PROBABILIDADE E DISTÂNCIA

Prof. André Backes | @progdescomplicada

Variável aleatória

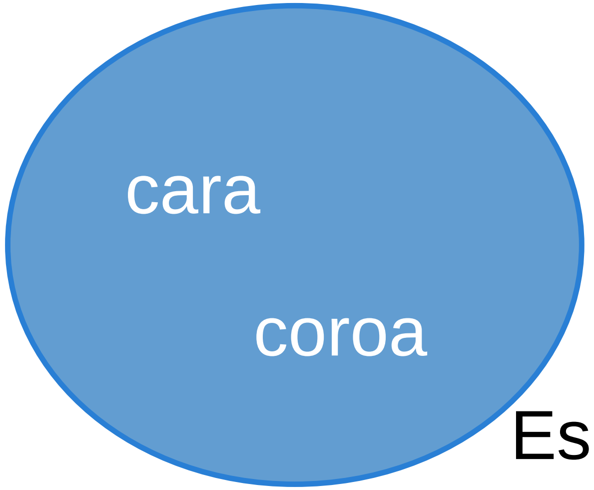
- Em Estatística, é muito comum ver o termo **variável aleatória**.
- Mas qual o seu significado?
  - Existem várias definições para o termo variável aleatória, todas equivalentes:
- **Definição 1**:
  - Uma variável aleatória ***X*** é um tipo de variável que pode assumir diferentes valores numéricos, definidos para cada evento de um espaço amostral
  - Confuso?

Variável aleatória

- Simplificando...
  - Uma variável aleatória pode ser entendida como uma variável quantitativa
  - Seu resultado (ou valor) depende de fatores aleatórios
    - Exemplo: lançamento de um dado ou moeda
- E o espaço amostral? O que é?
  - Conjunto de todos os resultados possíveis para uma variável aleatória

Variável aleatória

- Exemplo: lançamento de uma moeda
  - Espaço amostral: **cara** e **coroa;**
  - Variável aleatória: resultado obtido no lançamento de uma moeda (**cara** ou **coroa**)



Espaço amostral

Variável aleatória

- De modo geral, uma variável aleatória pode ser de classificada em dois tipos básicos
  - Variável aleatória discreta
  - Variável aleatória contínua

Variável aleatória

- Variável aleatória discreta
  - Trata-se da variável cujos valores podem ser contados ou listados
    - Valor de um dado: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
    - Lançamento de uma moeda: cara ou coroa

Variável aleatória

- Variável aleatória discreta
  - Os valores desse tipo de variável pertencem a um conjunto finito ou infinito (desde que numerável)
  - Conjunto finito
    - Valor de um dado: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
  - Conjunto infinito numerável
    - Número de pessoas de numa fila: {0, 1, 2, 3, 4, ... ∞}.
      - Conjunto dos inteiros!

Variável aleatória

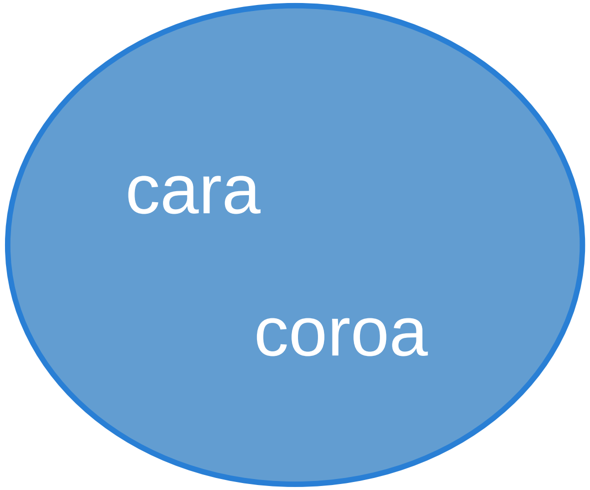
- Variável aleatória contínua
  - Trata-se da variável que pode assumir qualquer valor em um determinado intervalo ou coleção de intervalos
  - Todos os seus valores possíveis não podem ser listados como no caso das variáveis discretas

Variável aleatória

- Variável aleatória contínua
  - Trata-se de uma variável que assume valores dentro de intervalos de números reais
    - Peso das pessoas em uma sala
    - Altura das pessoas em uma sala
    - Distância entre cidades
    - etc

Variável aleatória

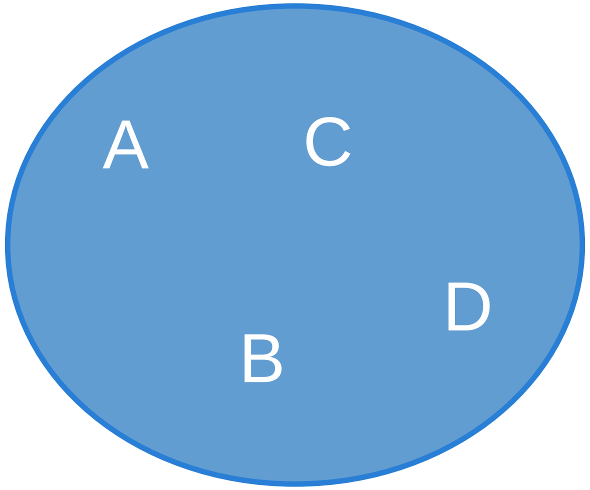
- Voltando ao exemplo do lançamento de uma moeda.
- Probabilidades são calculadas a partir da realizações da variável aleatória **X**
  - P(X = cara) = 0,5 = 50%
  - P(X = coroa) = 0,5 = 50%



Espaço amostral

Variável aleatória

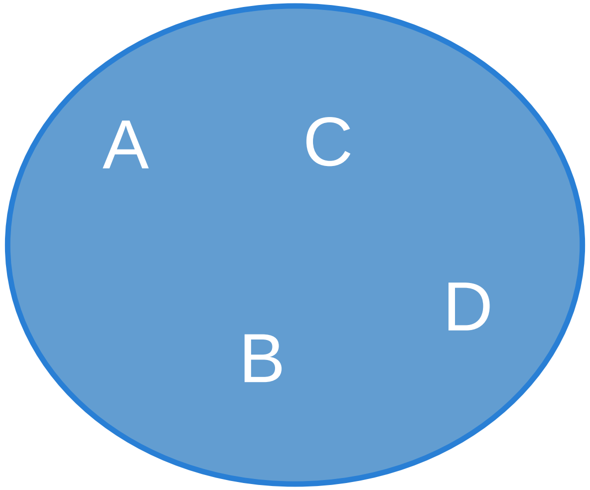
- Exemplo: lançamento de duas moedas
  - Espaço amostral
    - A: cara-cara
    - B: cara-coroa
    - C: coroa-cara
    - D: coroa-coroa



Espaço amostral

Variável aleatória

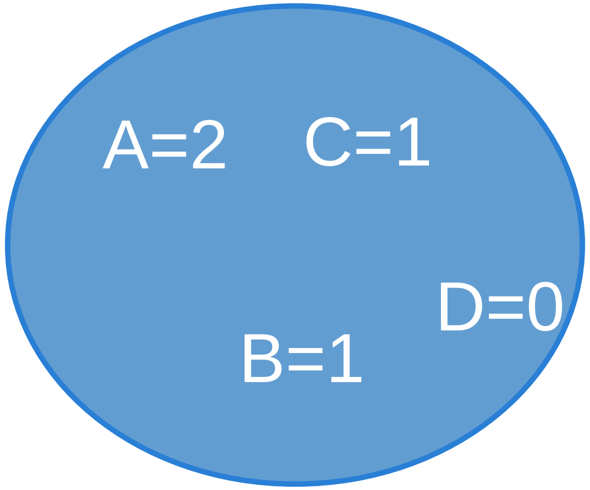
- Probabilidades são calculadas a partir da realizações da variável aleatória **X**
  - P(X = A) = 0,25 = 25%
  - P(X = B) = 0,25 = 25%
  - P(X = C) = 0,25 = 25%
  - P(X = D) = 0,25 = 25%



Espaço amostral

Variável aleatória

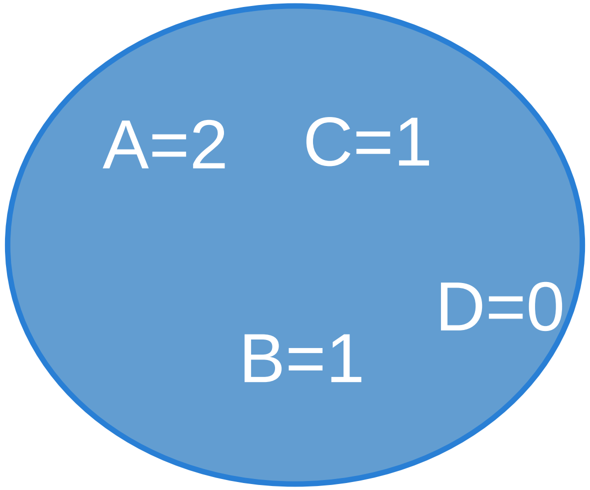
- E se considerássemos o evento “número de caras”?
  - Espaço amostral
    - A: cara-cara = 2
    - B: cara-coroa = 1
    - C: coroa-cara = 1
    - D: coroa-coroa = 0



Espaço amostral

Variável aleatória

- Probabilidades são calculadas a partir da realizações da variável aleatória **X**
  - P(X = 2) = 0,25 = 25%
  - P(X = 1) = 0,50 = 50%
  - P(X = 0) = 0,25 = 25%



Espaço amostral

Probabilidade

- É uma medida ou estimativa de quão provável é de que algo vai acontecer ou de que uma declaração é verdadeira
  - Se eu jogar uma moeda, qual a probabilidade do valor ser “cara”?
  - Se eu jogar um dado, qual a probabilidade do valor ser “2”?

Probabilidade

- Lei de Laplace
  - A probabilidade de um acontecimento associado a uma certa experiência aleatória é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis

Probabilidade

- A probabilidades é sempre representada por um valor entre 0 e 1
  - 0: 0% de possibilidade ou “não acontecerá”
  - 1: 100% de possibilidade ou “acontecerá”
- Quanto maior a probabilidade, mais provável será de acontecer
  - Ou, maior é o número de vezes que se espera que esse evento aconteça ao longo do tempo

Evento

- É o conjunto de resultados possíveis associado a um experimento ε e relativo a um determinado espaço amostral
  - Esse conjunto de resultados é um subconjunto do espaço amostral
  - A esse conjunto de resultados é associado um valor de probabilidade

Evento

- Exemplo: lançamento de dois dados
  - Espaço amostral S: todos os resultados possíveis
    - S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), ..., (6,6)}

  - Evento A: a soma dos dados ser igual a 7
    - A = {(1,6), (2,5), (3, 4), (4,3), (5,2), (6,1)}

  - O evento A é um subconjunto do espaço amostral S
    - $A \subset S$

Evento

- A cada evento A, associa-se um número real representado por **P(A)**.
- Está é a probabilidade de A ocorrer no espaço amostral S, e ela deve respeitar as seguintes propriedades
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(S) = 1$

Combinação de Eventos

- Em probabilidade condicional, podemos estudar simultaneamente dois eventos
- Nessa situação, existem duas possibilidades quanto à relação entre as suas probabilidades
  - Elas serem **eventos independentes**
  - Elas serem **eventos dependentes**

Combinação de Eventos

- Eventos independentes
  - Dados dois eventos A e B, temos que a ocorrência do evento A em nada interfere na probabilidade de ocorrência do evento B
  - Nesse caso, a probabilidade de que ambos aconteçam ao mesmo tempo é igual ao produto de suas probabilidades
    - $P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

Combinação de Eventos

- Exemplo de evento independente
  - A probabilidade de em uma família nascer um menino e ele ter olhos azuis
    - Nesse caso, a probabilidade do sexo da criança em nada interfere na probabilidade dela vir a ter olhos azuis
  - O lançamento de duas moedas

Combinação de Eventos

- Eventos dependentes
  - Dados dois eventos A e B, temos que a ocorrência do evento A exerce influência na probabilidade de ocorrência do outro evento, B

Combinação de Eventos

- Exemplo de evento dependente
  - A probabilidade de em uma família nascer um menino e ele ser daltônico
  - O gene do daltonismo na espécie humana está ligado ao sexo.
  - Ele é provocado por genes recessivos localizados no cromossomo X (sem alelos no Y).
  - Assim, o problema ocorre muito mais frequentemente nos homens que nas mulheres

Combinação de Eventos

- Eventos dependentes
  - Nesse caso, a probabilidade de ambos ocorrerem **ao mesmo tempo** assume um valor diferente dependendo da natureza da relação
  - Dados dois eventos A e B, a **probabilidade condicional de A dado B** é definida como o quociente entre a probabilidade conjunta de A e B, e a probabilidade de B:
    - $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
    - $P(B) > 0$

Combinação de Eventos

- Problema de Monty Hall
  - No Brasil, a porta dos desesperados (Sérgio Mallandro)
- Regras
  - O concorrente deve escolher uma de 3 portas para ganhar o prêmio
  - Uma das portas vazias é revelada
  - O concorrente pode escolher mudar de porta

Combinação de Eventos

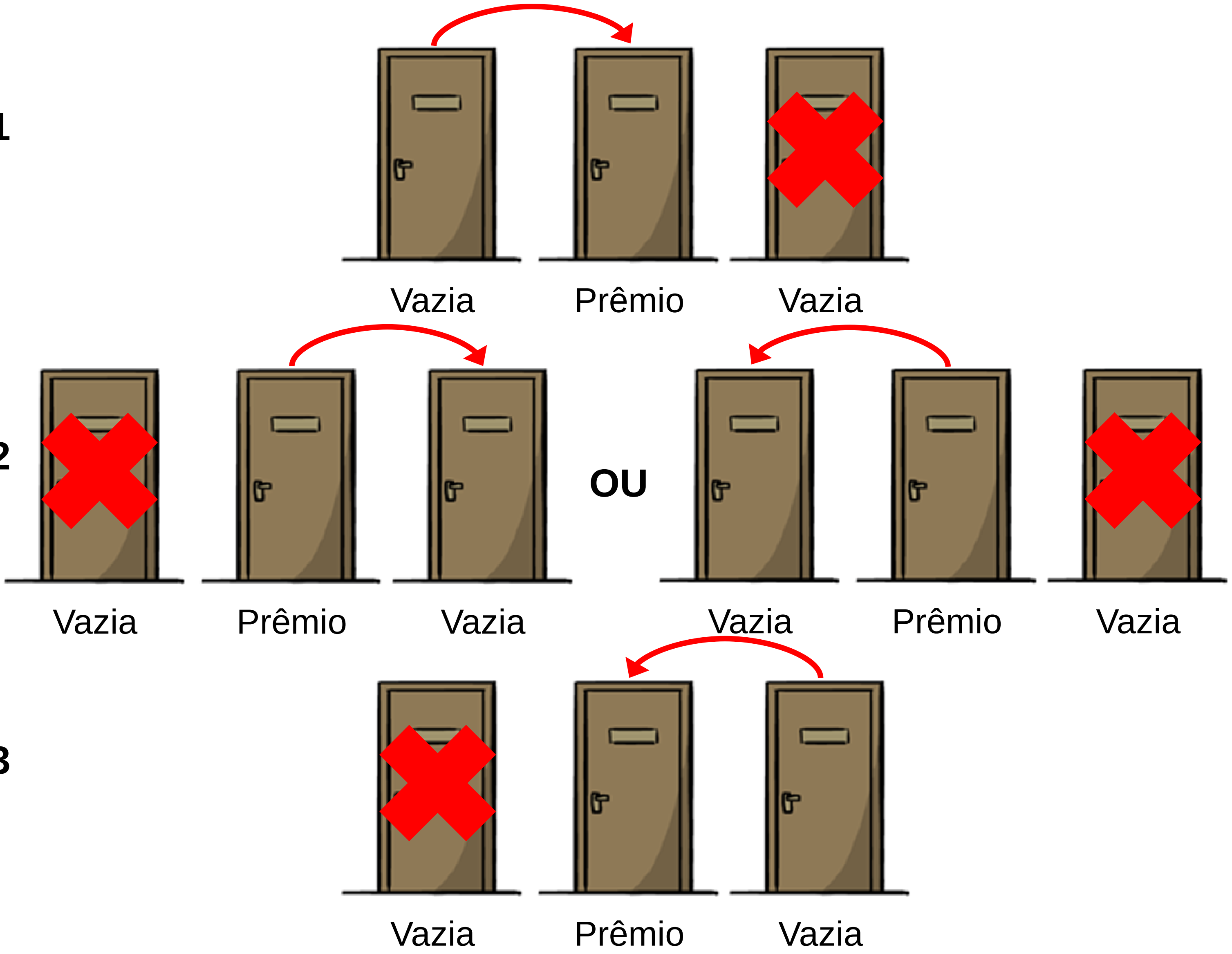
- Diante disso, devemos trocar de porta?
- Resposta intuitiva
  - Não. Com somente 2 portas, a probabilidade é de 50% para cada
  - Verdadeiro se fossem eventos independentes
    - A escolha do concorrente e a porta revelada são eventos que dependem um do outro

Combinação de Eventos

Escolhe: **porta 1**
Trocar: **ganha**

Escolhe: **porta 2**
Trocar: **perde**

Escolhe: **porta 3**
Trocar: **ganha**



Combinação de Eventos

- Diante disso, devemos trocar de porta?
  - Sim.
  - Probabilidade de ganhar usando a porta inicial: 1/3
  - Probabilidade de ganhar ao trocar de porta: 2/3
    - Ver simulação

Combinação de Eventos

- Exemplo: cálculo da probabilidade condicional de um evento dependente
  - 250 alunos estão matriculados numa universidade
    - 100 homens e 150 mulheres
    - 110 no BCC e 140 no BSI

Sexo\Curso	BCC	BSI	Total
H	40	60	100
M	70	80	150
Total	110	140	250

Combinação de Eventos

- Exemplo: cálculo da probabilidade condicional de um evento dependente
  - Num sorteio, qual a probabilidade de sair alguém do BSI dado que o sorteada uma mulher?

- $P(BSI|M) = \frac{P(BSI \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{80}{250}}{\frac{150}{250}} = \frac{80}{150}\ 0,53 = 53\%$

Combinação de Eventos

- Por fim, temos também o complemento de uma probabilidade
  - $P(A^C) = 1 - P(A)$
- A probabilidade complementar de um evento A é a probabilidade de A não ocorrer
  - Ao lançarmos um dado, a probabilidade de sair um 6 será: P(6) = 1/6
  - A probabilidade de sair qualquer outro número será: $P(6^C) = 1 – 1/6 = 5/6$

Teorema de Bayes

- O Teorema de Bayes relaciona as probabilidades de *A* e *B* com suas respectivas probabilidades condicionadas

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}, para\ P(B) > 0$$

- Onde
  - *P(A)* e *P(B)*: probabilidades a **priori** de *A* e *B*
  - *P(B|A)* e *P(A|B)*: probabilidades a **posteriori** de *B* condicional a *A* e de *A* condicional a *B* respectivamente.

Teorema de Bayes

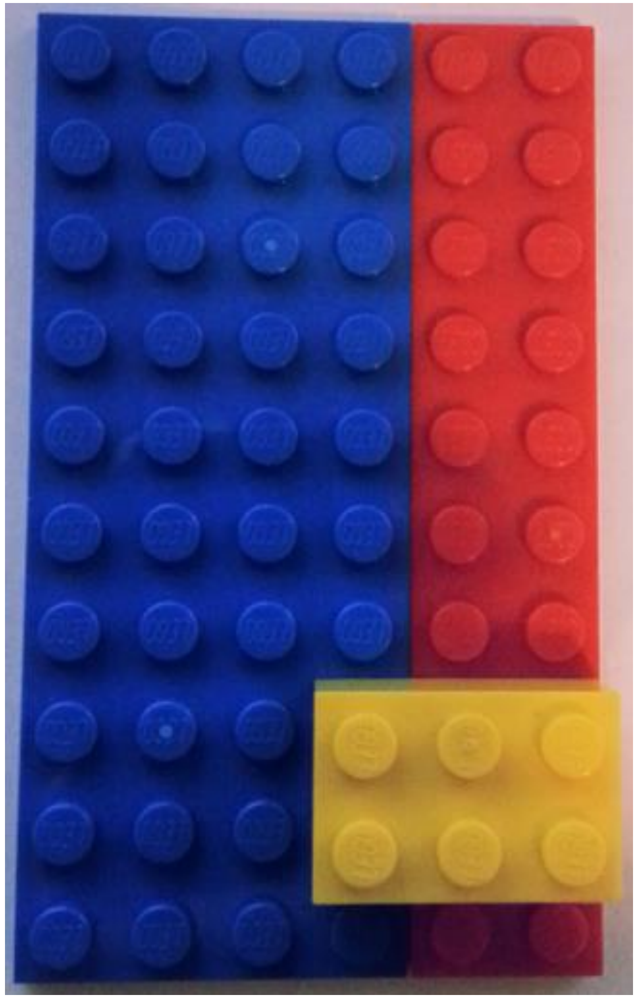
- O Teorema de Bayes nos permite calcular a probabilidade a posteriori para um determinado padrão pertencente a uma determinada classe
  - Em resumo

$$Prob\ Posteriori = \frac{Prob\ Priori\ * Distrib\ Prob}{Evidencia}$$

Teorema de Bayes

- Exemplo
  - Considere o conjunto de peças de Lego ao lado
  - Perceba que o Lego Amarelo sempre esconde uma das cores: vermelho ou azul
  - Qual a probabilidade de sair a cor vermelha dado selecionamos um ponto amarelo?

$$P(vermelho|amarelo) = ?$$



Teorema de Bayes

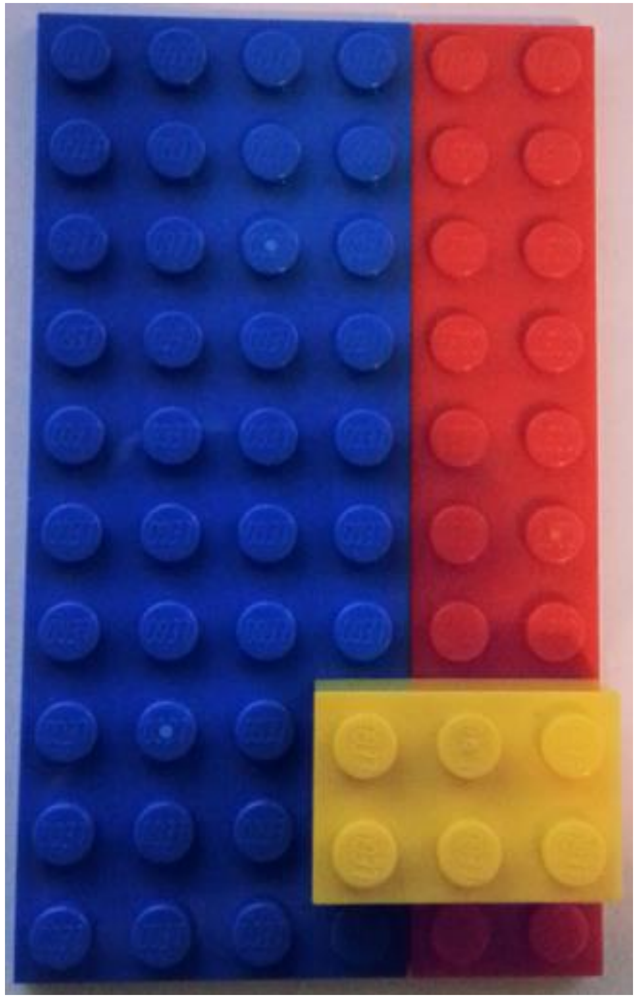
- Temos 60 pontos: calcular probabilidades
  - Probabilidade vermelho

$$P(vermelho) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$$

  - Probabilidade azul

$$P(azul) = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

  - Soma das probabilidades dá 1

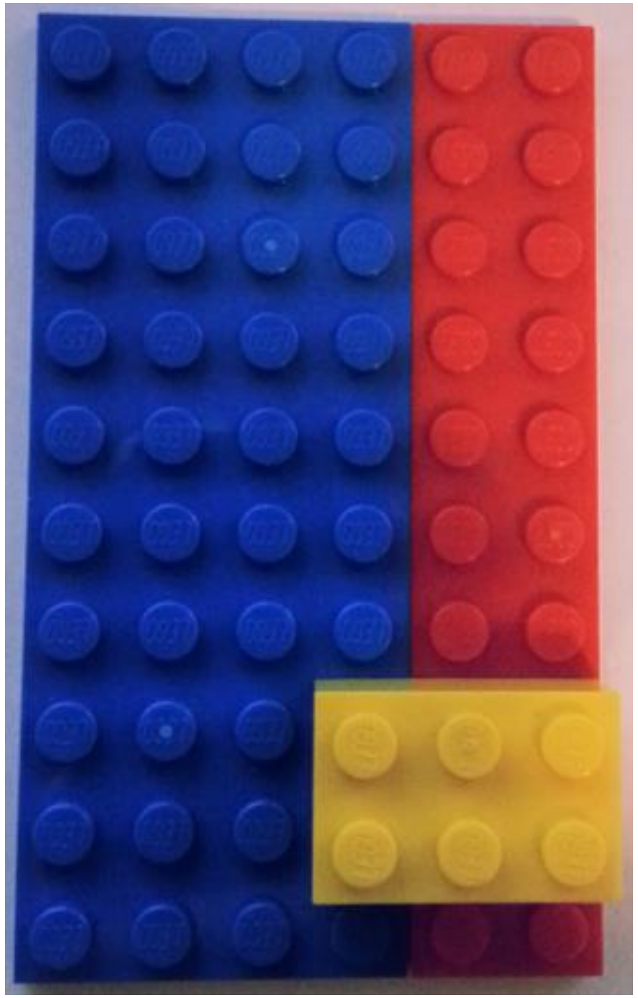


Teorema de Bayes

- Faltou calcular a probabilidade do amarelo
  - Probabilidade amarelo

$$P(amarelo) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

  - Se somarmos as 3 probabilidades, o resultado é maior do que 1!
    - A peça amarela sempre vem com um outra cor
    - Probabilidade condicional!



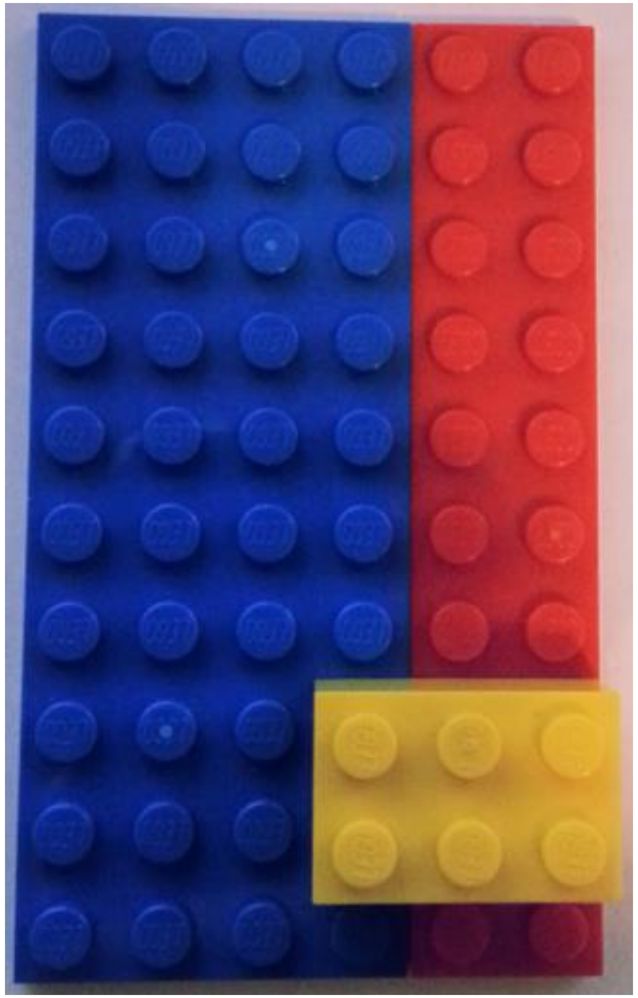
Teorema de Bayes

- Probabilidades do amarelo
  - Em relação ao vermelho

$$P(amarelo|vermelho) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

  - Em relação ao azul

$$P(amarelo|azul) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20}$$



Teorema de Bayes

- Voltando ao problema
  - Qual a probabilidade de sair a cor vermelha dado selecionamos um ponto amarelo?

$$P(vermelho|amarelo)$$

  - Isso equivale a calcular

$$\frac{P(vermelho)P(amarelo|vermelho)}{P(amarelo)}$$

Teorema de Bayes

- Voltando ao problema
  - Qual a probabilidade de sair a cor vermelha dado selecionamos um ponto amarelo?

$$\frac{P(vermelho)P(amarelo|vermelho)}{P(amarelo)}$$

  - Substituindo as probabilidades

$$P(vermelho|amarelo) = \frac{{}^{1}/_{3} * {}^{1}/_{5}}{{}^{1}/_{10}} = \frac{2}{3}$$

Função Distribuição de Probabilidades

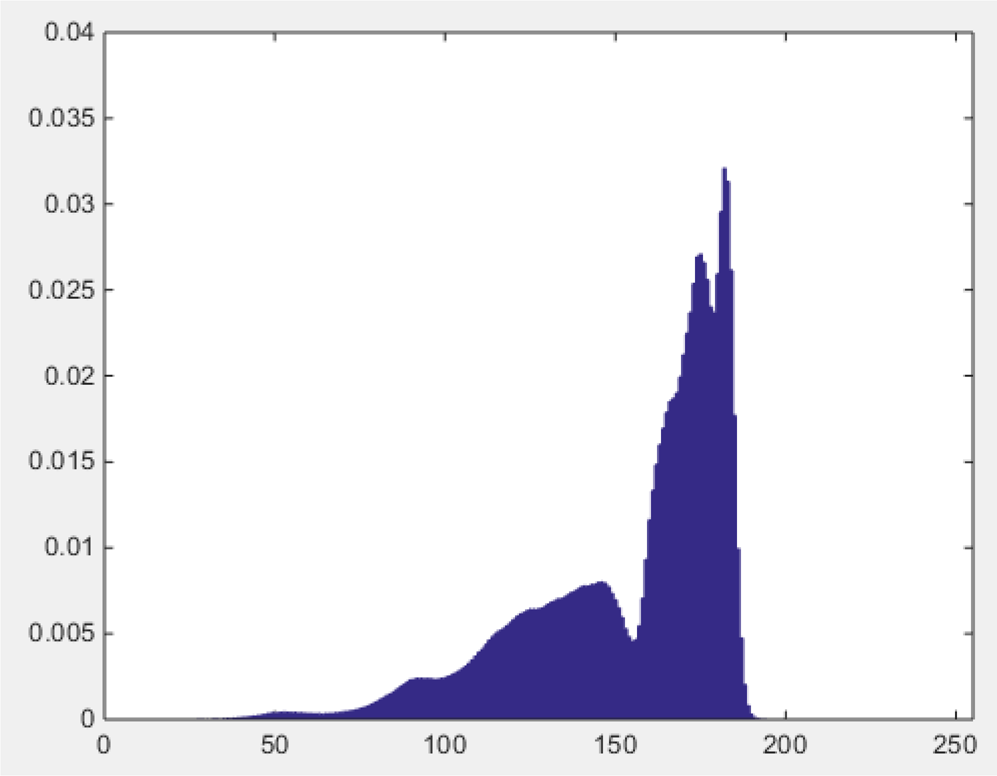
- Suponha um conjunto de valores que uma variável aleatória ***X*** possa assumir:
  - $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- A partir dos seus resultados possíveis, podemos construir uma função de probabilidades $\boldsymbol{p(x_i)}$
  - $p(x_i) \geq 0$, onde $p(x_i)$ é a probabilidade associada a $X = x_i$
  - A soma das probabilidades é sempre 1 (equivalente a 100%)

Função Distribuição de Probabilidades

- A **Função Distribuição de Probabilidades** associa as probabilidades a cada valor individual de X, $f(x_i)$
  - Função Massa de Probabilidade (pmf), para variáveis aleatórias discretas
  - Função Densidade de Probabilidade (pdf), para variáveis aleatórias contínuas

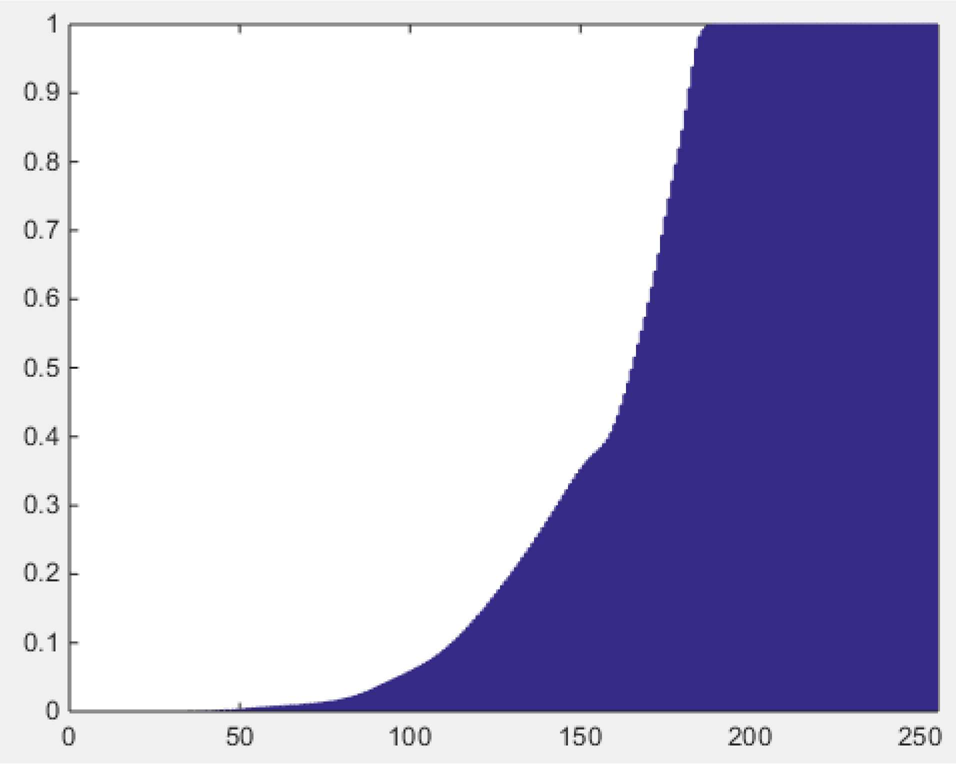
Função Distribuição de Probabilidades

- Podemos construir um gráfico que relaciona o valor da variável *X* a sua probabilidades



Função Distribuição de Probabilidades

- Podemos construir também um gráfico que relaciona a probabilidade acumulada os valores de *X*



Modelos de Probabilidade

- Um modelo de distribuição de probabilidade atribui uma probabilidade para cada um dos possíveis resultados de uma experiência aleatória
  - Existem vários modelos, cada um adequado a um tipo de variável aleatória e a natureza dos dados

Modelos de Probabilidade para variáveis discretas

- Distribuição Uniforme Discreta
  - Seja uma variável aleatória X
    - X assume os valores $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$
  - Diz-se que X tem distribuição uniforme discreta se, e somente se
    - $P(X = x_i) = 1 / k$
    - Para todo $i = 1, 2, ..., k$
  - Exemplo: lançamento de um dado

Modelos de Probabilidade para variáveis discretas

- Distribuição de Bernoulli
  - Seja uma variável aleatória *X* onde apenas dois resultados são possíveis
    - x: sucesso (1) ou insucesso (0).
  - Queremos observar sucessivos eventos, sendo que
    - A probabilidade de “sucesso” ***p*** é constante ao longo do experimento
    - Cada evento é independente.

Modelos de Probabilidade para variáveis discretas

- Distribuição de Bernoulli
  - O modelo de probabilidade será dado por
    - $P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}$
  - Exemplo: uma urna tem 30 bolas brancas e 20 verdes
    - Brancas: 0
    - Verdes: 1
  - $P(X = x) = (30/50)^x (20/50)^{1-x}$

Modelos de Probabilidade para variáveis discretas

- Distribuição Binomial
  - Dada uma distribuição de Bernoulli, essa distribuição nos indica a probabilidade do número de "sucessos" numa sequência de ***n*** tentativas independentes
  - O modelo de probabilidade é dado por
    - $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

Modelos de Probabilidade para variáveis discretas

- Distribuição Binomial
  - Um sistema de segurança possui 4 alarmes com probabilidade de sucesso $p = 0,8$ cada
  - Qual a probabilidade de 3 alarmes soarem ao mesmo tempo?
    - $P(3) = 4 * (0,8)^3 * (1 - 0,8)^1 = 0,4096$

Modelos de Probabilidade para variáveis discretas

- Distribuição Geométrica
  - Dada uma distribuição de Bernoulli, essa distribuição nos indica o número de observações ***x*** até a ocorrência de um "sucesso"
  - O modelo de probabilidade é dado por
    - $P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$

Modelos de Probabilidade para variáveis discretas

- Distribuição Geométrica
  - Numa fábrica de peças, a proporção de defeitos é de 8%. Ao se inspecionar um lote, qual a probabilidade de se encontrar um defeito na quarta peça analisada?
    - $P(4) = 0{,}08 * (0{,}92)^3 = 0{,}0623$

Modelos de Probabilidade para variáveis contínuas

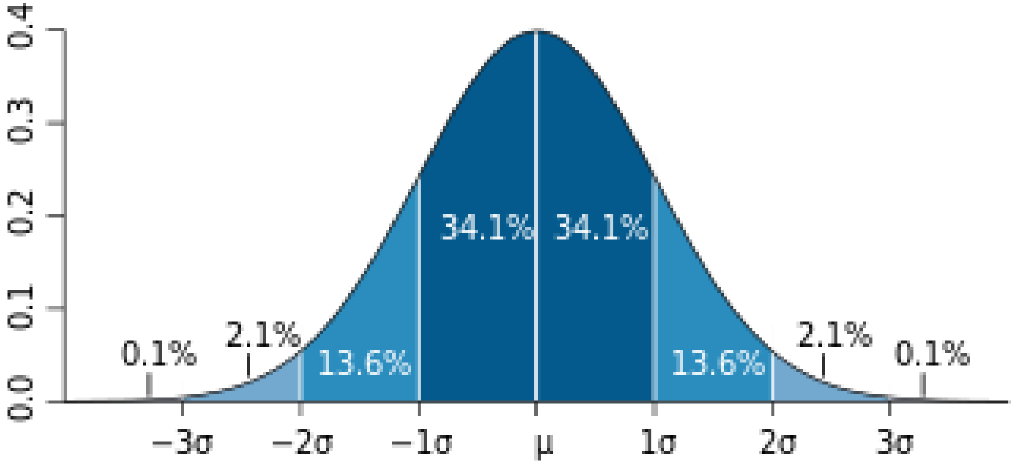
- Distribuição Normal ou Gaussiana
  - A distribuição normal é uma das mais utilizadas na estatística
  - Ela modela muitos acontecimentos da natureza
    - Fenômenos físicos e financeiros
    - Características morfológicas e sociológicas de uma determinada população.

Modelos de Probabilidade para variáveis contínuas

- Distribuição Normal ou Gaussiana
  - Sua função é inteiramente descrita por seus parâmetros de média e desvio padrão
  - Conhecendo-se estes consegue-se determinar qualquer probabilidade em uma distribuição Normal.
- $f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$

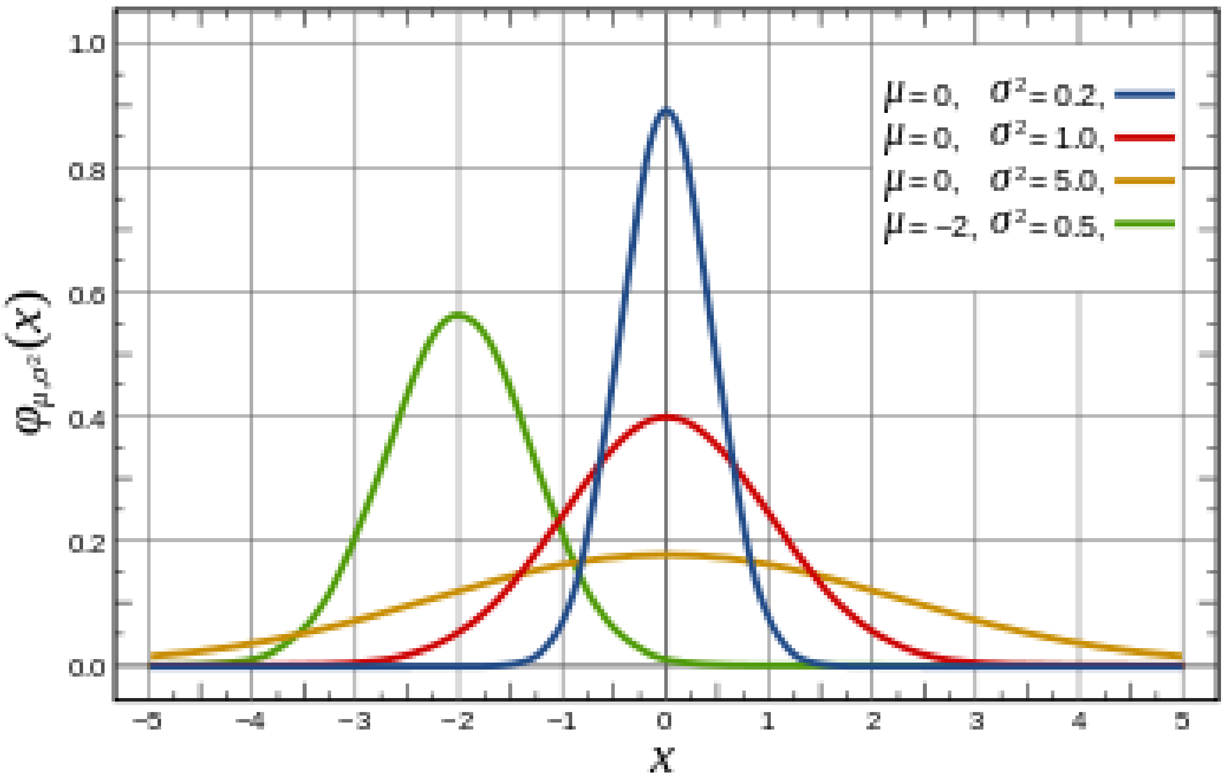
Modelos de Probabilidade para variáveis contínuas

- Distribuição Normal ou Gaussiana
  - Seu gráfico é conhecido como curva de Gauss
  - O desvio padrão define a área sob a curva, e para cada valor de desvio padrão corresponde uma proporção de casos da população
  - $P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, \mu, \sigma)$



Modelos de Probabilidade para variáveis contínuas

- Na curva de Gauss
  - a média refere-se ao centro da distribuição
  - o desvio padrão ao espalhamento (ou achatamento) da curva

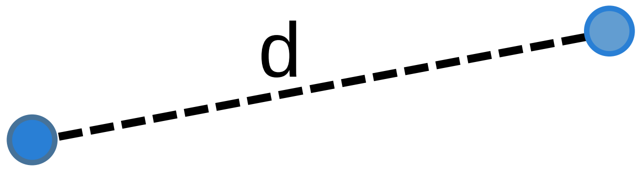


Modelos de Probabilidade para variáveis contínuas

- Apesar da distribuição Normal ser a mais importante, existe outras que não serão aqui estudadas
  - Distribuição t de Student
  - Distribuição Exponencial
  - Distribuição Gamma
  - Distribuição de Poisson

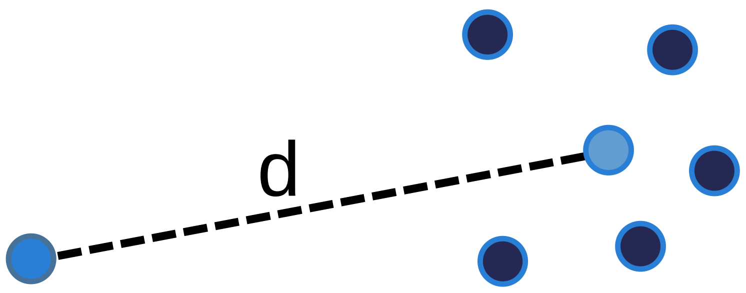
Medidas de Distância

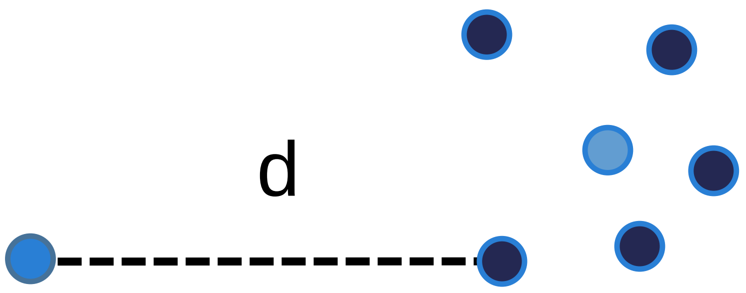
- Entende-se por distância a medida da separação de 2 objetos
  - comprimento do segmento de reta que os liga
- Em reconhecimento de padrões, a distância indica a dissimilaridade ou afastamento entre dois atributos ou vetores de atributos.



Medidas de Distância

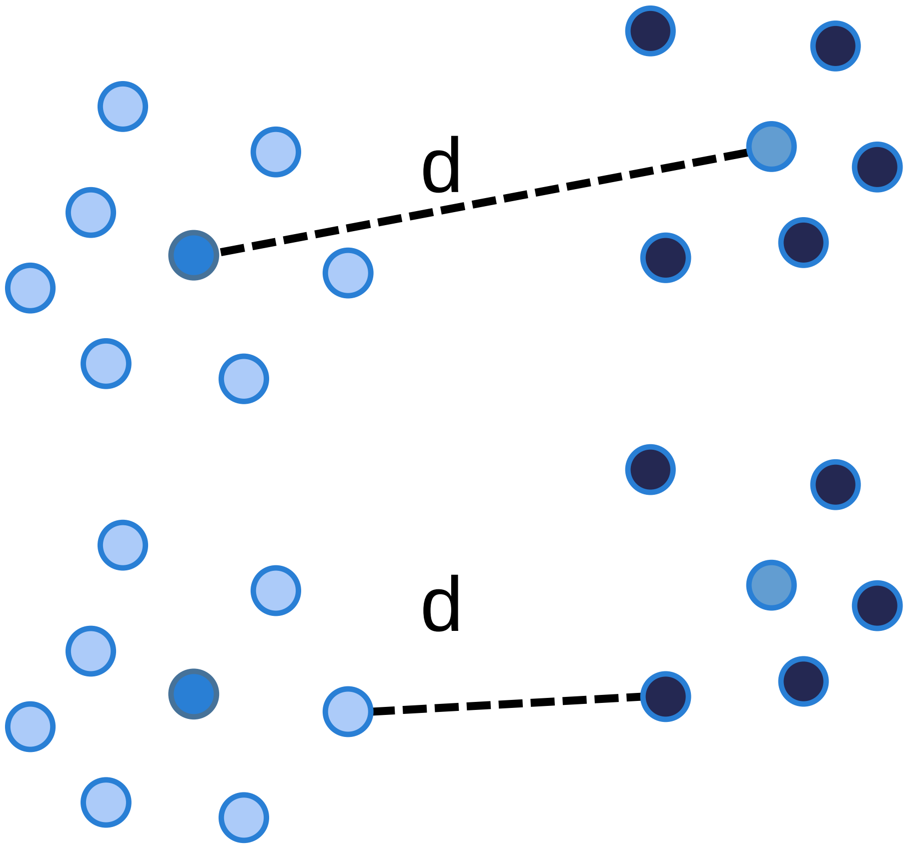
- Uma medida de distância também pode ser utilizada para indicar a dissimilaridade ou afastamento entre um vetor de atributos e uma classe (centroide ou elemento mais próximo)





Medidas de Distância

- Ou entre duas classes distintas de padrões
  - (centroide ou elementos mais próximos)



Métrica

- A métrica é uma formalização do conceito de distância.
  - Um espaço onde exista uma métrica definida é chamado de espaço métrico.
- Para uma função ser considerada uma distância, ou métrica, entre dois vetores de atributos, ela deve seguir alguns axiomas (consensos iniciais)

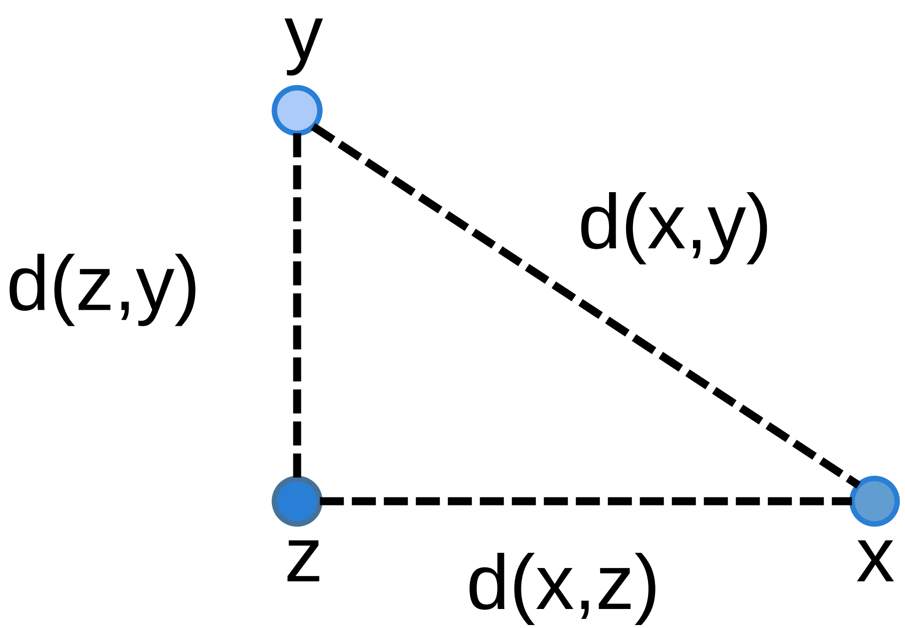
Métrica

- Os axiomas ou propriedades que definem a métrica são 3
  - $d(x,y) = d(y,x)$, simetria
  - $d(x,y) \geq 0$
  - $d(x,x) = 0$

- Além dessas 3 propriedades, também valem
  - $d(x,y) = 0$, se e somente se $x = y$
  - $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, também conhecida como desigualdade do triângulo

Métrica

- Desigualdade do triângulo (ou triangular)



Distância de Minkowski de ordem s

- Trata-se de uma métrica para o espaço Euclidiano e que serve de generalização para outras distâncias, como
  - a “city block” (s = 1)
  - a própria distância Euclidiana (s = 2)
- Dado dois vetores *X* e *Y*, a mesma é definida como sendo

$$d(X,Y) = \left(\sum_{i=1}^{p} |X_i - Y_i|^s\right)^{\frac{1}{s}} =$$

$$\sqrt[s]{|X_1 - Y_1|^s + |X_2 - Y_2|^s + \cdots + |X_p - Y_p|^s}$$

Distância máxima, “city block” ou Manhattan

- Dado dois vetores *X* e *Y*, esta métrica é definida como o somatória dos módulos das diferenças, e possui a seguinte fórmula

$$d(X,Y) = (\sum_{i=1}^{p} |X_i - Y_i|^1)^1 =$$

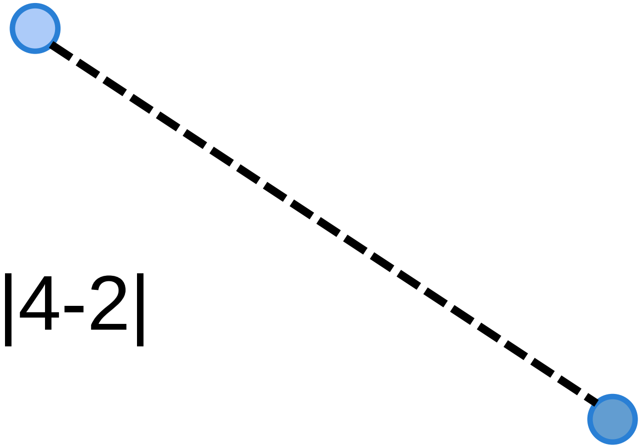
$$|X_1 - Y_1| + |X_2 - Y_2| + \cdots + |X_p - Y_p|$$

- Trata-se de uma distância que depende da rotação do sistema de coordenadas, mas não depende de sua reflexão em torno de um eixo ou suas translações

Distância máxima, “city block” ou Manhattan

- Exemplo

y = [1 4]



x = [5 2]

d(x,y) = |1-5| + |4-2|
d(x,y) = 4 + 2
d(x,y) = 6

Distância Euclidiana

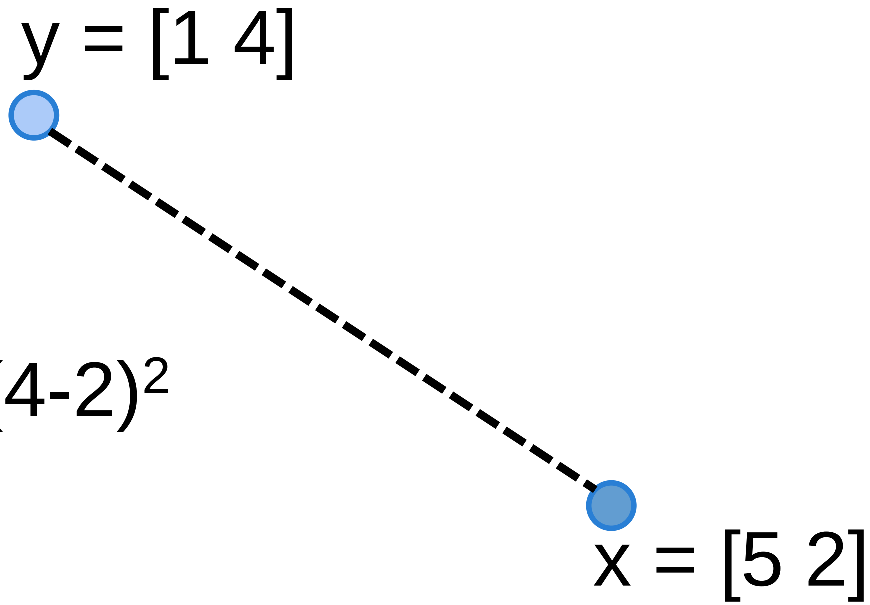
- Trata-se da distância mais comum entre dois pontos
  - Aquela distância medida com uma régua
- Dado dois vetores *X* e *Y*, a mesma é definida como sendo

$$d(X,Y) = (\sum_{i=1}^{p} |X_i - Y_i|^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt[2]{|X_1 - Y_1|^2 + |X_2 - Y_2|^2 + \cdots + |X_p - Y_p|^2}$$

Distância Euclidiana

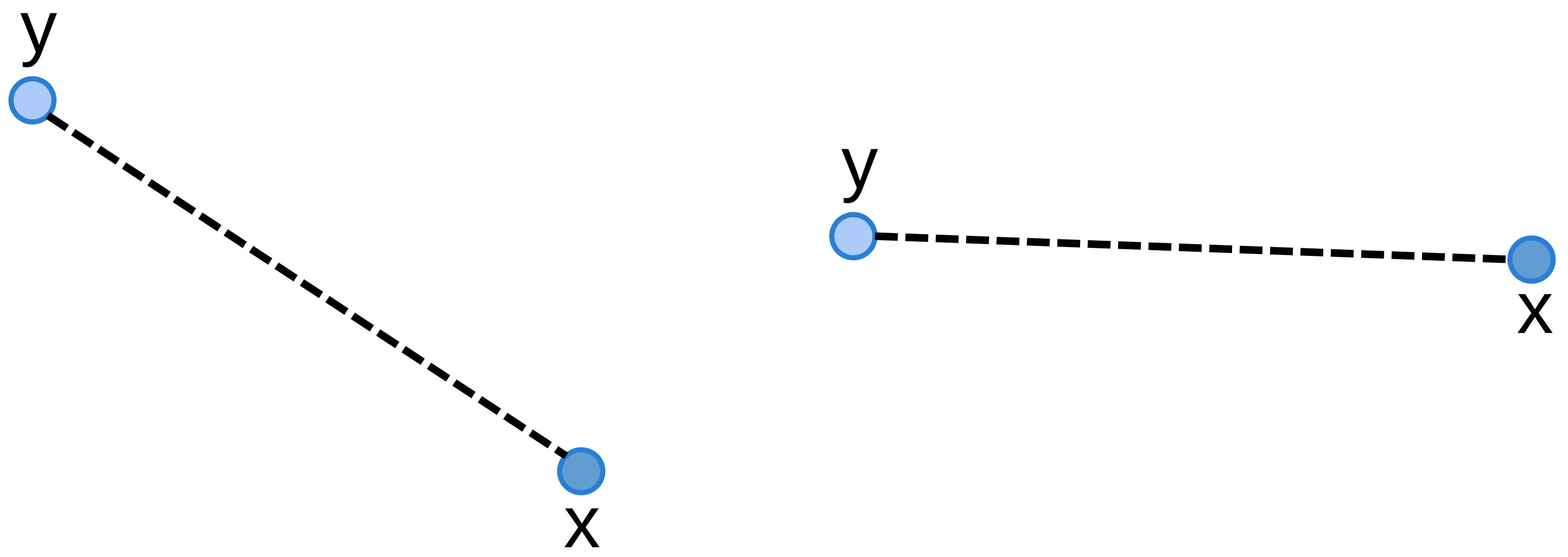
- Exemplo



$$d(x,y) = \sqrt{(1-5)^2 + (4-2)^2}$$
$$d(x,y) = \sqrt{4^2 + 2^2}$$
$$d(x,y) = \sqrt{16 + 4}$$
$$d(x,y) = \sqrt{20}$$
$$d(x,y) = 4{,}4721$$

Distância Euclidiana

- Trata-se de uma distância que é invariante a
  - rotação do sistema de coordenadas
  - a sua reflexão em torno de um eixo
  - translações



Distância Chebyshev ou chessboard

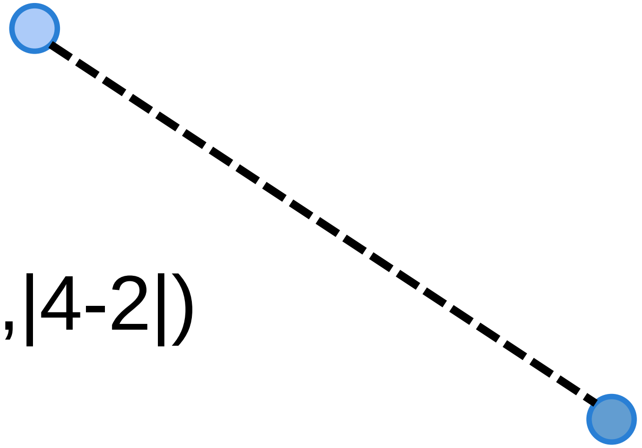
- A distância de Chebyshev se assemelha muito a city block.
- No caso, essa métrica considera o valor máximo dos módulos das diferenças dos pontos em respectivas posições
- Assim, dado dois vetores *X* e *Y*, a mesma é definida como sendo

$$d(X, Y) = \max(|X_1 - Y_1|, |X_2 - Y_2|, \ldots, |X_p - Y_p|)$$

Distância Chebyshev ou chessboard

- Exemplo

y = [1 4]



x = [5 2]

d(x,y) = max(|1-5|,|4-2|)
d(x,y) = max(4, 2)
d(x,y) = 4

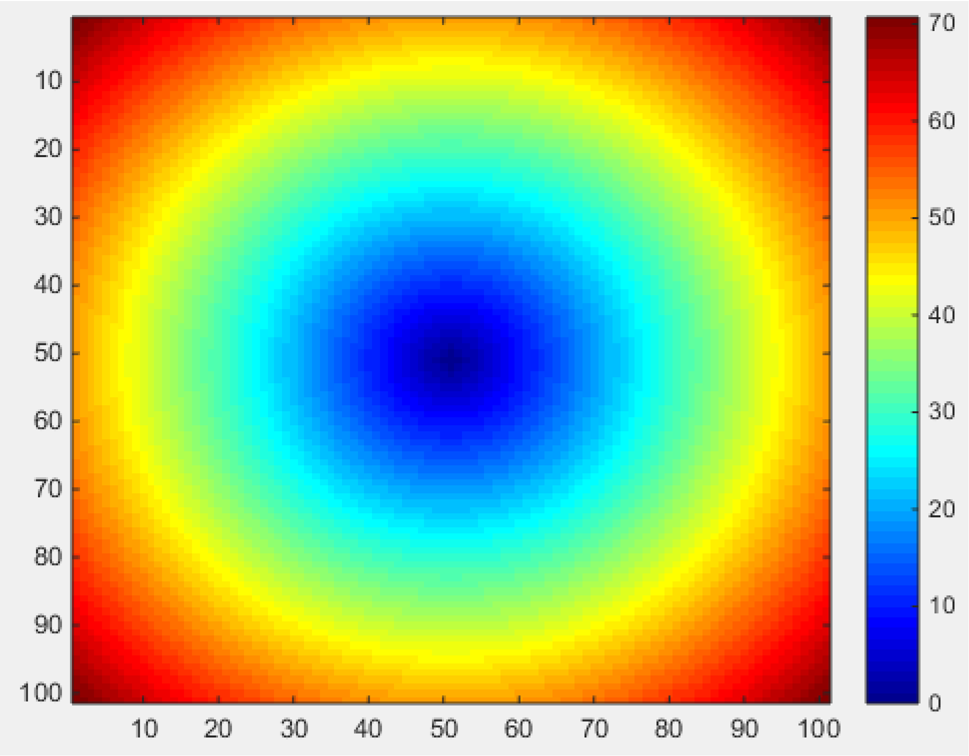
Comparação entre as métricas

- Considere a matriz abaixo. Qual a distância entre o elemento central e os demais em cada métrica

$$
\begin{vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

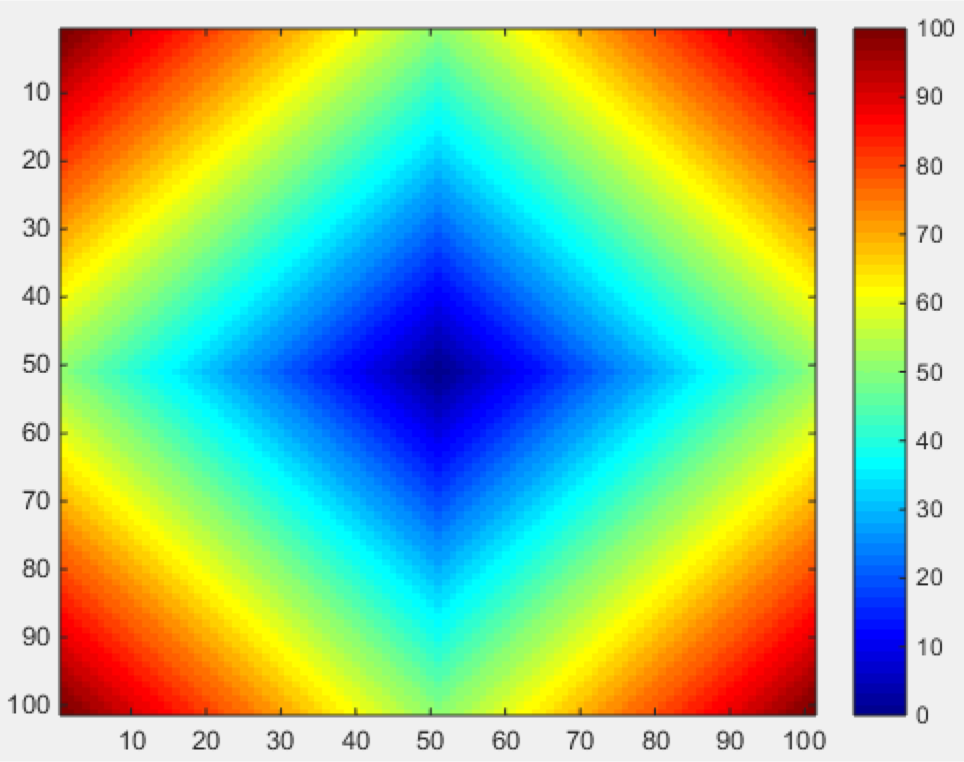
Comparação entre as métricas

- Distância Euclidiana



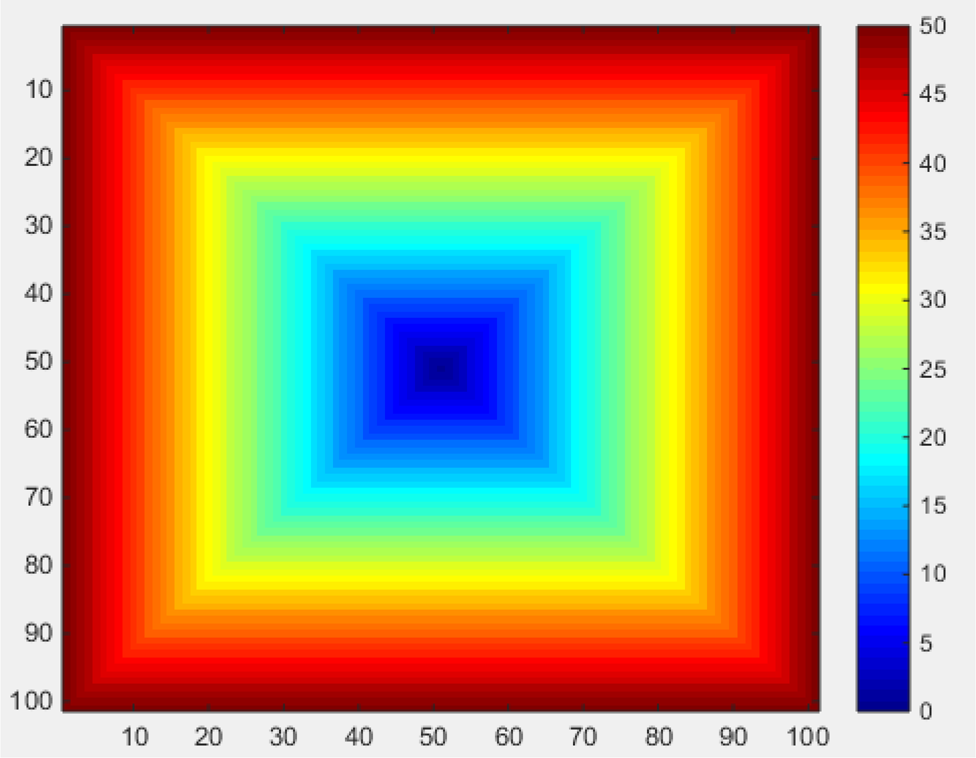
Comparação entre as métricas

- Distância “city block” ou Manhattan



Comparação entre as métricas

- Distância Chebyshev ou chessboard



Distância de Mahalanobis

- Se baseia nas correlações entre atributos com as quais distintos padrões podem ser identificados e analisados
  - Leva em consideração as variações estatísticas dos atributos
  - Introduzida pelo matemático indiano Prasanta Chandra Mahalanobis em 1936.

Distância de Mahalanobis

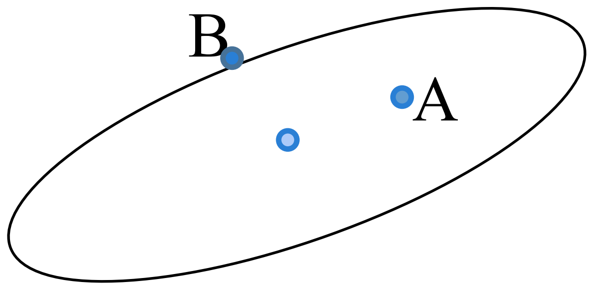
- Dado dois vetores X e Y, e a matriz de covariâncias Σ, a distância de Mahalanobis é definida como sendo

$$d(X,Y) = \left[(X - Y)^T \Sigma^{-1} (X - Y)\right]^{\frac{1}{2}}$$

- Se a matriz de covariâncias for uma matriz identidade, essa distância é igual a distância Euclidiana

Distância de Mahalanobis

- Os pontos A e B possuem as mesmas distâncias euclidianas da média (centro da elipse).
- No entanto, o ponto B é claramente "mais diferente" da população do que o ponto A.



Distância de Mahalanobis

- A distância de Mahalanobis leva em consideração a variância de cada atributo, assim como a covariância entre eles
  - Transforma os dados em dados normalizados não correlacionadas e calcula a distância euclidiana para os dados transformados
  - É invariante à escala (não depende da escala das medições)
  - Similar ao z-score

Distância Quadrática

- Basicamente, a distância quadrática é uma generalização da distância de Mahalanobis
  - Também leva consideração a relação entre os atributos

$$d(X, Y) = \left[(X - Y)^T A (X - Y)\right]^{\frac{1}{2}}$$

- No entanto, no lugar da matriz de covariâncias Σ, ela utiliza uma matriz *A*
  - *A* deve ser simétrica positiva definida
  - Isso significa que *A* é uma matriz válida $d(X,Y) \geq 0$

Distância Quadrática

- De modo geral, a matriz ***A*** deverá ser calculada de acordo com o problema.
- Por exemplo, na
  - distância de Mahalanobis: ***A*** é a matriz inversa da matriz de covariâncias
  - distância Euclidiana: ***A*** é a matriz identidade

Padronização dos dados

- Consiste do processo de conversão de um escore bruto de uma distribuição em um escore z
- Por escore bruto entende-se o valor individual observado na medição de um determinado atributo
- Isso nos ajuda a entender onde um determinado escore se localiza em relação aos outros em uma distribuição
    - Escore padrão, escore z ou z-score

Z-score

- Também conhecido como escore padronizado, ele indica o quanto acima ou abaixo da média um determinado escore está em termos de unidades padronizadas de desvio
  - Confuso??

Z-score

- Traduzindo:
  - O score-z indica em quantas unidades de desvios padrão uma observação ou dado está acima ou abaixo da média
  - Calculado a partir da média e desvio padrão dos dados

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Z-score

- O escore z permite que se compare duas amostras obtidas em escalas diferentes de mensuração
- Isso ocorre por que ele retorna uma versão dos dados centralizada e com a escala ajustada
  - Centralizada: amostras com média 0
  - Ajuste de escala: amostras com desvio padrão 1

Z-score

- Exemplo: dados brutos

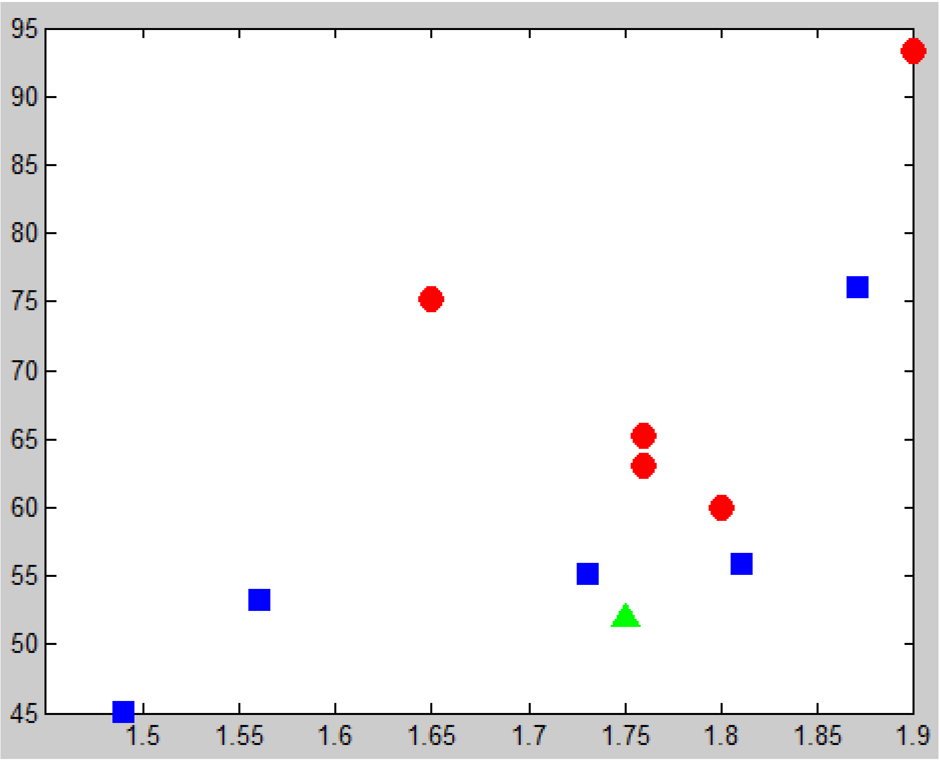
Média Altura	Média Peso
1,73	64,22

Desvio Altura	Desvio Peso
0,13	14,01

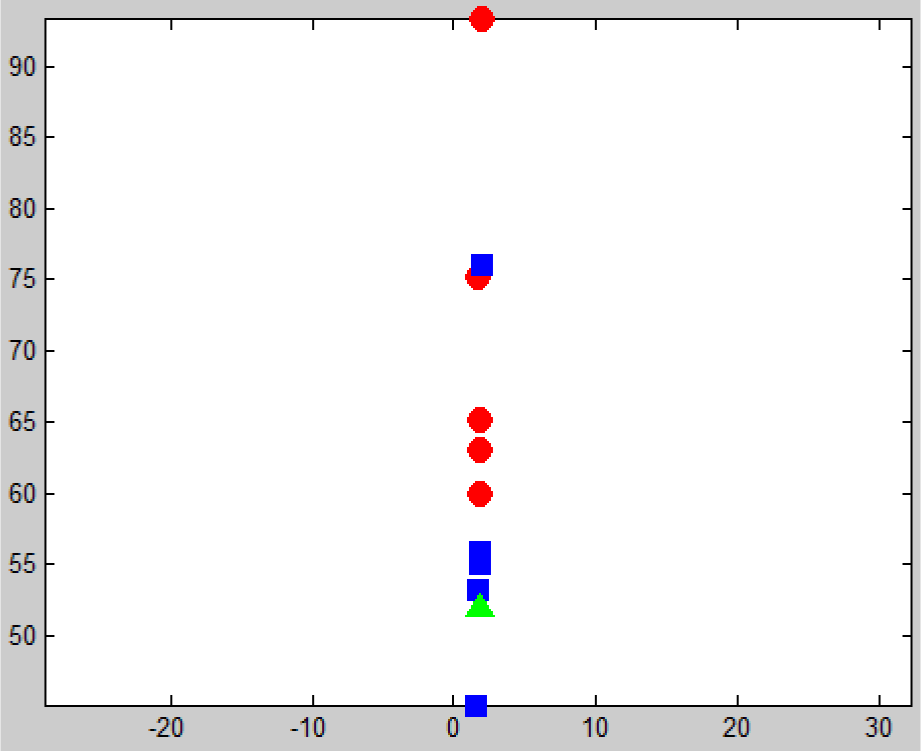
Altura	Peso	Sexo
1,87	76,1	0
1,65	75,2	1
1,80	60,0	1
1,81	55,9	0
1,90	93,3	1
1,74	65,2	1
1,49	45,1	0
1,56	53,2	0
1,73	55,1	0
1,76	63,1	1

Z-score

Com ajuste de escala



Sem ajuste de escala



Z-score

- Exemplo: dados normalizados

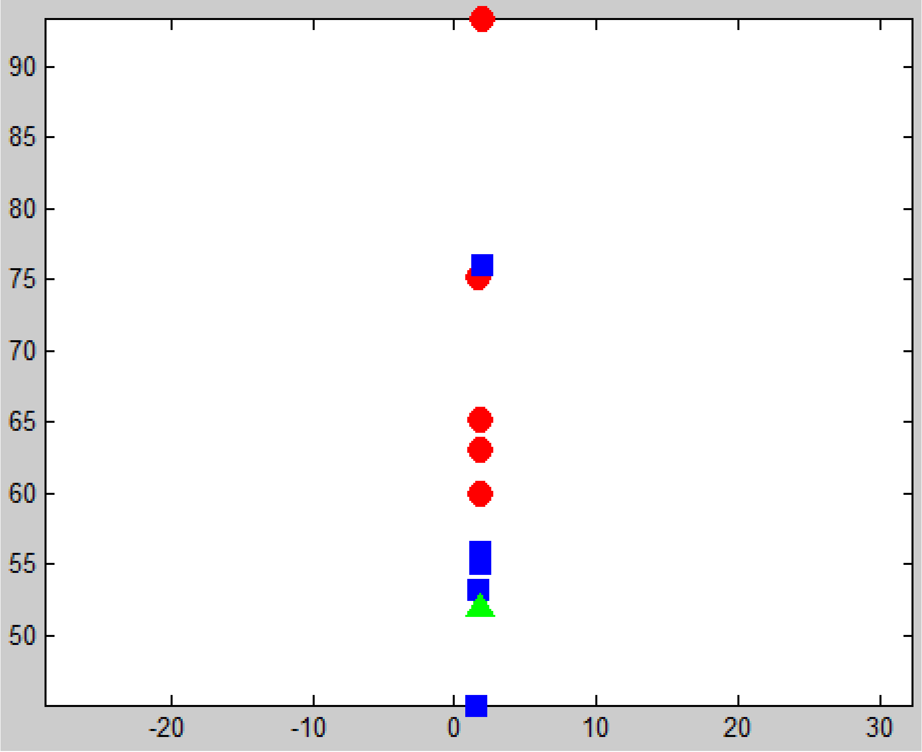
Média Altura	Média Peso
0,00	0,00

Desvio Altura	Desvio Peso
1,00	1,00

Altura	Peso	Sexo
1,06	0,84	0
-0,62	0,78	1
0,53	-0,30	1
0,60	-0,59	0
1,29	2,07	1
0,07	0,07	1
-1,84	-1,36	0
-1,31	-0,79	0
-0,01	-0,65	0
0,22	-0,08	1

Z-score

Dados brutos (sem ajuste de escala)



Z-score