MÉTHODE DES ELÉMENTS VIRTUELS (VEM) POUR LE CALCUL DE LA DÉFORMATION MÉCANIQUE COUPLÉE AUX ÉCOULEMENTS EN MILIEUX POREUX.

THÈSE DE JULIEN COULET

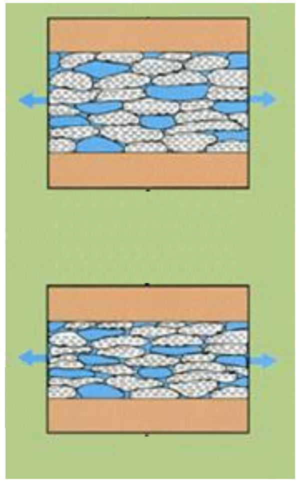
SOUTENUE LE 13 NOVEMBRE 2019

DIRECTEURS : V. GIRAULT, F. NATAF

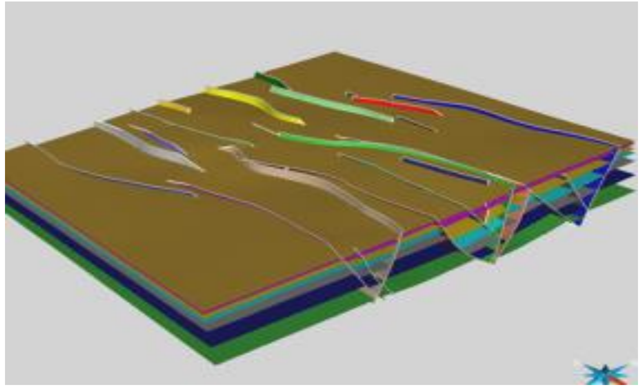
PROMOTEURS : I. FAILLE, N. GUY

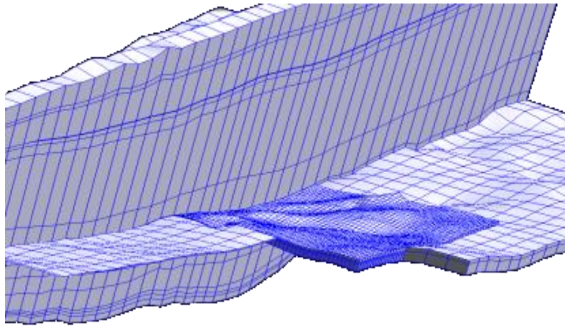
IFPEN/LJLL

CONTEXTE

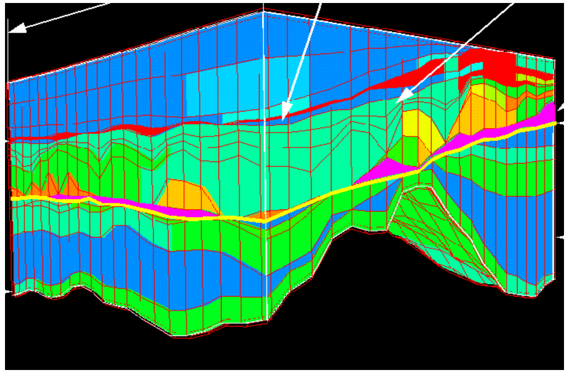


- Transferts en milieux poreux
- Simulations couplées
  - Ecoulements
  - Déformation mécanique
- Applications
  - Réservoir, Stockage de gaz, Géothermie
  - Impact sur les propriétés pétrophysiques, Intégrité du sous-sol
- Structure du sous-sol complexe
  - Hétérogénéités, stratifications
  - Milieux « allongés »
  - Failles/fractures
  - Domaine écoulement <<Domaine mécanique

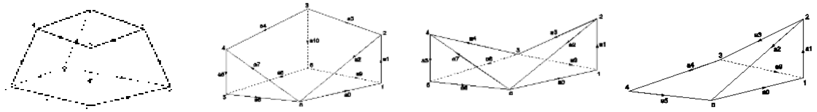




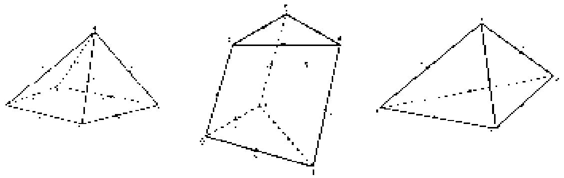
SIMULATIONS COUPLÉES ÉCOULEMENTS/DÉFORMATIONS



- Approche standard : couplage
  - D’un code « Ecoulement », Volumes Finis, TPFA/MPFA
  - D’un code « Mécanique, Eléments Finis, P1, Q1
- Donne accès à des modélisations avancées
- Pose des problèmes de compatibilité de maillage
  - Hexaèdres dégénérés, rapports de forme défavorables



- Une approche récente : les éléments virtuels (VEM)
  - Qui étend les EF aux maillages généraux, à l’ordre k
  - Une littérature déjà fournie en 2016
    - Diffusion scalaire [Beirao et al, 2013a], élasticité linéaire [Beirao et al, 2013b], élasticité non linéaire, plasticité [Beirao et al, 2015]]
    - En constante expansion

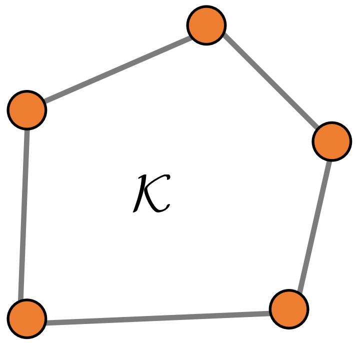


- Objectif de la thèse
  - Etudier le potentiel des VEM pour des discrétisations couplées Ecoulements VF/ Mécanique VEM sur maillages généraux

PLAN

- Principe des VEM
- Quelques résultats pour l’élasticité linéaire
- Poroélasticité
  - Système poroélastique linéaire
  - Discrétisation VEM/VF
  - Résultats numériques
- Bilan/Perspectives

LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS VIRTUELS (VEM)



- Approche récente qui étend les EF aux maillages généraux
  - Polygone, polyèdre, non convexe, déformé
- Principe
  - Formulation faible $a(u,v) =< f, v > \quad \forall v \in V$
  - Espace d'approximation conforme $V_h = \{v_h \in V \;:\; v_h|_{\mathcal{K}} \in V_h^{\mathcal{K}}, \forall \mathcal{K}\}$
  - Dans chaque maille, $V_h^{\mathcal{K}} = P_k + \text{ non } P_k$
    - Projection $\pi^{\mathcal{K}} : V_h^{\mathcal{K}} \longrightarrow P_k(\mathcal{K})$
    - Calculable en fonction des degrés de liberté
  - Forme bilinéaire approchée $a_h^{\mathcal{K}}$

$$a_h^{\mathcal{K}}(u_h, v_h) = a^{\mathcal{K}}(\pi u_h, \pi v_h) + \alpha_{\mathcal{K}} S_h^{\mathcal{K}}(u_h - \pi u_h, v_h - \pi v_h)$$

Consistance

$$a_h^{\mathcal{K}}(p, v_h) = a^{\mathcal{K}}(p, v_h) \; \forall p \in \mathrm{P}_k, v_h \in V_h$$

Stabilité $\exists \alpha^*, \alpha_*, (\text{indépendants de } h) \text{ tq}$

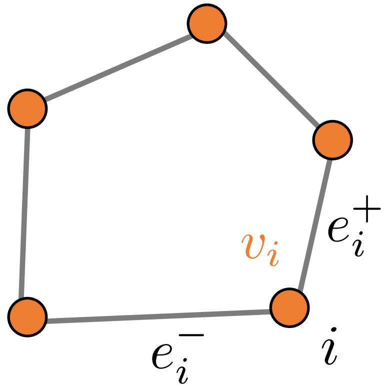
$$\alpha_* a^{\mathcal{K}}(v_h, v_h) \leq a_h^{\mathcal{K}}(v_h, v_h) \leq \alpha^* a^{\mathcal{K}}(v_h, v_h)$$

LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS VIRTUELS (VEM)

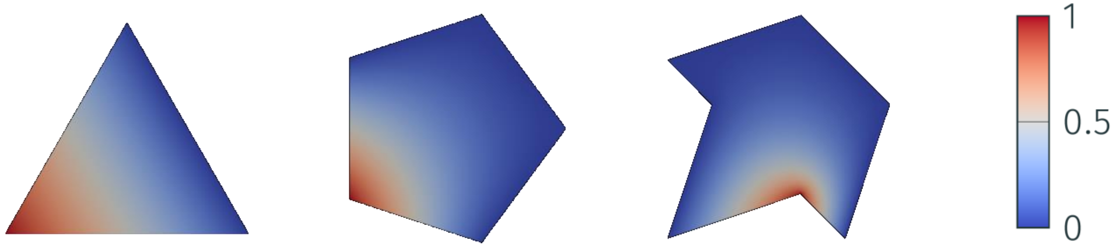
- Pb de Poisson

$$\text{Trouver } u \in V_0 = H_0^1(\Omega) \text{ tel que } a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v =< f, v > \forall v \in V_0$$

- VEM d'ordre 1 en 2D
  - Degrés de liberté : valeurs aux nœuds
  - Espace d'approximation local $V_h^{\mathcal{K}}$
    - $$v_h \in C^0(\partial\mathcal{K}),\ v_h|_e \in \mathrm{P}_1(e)$$
      $$\Delta(v_h) = 0 \text{ dans } \mathcal{K}$$



    - A titre d'illustration, exemples de fonctions de base pour différents types de maille calculées numériquement



    - Mais jamais calculées en pratique

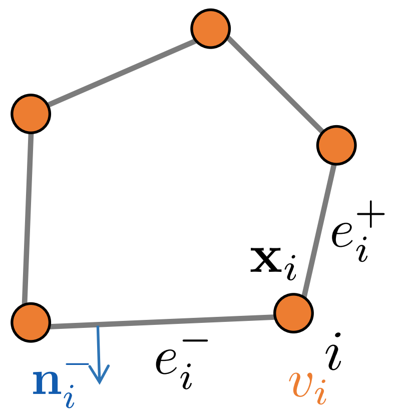
LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS VIRTUELS (VEM)

- VEM d'ordre 1 en 2D
  - Degrés de liberté : valeurs aux nœuds
  - Espace d'approximation local $V_h^{\mathcal{K}}$
    - $$v_h \in C^0(\partial\mathcal{K}),\ v_h|_e \in \mathrm{P}_1(e)$$
      $$\Delta(v_h) = 0 \text{ dans } \mathcal{K}$$
    - Fonctions ne sont pas explicitement connues mais :
      - Gradient moyen calculable à partir des dof et de la géométrie

$$\langle \nabla v_h \rangle_{\mathcal{K}} = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \int_{\mathcal{K}} \nabla v_h = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{e \subset \partial\mathcal{K}} \int_e v_h \, \mathbf{n}_e ds$$

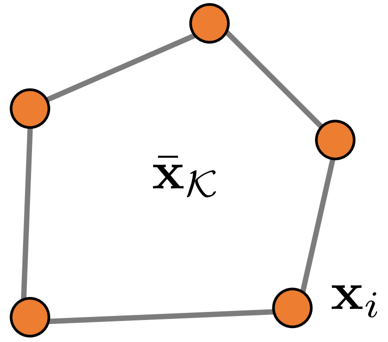
$$\langle \nabla v_h \rangle_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2|\mathcal{K}|} \sum_{i \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}} (|e_i^-|\mathbf{n}_i^- + |e_i^+|\mathbf{n}_i^+) v_i$$

- Valeur moyenne $\bar{v}_{\mathcal{K}} = \frac{1}{N_{\mathcal{K}}} \sum_{i \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}} v_i$



LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS VIRTUELS (VEM)

$$\bar{\mathbf{x}}_{\mathcal{K}} = \frac{1}{N_{\mathcal{K}}} \sum_{i \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}} \mathbf{x}_i$$



Définition d'un projecteur $\pi^{\mathcal{K}} : V_h^{\mathcal{K}} \longrightarrow P_1(\mathcal{K})$

$$\pi^{\mathcal{K}} v(\mathbf{x}) = \langle \nabla v \rangle_{\mathcal{K}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathcal{K}}) + \bar{v}_{\mathcal{K}}$$

$$a^{\mathcal{K}}(p, \pi^{\mathcal{K}} v_h) = \int_{\mathcal{K}} \nabla \pi v_h \cdot \nabla p = \int_{\mathcal{K}} \nabla v_h \cdot \nabla p = a^{\mathcal{K}}(p, v_h) \quad \forall p \in \mathrm{P}_1(\mathcal{K})$$

Formulation faible approchée

$$\text{Trouver } u_h \in V_h^0 \text{ tq } a_h(u_h, v_h) = \sum_{\mathcal{K}} a_h^{\mathcal{K}}(u_h, v_h) =< f_h, v_h > \quad \forall v_h \in V_h^0$$

$$a_h^{\mathcal{K}}(u_h, v_h) = a^{\mathcal{K}}(\pi u_h, \pi v_h) + \sum_{i \in N_{\mathcal{K}}} (u_h - \pi^{\mathcal{K}} u_h)(\mathbf{x}_i)(v_h - \pi^{\mathcal{K}} v_h)(\mathbf{x}_i)$$

Assemblage similaire aux EF

- Calcul des matrices élémentaires sur chaque maille
- Pas d'élément de référence
  - Requiert les quantités géométriques : mesure, normales

ELASTICITÉ LINÉAIRE

- **Modèle**

$$\begin{cases} -\mathbf{div}(\bar{\sigma}) = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \bar{\sigma} = \overline{\overline{C}}\epsilon(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}_D & \text{sur } \Gamma_D \\ \bar{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{g}_N & \text{sur } \Gamma_N \end{cases}$$

$\mathbf{u}$ déplacement

$\bar{\sigma}$ tenseur des contraintes

$\epsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\mathbf{u} + \bar{\nabla}\mathbf{u}^T)$ tenseur des déformations

- **FV**

$$\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_D(\Omega) : a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \overline{\overline{C}}\epsilon(\mathbf{u}) : \epsilon(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}\mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g}_N \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_{D,0}(\Omega)$$

- **Espace local et projection : même principe par composante**

$$\mathbf{V}_h^{\mathcal{K}} = \{\mathbf{v}_h(v_{x,h}, v_{y,h}) \ : \ v_{x,h} \in V_h^{\mathcal{K}}, v_{y,h} \in V_h^{\mathcal{K}}\} \qquad \pi^{\mathcal{K}}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \langle\bar{\nabla}\mathbf{v}\rangle_{\mathcal{K}}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathcal{K}}) + \bar{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}}$$

$$a_h^{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = a^{\mathcal{K}}(\pi\mathbf{u}_h, \pi\mathbf{v}_h) + \alpha_{\mathcal{K}} S_h^{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_h - \pi\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \pi\mathbf{v}_h)$$

Consistance

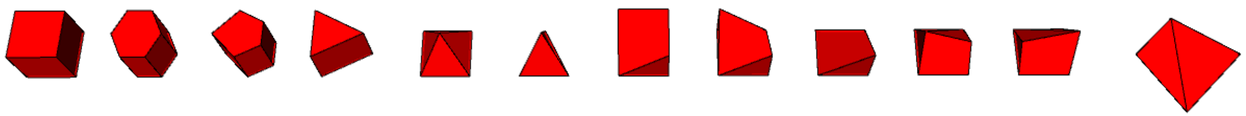
$$a^{\mathcal{K}}(\mathbf{p}, \pi\mathbf{v}_h) = a^{\mathcal{K}}(\mathbf{p}, \mathbf{v}_h)$$
$$\forall \mathbf{p} \in \mathrm{P}_1(\mathcal{K}),\ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

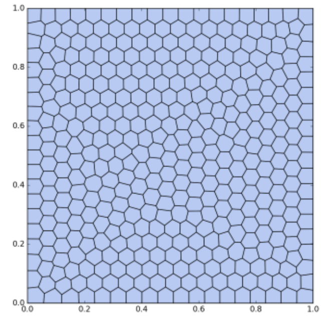
Stabilité

$$S_h^{\mathcal{K}} = \sum_{i \in N_{\mathcal{K}}} (\mathbf{u}_h - \pi^{\mathcal{K}}\mathbf{u}_h)(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{v}_h - \pi^{\mathcal{K}}\mathbf{v}_h)(\mathbf{x}_i)$$
$$\alpha_{\mathcal{K}} = h_{\mathcal{K}}^{d-2} max C_{ijkl,\mathcal{K}}$$

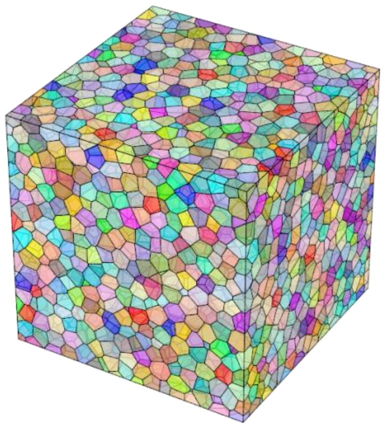
IMPLÉMENTATION SOUS ARCANE/ARCGEOSIM

- Implémentation en 2D et 3D
  - Pas de type polyédrique général pour le moment mais une collection de types de mailles
  - Maillages Arcane standard
    - Polygone jusqu'à 8 sommets en 2D
    - Polyèdres





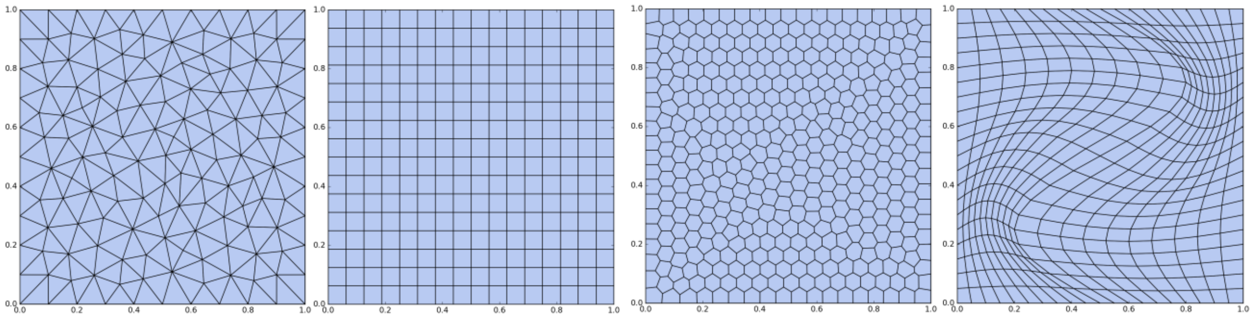
  - Maillages polyédriques plus généraux
    - Solution actuelle
      - Enrichissement de la collection à l'initialisation
        - Fichier mesh.format qui décrit les types présents dans le maillage
        - Fichier mesh.vor qui décrit le maillage
      - Script pour écriture de ces fichiers à partir d'un mesh.vtk
        - Difficulté à factoriser les types
    - Solution inefficace mais permet de tester des méthodes numériques

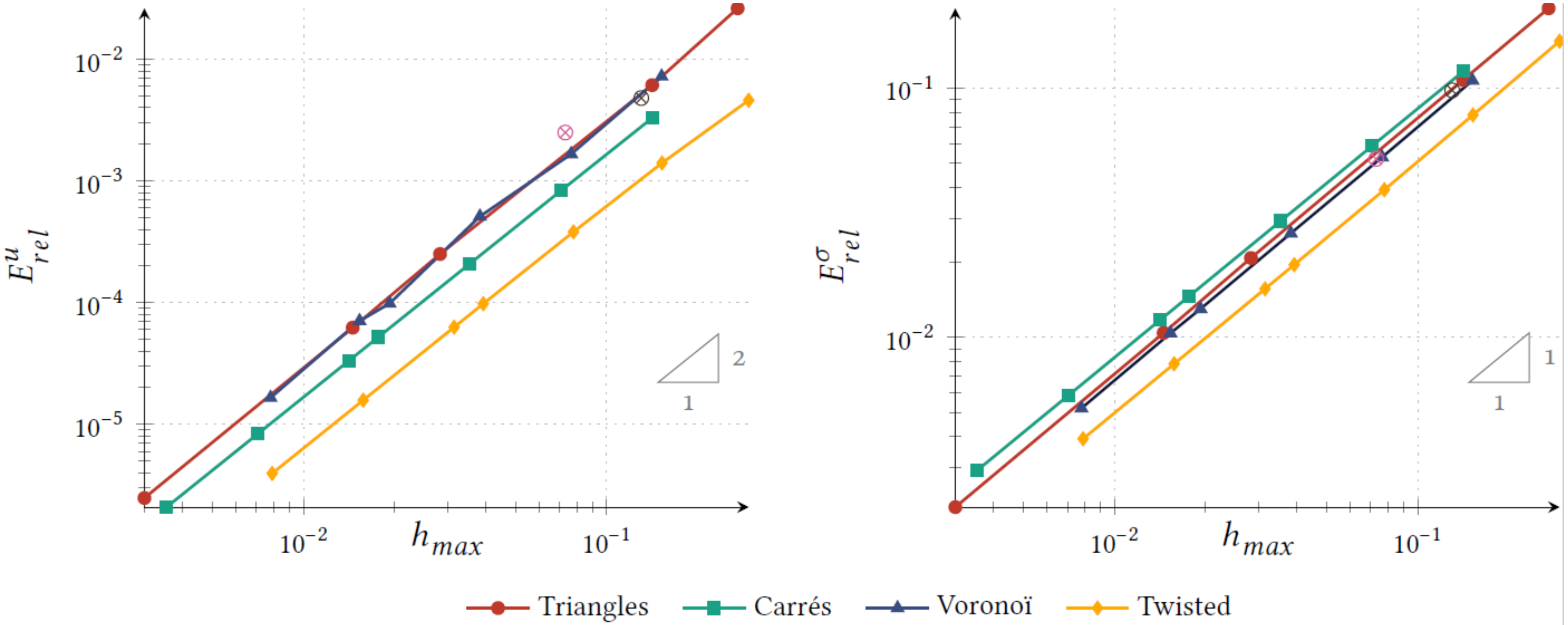


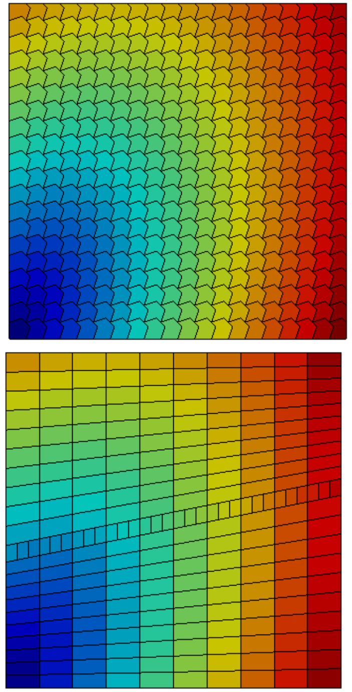
QUELQUES RÉSULTATS POUR L'ÉLASTICITÉ

- Elasticité 2D, isotrope $\Omega = [0,1] \times [0,1]$
  - Module d'Young : $E = 5.10^9$
  - Coeff. De Poisson $\nu = 0.3$

$$\mathbf{u}_{ex}(x,y) = \begin{pmatrix} 0.01xy \\ -0.02xy \end{pmatrix}$$





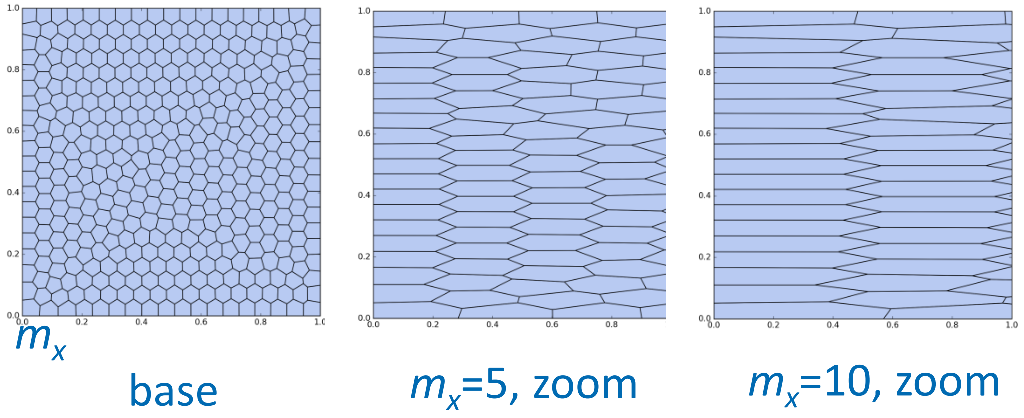


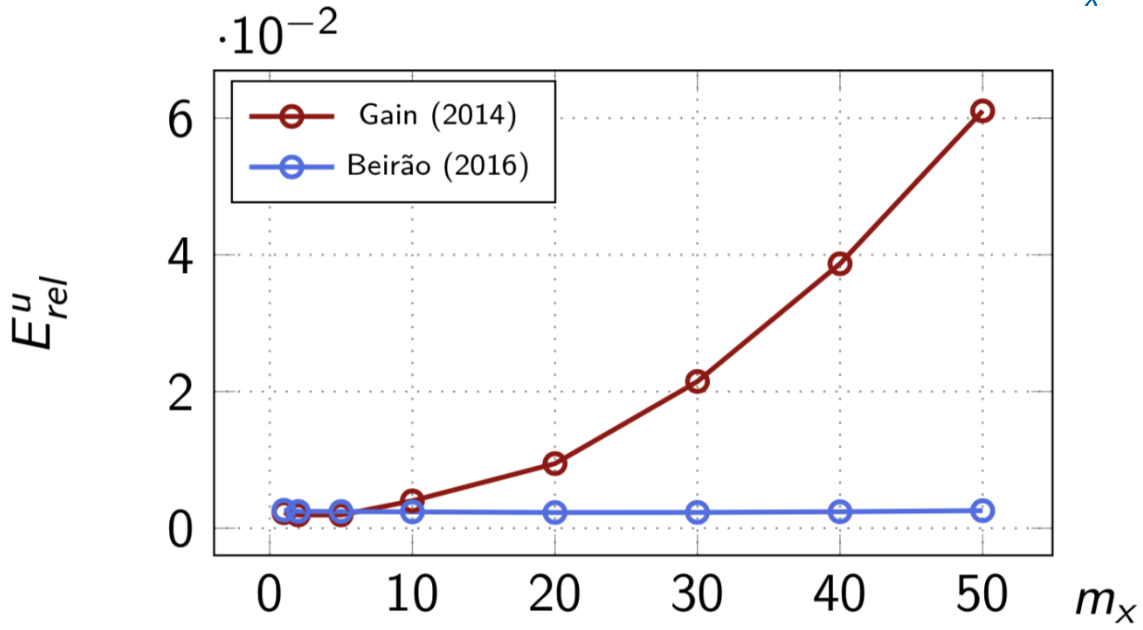
 |

QUELQUES RÉSULTATS POUR L'ÉLASTICITÉ

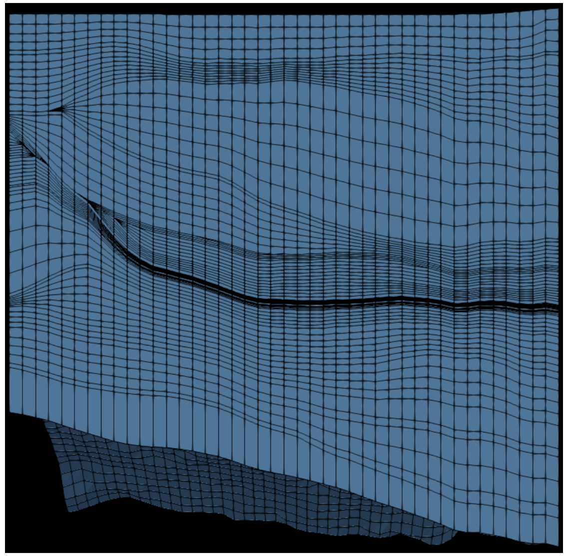
- Robustesse par rapport à la distorsion
  - Déformation d'un maillage de base

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} m_x x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

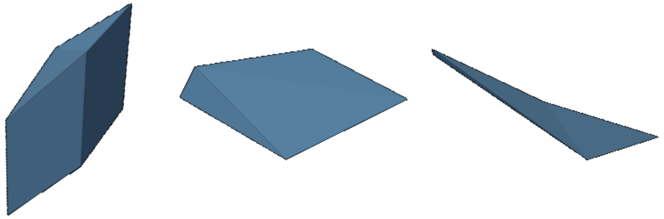




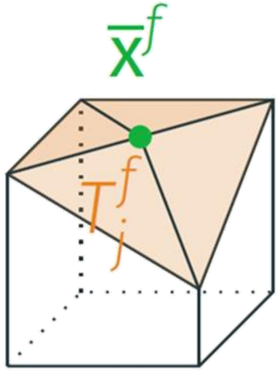
QUELQUES RÉSULTATS POUR L'ÉLASTICITÉ

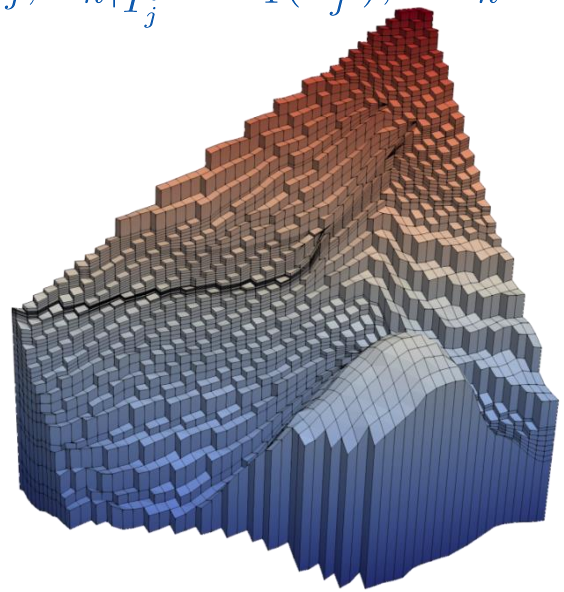


- Elasticité 3D, isotrope
  - Maillage extrait d'un cas réel
  - Mailles déformées, dégénérées



  - Approche [Chi et al, 2017]
    - Faces non planes triangulées à partir de l'isobarycentre
    - $V_h^{\mathcal{K}} = \{v_h \in H^1(\mathcal{K}) \ : \ v_h|_{\partial\mathcal{K}} \in \mathcal{C}^0(\partial\mathcal{K}),\ v_h(\bar{\mathbf{x}}_f) = \frac{1}{N_f}\sum_j v_j,\ v_h|_{T_j^f} \in P_1(T_j^f),\ \Delta v_h = 0 \text{ dans } \mathcal{K}\}$
  - Exacte pour les solutions linéaires





POROÉLASTICITÉ

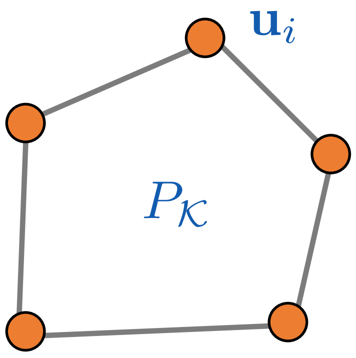
- Equilibre mécanique, Conservation de la masse (fluide faiblement compressible)

$$\text{Dans } \Omega \times [0,T] : \begin{cases} -\mathbf{div}(\bar{\sigma} - \alpha P \overline{\mathrm{Id}}) = \mathbf{f} & (1) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\alpha \mathrm{div}\mathbf{u} + c_0 P) + \mathrm{div}(-K\nabla P) = q & (2) \end{cases}$$

P Pression

$\mathbf{u} = \mathbf{0},\ P = 0 \text{ sur } \Gamma,\ CI$

- Discrétisation
  - VEM pour (1), VF centré sur les mailles pour (2)
  - Euler implicite



$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - \sum_{\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}}^n \int_{\mathcal{K}} \alpha \mathrm{div}\mathbf{v}_h =< \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h > \ \forall \mathbf{v}_h$$

$$\int_{\mathcal{K}} \alpha \mathrm{div}\mathbf{u}_h^n + |\mathcal{K}| c_{0,\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}}^n + \Delta t \sum_{f \subset \partial\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},f}^n = \Delta t \int_{\mathcal{K}} q + \int_{\mathcal{K}} \alpha \mathrm{div}\mathbf{u}_h^{n-1} + |\mathcal{K}| c_{0,\mathcal{K}} P_{\mathcal{K}}^{n-1} \ \forall \mathcal{K}$$

- Approximation des flux $F_{\mathcal{K},f} = \sum_{\mathcal{K}'} t_{f,\mathcal{K}'} P_{\mathcal{K}'}$
  - Schémas VF TPFA et O-scheme disponibles sous ArcGeoSim

POROÉLASTICITÉ

- Analyse du schéma pour VEM-TPFA
  - Existence, unicité de la solution, à chaque pas de temps
  - Stabilité
  - Estimation d'erreur
    - Sous des hyp. de régularité suffisante
    - Erreur d'approximation E^A
    - Erreur d'interpolation/projection E^I

$$\|E_{\mathbf{u}}^{A,N}\|_{H^1}^2 + \|E_P^{A,N}\|_{L_2}^2 + \sum_{n=1}^{N} \Delta t \|E_P^{A,n}\|_{H^1(\mathcal{T})}^2 \leq B(h^2 + \Delta t^2 + |E^I|)$$

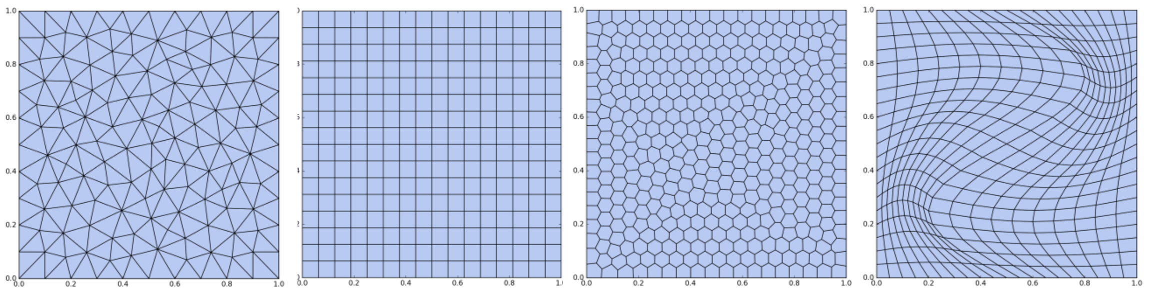
$$\|E_{\mathbf{u}}^{A}\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \|E_P^{A}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|E_P^{A}\|_{L^2(0,T;H^1(\mathcal{T}))}^2 \leq C(h^2 + \Delta t^2)$$

POROELASTICITÉ

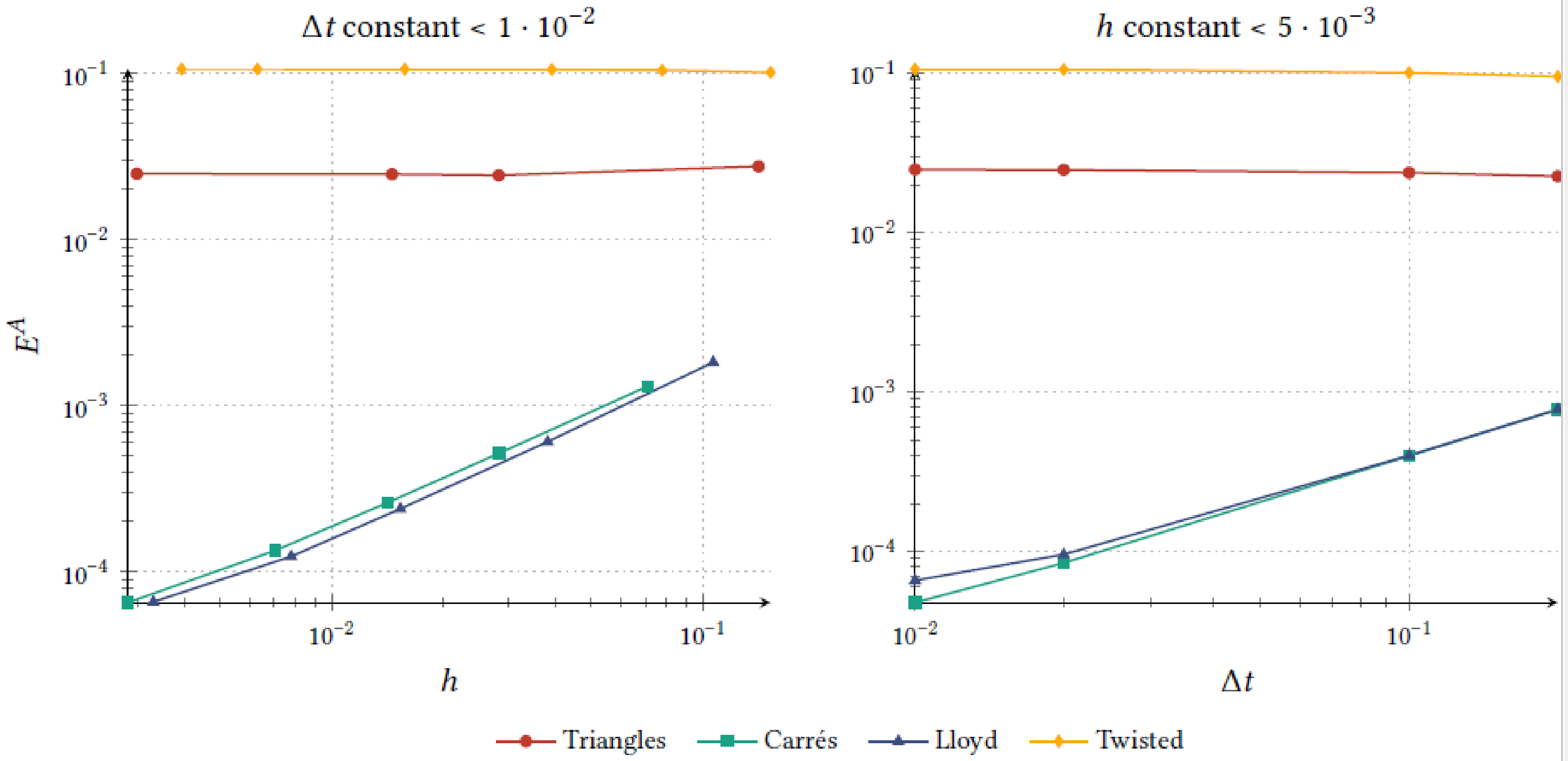
$$\mathbf{u}_{ex}(x,y,t) = 10^{-2}e^{-t}\begin{pmatrix} x^2y \\ -xy^2 \end{pmatrix}$$

$$P_{ex}(x,y,t) = e^{-t} sin\frac{x}{\sqrt{2}} sin\frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = 1,\ c_0 = 0.5,\ T = 1$$



VEM-TPFA



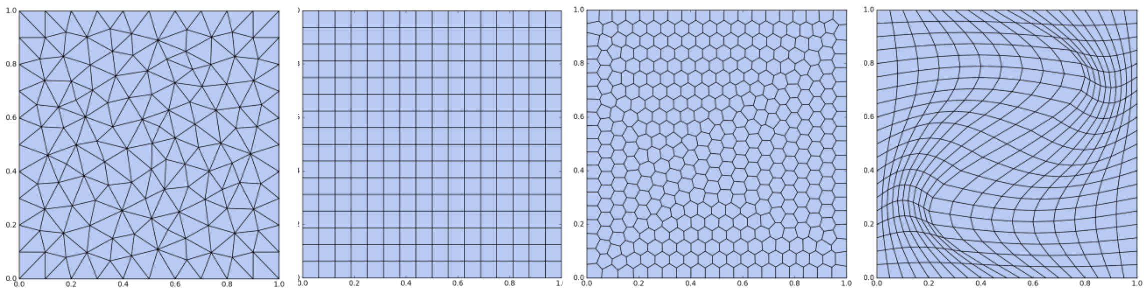
 |

POROELASTICITÉ

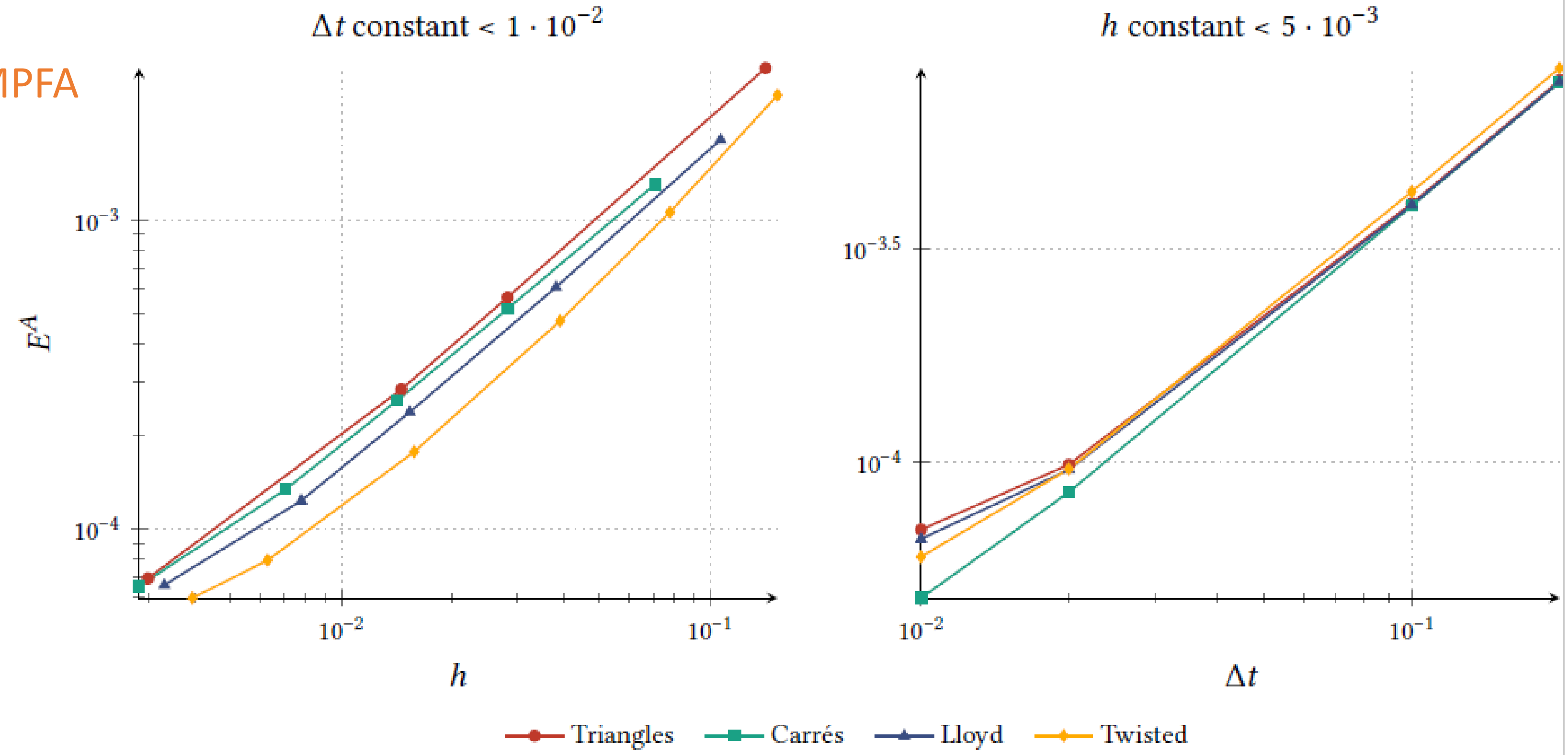
$$\mathbf{u}_{ex}(x,y,t) = 10^{-2}e^{-t}\begin{pmatrix} x^2y \\ -xy^2 \end{pmatrix}$$

$$P_{ex}(x,y,t) = e^{-t} sin\frac{x}{\sqrt{2}} sin\frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = 1,\ c_0 = 0.5,\ T = 1$$



VEM-MPFA

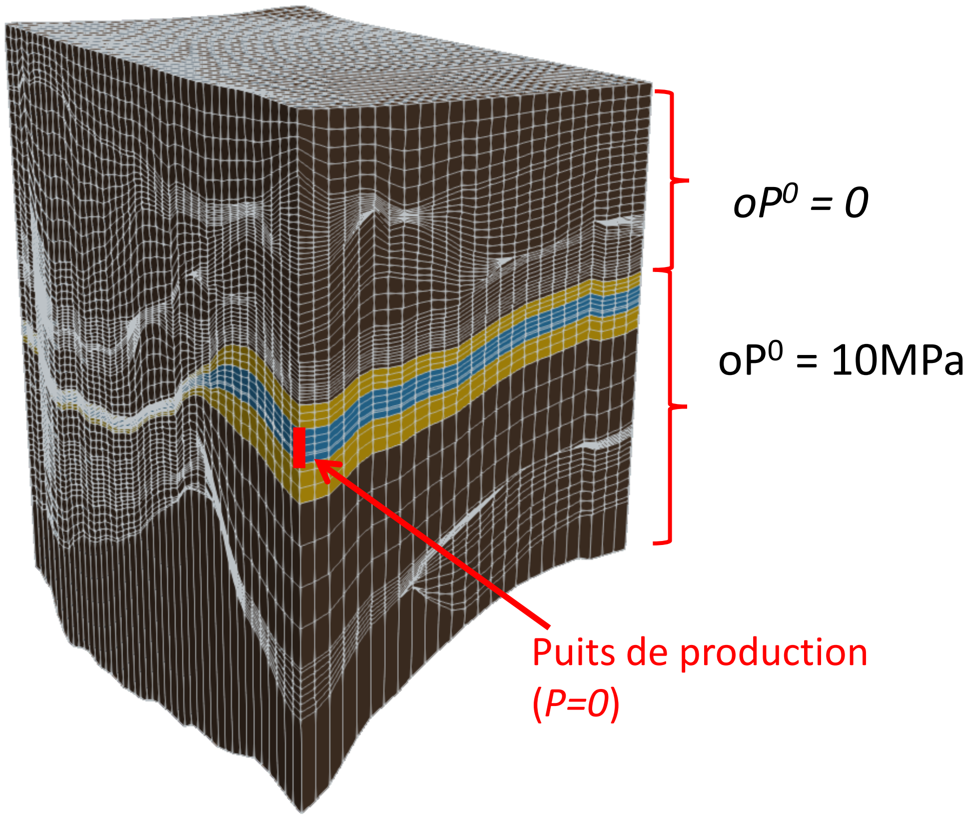


POROELASTICITÉ

- Cas réaliste
  - Milieu multi-couches

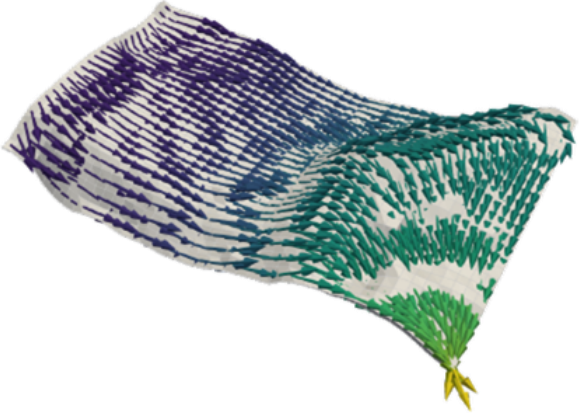
	κ	ϕ	E	ν
Sandstone ■	10^{-9}	0.2	$5 \cdot 10^9$	0.3
Shale ■	10^{-15}	0.1	$5 \cdot 10^9$	0.3
Reservoir ■	10^{-9}	0.3	$1 \cdot 10^9$	0.3

  - Surpression initiale
  - Puits de production

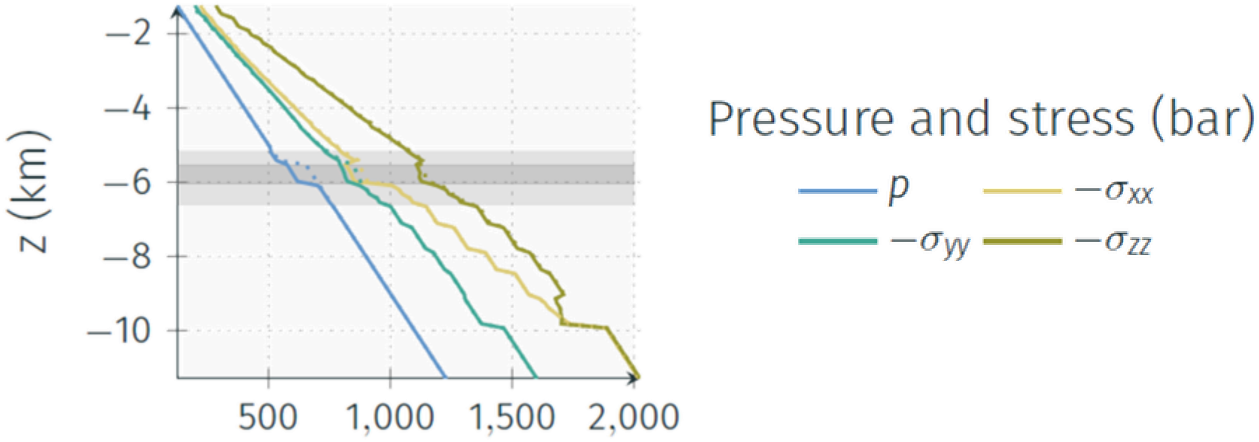


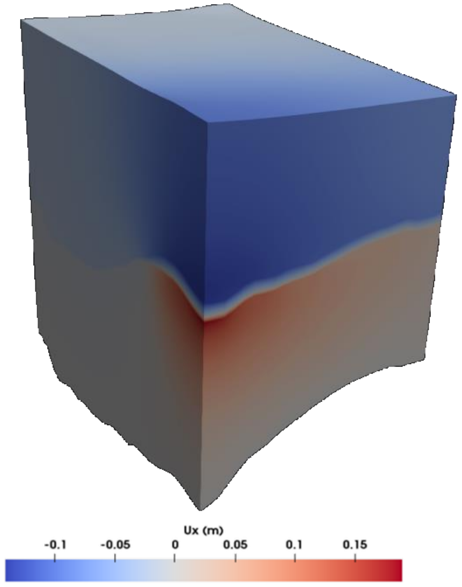
POROELASTICITÉ

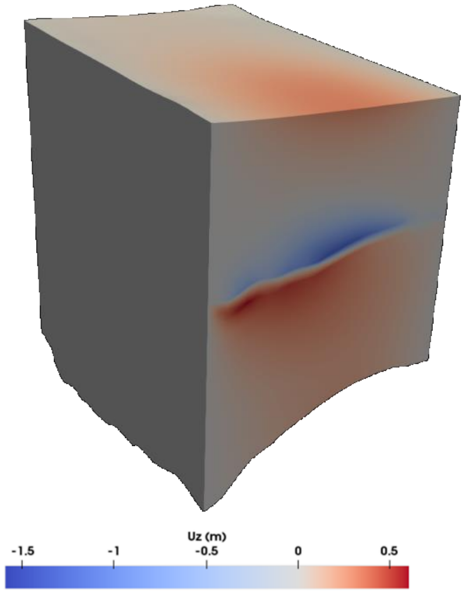
Horizontal slice
in the reservoir

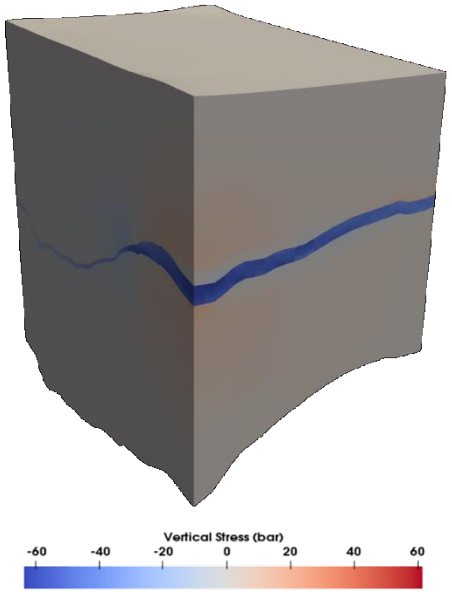


Vertical line near the well









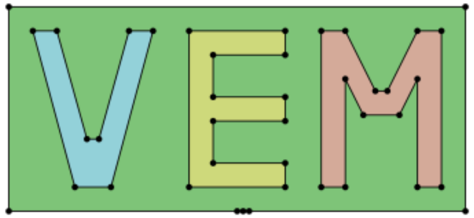
BILAN - PERSPECTIVES

- Discrétisation VEM/VF pertinente pour la poroélasticité
  - Maillages généraux
  - Analyse VEM/TPFA
  - Résultats numériques VEM/MPFA

- Résolution du système linéaire en déplacement, pression
  - Résolution itérative de type « Fixed-stress »
  - Préconditionneur DDML pour le déplacement (GenEO [Spillane 2014])

- Perspectives
  - Autres schémas VF (NLTPFA, …)
  - Mécanique et/ou écoulements plus complexes
  - Maillages polyédriques généraux pour les sous-sols complexes
    - Génération de maillage
    - Nouveau type de maillage dans Arcane

RÉFÉRENCES



[Beirao et al. 2013a] L. Beirão Da Veiga et al. « Basic principles of virtual element methods ». In : Mathematical Models & Methods in applied sciences 23.1 (2013), p. 199-214

[Beirao et al. 2013b] L. Beirão Da Veiga, F. Brezzi et L.D. Marini. « Virtual Elements for Linear Elasticity Problems ». In : SIAM Journal on Numerical Analysis 51.2 (2013), p. 794-812.

[Beirao et al. 2015] L. Beirão Da Veiga, C. Lovadina et D. Mora. « A Virtual Element Method for elastic and inelastic problems on polytope meshes ». In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 295 (2015), p. 327-346.

Arun L. Gain, Cameron Talischi et Glaucio H. Paulino. « On the Virtual Element Method for three-dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes ». In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 282 (2014), p. 132-160

[Chi et al. 2017] H. Chi, L. Beirão Da Veiga et G.H. Paulino. « Some basic formulations of the virtual ele- ment method (VEM) for finite deformations ». In : Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 318 (2017), p. 148-192

N. Spillane, V. Dolean, P. Hauret, F. Nataf, C. Pechstein et R. Scheichl. « Abstract ro- bust coarse spaces for systems of PDEs via generalized eigenproblems in the overlaps ». In : *Numerische Mathematik* 126.4 (2014), p. 741-770.

N. Spillane. « Robust domain decomposition methods for symmetric positive definite pro- blems ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014.

Innover les énergies

Retrouvez-nous sur :

www.ifpenergiesnouvelles.fr

@IFPENinnovation