Základní diferenciální rovnice 1. řádu

Separace proměnných

- občas trošku sussy
- pro rovnice ve tvaru

$$y' = f(x) * g(y)$$

Výpočet

První příklad:

$$y' = 3 * \sqrt{x}$$

- pokud $f(x) = c$, vyřešíme jednoduchým zintegrováním obou stran rovnou

$$\begin{aligned} y' &= 3 * \sqrt{x} \qquad / \int ...dx \\ y &= \underline{\underline{2 * \sqrt{x^3}}} \end{aligned}$$

Druhý příklad:

$$y' = \frac{1}{x^4} * 6y$$

- pokud $f(x) \neq c$, musíme použít trošku složitější postup - y' přepíšeme na $\frac{dy}{dx}$, každou proměnnou poté dostaneme na jednu stranu

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^4} * 6y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{6y}{x^4} \qquad / * dx \\ dy &= \frac{6y}{x^4} * dx \qquad / : y \\ \frac{dy}{y} &= \frac{6}{x^4} * dx \end{aligned}$$

- jakmile máme proměnné rozdělené na opačné strany rovnice, můžeme už integrovat (každou stranu podle příslušné proměnné - máme tam dx a dy)
- po integrování vyjádřit y a hotovo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{6}{x^4} * dx \qquad / \int ... \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int \frac{6}{x^4} dx \\ ln|y| &= -\frac{2}{x^3} + c \qquad / e^n \\ e^{ln|y|} &= e^{-\frac{2}{x^3} + c} \\ |y| &= e^{-\frac{2}{x^3}} * \underbrace{e^c}_{\text{K}} \\ y &= \underline{\underline{\pm K + e^{-\frac{2}{x^3}}}} \end{aligned}$$

- toho $\pm$ by se ještě šlo zbavit pomocí podmínek a polemizování, který člen je kladný a který záporný (asi)

Homogenní rovnice

- dost sussy mrdka
- ve tvaru

$$y' = f(\frac{y}{x})$$

- úkolem je převést rovnici na separované proměnné pomocí substituce

Výpočet

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

- použijeme substituci $y = x * z(x)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^2 + y^2}{xy} \\ z + xz' &= \frac{x^2 + x^2 z^2}{x^2 z} \\ z + xz' &= \frac{x^2(1 + z^2)}{x^2 z} \\ z' &= \frac{1}{xz} \end{aligned}$$

- teď už můžeme postupovat pomocí separovaných proměnných, poté vrátit substituci

---

Lineární rovnice

- jsou ve tvaru:

$$y' + f(x)y + g(x) = 0$$

- nebo občas zapsané také ve tvaru:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

- jedna funkce závislá na x násobí proměnnou y
- pokud $f(x) = 0$, řešení je pouze integrál z $g(x)$ - "triviální případ"
- pokud $g(x) = 0$, řešení získáme pomocí metody separace proměnných - "triviální případ"
- pokud $g(x) \neq 0$ a $f(x) \neq 0$, musíme použít jednu z uvedených metod

zadaná rovnice:

$$y' - 2xy = x$$

1. metoda - integrační faktor

- nejdříve **musíme** funkci dostat do tvaru $y' + f(x)y = g(x)$
  - tato funkce v tomto tvaru již je
- spočítáme integrační faktor $i_f = e^{\int f(x)dx}$
  - $f(x)$ je funkce, která v rovnici **násobí** y

$$\begin{aligned} i_f &= e^{\int f(x)dx} \\ i_f &= e^{\int -2xdx} \\ i_f &= \underline{e^{-x^2}} \end{aligned}$$

- po vypočtení integračního faktoru vezmeme původní rovnici a vynásobíme ji integračním faktorem

$$y' - 2xy = x \qquad / * i_f$$
$$\underbrace{y'e^{-x^2}}_{\text{1. člen}} - 2xye^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

- nyní uděláme obrat šílenců:
  - vezmeme **první člen rovnice** (zvýrazněno), **smažeme derivaci u** y, součin dáme do závorky a tu celou zderivujeme
  - zbytek levé strany smažeme, pravou stranu opíšeme
    - obrat funguje díky vzorci na derivaci součinu (pokud výslednou závorku zderivujeme, vyjde nám původní levá strana rovnice)

$$\underbrace{(y * e^{-x^2})'}_{\text{1. člen po obratu}} = xe^{-x^2}$$

- nyní si lze všimnout, že na levé straně se nachází pouze derivace
- můžeme tedy obě strany zintegrovat a na levé straně se nám to vyruší s derivací
- poté stačí pouze vyjádřit y

$$(y * e^{-x^2})' = xe^{-x^2} \qquad / \int ...dx$$
$$y * e^{-x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c \qquad / : e^{-x^2}$$
$$y = -\frac{1}{2} + \frac{c}{e^{-x^2}}$$
$$y = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + c * e^{x^2}}}$$

- toto je výsledek - pokud jsou zadány podmínky, zde je chvíle je dopočítat
- podmínka: $y(0) = 2$

$$y = -\frac{1}{2} + c * e^{x^2}$$
$$2 = -\frac{1}{2} + c * e^{0^2}$$
$$c = \frac{5}{2}$$

- po dosazení podmínky máme finální výsledek

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} * e^{x^2}$$
$$y = \underline{\underline{\frac{5e^{x^2} - 1}{2}}}$$

zadaná rovnice (pořád stejná):

$$y' - 2xy = x$$

2. metoda - variace konstant

- rovnici **nemusíme** převést na tvar $y' + f(x)y = g(x)$ jako u integračního faktoru, ale hodí se to udělat
  - tato funkce v tomto tvaru již je

- vyřešíme homogenní tvar (což je levá strana rovnice rovna nule - pokud ji máme ve správném tvaru)

$$
\begin{aligned}
y' - 2xy &= 0 \\
\frac{dy}{dx} &= 2xy \\
\frac{dy}{y} &= 2xdx \qquad\qquad / \int ... \\
\int \frac{dy}{y} &= \int 2xdx \\
ln|y| &= x^2 + c \\
|y| &= e^{x^2} * \underbrace{e^c}_{\text{K}} \\
|y| &= K * e^{x^2} \\
y &= \underline{K * e^{x^2}}
\end{aligned}
$$

- vypočtené y je nyní homogenní tvar rovnice
- výslednou rovnici přeměníme tak, že z K uděláme funkci - místo K dáme $K(x)$

$$y = K(x) * e^{x^2}$$

- vzniklou vylepšnou rovnici dosadíme do zadání (pokud jsme ho upravovali na daný tvar, tak do upravené varianty)
- vznikne docela šílená rovnice, ale...!
  - na začátku bude derivace součinu, tu vyřešíme podle klasického pravidla pro derivaci součinu
  - OVĚŘOVACÍ FÍGL: pokud jsme počítali správně, všechny $K(x)$ se nám při upravování krásně odečtou a zbyde pouze $K'(x)$
  - poté pomocí integrace obou stran vyjádříme $K(x)$ z jeho derivace

$$
\begin{aligned}
vypo\check{c}ten\acute{a}\ rovnice &: y = K(x) * e^{x^2}; \\
rovnice\ ze\ za\check{c}\acute{a}tku &: y' - 2xy = x;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underbrace{(K(x) * e^{x^2})'}_{\text{y}} - 2x * \underbrace{K(x) * e^{x^2}}_{\text{y}} &= x \\
K'(x) * e^{x^2} + K(x) * 2xe^{x^2} - 2xK(x)e^{x^2} &= x \\
K'(x) * e^{x^2} &= x \\
K'(x) &= \frac{x}{e^{x^2}} \qquad\qquad / \int ...dx \\
K(x) &= \underline{-\frac{e^{-x^2}}{2} + c}
\end{aligned}
$$

- povedlo se nám vyjádřit $K(x)$ a následuje poslední krok - dosazení do vylepšené rovnice z předchozího kroku, která obsahuje $K(x)$ a to bude výsledek

$$vylepšená\ rovnice: y = K(x) * e^{x^2};$$
$$vypočtené\ K(x): K(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c$$

$$y = (-\frac{e^{-x^2}}{2} + c) * e^{x^2}$$
$$y = (-\frac{1}{2e^{x^2}} + c) * e^{x^2}$$
$$y = \underline{\underline{-\frac{1}{2} + c * e^{x^2}}}$$

- vyšel stejný výsledek jako u integračního faktoru
- zde bychom znovu aplikovali podmínky, stejně jako u integračního faktoru (vyřešeno nahoře)