Extrémy funkcí více proměnných

Lokální extrémy

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

- Gradient v extrému musí být nula, nalezneme stacionární body

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x \stackrel{?}{=} 0$$

- Řešíme soustavu rovnic, derivace položené nule
  - Z první rovnice vyjádříme $y = x^2$, to dosadíme do druhé

$$\begin{aligned} 3x^4 - 3x &= 0 \\ x^4 - x &= 0 \\ x(x^3 - 1) &= 0 \\ x &= \{0; 1\} \end{aligned}$$

- Máme souřadnice x stacionárních bodů, dopočítáme y dosazením zpět do $y = x^2$
- Máme dva stacionární body [0; 0] a [1; 1], zde může a nemusí být extrém
- Sestavíme Hessovu matici a dosadíme do ní stacionární body
  - Pokud máme pouze jeden stacionární bod, matice by měli vyjít konstantní

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$
$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Na výsledné matice použijeme Sylvestrovo kritérium
  - Spočítáme postupně determinanty submatic $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, ..., $A_{n,n}$ (pro funkce dvou proměnných stačí tedy d_1 a d_2)
  - Pokud jsou všechny determinanty kladné, nachází se v bodě **ostré lokální minimum**

- Pokud je první determinant záporný a u následujících determinantů se střídají znaménka, nachází se v bodě **ostré lokální maximum**

- Pro bod [0; 0]:
    - d_1 = 0
    - d_2 = -9
    - ⇒ v bodě není extrém
- Pro bod [1; 1]:
    - d_1 = 6
    - d_2 = 27
    - ⇒ v bodě je ostré lokální minimum
- Tato metoda výpočtu není dokonalá, příkladem budiž *f(x,y)* = $x^4 + y^4$, která má ostré minimum v [0; 0], Hessova matice ale "nevidí" malý růst v okolí nuly

Vázané extrémy

Najděte lokální extrémy funkce *f(x,y)* = $x^2 + 2y^2$ na množině $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

- Sestrojíme Lagrangeovu funkci a spočteme její praciální derivace

$$
\begin{aligned}
L(x, y, \lambda) &= x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y) \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 2\lambda x - 2\lambda \stackrel{?}{=} 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 4y + 4y\lambda + 4\lambda \stackrel{?}{=} 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 - 2x + 2y^2 + 4y \stackrel{?}{=} 0
\end{aligned}
$$

- Řešíme soustavu tří rovnic pro tři neznámé
    - Zde můžeme vyjádřit *x* z první, *y* z druhé, dosadit do třetí a spočítat lambdu

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^2 - 2\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right) + 2\left(\frac{-\lambda}{\lambda+1}\right)^2 + 4\left(\frac{-\lambda}{\lambda+1}\right) &= 0 \\
&\boxed{\lambda \neq -1} \\
3\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2} - 6\frac{\lambda}{\lambda+1} &= 0 \\
3\lambda^2 - 6\lambda(\lambda+1) &= 0 \\
-3\lambda^2 - 6\lambda &= 0 \\
\lambda &= \{0; -2\}
\end{aligned}
$$

- Nyní můžeme dopočítat *x* a *y* – dostaneme dva podezřelé body $[0; 0]_{\lambda=0}$ a $[2; -2]_{\lambda=-2}$
- Pro zjištění minima/maxima postupujeme podobně jako u lokálních extrémů
    - Druhé derivace, Hessova matice, determinanty, ...

$$\nabla^2 L = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 4+4\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{pro } \lambda = 0 : \begin{cases} d_1 = 2 \\ d_2 = 8 \end{cases}$$

$$\text{pro } \lambda = -2 : \begin{cases} d_1 = -2 \\ d_2 = 8 \end{cases}$$

- ⇒ v bodě [0; 0] je ostré lokální minimum a v bodě [2; -2] je ostré lokální maximum
- Pokud se ze zadané množiny dá snado vyjádřit *x* nebo *y*, nemusíme sestavovat Lagrangeovu funkci; stačí vyjádři danou proměnnou a dosadit ji do zadání, tím vznikne funkce jedné proměnné, kde spočítáme minima/maxima (derivace rovna nule, dosazování okolí, ...)

Absolutní extrémy

- Pokud máme najít absolutní extrémy na nějaké množině vzniklé např. spojením několika bodů, musíme do podezřelých bodů zahrnout:
    1. Body, které jsou pospojovány
    2. Vázané extrémy na přímkách spojujících tyto body
    3. Lokální extrémy funkce nacházející se uvnitř množiny
- Následně zjistíme funkční hodnoty pro všechny tyto body, nejmenší hodnota je v bodě s absolutním minimem a největší hodnota je v bodě s absolutním maximem