

UNIOESTE
Ciência da Computação

Sistemas Digitais
Minimização

Prof. Jorge Habib El Khouri
Prof. Antonio Marcos Hachisuca

2020

Referências Bibliográficas

1. *Digital Fundamentals*, Thomas L. Floyd; Editora: Pearson; Edição: 11; Ano: 2015;
2. *Sistemas Digitais Princípios e Aplicações*, Ronald J. Tocci; Editora: Pearson; Edição: 11; Ano: 2011;
3. *Computer Organization and Design*, David A. Patterson; Editora: Elsevier; Edição: 1; Ano: 2017
4. *Digital Design: Principles and Practices*, John F. Wakerly; Editora: Pearson; Edição: 5; Ano: 2018;
5. *Guide to Assembly Language Programming in Linux*, Sivarama P. Dandamudi; Editora: Springer; Edição: 1; Ano: 2005.

Regras Básicas da Álgebra Booleana

Comutativa

$$A + B = B + A$$

$$AB = BA$$

Associativa

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Distributiva

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A + 0 = A$$

$$A + 1 = 1$$

$$A + A = A$$

$$A + \bar{A} = 1$$

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$A \cdot 0 = 0$$

$$A \cdot 1 = A$$

$$A \cdot A = A$$

$$A \cdot \bar{A} = 0$$

$$\overline{X \cdot Y \cdot Z} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z}$$

$$A \oplus 0 = A$$

$$A \oplus 1 = \bar{A}$$

$$A \oplus A = 0$$

$$A \oplus \bar{A} = 1$$

$$A + AB = A$$

$$A + \bar{A}B = A + B$$

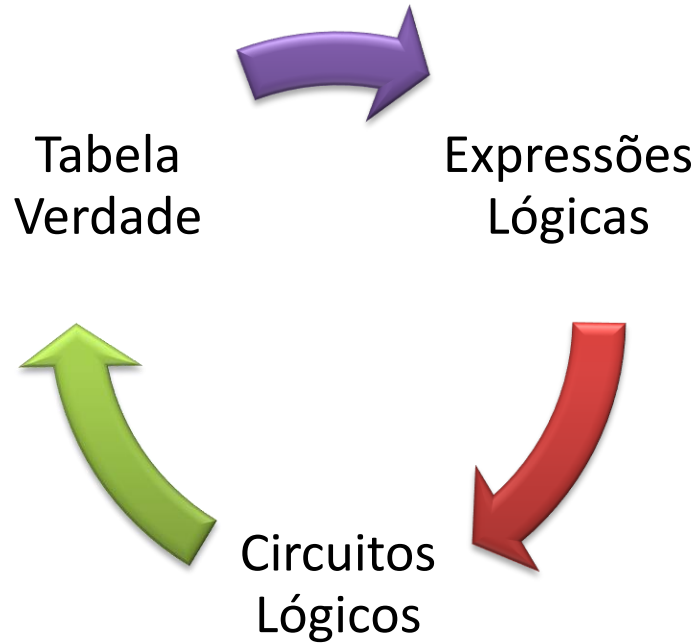
$$(A + B)(A + C) = A + BC$$

$$A \oplus B = A\bar{B} + \bar{A}B$$

$$\overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\bar{B}$$

$$\overline{X + Y + Z} = \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z}$$

Transformações entre Representações Lógicas



Expressão Lógica → Tabela Verdade

$$X = (A + B) \cdot \bar{C}$$



2^3 linhas

3 variáveis

A	B	C	$A + B$	\bar{C}	X
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Técnica alternativa: Desenvolver a expressão de tal forma que suas parcelas fiquem completas com todas as variáveis. Para isto aplicar as diversas regras.

$$X = (A + B) \cdot \bar{C}$$

$$X = A\bar{C} + B\bar{C}$$

$$X = A\bar{C}(B + \bar{B}) + B\bar{C}(A + \bar{A})$$

$$X = A\bar{C}B + A\bar{C}\bar{B} + B\bar{C}A + B\bar{C}\bar{A}$$

$$X = AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$$

$$X = AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$$

Expressão Lógica → Tabela Verdade

$$X = (A + B) \cdot \bar{C}$$



$$X = AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C}$$

$$X = 110 + 100 + 010$$

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>X</i>
	0	0	0	0
	0	0	1	0
010	0	1	0	1
	0	1	1	0
100	1	0	0	1
	1	0	1	0
110	1	1	0	1
	1	1	1	0

...continuação

Tabela Verdade \rightarrow Expressão Lógica

Soma dos Produtos - SOP

$$X = f(A, B, C)$$

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

 $\bar{A}B\bar{C}$

 $A\bar{B}\bar{C}$

 $AB\bar{C}$



$$X = \sum (2, 4, 6)$$





$$X = \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C}$$


Tabela Verdade \rightarrow Expressão Lógica


Produto das Somas - POS


A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

 $A + B + C$

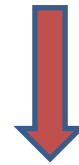
 $A + B + \bar{C}$

 $A + \bar{B} + \bar{C}$

 $\bar{A} + B + \bar{C}$

 $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

 $X = \prod_{(0,1,3,5,7)}$



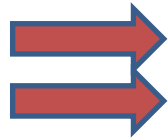
$$X = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + B + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

Soma dos Produtos - SOP

XOR

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>X</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$X = A \oplus B$$

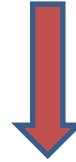


$$\bar{A}B$$

$$A\bar{B}$$



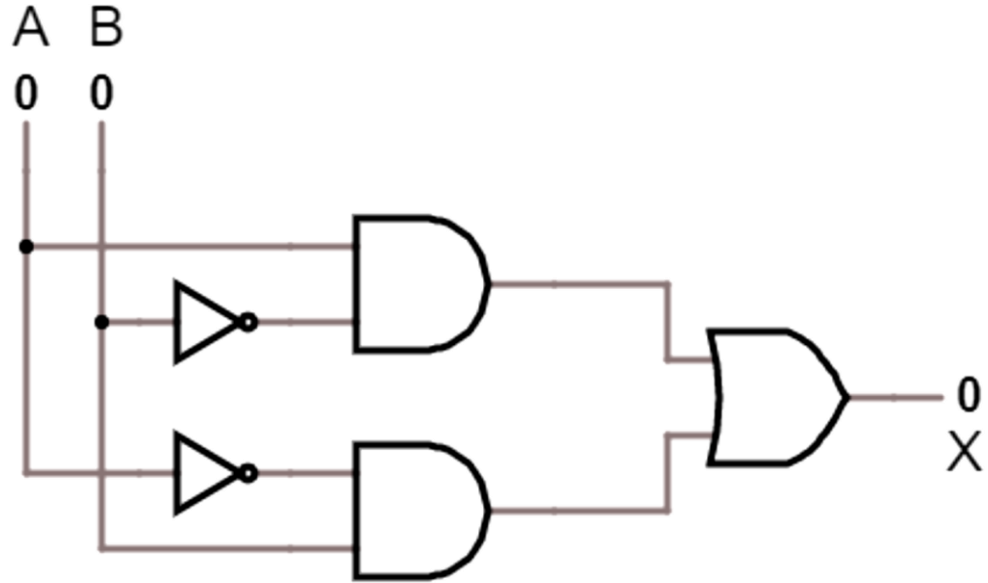
$$X = \sum (1,2)$$



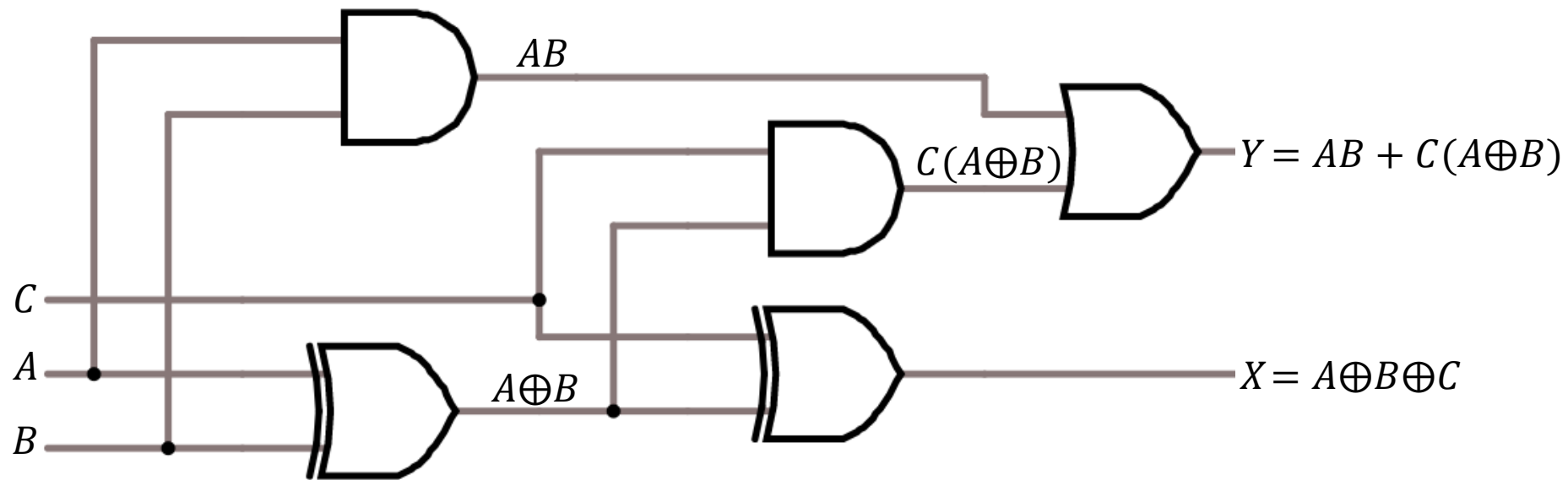
$$X = \bar{A}B + A\bar{B}$$

Exemplo

$$X = \bar{A}B + A\bar{B}$$

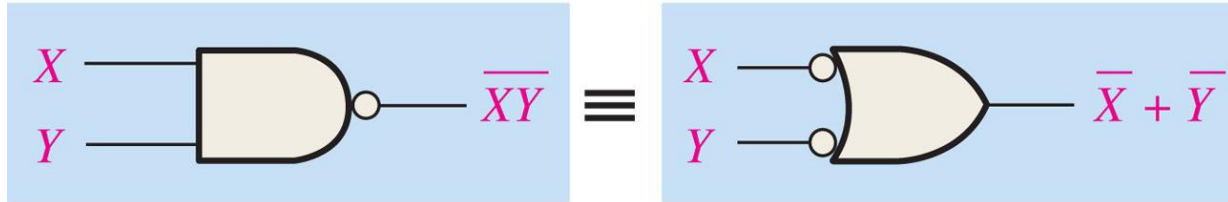


Circuito Lógico → Expressão Lógica



Teorema de DeMorgan

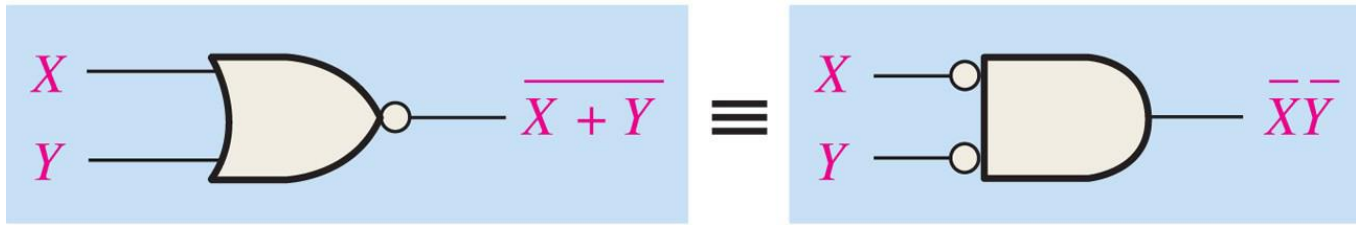
$$\overline{X \cdot Y} = \bar{X} + \bar{Y}$$



NAND

Negative-OR

$$\overline{X + Y} = \bar{X} \cdot \bar{Y}$$



NOR

Negative-AND

$$\overline{X \cdot Y \cdot Z \cdot W} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z} + \bar{W}$$

$$\overline{X + Y + Z + W} = \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Z} \cdot \bar{W}$$

Exemplo

$$X = A \oplus B$$

$$X = \bar{A}B + A\bar{B}$$

$$\bar{X} = \overline{A \oplus B} = A \odot B = \overline{\bar{A}B + A\bar{B}}$$

$$\begin{aligned}\overline{\bar{A}B + A\bar{B}} &= \overline{\bar{A}B} \cdot \overline{A\bar{B}} = (\bar{\bar{A}} + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + \bar{\bar{B}}) = \\ &= (A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} + B) = A\bar{A} + AB + \bar{A}\bar{B} + B\bar{B} = \\ &= \overline{A \oplus B} = AB + \bar{A}\bar{B}\end{aligned}$$

Mapa de Karnaugh

Mapa de Karnaugh (K-map) é um método para simplificar lógica combinacional de até 6 variáveis. Para 3 variáveis, são necessárias 8 (2^3) células.

- O mapa mostrado é para três variáveis rotuladas A, B e C. Cada célula representa um possível termo do produto.
- Células adjacentes são aquelas células que diferem por apenas uma variável.
- Células adjacentes podem estar espacialmente distantes.

AB \ C		0	1
00	00	0	1
	01	2	3
	11	6	7
	10	4	5

AB \ C		0	1
00	00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ 0	$\bar{A}\bar{B}C$ 1
	01	$\bar{A}B\bar{C}$ 2	$\bar{A}BC$ 3
	11	$AB\bar{C}$ 6	ABC 7
	10	$A\bar{B}\bar{C}$ 4	$A\bar{B}C$ 5

Mapa de Karnaugh

Exemplo:

	A	B	C	X
	0	0	0	0
	0	0	1	0
010	0	1	0	1
	0	1	1	0
100	1	0	0	1
	1	0	1	0
110	1	1	0	1
	1	1	1	0

1. Agrupar os 1's em grupos de 1, 2, 4 ou 8 células. Neste caso são dois grupos sobrepostos.
2. Interprete cada grupo, eliminando as variáveis que se alteram entre as células adjacentes.

		\bar{C}	C
	$AB \backslash C$	0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	1
$\bar{A}B$	01	1	3
AB	11	1	7
$A\bar{B}$	10	1	5

$$\boxed{B\bar{C}} + \boxed{A\bar{C}}$$

$$(A + B)\bar{C}$$

Mapa de Karnaugh

Exemplo:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>X</i>
000	0	0	0	1
	0	0	1	0
	0	1	0	0
	0	1	1	0
100	1	0	0	1
	1	0	1	0
110	1	1	0	1
111	1	1	1	1

1. Agrupar os 1's em grupos de 1, 2, 4 ou 8 células. Neste caso são dois grupos sobrepostos.
2. Interprete cada grupo, eliminando as variáveis que se alteram entre as células adjacentes.

		\bar{C}	<i>C</i>
<i>AB</i> \ <i>C</i>		0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀	₁
$\bar{A}B$	01	₂	₃
AB	11	1 ₆	1 ₇
$A\bar{B}$	10	1 ₄	₅

$$AB + \bar{B}\bar{C}$$

Mapa de Karnaugh

Exemplo:

$$F = \Sigma (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

		\bar{C}	C
$AB \backslash C$		0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	1	1
$\bar{A}B$	01	1	1
AB	11	1	
$A\bar{B}$	10	1	1

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

Mapa de Karnaugh

Exemplo:

$$F = \Sigma (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) = \Pi(7)$$

		\bar{C}	C
		0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	0	1
$\bar{A}B$	01	2	3
AB	11	6	7
$A\bar{B}$	10	4	5

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

Exemplo: Como agrupar?

		\bar{C}	C
		0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀	1 ₁
$\bar{A}B$	01	2	1 ₃
AB	11	1 ₆	1 ₇
$A\bar{B}$	10	4	5

$$\boxed{BC} + \boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{C}} + \boxed{AB}$$

Exemplo: Como agrupar?

		\bar{C}	C
		0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀	1 ₁
$\bar{A}B$	01	1 ₂	
AB	11		1 ₇
$A\bar{B}$	10	1 ₄	1 ₅

$$\boxed{AC} + \boxed{\bar{A}} + \boxed{\bar{A}\bar{C}}$$

Exemplo: Como agrupar e qual a função?

		\bar{C}	C
	$AB \backslash C$	0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀	1 ₁
$\bar{A}B$	01	1 ₂	0 ₃
AB	11	1 ₆	1 ₇
$A\bar{B}$	10	1 ₄	1 ₅

$$A + \bar{B} + \bar{C}$$

Exemplo: Como agrupar e qual a função?

		\bar{C}	C
		C	
$AB \backslash C$		0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀	0 ₁
$\bar{A}B$	01	1 ₂	0 ₃
AB	11	1 ₆	1 ₇
$A\bar{B}$	10	1 ₄	0 ₅

$$(\bar{C} + A) \cdot (\bar{C} + B)$$

Mapa de Karnaugh

Exemplo: Como agrupar e qual a função?

		\bar{C}	C
		0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀	0 ₁
$\bar{A}B$	01	1 ₂	0 ₃
AB	11	1 ₆	1 ₇
$A\bar{B}$	10	1 ₄	0 ₅

$$\boxed{\bar{C}} + \boxed{AB}$$

$$(\bar{C} + A) \cdot (\bar{C} + B)$$

$$\bar{C}\bar{C} + \bar{C}B + A\bar{C} + AB$$

$$\bar{C} + \bar{C}B + A\bar{C} + AB$$

$$\bar{C}(1 + B + A) + AB$$

$$\bar{C} \cdot 1 + AB$$

$$\bar{C} + AB$$

Mapa de Karnaugh

Exemplo:

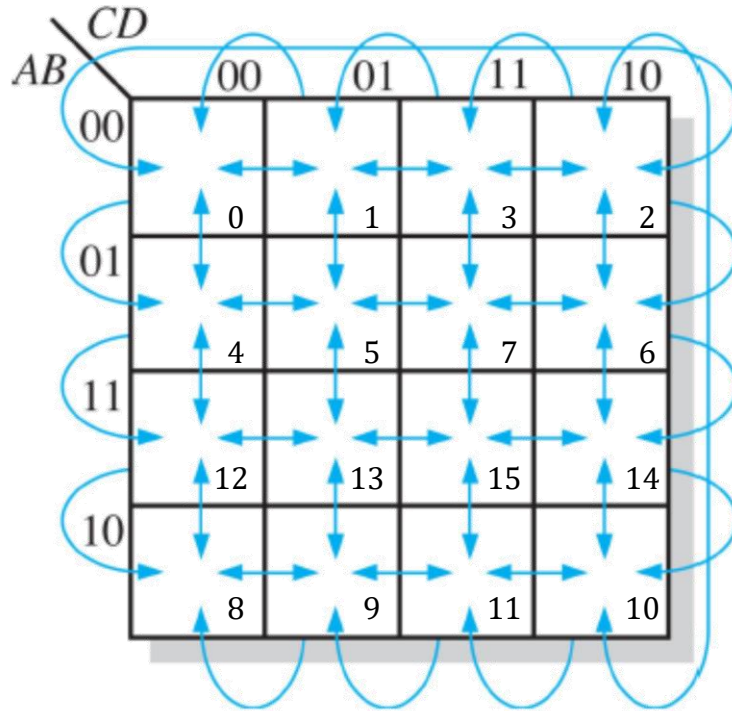
$$F = \Sigma (0, 1, 6, 7)$$

		\bar{C}	C
		0	1
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀	1 ₁
$\bar{A}B$	01		
AB	11	1 ₆	1 ₇
$A\bar{B}$	10		

$$\bar{A}\bar{B} + AB$$

Mapa de Karnaugh

Quatro variáveis



O mapa com 4 variáveis possui células adjacentes em todas as bordas

Quatro variáveis

AB \ CD				
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

AB \ CD				
	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ 1	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$ 3	$\bar{A}\bar{B}CD$ 2
01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ 4	$\bar{A}B\bar{C}D$ 5	$\bar{A}BC\bar{D}$ 7	$\bar{A}BCD$ 6
11	$AB\bar{C}\bar{D}$ 12	$AB\bar{C}D$ 13	$ABC\bar{D}$ 15	$ABCD$ 14
10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ 8	$A\bar{B}\bar{C}D$ 9	$A\bar{B}C\bar{D}$ 11	$A\bar{B}CD$ 10

Mapa de Karnaugh

Exemplo: Como agrupar e qual a função?

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$AB \backslash CD$		00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀			1 ₂
$\bar{A}B$	01	1 ₄			1 ₆
AB	11		1 ₁₃	1 ₁₅	
$A\bar{B}$	10		1 ₉	1 ₁₁	

$$\boxed{AD} + \boxed{\bar{A}\bar{D}}$$

Mapa de Karnaugh

Exemplo: Como agrupar e qual a função? $F_2 = \Sigma (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 13, 14, 15)$

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$AB \backslash CD$		00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00			1	1
$\bar{A}B$	01	1	1	1	1
AB	11	1	1	1	1
$A\bar{B}$	10		1		

$$\boxed{B} + \boxed{\bar{A}C} + \boxed{A\bar{C}D}$$

Exemplo: Como agrupar?

AB \ C	0	1
00	1	
01		1
11	1	1
10		

(a)

AB \ C	0	1
00	1	1
01	1	
11		1
10	1	1

(b)

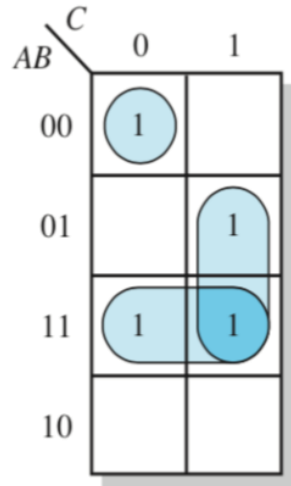
AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01	1	1	1	1
11				
10		1	1	

(c)

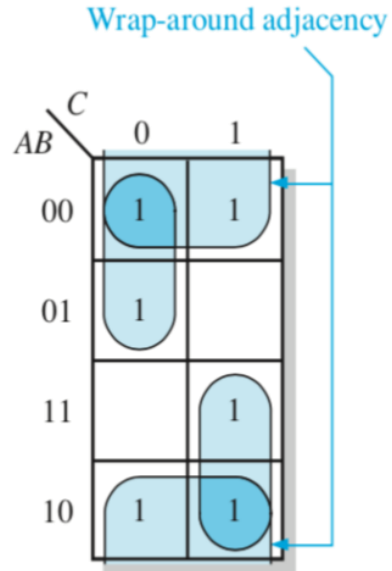
AB \ CD	00	01	11	10
00	1			1
01	1	1		1
11	1	1		1
10	1		1	1

(d)

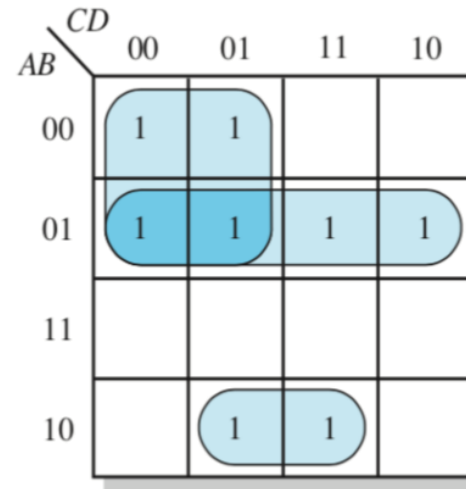
Exemplo: Como agrupar?



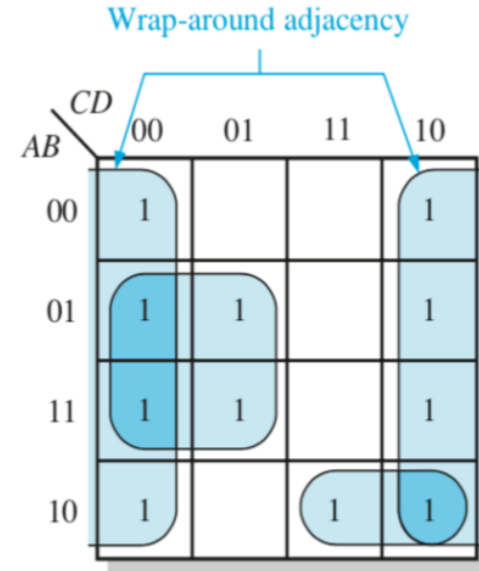
(a)



(b)

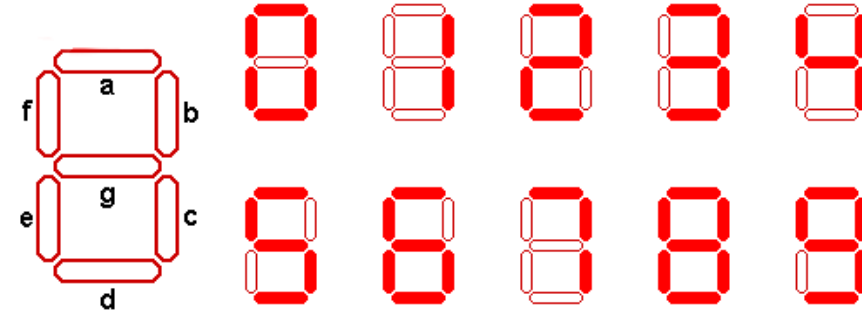
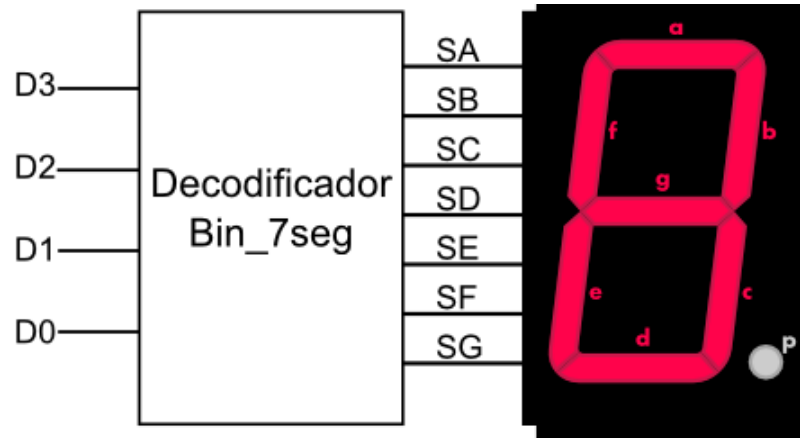


(c)



(d)

Exemplo: Display de 7 segmentos: Função para o segmento a .



$$f_a = \sum(0,2,3,5,6,7,8,9)$$

Mapa de Karnaugh

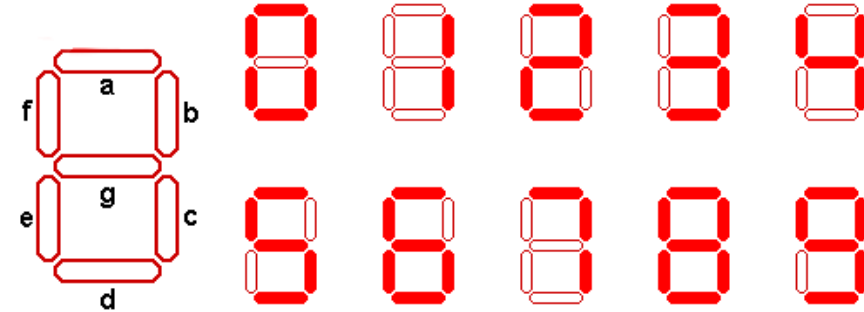
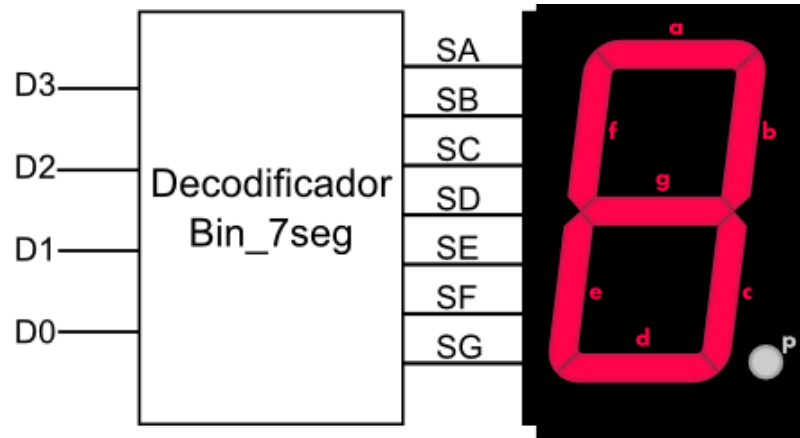
Exemplo: Como agrupar e qual a função? $f_a = \sum(0,2,3,5,6,7,8,9)$

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$AB \backslash CD$		00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀		1 ₃	1 ₂
$\bar{A}B$	01		1 ₅	1 ₇	1 ₆
AB	11	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₅	X ₁₄
$A\bar{B}$	10	1 ₈	1 ₉	X ₁₁	X ₁₀

$$\boxed{A} + \boxed{C} + \boxed{BD} + \boxed{\bar{B}\bar{D}}$$

$X = \text{Don't Care}$

Exemplo: Display de 7 segmentos: Função para o segmento c .



$$f_c = \sum(0,1,3,4,5,6,7,8,9)$$

Mapa de Karnaugh

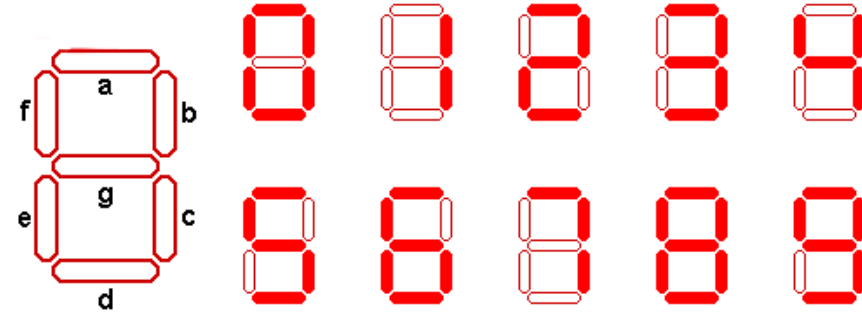
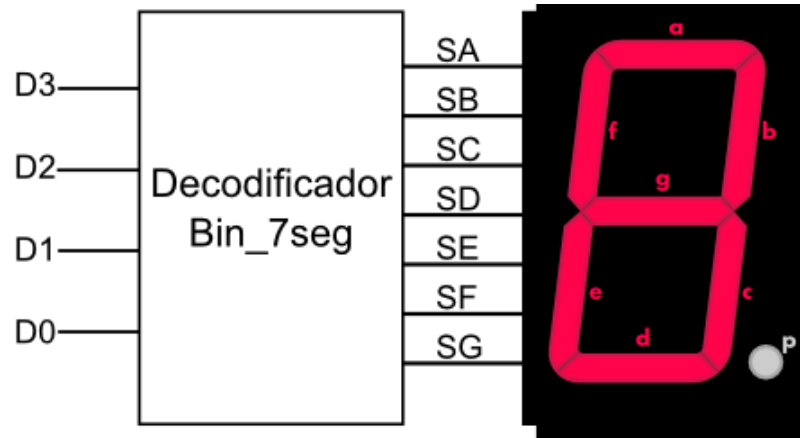
Exemplo: Como agrupar e qual a função? $f_c = \Sigma(0,1,3,4,5,6,7,8,9)$

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$AB \backslash CD$		00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀	1 ₁	1 ₃	
$\bar{A}B$	01	1 ₄	1 ₅	1 ₇	1 ₆
AB	11	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₅	X ₁₄
$A\bar{B}$	10	1 ₈	1 ₉	X ₁₁	X ₁₀

$$\bar{C} + B + D$$

$X = \text{Don't Care}$

Exemplo: Display de 7 segmentos: Função para o segmento e .



$$f_e = \Sigma(0,2,6,8)$$

Mapa de Karnaugh

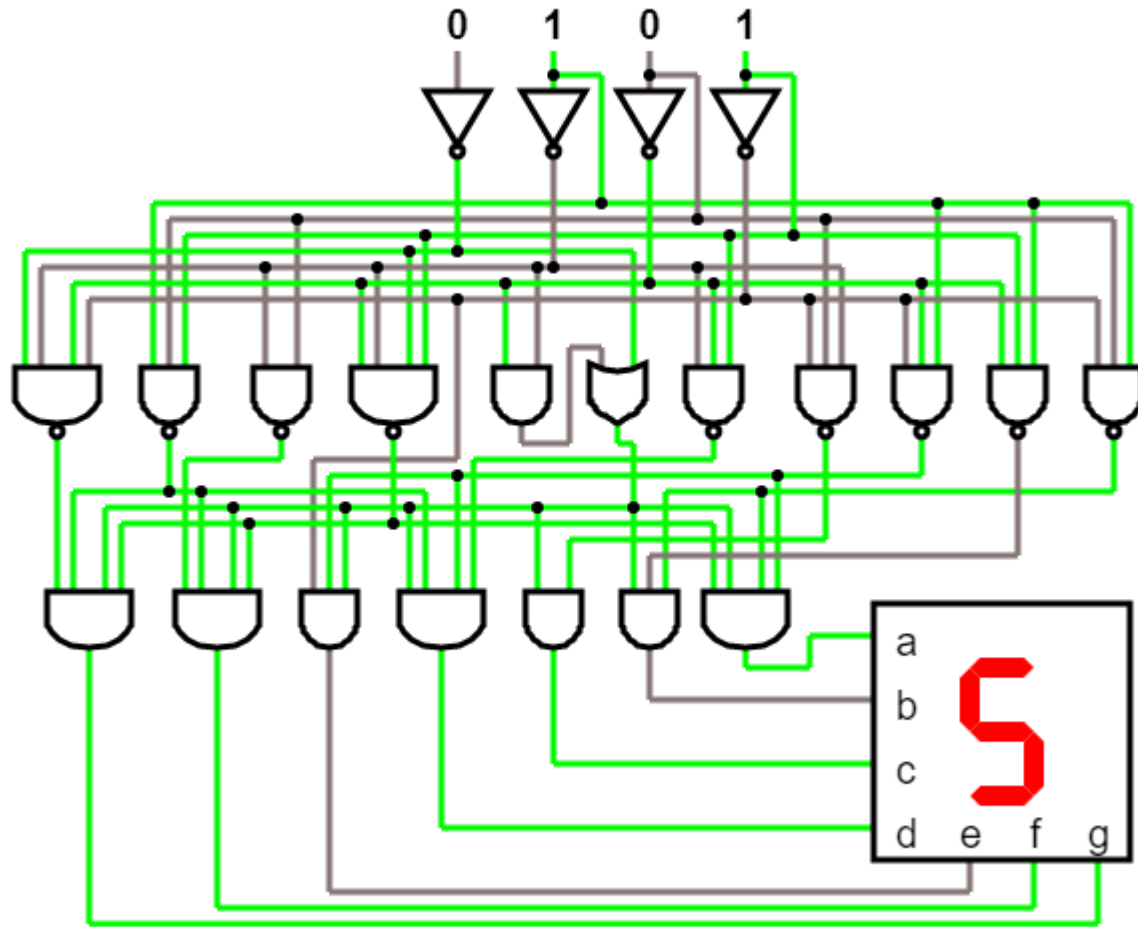
Exemplo: Como agrupar e qual a função? $f_e = \Sigma(0,2,6,8)$

		$\bar{C}\bar{D}$	$\bar{C}D$	CD	$C\bar{D}$
$AB \backslash CD$		00	01	11	10
$\bar{A}\bar{B}$	00	1 ₀			1 ₂
$\bar{A}B$	01				1 ₆
AB	11	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₅	X ₁₄
$A\bar{B}$	10	1 ₈		X ₁₁	X ₁₀

$$\boxed{C\bar{D}} + \boxed{\bar{B}\bar{D}}$$

$X = \text{Don't Care}$

Display de 7 segmentos



EXERCÍCIOS