期权定价模型局限性探讨

李佳馨

(中国社会科学院大学马克思主义学院,北京 102488)

摘要: 自 1973 年股票期权首次在美国芝加哥期权交易所进行场内交易以来,期权市场得到了十分迅猛的发展。期权已成为一种非常重要的金融衍生工具,在金融市场和投资者中都具有举足轻重的地位。因此,起源于期权市场的期权定价模型和理论亦成为对诸多金融问题进行定量分析的重要工具和方法。关于期权定价方法的研究一直是金融领域的热点问题之一。但是,二叉树期权定价模型有两个重大局限性。第一,该模型假设市场是无套利的,从而回避了随着股票价格的每一次变动,如何重新调整持股数量才能保证无套利模式的持续性。第二,该模型没有考虑极端情况,即到期执行期权时,所有的股票数都不足以交割期权所需的股票数,从而会造成违约。因此,按期权定价公式进行无套利投资组合者将面临巨大风险。投资者甚至会将标的物价格翻 100 倍以达到价格离谱的程度而获得套利。本文通过一个理论上简化的数值举例,分析了二叉树期权定价模型的局限性,发现随着股票价格的每一次变动,是否及时调整持股数量对投资组合的价值及投资者的收益有着较大影响,二叉树期权定价的无风险套利操作是几乎不可能实现的。

关键词: 期权定价模型; 风险中性; 风险溢价; 投资组合

中图分类号: F224　　　　**文献标识码**: A

文章编号: 1007-7685(2023) 03-0044-09

DOI: 10. 16528 /j. cnki. 22-1054 /f. 202303044

期权定价理论有着悠久的历史,该理论在 1973 年经历了一次革命性变化,即费希尔·布莱克和迈伦·斯科尔斯提出了第一个令人满意的期权定价模型。同年,罗伯特·默顿在几个重要方面扩展了该模型(BS 模型) 。此后的研究表明,期权定价理论几乎与金融的所有领域都相关。但是,费希尔·布莱克、迈伦·斯科尔斯和罗伯特·默顿文章中所使用的数学工具是相当复杂的,并且掩盖了潜在的经济学原理。于是,考克斯接受了威廉·夏普在 1979 年提出的建议,即仅用初等数学就有可能得到相同的结果。他在《期权定价: 一种简化的方法》一文中提出了二叉树期权定价模型。但事实上,二叉树期权定价模型不仅在理论上是尚待完成的,而且在实际中也无法保证期权定价分析的合理性和有效性。本文通过一个简单的例子来说明二叉树模型在现实中面临的挑战。当然,在这里,我们认同此前二叉树期权定价模型提出时的所有假设,如市场是有效的、是无套利的,等等。

一、文献述评

Cox 等认为,二叉树模型是一种简单而有效的办法,大大简化了期权定价的数学运算,因而其成为世界各大证券交易所的常用定价标准之一。[1] Fadugba 等提出了一些常用的期权估值的数学方法,并通过对二叉树模型、曲柄尼科尔森法和蒙特卡罗法的比较分析,认为二叉树模型可在金融界被广泛用于各

作者简介: 李佳馨,中国社会科学院大学马克思主义学院博士研究生。

种期权模型的数值估值。该模型的“吸引力”体现在三个方面: 第一,易于教学和实际操作; 第二,二叉树模型是三者中最准确的,并且比其他两种收敛得更快; 第三,二叉树模型在定价选项上非常灵活。二叉树模型是一种非常简单但功能强大的期权定价方法,可用来解决许多复杂的期权定价问题。与布莱克—斯科尔斯模型(BS 模型) 相比,它可以准确地定价美式期权,因为它考虑了期权早期的可能性和其他因素,如股息。[2] Bendob 等使用 2014 年 7 月 25 日至 2016 年 6 月 30 日期间的 Nifty50 期权指数,探究了金融市场上广泛流行的三个期权定价模型的有效性,结果表明所有模型在所有货币类别中都被高估,且在货币类别中具有高波动性。其中,二叉树模型在忽略货币性的情况下,在整个样本中表现出色。[3] 学者们认为,“这是一种强大的工具”,即使有更复杂的模型可以取代它,但二叉树模型仍是被最广泛使用的。

然而,随着期权市场的迅速发展,许多学者已经指出二叉树期权定价模型的局限性。最近许多关于期权定价的研究都集中在如何放宽期权定价模型中的假设,其中包括: 第一,标的资产价格服从对数正态分布; 第二,短期无风险利率为常数; 第三,股票的波动率是一个常数。Tsekrekos 认为,二叉树模型的优点在于简便、快捷和准确,它的缺点是在一些时候无法扩展模型,以及并非所有的基础资产都与随机过程相适应。[4] Ji 等认为,二叉树期权定价模型是有局限的,需要开发一种适用于美国的期权定价模型,过去的二叉树期权定价模型在应用时经常性地放宽对数正态假设。[5] Korn 等梳理了二叉树期权定价模型的历史和应用,认为期权定价需要将数学建模技能和对现实世界市场的经济解释结合在一起,但二叉树期权定价模型在隐藏经济学原理。[6] Lander 等认为,二叉树期权定价模型更直观且相对较少地使用数学知识,易于交易操作,但是这个模型也有其弱点,许多公司经理和从业者没有太多使用二叉树期权定价模型的经验,并且难以使用无风险利率作为贴现率。此外,二叉树模型可以迅速增加分支,使模型变得复杂且对计算能力的要求较高。因此,二叉树模型对过程的变化很敏感。[7] 还有学者认为,二叉树模型是不光滑的。换句话说,更多的时间和分支可能并不能保证准确的价格。根据执行价格(标准期权) 或障碍(障碍期权) 相对于二叉树中节点的位置,近似误差可能会有较大的差异。他们开发了一个具有倾斜参数的灵活的二项式模型,可以改变二项式树的形状和跨度。一个正的倾斜参数会使二叉树向上移动,而一个负的倾斜参数则恰恰相反。这个新的二项式模型是对原始二叉树模型的简单推广,它等价于具有零倾斜参数的灵活二项模型。结果表明,灵活的二项式模型对倾斜参数的任意值都能收敛。更重要的是,新模型的灵活性允许对二叉树进行某些调整,以使其更准确。具体地说,对于欧洲期权和美国期权,得到了平滑的收敛性,并采用了一种简单的外推方法来提高收敛速度。对于障碍期权,将灵活的二叉树重新校准,从而使屏障相对于树中的节点层进行最优定位,进而提高了数值的精度。[8] Breen 认为,传统的二叉树模型的准确性、快捷性和适用性还存在局限,加入收敛加速后得到的加速二叉树期权定价模型将更加准确,且适用于更加广泛的期权定价(外汇、商品、期货、支付股息的股票等) 。[9] Kim 等认为,二叉树应引入时变参数,将二叉树模型中所有时刻的增量拟合到伊藤定价过程的增量中。[10] 余湄等认为,很少有学者对未发展成熟的金融市场或相对不成熟的金融市场进行期权定价模型的有效性和适用性的探究,成熟的金融市场即欧美市场恰是大部分学者进行实证研究时选择的市场。这些金融市场之间的差异巨大,因此,期权定价模型的有效性和适用范围也需要进一步探究。[11] 万成高等认为,二叉树模型还有一定的缺陷,目前普遍使用的二叉树模型在某种情况下将产生负的概率。[12] 同时,二叉树模型可以避免将可转债内嵌的美式期权简化为欧式期权的不足,也能对我国可转债的路径依赖性进行分析,但是二叉树模型在某些时刻的使用会受到限制。[13]

本文的贡献在于: 第一,揭示了期权定价模型存在争议的根源。无论是金融理论界还是金融实务界,学者们多从二叉树期权定价模型的假设条件和过度使用数学工具等方面对该模型的有效性提出质疑。现有文献较多从假设条件来分析二叉树期权定价模型的局限,但这解释不了金融市场实际操作中使用二叉树期权定价而产生的套利现象等问题。第二,为分析期权定价的有效性提供了新的研究视角。

已有研究中,鲜有文献在认同此前关于二叉树期权定价模型所有假设的基础上,指出期权市场中存在的套利行为,并揭示期权定价模型的非有效性。第三,指出了期权交易中存在的极端交易行为,丰富了既有的研究视角。

二、单步二叉树模型

Grossman 等指出,"市场的有效率性是依靠市场的套利和投机活动来建立的,而套利和投机活动是有成本的;如果市场每时每刻都是有效率的,则不会存在套利机会,投机活动也将是无利可图的,套利和投机活动就会停止,而市场就不能保持有效率。"[14] 这就意味着,市场不可能是有效率的。因为如果市场是有效率的,就没有套利和投机活动,而没有套利和投机活动,市场就达不到有效率。或者反过来说,市场的有效率只是一瞬间的事情,当市场无效率时,套利和投机活动会使市场向有效率的方向运动,但市场达到有效率时,套利和投机活动停止,则随后市场又开始无效率,引起套利和投机活动重新活跃。

在这里,首先要明确的是今天的有效、明天的有效与后天的有效,这三种有效在实质上是不一样的。从今天的有效向明天的有效过渡时,在这个过渡的时间段里就有可能出现套利。利用根据无套利约定确立的股票的欧式看涨期权定价来解释,先假定该期权的到期期限仅为一个时期。C 为该期权的当前价格,K 为执行价格,C_u 为时期末股价为 $S_u = uS$ 时的期权价格,C_d 为时期末股价为 $S_d = dS$ 时的期权价格。由期权的定义,变化如图 1 所示。

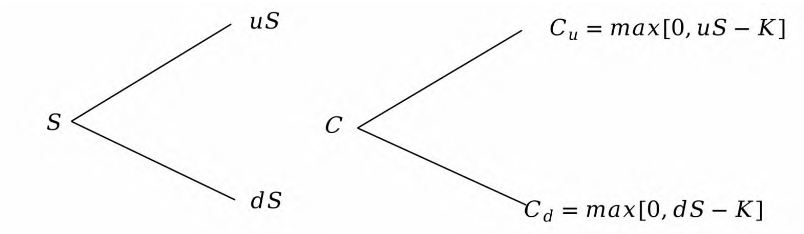

图 1 单步二叉树的股票价格(左)与期权价格(右)

现在思考这样一个投资组合,指定 A 股票及该股票与无风险债券 B 这一组合,希望期末时撇开股票价格的影响,其与该股票的欧式看涨期权价值相等。这样的组合称为套利组合,如果期权的当前价值 C 小于此套利组合的当前价值,在这种情况下,投资者获得套利收益的方法是买入期权并卖出套利组合。反之,若期权的当前价值大于此套利组合的当前价值,在这种情况下,投资者获得套利收益的方法是卖出期权并买入套利组合。倘若将上述模型扩大到两个时期,到期时的股票价格就有三种可能,从而到期时的期权价格也有三种可能,具体如图 2 所示。

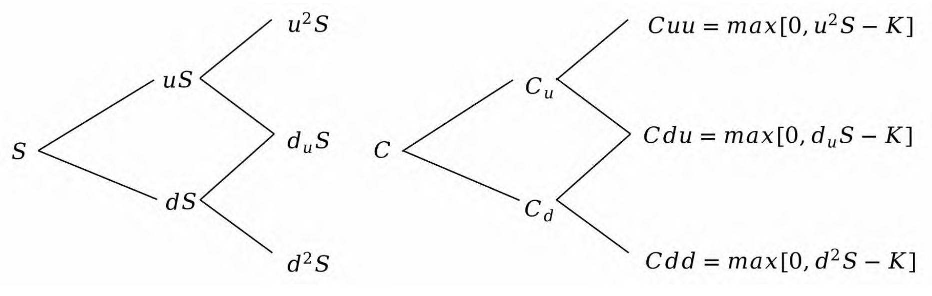

图 2 二步二叉树的股票价格(左)与期权价格(右)

在这里,我们认同此前有效市场假说的所有假设,如风险中性、不存在套利机会等。为了更加清晰地描述,用表格列示上文构建的无风险投资组合并加以说明(表格中暂忽略"借入资金"一项,符号"+、-"分别表示现金流方向)。

根据无风险投资组合原则即不能获得超额收益,可以得到:

$$\triangle S_u - C_u = \triangle S_d - C_d \tag{1}$$

$$\triangle = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d} \tag{2}$$

表 1　无风险投资组合的现金流量表 a

交易组合	0 时刻	到期日(T 时刻)买回期权卖出股票	
		$S_T = S_u$	$S_T = S_d$
卖出一个看涨期权	$+C$	$-C_u$	$-C_d$
买入 Δ 股票	$-\triangle S$	$+\triangle S_u$	$+\triangle S_d$
净现金流	$C-\triangle S$	$\triangle S_u - C_u$	$\triangle S_d - C_d$

在这里，投资组合的收益率=无风险利率，否则就会存在套利机会。式(2)表示，在 T 时刻，期权价格变化与股票价格变化的比率要等于 1 单位期权所对应的套利组合中的股票数。

接着，如果将无风险利率假设为 r，那么该组合的贴现值为$(\triangle S_u - C_u)e^{-rT}$。

在无套利的情况下，它与 0 时期的净现金流之和等于零，于是

$$C = \triangle S - (\triangle S_u - C_u)e^{-rT} \tag{3}$$

将 Δ 代入整理得到

$$\begin{cases} C = e^{-rT}[pC_u + (1-p)C_d] \\ p = \dfrac{e^{rT} - d}{u - d} \end{cases} \tag{4}$$

在现实的市场中，投资者承受的风险越大，要求的收益率也会越高。但是，当假设市场是风险中性时，即使风险水平不断升高，投资者也不需要更高的收益率作为回报。若将 p 设为风险中性的市场中股价上涨的概率，那么股价下降的概率就是 1-p，期望收益率即 $E(S_T) = pS_u + (1-p)S_d = Se^{rT}$。也就是说，期望收益与无风险收益相同。这也反映出，如果股价上涨的概率不等于上述无套利计算得出的 p，那么从期望收益与无风险收益相同的角度来定义，这个市场就不是风险中性的。或者说它在客观上不是风险中性的，但在主观上可以是风险中性的，比如通过一个主观上操作的套利组合和确定无套利的期权价格可以得到一个无风险收益，制造出风险中性。

可以通过一个简单的例子说明上述情况。(见图 3)假设某股票的当前价格为 200 元，3 个月后将会上涨 10%至 220 元，或下降 10%至 180 元。期权的价格在 3 个月后将具有以下价格中的一个，即若股价是 220 元，期权价格将为 10 元；若股价是 180 元，期权价格将为 0。执行价格是 210 元。

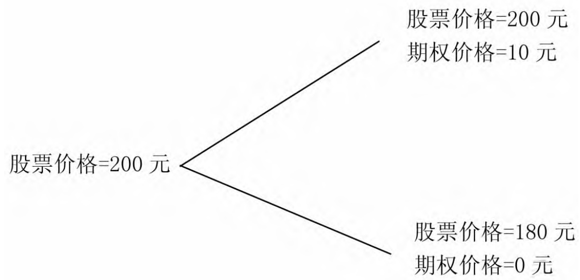

图 3　单步二叉树中的股票价格及期权价格

假设没有套利机会，此时的收益率一定等于无风险利率，从而得出该组合的成本进而确定期权的价格。考虑一个 Δ 单位的股票长头寸和一份看涨期权短头寸的交易组合。第一种情况：股票价格变为 220 元，持股价值变为 220Δ 元，期权价值变为 10 元，该组合的价值为(220Δ-10)元。第二种情况：股价变为 180 元，持股价值变为 180Δ 元，期权价值变为 0 元，该组合的价值为 180Δ 元。

借助表 2 来分析。在无套利的情况下，意味着：220Δ-10=180Δ 元，Δ=0.25。因此，该组合为 0.25 单位股票(长头寸)与 1 份期权(短头寸)，该组合的价值为 45 元。假设此时的无风险利率为每年 4%，

那么$45e^{-0.04\times\frac{1}{4}}=44.552$ 元①，股票今天的价值为 200 元，若将期权的价格设为 C，则 C = 5.447 元。这正是根据期权定价模型计算出来的结果，即在无套利的情况下，期权的当前价值为 5.447 元。这套投资组合的收益与无风险的收益是一样的。

表 2　无风险投资组合的现金流量表 b(c = 200，k = 210)

交易组合	0 时刻	到期日(T 时刻) 买回期权卖出股票	
		$S_T=S_u(220)$	$S_T=S_d(180)$
卖出一个看涨期权	+C	$-C_u(10)$	$-C_d(0)$
买入 Δ 股票	-△S	$+\triangle S_u(220\Delta)$	$+\triangle S_d(180\Delta)$
净现金流	C-△S	$\triangle S_u-C_u(220\Delta-10)$	$\triangle S_d-C_d(180\Delta-0)$

三、二步二叉树模型

为了更加接近现实，需要将以上分析扩展到二期即二步二叉树。继续上面的假设，但是要对到期时间做一下调整，由原来的 3 个月调整为 6 个月(每 3 个月为一期) 。现在有图 4(仅显示股票价格变动) 的情况出现。

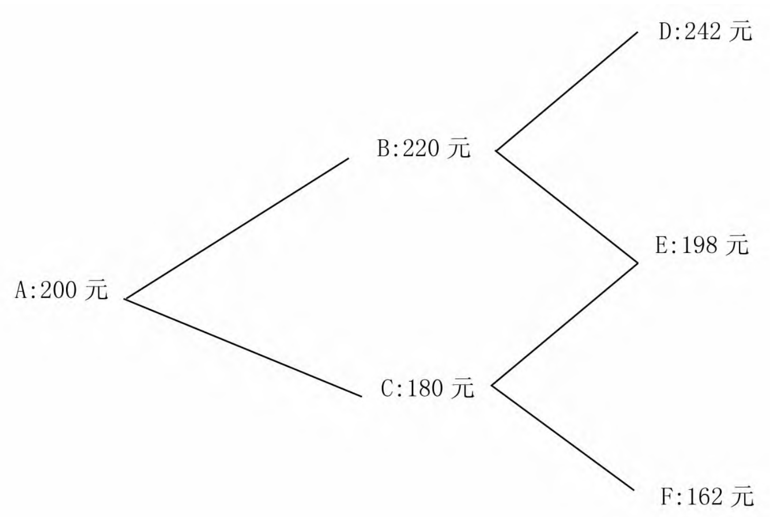

图 4　二步二叉树中的股票价格

重复利用定价原理，可以很容易得到 D、E、F 点的期权价格分别为 32 元、0 元、0 元。当 3 个月后股价变为 220 元时，之后的 3 个月股价可能上涨 10% 至 242 元，或下降 10% 至 198 元。同理可以得到，此时$\Delta=\frac{32-0}{242-198}=0.727$。那么当股票价格上涨至 242 元时，该投资组合价值为 $242\Delta-32=144$ 元; 当股票价格下降至 198 元时，该组合价值为 $198\Delta=144$ 元。这符合无套利假设。那么，在 B 点的期权价格为 $C_{uB}=220\times0.727-144\,e^{-0.04\times\frac{1}{4}}=17.4$ 元(结果保留一位小数) 。当 3 个月后股价下降至 180 元时，之后的 3 个月股价可能上涨 10% 至 198 元，或下降 10% 至 162 元。同理可得，此时 $\Delta=0$，也就是说，必须在 6 个月到期前把股票全部抛售。这时的组合价值取决于在 A 点持有的 Δ 股票量。C 点的期权价格为 $C_{uC}=0$元。在 A 点时，由无套利假设，$180\Delta=220\Delta-17.4$，$\Delta=\frac{17.4}{220-180}=0.436$，即 A 点的股票数量为 0.436，此时该投资组合价值为78.5元。因此，在 A 点的期权价格 $C_{uA}=200\times0.436-78.5\,e^{-0.04\times\frac{1}{4}}\approx9.5$ 元(结果保留一位小数) 。A 点的股票数量为 0.436，那么 C 点的组合价值是 $0.436\times180=78.5$ 元，而 B

① 如无特殊说明，本文计算结果均保留三位小数。下同。

点的组合价值是 $0.436\times220-17.4=78.5$ 元，但是落到 C 点时后续无须组合。其价值 78.5 元可以获得无风险利率收益，因而经由 C 点到 E 点或 F 点的价值都是 $78.5e^{0.04\times\frac{1}{4}}=79.3$ 元。不过，由于 B 点的 $\Delta=0.727$，因此，为了维持期权定价模型，需要买入 $\Delta B-\Delta A=0.291$ 数量的股票，并额外支出 $0.291\times220=64.0$ 元。假定这笔钱来源于按无风险利率的借款。这样无论是经由 B 点到达 D 点还是 E 点，组合价值 144 元都要扣除这笔额外支出的本息 $64e^{0.04\times\frac{1}{4}}=64.6$ 元，其余额为 79.4 元。这个余额与前面的 79.3 元的计算误差可以忽略不计，表明了无套利的存在。在这里可以看到，随着股票价格的每一次变动，都要根据实际情况重新调整持股的数量，才能保证无套利模式的持续性。如果疏忽了，情况就会发生很大变化。比如，出现 C 点时不抛售股票，那么再出现 E 点时，资产值为 $0.436\times198=86.3$ 元，再到出现 F 点时，资产值为 $0.436\times162=70.6$ 元。出现 B 点时，如果不补买股票，那么再到出现 E 点时，资产值也是 86.3 元，再出现 D 点时，资产值为 $0.436\times242-32=73.5$ 元。而 A 点的起始投资为 $0.436\times200-9.5=77.7$ 元，6 个月的无风险收益本息为 $77.7e^{0.04\times\frac{1}{2}}=79.3$ 元。这时，D、F 两点都意味着亏损，而 E 点才有盈利。因此，收益有了波动，也不再是无风险的了。如果股票波动不是 3 个月一次，而是 1 个月一次，或波动时间更短，期权到期日仍然是 6 个月，那么调整组合的次数也要相应增加。这就使得投资者随时都要盯着行情变动来时时进行操作，其所得却无非是无风险收益，还不如将资金直接用于购买无风险资产，使自己可以腾出时间和精力做其他事情，包括挣更多的钱。二步二叉树的股票价格及期权价格如图 5 所示。

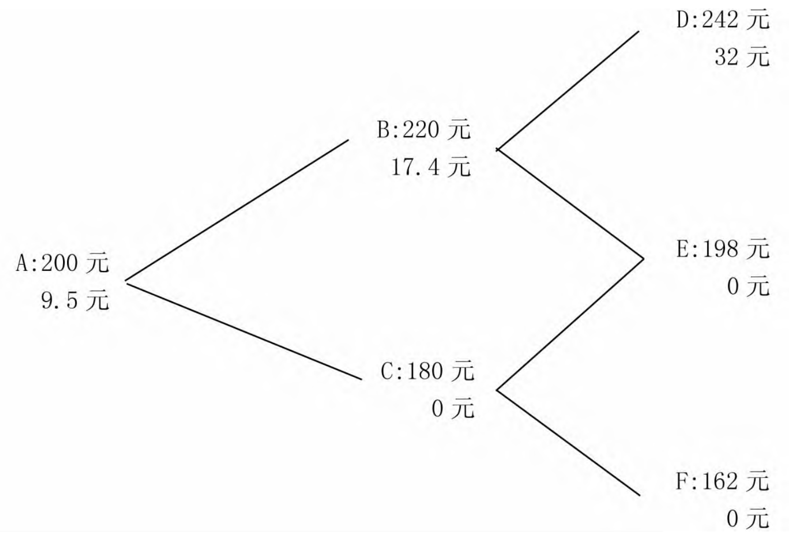

图 5　二步二叉树的股票价格及期权价格

但在金融市场中，有部分人选择长期持有以获得分红。因此，假设不对 Δ 进行调整（即 $\Delta=0.436$ 保持不变），并将此假设下的组合价值与 Δ 不断调整时的组合价值进行对比，结果见表 3。

表 3　Δ 不断调整与 Δ 保持不变时的组合价值对比

股票价格	当股价从 220 元上涨至 242 元	当股价从 220 元下降至 198 元	当股价从 180 元上升至 198 元	当股价从 180 元下降至 162 元	股价 = 200 元
Δ 不断调整时的组合价值	79.4 元	79.4 元	79.3 元	79.3 元	77.7 元（投资组合在今天的价值）
Δ=0.436 时的组合价值	73.5 元	86.3 元	86.3 元	70.6 元	Δ=0.436　77.7 元（投资组合在今天的价值）

上表只涉及组合价值，但在现实中，还要考虑初始成本和借款利息。基于上述例子，对于单步二叉树而言，假设投资者卖出一份执行价格为 210 元的看涨期权，买入 0.25 股的股票。假设当前股票的价

格是 200 元，期权的到期日为 3 个月，该期权价格为 5.447 元，则最初投资为 200×0.25−5.447=44.553 元。若在到期日股价为 180 元，小于 210 元($S_T<K$) ，则期权持有人不会行权。因此，投资者净损益为(180×0.25−0) −(200×0.25−5.447) = 0.447 元。若在到期日股价等于 220 元($S_T>K$) ，期权将会被行使，投资者净损益为(220×0.25−10) −(200×0.25−5.447) = 0.447 元。这样一来，无论股价是上涨还是下降，该投资组合都将使投资者获得无风险收益。至于扩大时间长度到二步二叉树时，盈利和亏损的情况将变得复杂。基于上述二步二叉树的例子，进一步假设投资者卖出一份执行价格为 210 元的看涨期权，当前股票的价格是 200 元，期权的到期日为 6 个月，每 3 个月为阶段性一期。在第一阶段，最初投资为 200×0.436−9.5=77.7 元。在第二阶段将出现多种投资路径和收益结果:

1. 路径一: 第二阶段股票价格从 B 点 220 元上涨至 D 点 242 元。在这一情况下，又由于 Δ 的不同而分为两种情况。第一种情况，Δ=0.727。若第二阶段股票价格从 220 元上涨至 242 元(到期日股价) ，大于 210 元，期权持有人行权，由于在 B 点以无风险利率借款 64 元用来购买额外数量的 0.291 股票，则投资者净损益为(242×0.727−32) −77.7−64.6=1.634 元。第二种情况，Δ=0.436。若此时第二阶段的 Δ 与第一阶段的 Δ 保持一致，此处不需要额外增加股票，故投入资金全部为投资者的可自由支配资金，当期权持有人行权时，则投资者净损益为(242×0.436−32) −77.7=−4.188 元。最初投资 77.7 元存入银行获得无风险收益 77.7×2% =1.554 元。可见，投资者在不及时调整投资组合时获得的收益低于无风险收益，而在及时调整投资组合时将获得大于无风险收益的收益。事实上，投资者为了额外获得这 0.08 元的收益，需要耗费大量的时间和精力，即投资者需要在 6 个月内全神贯注地盯住市场，不断地计算，反复地调整。因此，投资者没有必要在该投资组合中投入过多的精力和心血。

2. 路径二: 第二阶段股票价格从 B 点 220 元下降至 E 点 198 元。第一种情况，Δ=0.727。此时期权持有人不行权，由于在 B 点以无风险利率借款 64 元用来购买额外数量的 0.291 股票，则到期日投资者净损益为(198×0.727−0) −77.7−64.6=1.646 元。第二种情况，Δ=0.436。此时期权持有人不行权，则到期日投资者净损益为(198×0.436−0) −77.7=8.628 元。可见，无论投资者是否根据市场的变动及时调整投资组合，投资者都会获得大于无风险收益 1.554 元的超额收益，甚至在不及时调整投资组合时的超额收益更多。

3. 路径三: 第二阶段股票价格从 180 元上涨至 198 元。第一种情况，Δ=0。此时期权持有人不行权，且在 6 个月到期前抛售了全部股票，则投资者净损益为(180×0.436−0) −77.7=0.78 元。第二种情况，Δ=0.436。此时期权持有人不行权，且到期日之前没有抛售股票，则到期日投资者净损益为(198×0.436−0) −77.7=8.628 元。可见，投资者不根据市场的变动及时调整投资组合，反而比及时调整投资组合所获收益大，且获得了大于无风险收益的超额收益。

4. 路径四: 第二阶段股票价格从 180 元下降至 162 元。第一种情况，Δ=0。此时期权持有人不行权，且在 6 个月到期前抛售了全部股票，则投资者净损益为(180×0.436−0) −77.7=0.78 元。第二种情况，Δ=0.436。此时期权持有人不行权，且到期日之前没有抛售股票，则到期日投资者净损益为(162×0.436−0) −77.7=−7.068 元。可见，无论投资者是否根据市场的变动及时调整投资组合，投资者所获收益都将小于无风险收益 1.554 元。

上述计算结果表明，二叉树期权定价模型是不科学的。原因在于: 第一，Δ 需要不断地调整，一旦有投资者不及时进行调整，市场上就会出现套利机会。第二，在二叉树期权定价模型中存在一些时间节点，无论 Δ 是否及时调整，投资者都会获得额外的收益(路径二) 或额外的损失(路径四) 。第三，合约到期日存在极端情况，即所有的股票数都不足以交割期权所需的股票数。这样一来，二叉树期权定价模型便失去了所谓的有效性与科学性。

四、风险中性定价

在这里，再计算一下风险中性定价方法的结果以便对比。首先，要计算出假设的风险中性市场中各

种不同情况发生的概率，然后计算投资组合的期望收益率，进而计算出期权价格。

由式(4)得，在B点，期权定价公式中的 $p=\frac{e^{0.04\times0.25}-0.9}{1.1-0.9}\approx0.550$；同理可得A点的 $p\approx0.550$；尽管这个p不是真实概率，但是可以当作概率，并可称之为无套利概率。由式(4)得，$C_{uB}=e^{-0.04\times0.25}(0.550\times32+0)\approx17.4$(结果保留一位小数)，$C_{uA}=e^{-0.04\times0.25}(0.550\times17.4+0)\approx9.5$(结果保留一位小数)。此次计算结果(即不包含p值的计算)与二叉树模型变化结果相同(二叉树模型与图5所示相同)。

按照西方经济学教科书约翰·赫尔的《期权、期货及其他衍生产品》中所述，风险中性假设中股票市场的期望收益率与无风险收益率相同。[15]但是根据上述期权定价公式的计算结果，仅当股价上涨的概率是0.550时，购买股票(不考虑期权)的期望收益率才等于无风险收益率。一旦股价上涨的概率不是0.550，只有期权定价模型中投资组合的收益率等于无风险利率，直接购买股票的期望收益率将不再等于无风险收益率，从而股票市场将不再是风险中性的市场。

五、结论

探究和计算结果表明，在极端情况下，比如所有的持股者或半数以上持股者都按期权定价公式卖出期权进行无套利投资组合，由于A点的配比是0.436股配1股股票的期权，这就意味着到期执行期权时，所有的股票数都不足以交割期权所需的股票数。这时如果期权的购买者不愿意卖掉期权结算，而要执行期权结算，将遇到早前期权的出售者没有足够股票交割的情况，从而会造成违约。这时按期权定价公式进行无套利投资组合的投资者将面临巨大风险，且其投资风险会远远超过只购买股票而不卖出期权的风险。假如投资者只要标的物而不要现金及其他物品，此时交易者只能从投资者手中买回标的物以完成这份合约。在这一情况下，投资者甚至会将标的物价格翻100倍，以达到价格离谱的程度而获得套利。但当这种情况频繁出现时，所有人都渴望去当这类投资者，那么市场上可能没有足够数量的期权又或者找不到交易者来卖期权。正如马克思指出的“假如大部分的资本家愿意把他们的资本转化为货币资本，那么，结果就会是货币资本大大贬值和利息率惊人下降；许多人马上就会不可能靠利息来生活，因而会被迫再变为产业资本家。但是，正如我们已经说过的，对单个资本家来说，这是事实。”[16]此外，如果要调整Δ，就需要保证市场上的所有投资者都要调整，这就意味着市场上所有的投资者都要对这部分投资投入大量的精力和心血，而且市场上所有的投资者还需要具备较高的计算能力，以便准确计算出Δ的变动。因为一旦有投资者调整不及时，从而出现额外的收益或损失，那么市场上就会有部分交易者获得套利。投资组合的交易出现这种结果就会与无套利背道而驰，这样的市场也便失去了所谓的有效性。由此可见，二叉树期权定价的无风险套利操作是几乎不可能实现的。

参考文献：

[1]Cox John C.，Stephen A. Ross，Mark Rubinstein. Option Pricing: A Simplified Approach[J]. Journal of Financial Economics，1979(7)：229-263.

[2]Fadugba Sunday Emmanuel，Chuma Raphael Nwozo. On the Comparative Study of Some Numerical Methods for Vanilla Option Valuation[J]. Communications in Applied Sciences，2014(2)：65-84.

[3]Bendob Ali，Naima Bentouir. Options Pricing by Monte Carlo Simulation，Binomial Tree and BMS Model: A Comparative Study of Nifty50 Options Index[J]. Journal of Banking and Financial Economics，2019(11)：79-95.

[4]Tsekrekos Andrianos E.. Pricing American and Exotic Options via Numerical Methods[R]. 2011.

[5]Ji Dasheng，B. Wade Brorsen. A Relaxed Lattice Option Pricing Model: Implied Skewness and Kurtosis[J]. Agricultural Finance Review，2009(3)：268-283.

[6]Korn R.，Müller S.. Binomial Trees in Option Pricing-history，Practical Applications and Recent Developments[J]. In Recent Developments in Applied Probability and Statistics，2010：59-77.

[7]Lander Diane M.，Prakash P. Shenoy，Summerfield Hall. Modeling and Valuing Real Options Using Influence Diagrams[R]. University of

Kansas,Lawrence,KS,1999.

[8]Tian Y. S.. A Flexible Binomial Option Pricing Model[J]. Journal of Futures Markets: Futures,Options,and Other Derivative Products,1999(7):817-843.

[9]Breen Richard. The Accelerated Binomial Option Pricing Model[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis,1991(2):153-164.

[10]Kim Young Shin,Stoyan Stoyanov,Svetlozar Rachev,Frank J. Fabozzi. Enhancing Binomial and Trinomial Equity Option Pricing Models[J]. Finance Research,2019(28):185-190.

[11]余湄,程志勇,邓军,等.一个新的期权定价方法:基于混合次分数布朗运动的新视角[J].系统工程理论与实践,2021(11):2761-2776.

[12]万成高,高莘莘,熊莹盈.期权定价的分数二叉树模型[J].湖北大学学报(自然科学版),2008(3):235-240.

[13]岳喜伟,张永任,赵海焰.可转债定价的二叉树法[J].统计与决策,2006(3):124-125.

[14]Sanford J. Grossman,Joseph E. Stiglitz. On the Impossibility of Informationally Efficient Markets[J]. The American Economic Review,1980(3):393-408.

[15]约翰·赫尔.期权、期货及其他衍生产品(第 8 版)[M].北京:机械工业出版社,2011:183.

[16]马克思恩格斯文集:第 7 卷[M].北京:人民出版社,2009:424.

(责任编辑:杜磊)

Discussion on the Limitations of Option Pricing Model

Li Jia-xin

(School of Marxism,University of Chinese Academy of Social Sciences,Beijing 102488)

Abstract: Since1973, when stock options were first traded on the Chicago Board Options Exchange, the options market has developed rapidly. Option has become a very important financial derivative instrument, which has a decisive position for financial markets and investors. Therefore, the option pricing model and theory originated from the option market has become an important tool and method for quantitative analysis of many financial problems. The research on option pricing method has always been one of the hot issues in the financial field. However, the binary tree option pricing model has two major limitations. First, the model assumes that the market is arbitrage-free, thus avoiding how to adjust the number of holdings to ensure the continuity of the arbitrage-free model with every change in stock price. Second, the model does not take into account the extreme case, that is, when the exercise option expires, all the shares are not enough to settle the shares needed to settle the option, resulting in a default. Therefore, the arbitrage-free portfolio based on the option pricing formula will face great risks. Investors may even gain an arbitrage by multiplying the price of a subject by a factor of 100 in order to get out of line. Through a numerical example of theoretical simplification, this paper analyzes the limitations of the binary tree option pricing model and finds that with each change of stock price, whether to adjust the number of holdings in time has a great impact on the value of the portfolio and investors' returns.

Keywords: Option Pricing Model; Risk Neutral; Risk Premium; Investment Portfolio