(t) = -gt. \qquad (8)$$

Desse resultado, pode-se notar que a velocidade adquirida pelo corpo em queda livre é proporcional ao instante de tempo t medido a partir do instante inicial $t_0 = 0$.

As soluções finais (equações 7 e 8), que vão descrever as posições e velocidades do corpo para instantes quaisquer de tempo t podem ser representadas graficamente, cujos gráficos são, respectivamente, uma curva parabólica, com concavidade negativa, e uma reta com inclinação negativa.

Assim, no exemplo dado, a força atuante sobre o corpo de massa m tem uma lei matemática simples (a força peso é uma grandeza constante), tal que a equação de movimento (3), uma equação diferencial de segunda ordem (aquele que envolve a derivada segunda da função desconhecida $\vec{r}(t)$, e eventualmente a derivada primeira), possui uma solução analítica, isto é, é possível obter uma solução expressa algebricamente (equação 7) que satisfaz a equação de movimento (equação 3).

Pois bem, admitamos que não saibamos resolver a equação (3), isto é, não saibamos empregar técnicas de resolução de equações diferenciais para obter a solução analítica dessa equação. Nesse caso, ainda assim, podemos descrever o comportamento do corpo, isto é, determinar a posição e velocidade que o corpo terá num dado instante de tempo t, empregando técnicas numéricas. Porém, a solução do problema por esse caminho será tanto mais próxima dos valores dados de uma possível solução analítica, quanto menor for o parâmetro empregado pela técnica numérica, ou seja, o incremento ou passo Δt, e o controle da propagação de erros devido aos truncamentos de valores para serem utilizados nos passos seguintes dos cálculos numéricos.

Uma técnica numérica para obter uma solução para equações que não apresentam soluções analíticas consiste em, uma vez conhecida a equação de movimento e as condições iniciais do estado de movimento, $\vec{r}_0$ e $\vec{v}_0$ em t_0, calcular a nova posição e velocidade do corpo num instante de tempo posterior $t_0 + \Delta t$, $\overrightarrow{r_1}$ e $\overrightarrow{v_1}$, que são obtidos a partir das equações $\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t$ e $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{v}_1\Delta t$, respectivamente. Então, para um segundo tempo posterior $t_0 + 2\Delta t$, calcula-se os novos valores de posição e velocidade $\vec{r}_2$ e $\vec{v}_2$, a partir dos valores obtidos anteriormente $\vec{r}_1$ e $\vec{v}_2$, assim: $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{a}\Delta t$ e $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{v}_2\Delta t$. Esse procedimento é então repetido n vezes até o instante de tempo $t_f = t_0 + n\Delta t$, a partir das seguintes fórmulas com $n \geq 1$:

$$\vec{v}_{(n)} = \vec{v}_{(n-1)} + \vec{a}\Delta t \qquad (9)$$

e

$$\vec{r}_{(n)} = \vec{r}_{(n-1)} + \vec{v}_{(n)}\Delta t. \qquad (10)$$

Esse procedimento será válido para o caso em que a aceleração for constante dentro do intervalo de tempo considerado Δt. No caso da aceleração variar, para cada passo o valor da aceleração deverá ser recalculado, cujo valor deverá ser incluído nessas fórmulas (de modo geral, a aceleração pode depender da posição ocupada pelo corpo, da velocidade desse corpo, e do instante de tempo). O uso das equações (9) e (10) se dá na condição que, dentro de um intervalo de tempo Δt, a aceleração é constante.

Portanto, no caso da aceleração variar fortemente, é desejável escolher passos Δt cada vez menores para reduzir os erros. Mais à frente, será dado um exemplo, em que estrategicamente utiliza-se da aceleração média num intervalo Δt para minimizar esses erros, ao invés da aceleração "instantânea" num dado tempo t.

Assim, aplicando para o problema acima do corpo em queda livre, teremos os resultados apresentados na tabela 1. Para 20 passos, ou seja, usando intervalos 0,05s, temos a tabela 2.

Tabela 1 – cálculo numérico das posições e velocidades de um corpo em queda livre, a partir do repouso a uma altura inicial de 2,0m. Para esses cálculos, foram usados passos iguais de $\Delta t = 0{,}1s$, para o intervalo de 0 a 1,0s.

Passo n	$t_n = t_0 + n\Delta t$ (s)	a = - g (m/s²)	$v_{(n)} = v_{(n-1)} + a\Delta t$ (m/s)	$y_{(n)} = y_{(n-1)} + v_{(n)}\Delta t$ (m)
0	t0 = 0	a = -g = -10	v0 = 0	y0 = h = 2,0
1	t1 = 0,1	a = -g = -10	v1 = v0 + aΔt = 0-10x0,1 = -1,0	y1 = y0+v1Δt = 2,0-1,0x0,1 = 1,9
2	t2 = 0,2	a = -g = -10	v2 = v1 + aΔt = -1,0-10x0,1 = -2,0	y2 = y1+v2Δt = 1,9-2,0x0,1 = 1,7
3	t3 = 0,3	a = -g = -10	v3 = v2 + aΔt = -2,0-10x0,1 = -3,0	y3 = y2+v3Δt = 1,7-3,0x0,1 = 1,4
4	t4 = 0,4	a = -g = -10	v4 = v3 + aΔt = -3,0-10x0,1 = -4,0	y4 = y3+v4Δt = 1,4-4,0x0,1 = 1,0
5	t5 = 0,5	a = -g = -10	v5 = v4 + aΔt = -4,0-10x0,1 = -5,0	y5 = y4+v5Δt = 1,0-5,0x0,1 = 0,5
6	t6 = 0,6	a = -g = -10	v6 = v5 + aΔt = -5,0-10x0,1= -6,0	y6 = y5+v6Δt = 0,5-6,0x0,1 = -0,1
7	t7 = 0,7	a = -g = -10	v7 = v6 + aΔt = -6,0-10x0,1 = -7,0	y7 = y6+v7Δt = -0,1-7,0x0,1 = -0,8
8	t8 = 0,8	a = -g = -10	v8 = v7 + aΔt = -7,0-10x0,1 = -8,0	y8 = y7+v8Δt = -0,8-8,0x0,1 = -1,6
9	t9 = 0,9	a = -g = -10	v9 = v8 + aΔt = -8,0-10x0,1 =-9,0	y9 = y8+v9Δt = -1,6-9,0x0,1 = -2,5
10	t10 = 1,0	a = -g = -10	v10 = v9 + aΔt = -9,0-10x0,1 =-10	y10 = y9+v10Δt = -2,5-10,0x0,1 = -3,6

Tabela 2 – cálculo numérico das posições e velocidades de um corpo em queda livre, a partir do repouso a uma altura inicial de 2,0m. Para esses cálculos, foram usados passos iguais de $\Delta t = 0{,}05s$, para o intervalo de 0 a 1,0s.

Passo n	$t_n = t_0 + n\Delta t$ (s)	a = - g (m/s^2)	$v_{(n)} = v_{(n-1)} + a\Delta t$ (m/s)	$y_{(n)} = y_{(n-1)} + v_{(n)}\Delta t$ (m)
0	t0 = 0	a = -g = -10	v0 = 0	y0 = h = 2,0
1	t1= 0,05	a = -g = -10	v1 = v0 + aΔt = 0-10x0,05 = -0,5	y1 = y0+v1Δt = 2,0-0,5x0,05 = 1,975
2	t2 = 0,10	a = -g = -10	v2 = v1 + aΔt = -0,5-10x0,05 = -1,0	y2 = y1+v2Δt = 1,975-1,0x0,05 = 1,970
3	t3 = 0,15	a = -g = -10	v3 = v2 + aΔt = -1,0-10x0,05 = -1,5	y3 = y2+v3Δt = 1,970-1,5x0,05 = 1,895
4	t4 = 0,20	a = -g = -10	v4 = v3 + aΔt = -1,5-10x0,05 = -2,0	y4 = y3+v4Δt = 1,895-2,0x0,05 = 1,795
5	t5 = 0,25	a = -g = -10	v5 = v4 + aΔt = -2,0-10x0,05 = -2,5	y5 = y4+v5Δt = 1,795-2,5x0,05 = 1,670
6	t6 = 0,30	a = -g = -10	v6 = v5 + aΔt = -2,5-10x0,05 = -3,0	y6 = y5+v6Δt = 1,670-3,0x0,05 = 1,520
7	t7 = 0,35	a = -g = -10	v7 = v6 + aΔt = -6,0-10x0,1 = -3,5	y7 = y6+v7Δt = 1,520-3,5x0,05 = 1,345
8	t8 = 0,40	a = -g = -10	v8 = v7 + aΔt = -3,5-10x0,05 = -4,0	y8 = y7+v8Δt = 1,345-4,0x0,05 = 1,145
9	t9 = 0,45	a = -g = -10	v9 = v8 + aΔt = -4,0-10x0,05 = -4,5	y9 = y8+v9Δt = 1,145-4,5x0,05 = 0,920
10	t10 = 0,50	a = -g = -10	v10 = v9 + aΔt = -4,5-10x0,05 = -5,0	y10 = y9+v10Δt = 0,920-5,0x0,05 = 0,670
11	t11 = 0,55	a = -g = -10	v11 = v10 + aΔt = -5,0-10x0,05 = -5,5	y11 = y10+v11Δt = 0,670-5,5x0,05 = 0,395
12	t12 = 0,60	a = -g = -10	v12 = v11 + aΔt = -5,5-10x0,05 = -6,0	y12 = y11+v12Δt = 0,395-6,0x0,05 = 0,095
13	t13 = 0,65	a = -g = -10	v13 = v12 + aΔt = -6,0-10x0,05 = -6,5	y13 = y12+v13Δt = 0,095-6,5x0,05 = -0,230
14	t14 = 0,70	a = -g = -10	v14 = v13 + aΔt = -6,5-10x0,05 = -7,0	y14 = y13+v14Δt = -0,230-7,0x0,05 = -0,580
15	t15 = 0,75	a = -g = -10	v15 = v14 + aΔt = -7,0-10x0,05 = -7,5	y15 = y14+v15Δt = -0,580-7,5x0,05 = -0,995
16	t16 = 0,80	a = -g = -10	v16 = v15 + aΔt = -7,5-10x0,05 = -8,0	y16 = y15+v16Δt = -0,995-8,0x0,05 = -1,395
17	t17 = 0,85	a = -g = -10	v17 = v16 + aΔt = -8,0-10x0,05 = -8,5	y17 = y16+v17Δt = -1,395-8,5x0,05 = -1,820
18	t18 = 0,90	a = -g = -10	v18 = v17 + aΔt = -8,5-10x0,05 = -9,0	y18 = y17+v18Δt = -1,820-9,0x0,05 = -2,270
19	t19 = 0,95	a = -g = -10	v19= v18 + aΔt = -9,0-10x0,05 = -9,5	y19 = y18+v19Δt = -2,270-9,5x0,05 = -2,745
20	t20 = 1,00	a = -g = -10	v20= v19 + aΔt = -9,5-10x0,05 = -10	y20 = y19+v20Δt = -2,745-10,0x0,05 = -3,245

Os resultados mostrados nas tabelas 1 e 2 são comparados com os valores obtidos pela solução analítica (equação 7) dentro do mesmo intervalo de tempo (0, 1,0), conforme mostrados na figura 1.

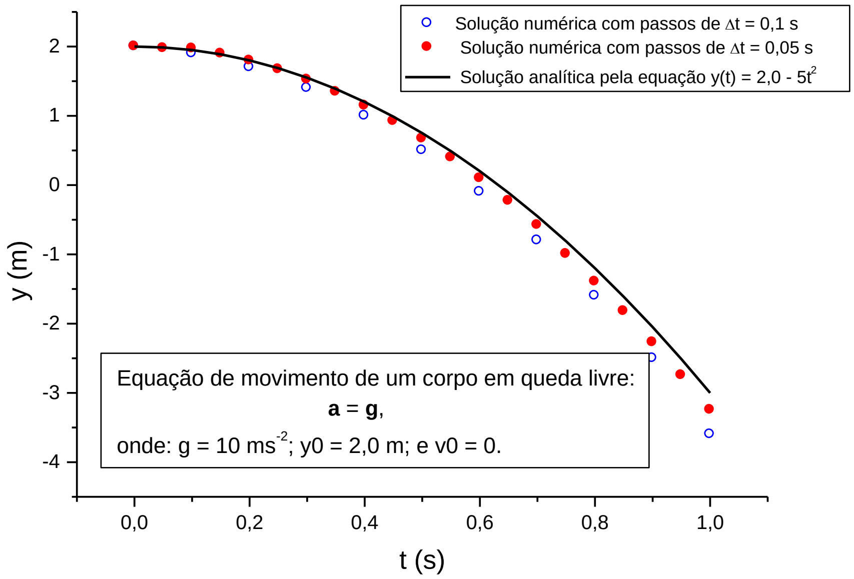

Figura 1 – Posições de um corpo em queda livre, a partir das condições iniciais (altura de 2,0m e velocidade nula), e sujeita à equação de movimento (3), determinada pela solução equação analítica (7) – linha cheia; e obtidas pelo método numérico, conforme descrito no texto, para passos de 0,1s (pontos cheios) e para passos de 0,05s (pontos vazios).

Pois bem, no exemplo dado acima, a aceleração adquirida pelo corpo é constante, ou seja, cujo movimento é denominado de Movimento Uniformemente Variado. Percebe que os valores das soluções numéricas tendem a se tornarem significativamente diferentes da solução analítica para tempos crescentes, por causa da propagação de erros; e que para o passo menor essas diferenças são menores do que para o passo maior de tempo usado na interação numérica.

Agora, vamos a um exemplo em que a aceleração não é constante para ilustrar como obter as soluções pelo método numérico. Suponha que o mesmo corpo do exemplo anterior esteja preso por uma das extremidades de um fio, enquanto a outra extremidade desse fio está presa num teto. O corpo então é solto de uma altura na condição que o fio está totalmente relaxado, ou seja, sem estar tensionado pelo corpo. À medida que o corpo cai, o fio vai se tornando mais tensionado, tal que a força de tensão atuante no corpo varia, por exemplo, com o cubo da formação provocada no fio.

Para obter a equação de movimento nesse caso, vamos considerar um sistema de coordenadas cartesiano, com o eixo vertical OY orientado para cima, e que no instante de soltura do corpo, esse encontra-se na origem do sistema. Assim, podemos escrever as duas forças atuantes no corpo: a força peso ($\vec{P} = m\vec{g}$); e a tensão do fio ($\vec{T} = -Cy^3\hat{\jmath}$), onde C é uma constante que poderá depender das características específicas do fio (diâmetro, densidade de massa etc.).

De acordo com aplicação da 2ª. Lei de Newton, a equação de movimento do corpo é nesse sistema de coordenadas:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}; \qquad (11)$$

$$-mg\hat{j} - Cy^3\hat{j} \ = ma\hat{j}. \qquad (11')$$

Eliminando a notação vetorial, pois o movimento ficará restrito a uma dimensão (novamente a direção vertical), temos:

$$a = -g - \frac{C}{m}y^3 \qquad (12)$$

Assim, vemos que a aceleração adquirida pelo corpo depende da posição ocupada pelo corpo, resultando num movimento não uniformemente variado, ou seja, naquele em que a aceleração do corpo varia, no caso presente, com a posição ocupada pelo corpo.

A equação (12) pode ser reescrita em termos das variáveis posição (y) ao longo do eixo OY, e do tempo t, e sabendo que $a = \frac{d^2y}{dt^2}$, conforme se segue:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{C}{m}y^3. \qquad (13)$$

A solução analítica dessa equação, se existir, requer um esforço metodológico superior ao foi empregado para obter a solução analítica da equação (7). Assim, nesse caso, uma solução numérica poderá ser mais adequada para tratar o problema.

Nesse caso, aplicamos o método de Euler, ressalvando agora que, durante os cálculos da posição e velocidade do corpo, após um intervalo de tempo, a aceleração não é constante, portanto, devendo-se a cada uso das equações (9) e (10) calcular a aceleração para o passo de tempo, usando a equação (13), assim:

Para um cálculo mais preciso, considera-se a aceleração média, definida como:

$$a_n = \ -g - \frac{C}{m}{y_n}^3 \qquad (14)$$

Nas tabelas 3 e 4, apresentam-se os resultados numéricos desse problema para duas escolhas de passos Δt = 0,1s e 0,05s, no intervalo de 0 a 0,50s.

Tabela 3 – cálculo numérico das posições e velocidades de um corpo em queda livre, a partir do repouso a uma altura inicial de 0,0m. Para esses cálculos, foram usados passos iguais de Δt = 0,1s, C = 50kg/(m^{2}s^2) e massa = 1,0kg, g = 10,0m/s^2.

Passo n	$t_n = t_0 + n\Delta t$ (s)	$v_{(n)} = v_{(n-1)} + a_{(n-1)}\Delta t$ (m/s)	$\mathbf{y}_{(n)} = y_{(n-1)} + v_{(n)}\Delta t$ (m)	$a_{(n)} = -10{,}0 - 50y^3(n)$ (m/s^2)
0	**t**0 = 0	**v**0 = 0	**y**0 = 0,0	a0 = -10,0
1	**t**1 = 0,1	**v**1 = v0 + a0Δt = 0-10,0x0,1 = -1,0	**y**1 = **y**0+**v**1Δt = y1 =0,0-1,0x0,1 = -0,10	a1 = -10,0-5(-0,10)^3 = -9,995
2	**t**2 = 0,2	**v**2 = v1 + a1Δt = -1,0-9,995x0,1 = -1,9995	**y**2 = **y**1+**v**2Δt =-0,10-1,9995x0,1 = -0,29995	a2 = -10,0-5(-0,29995)^3 = -9,865
3	**t3** = 0,3	**v**3 = v2 + a2Δt = -1,9995-9,865x0,1 = -2,986	**y**3 = **y**2+**v**3Δt = -0,29995-2,986x0,1 = -0,59855	a3 = -10,0-5(-0,59855)^3 = -8,928
4	**t**4 = 0,4	**v**4 = v3 + a3Δt = -2,986-8,928x0,1 = -3,8788	**y**4 = **y**3+**v**4Δt = -0,59855-3,8788x0,1 = -0,98643	a4 = -10,0-5(-0,98643)^3 = -5,201
5	**t**5 = 0,5	**v**5 = v4 + a4Δt = -3,8788-5,201x0,1 =-4,3989	**y**5 = **y**4+**v**5Δt = -0,98643-4,3989x0,1 = -1,42632	a5 = -10,0-5(-1,42632)^3 = +4,508

Tabela 4 – cálculo numérico das posições e velocidades de um corpo em queda livre, a partir do repouso a uma altura inicial de 0. Para esses cálculos, foram usados passos iguais de Δt = 0,05s, C = 50kg/(m^{2}s^2) e massa = 1,0kg, g = 10,0m/s^2.

Passo n	$t_n = t_0 + n\Delta t$ (s)	$a_{(n)} = -10,0 + 50y^3(n)$ (m/s^2)	$a_m = (a_{(n)} + a_{(n-1)})/2$	$v_{(n)} = v_{(n-1)} + a_m\Delta t$ (m/s)	$\mathbf{y}_{(n)} = y_{(n-1)} + v_{(n)}\Delta t$ (m)
0	**t**0 = 0	a0 = -10,0		**v**0 = 0	**y**0 = 0,0
1	**t**1 = 0,05	a1 = -10,0-50x0^3 = -10,0	(-10,0-10,0)/2 = -10,0	**v**1 = v0 + aΔt = 0-10,0x0,05 = -0,50	**y**1 = **y**0+**v**1Δt = y1 = 0,0-0,0x0,05 = 0,0
2	**t**2 = 0,10	a2 = -10,0-50(0)^3 = -10,0	(-10,0-10,0)/2 = -10,0	**v**2 = v1 + aΔt = -0,50-10,0x0,05 = -1,00	**y**2 = **y**1+**v**2Δt = 0,0-0,50x0,05 = -0,025
3	**t3** = 0,15	a3 = -10,0-50(-0,025)^3 = -9,999	(-9,999-10,0)/2 = -10,0	**v**3 = v2 + aΔt = -1,00-10,0x0,05 = -1,50	**y**3 = **y**2+**v**3Δt = -0,025-1,00x0,05 = -0,03
4	**t**4 = 0,20	a4 =-10,0-50(-0,03)^3 = -9,99	(-9,99-10,0)/2 = -10,0	**v**4 = v3 + aΔt = -1,50-10,0x0,05 = -2,00	**y**4 = **y**3+**v**4Δt = -0,03-1,50x0,05 = -0,105
5	**t**5 = 0,25	a5 = -10,0-50(-0,105)^3= -9,94	(-9,94-10,0)/2 = -9,97	**v**5 = v4 + aΔt = -2,00-9,97x0,05 =-2,50	**y**5 = **y**4+**v5**Δt = -0,105-2,00x0,05 = -0,205
6	**t6** = 0,30	a6 = -10,0-50(-0,205)^3 = -9,57	(-9,57-9,94)/2 = -9,76	**v**6 = v5 + aΔt = -2,50-9,76x0,05 = -2,99	**y**6 = **y**5+**v**6Δt = -0,205-2,50x0,05 = -0,33
7	**t**7 = 0,35	a7 = -10,0-50(-0,33)^3 = -8,20	(-8,20-9,57)/2 = -8,89	**v**7 = v6 + aΔt = -2,99-8,89x0,05 = -3,43	**y**7 = **y**6+**v**7Δt = -0,33-2,99x0,05 = -0,48
8	**t**8 = 0,40	a8 = -10,0-50(-0,48)^3 = -4,47	(-4,47-8,20)/2 =-6,34	**v**8 = v7 + aΔt = -3,43-6,34x0,05 = -3,75	**y**8 = **y**7+**v**8Δ t= -0,48-3,43x0,05 = -0,652
9	**t**9 = 0,45	a9 = -10,0-50(-0,652)^3 = +3,86	(3,86-4,47)/2 = -0,31	**v**9 = v8 + aΔt = -3,75-0,31x0,05 = -3,77	**y**9 = **y**8+**v**9Δt = -0,652-3,75x0,05 = -0,840
10	**t**10 = 0,50	a10 = -10,0-50(-0,84)^3 = +19,64	(19,64+3,86)/2 = +11,75	**v**10 = v9 + aΔt = -3,77+11,75x0,05 = -3,18	**y**10 = **y**9+**v**10Δt = -0,840-3,77x0,05 = -1,03

Os resultados mostrados nas tabelas 3 e 4 são apresentados na forma gráfica (figura 2), de onde se pode observar que os dados entre os dois passos tendem a se diferirem, significativamente, a partir do instante de tempo t = 0,6s.

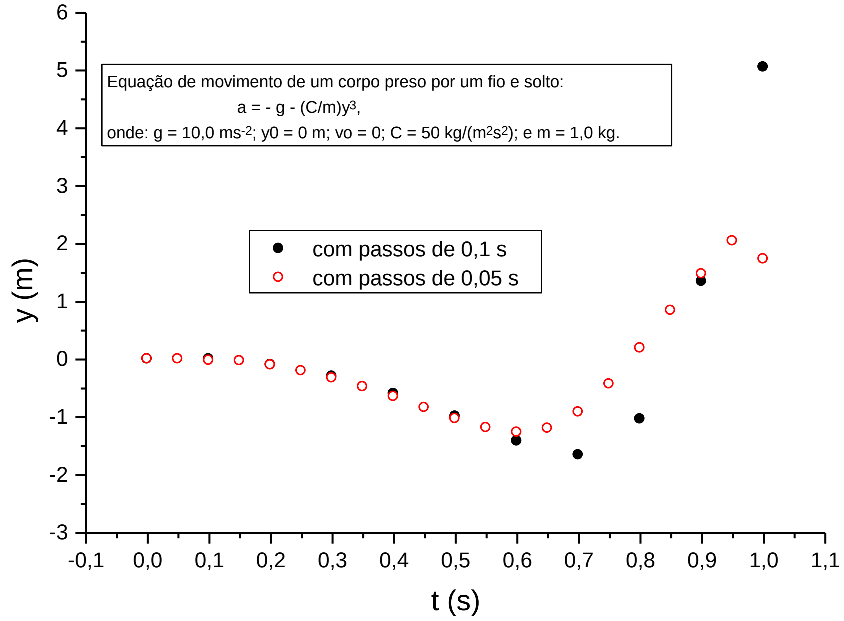

Figura 2 – Posições de um corpo amarrado num fio e solto, a partir das condições iniciais (altura nula, velocidade nula, fio não tensionado), e sujeita à equação de movimento (13), obtidas pelo método numérico, conforme descrito no texto, para passos de 0,1s (pontos cheios) e para passos de 0,05s (pontos vazios).

Como base na introdução, resolver o seguinte problema (pelo método numérico de Euler):

Um canhão dispara balas de massa m = 1,00kg com velocidade v_0 = 10,0m/s, fazendo um ângulo com um plano horizontal de 45^0. Nessas condições, e **considerando que o meio não oferece resistência ao movimento das balas**, a trajetória descrita pelas balas é uma parábola, e o alcance das balas, definido como a distância entre o ponto de lançamento e o ponto da trajetória que forma uma linha horizontal, é dado por:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \mathrm{sen}(2\theta) = \frac{10{,}0^2}{10{,}0} \mathrm{sen}(2x45^0) = 10{,}0\mathrm{m} ,$$

Em que se adotou g = 10,0m/s^2.

Por outro lado, considerando que o meio oferece resistência ao movimento, atuando sobre o corpo com a seguinte lei de força de arraste:

$$\overrightarrow{F_r} = -A\vec{v} ,$$

Então:

a) obtenha as coordenadas das balas, isto é, os pontos da trajetória das balas no espaço bidimensional, a partir do método numérico de Euler, no intervalo de tempo (0, 1,00)s. Para isso, adota passos de intervalos de tempo de Δt = 0,10s, e considera A = 0,1Ns/m (**obs**.: note que, pelo fato do corpo possuir duas velocidades (uma horizontal e outra vertical), a força de arraste atuará sobre o corpo impedindo-se de se mover ao longo dessas duas direções);
b) obtenha o alcance das balas no presente caso de haver forças de arraste atuando sobre elas;
c) apresente os resultados num gráfico, colocando também no gráfico a trajetória das balas para o caso do movimento ser parabólico, ou seja, de ser um movimento uniformemente variado.
d) Repita todo o procedimento para um passo menor de tempo, ou seja, para Δt = 0,01s. Nesse caso, qual foi a diferença percentual do alcance em relação àquele obtido no item b?