

Základní diferenciální rovnice 1. řádu

Separace proměnných

- todo
-

Homogenní rovnice

- todo
-

Lineární rovnice

- jsou ve tvaru:

$$y' + f(x)y + g(x) = 0$$

- nebo občas zapsané také ve tvaru:

$$y' + f(x)y = g(x)$$

- jedna funkce závislá na x násobí proměnnou y
- pokud $f(x) = 0$, řešení je pouze integrál z $g(x)$ - “triviální případ”
- pokud $g(x) = 0$, řešení získáme pomocí metody separace proměnných - “triviální případ”
- pokud $g(x) \neq 0$ a $f(x) \neq 0$, musíme použít jednu z uvedených metod

zadaná rovnice:

$$y' - 2xy = x$$

1. metoda - integrační faktor

- nejdříve **musíme** funkci dostat do tvaru $y' + f(x)y = g(x)$
 - tato funkce v tomto tvaru již je
- spočítáme integrační faktor $i_f = e^{\int f(x)dx}$
 - $f(x)$ je funkce, která v rovnici **násobí** y

$$i_f = e^{\int f(x)dx}$$

$$i_f = e^{\int -2x dx}$$

$$i_f = e^{-x^2}$$

- po vypočtení integračního faktoru vezmeme původní rovnici a vynásobíme ji integračním faktorem

$$\begin{array}{l} y' - 2xy = x \quad / * i_f \\ \underbrace{y' e^{-x^2}}_{1. \text{ člen}} - 2xy e^{-x^2} = x e^{-x^2} \end{array}$$

- nyní uděláme obrat šilenců:
 - vezmeme **první člen rovnice** (zvýrazněno), **smažeme derivaci u** y , součin dáme do závorky a tu celou zderivujeme
 - zbytek levé strany smažeme, pravou stranu opíšeme
 - * obrat funguje díky vzorci na derivaci součinu (pokud výslednou závorku zderivujeme, vyjde nám původní levá strana rovnice)

$$\underbrace{(y * e^{-x^2})'}_{1. \text{ člen po obratu}} = x e^{-x^2}$$

1. člen po obratu

- nyní si lze všimnout, že na levé straně se nachází pouze derivace
- můžeme tedy obě strany zintegrovat a na levé straně se nám to vyruší s derivací
- poté stačí pouze vyjádřit y

$$(y * e^{-x^2})' = x e^{-x^2} \quad / \int \dots dx$$

$$y * e^{-x^2} = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c \quad / : e^{-x^2}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{c}{e^{-x^2}}$$

$$y = -\frac{1}{2} + c * e^{x^2}$$

- toto je výsledek - pokud jsou zadány podmínky, zde je chvíle je dopočítat
- podmínka: $y(0) = 2$

$$y = -\frac{1}{2} + c * e^{x^2}$$

$$2 = -\frac{1}{2} + c * e^{0^2}$$

$$c = \frac{5}{2}$$

- po dosazení podmínky máme finální výsledek

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} * e^{x^2}$$

$$y = \frac{5e^{x^2} - 1}{2}$$