

Apuntes de Lógica Digital

Daniel Araya Román

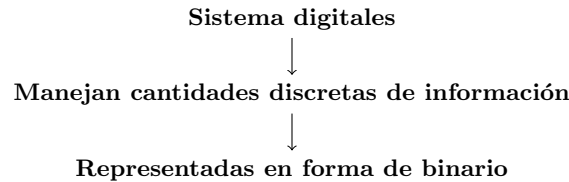
2023-05-08

1. Sistemas Binarios

1.1 Sistemas Digitales

En los sistemas digitales electrónicos actuales, las señales emplean sólo dos valores discretos \rightarrow *binarios*. Un dígito binario, llamado **bit**, que puede tomar los valores 0 y 1. Un sistema digital es una interconexión de módulos digitales. Para entender como funciona cada módulo digital, se necesitan conocimientos básicos de circuitos digitales y de su función lógica.

Un lenguaje importante para el diseño digital es el (**HDL, Hardware Description Language**). Sirve para simular sistemas digitales y verificar su funcionamiento antes de crearlos en hardware.



1.2 Números Binarios

El número decimal 7392, contiene potencias de 10 que están implícitas en la posición de los coeficientes, e.g:

$$7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

Un número con punto decimal se representa con una serie de coeficientes, así:

$$a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0 \cdot a_{-1} a_{-2} a_{-3}$$

los coeficientes a_j son cualesquiera de los 10 dígitos (0...9); el valor del subíndice j indica la posición, y la potencia de 10 que se deberá multiplicar ese coeficiente. De modo que:

$$10^5 a_5 + 10^4 a_4 + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 + 10^{-1} a_{-1} + 10^{-2} a_{-2} + 10^{-3} a_{-3}$$

El sistema binario es distinto al decimal, sus coeficientes solo pueden tener 2 valores, 0 o 1. Cada coeficiente a_j se multiplica por 2^j . 11010.11 es 26.75 en decimal, porque:

$$1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 26.75$$

En general, un número expresado en un sistema de base r consiste en coeficientes que se multiplican por potencias de r :

$$a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} + \dots + a_2 \cdot r^2 + a_1 \cdot r + a_0 + a_{-1} \cdot r^{-1} + a_{-2} \cdot r^{-2} + \dots + a_{-m} \cdot r^{-m}$$

1.4 Números Octales y Hexadecimales

Las conversiones entre binario, octal y hexadecimal son importantes en las computadoras digitales. Puesto que $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$, cada dígito octal corresponde a **tres** dígitos binarios, y cada dígito hexadecimal corresponde a **cuatro** dígitos binarios.

Binario \rightarrow octal: agrupando los dígitos binarios de 3 en 3, de derecha a izquierda, y reemplazando cada grupo por su equivalente octal.

$$(10\ 110\ 001\ 101\ 011 \cdot 111\ 100\ 000\ 110)_2 = (26153.7406)_8$$

Binario \rightarrow hexadecimal: agrupando los dígitos binarios de 4 en 4, de derecha a izquierda, y reemplazando cada grupo por su equivalente hexadecimal.

$$(10\ 1100\ 0110\ 1011 \cdot 1111\ 0010)_2 = (2C6B.F2)_{16}$$

Cuando se habla de binario es más deseable expresarlo en términos de números octales o hexadecimales, porque son más compactos y fáciles de leer. Así $(111\ 111\ 111\ 111)_2$ este número en binario de 12 bits, se puede escribir como $(7777)_8$ en octal o $(FFF)_{16}$ en hexadecimal.

Decimal (base 10)	Binary (base 2)	Octal (base 8)	Hexadecimal (base 16)
0	0000	00	0
1	0001	01	1
2	0010	02	2
3	0011	03	3
4	0100	04	4
5	0101	05	5
6	0110	06	6
7	0111	07	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Table 1: Numbers in different bases

1.5 Complementos

En las computadoras digitales se usan complementos para simplificar la operación de resta y para efectuar manipulaciones lógicas. Existen dos tipos de complementos para cada sistema de base r : el *complemento a la base* y el *complemento a la base disminuida*. El primero se denomina complemento a r , mientras que el segundo es el complemento a $(r - 1)$. Si se sustituye el valor de la base r en los nombres obtenemos que los dos tipos son el complemento a 2 y el complemento a 1.

1.5.1 Complemento a la base

El complemento a r de un número N de n dígitos en base r se define como:

$$r^n - N, \text{ para } N \neq 0, \text{ y } 0 \text{ para } N = 0.$$

Por ejemplo, el complemento a 10 de 1234 es $10^4 - 1234 = 8766$. De forma similar, el complemento a dos se forma dejando como están todos los ceros menos significativos y el primer uno, y sustituyendo los unos por ceros y los ceros por unos en las demás posiciones a la izquierda.

El complemento a dos de 1101100 es 0010100.

El complemento a dos de 0110111 es 1001001.

1.5.2 Complemento a la base disminuida

De igual manera, dado un número N en base r que tiene n dígitos, el complemento a $(r - 1)$ de N se define como:

$$(r^n - 1) - N.$$

Con números decimales, $r = 10$ y $r - 1 = 9$, así el complemento a nueve de N es $(10^n - 1) - N$. El 10^n representado por n nueves. Por ejemplo, si $n = 4$, tenemos $10^4 = 10,000$ y $10^4 - 1 = 9999$. El complemento a nueve se consigue restando cada dígito a nueve. *e.g.*:

Complemento a nueve de 546700 es $999999 - 546700 = 453299$.

Complemento a nueve de 012398 es $999999 - 012398 = 987601$.

Ahora con números binarios, $r = 2$ y $r - 1 = 1$, así el complemento a uno de N es $(2^n - 1) - N$. En este caso 2^n se representa con un número binario que consiste en un uno seguido de n ceros.

$$n = 4, \quad 2^4 = 10000_2$$

Por otro lado $2^n - 1$ es un número binario representado por n unos.

$$n = 4, \quad 2^4 - 1 = 1111_2$$

El complemento a uno se consigue invirtiendo cada dígito. El restar dígitos binarios a uno podemos tener $1 - 1 = 0$ y $1 - 0 = 1$. Cambiando el bit de 0 a 1 o de 1 a 0. *e.g.*:

Complemento a uno de 101101 es $111111 - 101101 = 010010$.

Complemento a uno de 011010 es $111111 - 011010 = 100101$.

El complemento a $(r - 1)$ de los números octales y hexadecimales se obtiene restando cada dígito a 7 y F, respectivamente.

1.5.3 Resta con complementos

La resta de dos números de n dígitos sin signo, $M - N$, en base r se realiza así:

1. $M + (r^n - N) = M - N + r^n$
2. Si $M \geq N$, la suma produce acarreo final. Quedando $M - N$.
3. Si $M < N$, la suma no produce acarreo final. Quedando $r^n - (N - M)$.

1.6 Números binarios con signo