文章编号:1000-2375(2008)03-0235-06

期权定价的分数二叉树模型

万成高,高莘莘,熊莹盈

(湖北大学 数学与计算机科学学院,湖北 武汉 430062)

摘要:利用股票价格过程的对数正态分布,借助于随机误差校正的思想,得到期权定价的分数二叉树模型,研究此模型分别用于标准欧式/美式期权定价的性质,指出其具有相容性.利用粘性解方法,证明模型对标准欧式/美式期权的收敛性.同时,给出计算实例以说明此模型的有效性.

关键词:二叉树模型;标准欧式/美式期权;相容性;收敛

中图分类号:O211.6;F830.9　　**文献标志码**:A

1　分数二叉树参数模型的提出

期权是一种赋予持有者在将来某一确定时间(到期日)以某一确定价格(执行价格)购买或出售标的资产的权利.自1973年股票期权首次在美国进行场内交易以来,期权市场发展十分迅猛,现已成为一种非常重要的金融衍生工具.而起源于期权市场的期权定价理论则已成为对许多金融问题进行定量分析的强大且有效的工具.对于欧式期权,在1973年,Black和Scholes给出了解析形式的定价公式,而对于诸如美式看跌期权、亚式期权、回望期权这样的衍生证券并不存在确切的解析公式,也无法求得精确解.因此,发展各种计算这类期权的数值方法具有重要的实际意义.目前比较成熟的数值方法主要有:蒙特卡罗模拟方法、树图方法、偏微分方程数值方法等.在树图方法中,最常用的是二叉树参数模型.二叉树参数模型由Cox,Ross和Rubistein[1]首次提出,因其具有简单性和灵活性,从而在期权定价中深受欢迎[2,3].但目前使用的二叉树参数模型带有一定的缺陷.本文将借助于随机误差校正的思想,考虑构造一个新型且较精确的二叉树参数模型,同时给出相应模型的一些性质.为明确和简单起见,本文用到如下假设:

(1)市场不存在无风险套利机会,允许卖空.

(2)标的资产为股票,股票市场无交易费用且股票数量是可分的.

(3)股票有效期内不支付红利.

以下字母的含义为:S表示股票价格;V表示期权价格;σ表示股票价格波动率;T表示期权执行日期;μ表示股票预期收益率;E表示期权执行价格;r表示无风险利率.

考虑一个不支付红利股票期权的估值.把期权的有效期$[0,T]$分为N个间隔为Δt的时间段,可得时间点$t_k=k\Delta t,k=0,1,\cdots,N$.假设在$t_1$时刻,股票价格从当前值$S(0)=s_1$以概率$p_1(1)$上升到$s_3$,以概率$1-p_1(1)$下降到$s_2$,则$s_3>s_2$.设$s_1,s_2,s_3$对应的节点编号分别为1,2,3,在$2\Delta t$时刻,节点2分裂为节点4,5,节点3分裂为节点6,7.不断重复这样的步骤,就构成了所谓的二叉树.在t_i时刻(即第i步),节点编号为$2^i,2^i+1,\cdots,2^{i+1}-1$,把第$i$步的节点集以$N_i$表示,即　$N^i\triangleq\{2^i,2^i+1,\cdots,2^{i+1}-1\}$,在第$i+1$步,对第一$j\in N_i$,节点$j$分裂为节点$2j$和$2j+1$,相应的股票价格$s_{2j+1}>s_{2j}$,从$s_j$上升到$s_{2j+1}$的概率为$p_i(j)$,从$s_j$下降到$s_{2j}$的概率为$1-p_i(j)$.这样,我们就得到了股票价格的二叉树树图.如

收稿日期:2008-03-25
基金项目:湖北省教育厅优秀中青年人才项目(Q200710002)资助
作者简介:万成高(1959-　),男,教授

图1.

定义股票价格过程：　$S_i(j)=s_j, j\in N_i, 0\leqslant i\leqslant N$　　(1)

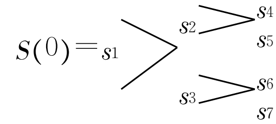

图1　二叉树树图

记 $V_k(j)(j\in N_k)$ 为 t_k 时刻树图节点 (k,j) 处的期权值.由于 T 时刻期权价值是确定的.

$$V^N(j)=\begin{cases}(E-S_N(j))^+ & \text{看跌期权}\\ (S_N(j)-E)^+ & \text{看涨期权}\end{cases}\tag{2}$$

然后,我们通过树图倒推计算得到 t_k 时刻的期权值 $V^k(j)$.树图倒推计算的思想是:由于市场不存在无风险套利机会,故可采用风险中性定价.t_k 时刻节点 (k,j) 处的期权价格可用 t_{k+1} 时刻节点 $(k+1,2j)$ 和 $(k+1,2j+1)$ 处期权价格的期望值在 Δ_t 时间内用 $[k\Delta_t,(k+1)\Delta_t)$ 区间的无风险利率 r_k 贴现得到,即

$$V^k(j)=\mathrm{e}^{-r_k\Delta_t}(p_k(j)V^{k+1}(2j+1)+(1-p_k(j))V^{k+1}(2j)), j\in N_k, 0\leqslant k\leqslant N-1\tag{3}$$

而对于美式看跌期权,由于可以提前执行,则(3)式应变为

$$V^k(j)=\max\{\mathrm{e}^{-r_k\Delta_t}(p_k(j)V^{k+1}(2j+1)+(1-p_k(j))V^{k+1}(2j)), E-S_k(j)\},$$
$$j\in N_k, 0\leqslant k\leqslant N-1\tag{4}$$

为了确定期权价格,必须合理确定股票价格过程及 $p_k(j)$ 的值.设

$$S_{k+1}(2j+1)=S_k(j)u_k(j), S_{k+1}(2j)=S_k(j)d_k(j), j\in N_k,$$

则 $u_k(j)>1, d_k(j)<1$,此处必须预先合理确定 $p_k(j)$, $u_k(j)$ 和 $d_k(j)$ 的值,目前普遍使用的二叉树参数模型为：

$$p_k(j)=\frac{a_k-d_k(j)}{u_k(j)-d_k(j)}, u_k(j)=\mathrm{e}^{\sigma_k\sqrt{\Delta_t}}, d_k(j)=\mathrm{e}^{-\sigma_k\sqrt{\Delta_t}}, a_k=\mathrm{e}^{r_k\Delta_t}\tag{5}$$

其中 σ_k 为时间段 $[k\Delta_t,(k+1)\Delta_t)$ 内股票的波动率.注意到对 $j\in N_k$, $u_k(j)$, $d_k(j)$ 和 $p_k(j)$ 均相等,故可简写为 u_k, d_k, p_k.但参数模型(5)存在两个不足:其一,对于较小的波动率 σ,将会产生大于1或负的概率.例如,取 $r_k=0.12, \Delta_t=0.1, \sigma_k=0.01$,则由(5)式计算得到 $p_k=2.39, 1-p_k=-1.39$,这是毫无意义的结果.其二,虽然在大多数情况下,这个近似是合理的,但只有在 $\Delta_t\to 0$ 时,才是正确的.下面我们构造一个新型二叉树参数模型.

熟知的股票价格模型为：　$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}B_t$,

在时间段 $[k\Delta_t,(k+1)\Delta_t)$ 内,设 σ_k, r_k 为常数不失为一种合理且简单实用的处理方法.

又因市场不存在无风险套利机会,故可视其为风险中性世界,此时有　$\mathrm{d}S=r_kS\mathrm{d}t+\sigma_kS\mathrm{d}B_t$.

故有

$$\ln S_{t_{k+1}}\sim N\left(\ln S_{t_k}+\left(r_k-\frac{\sigma_k^2}{2}\right)\Delta_t, {\sigma_k}^2\Delta_t\right)\tag{6}$$

其中 $S_{t_{k+1}}$ 和 S_{t_k} 分别为 $(k+1)\Delta_t$ 和 $k\Delta_t$ 时刻的股票价格, $N(m,\sigma^2)$ 代表均值为 m,方差为 σ^2 的正态分布.

由(6)式有 $S_{t_{k+1}}/S_{t_k}$ 的均值 a_k 和方差 b_k^2 为：　$a_k=\mathrm{e}^{r_k\Delta_t}, b_k^2=a_k^2(\mathrm{e}^{\sigma_k^2\Delta_t}-1)$　　(7)

又 S_{t_k} 分别以概率 p_k 和 $1-p_k$ 随机移动到 $S_{t_k}u_k$ 和 $S_{t_k}d_k$ 中的一个,故有

$$p_ku_k+(1-p_k)d_k=a_k\tag{8}$$

$$p_k(u_k)^2+(1-p_k)(d_k)^2-a_k^2=b_k^2\tag{9}$$

(8)式和(9)式是确定参数 p_k, u_k, d_k 的基本方程,显然尚缺少一个条件,若补充方程 $u_kd_k=1$,同时令 $\Delta_t\to 0$,即可得到通用的二叉树参数模型,但补充方程并无充分根据,只是因为由此导出的期权定价公式在大多数情况下能产生令人满意的结果.但如前面所指出的,亦存在缺陷.下面考虑重新构造参数公式.因 u_k 表示时间段 $[k\Delta_t,(k+1)\Delta_t)$ 内 $S_{k\Delta_t}$ 上升的比率,视 u_k 为一随机变量,则有 $E(u_k)=\mathrm{e}^{r_k\Delta_t}=a_k$, $\sigma^2(u_k)=a_k^2(\mathrm{e}^{\sigma_k^2\Delta_t}-1)=b_k^2$,又 $\sigma(u_k)$ 可视为随机变量 u_k 取值 $E(u_k)$ 下的误差,从误差校正的观点出发, u_k 的一合理的取值为 $u_k=E(u_k)\pm m\sigma(u_k)$, $m>0$.又考虑到真实的概率 $0\leqslant p\leqslant 1$,由(8)式得 $p_k=(a_k-d_k)/(u_k-d_k)$,这意味着 $u_k\geqslant a_k=E(u_k)$,因此我们取 $u_k=E(u_k)+m\sigma(u_k)=a_k+b_k$,与(8)式,(9)式一起,即得到参数模型：

$$p_k=\frac{1}{1+m^2}, u_k=a_k+mb_k, d_k=a_k-\frac{1}{m}b_k\tag{10}$$

参数模型(10)较原公式(5)的优点是明显的:其一,它永远不会产生负的概率,因此可适用于任何情况下的期权值计算.其二,它在 $\Delta_t\nrightarrow 0$ 时,仍有很高的精度.另外,可根据实际金融市场情况,设定恰当

的 m 值.例如，若在期权有效期内股票价格上升比例较大，则可取较大的 m 值，反之，则可取较小的 m 值.我们不妨把此模型称之为 $1/(1+m^2)$ 二叉树参数模型或分数二叉树参数模型.

注意　当 $\Delta t\to 0$ 时，(7)式可简化为

$$a_k=1+r_k\Delta t,\ b_k=\sigma_k\sqrt{\Delta t} \tag{11}$$

在计算精度要求不是很高的情况下，可用(10)式和(11)式构成此参数模型的简化情形，(11)式的优点在于它计算更为简便且结果比较令人满意.

公式(2)－(4)和(7)式，(10)式给出了完整的分数二叉树模型的欧式和美式期权价格的数值计算公式.对于基础股票在有效期内支付红利及标的资产为股票指数，货币和期货合约等情形，对上述公式略加修改即可得到相应的计算公式.

根据国外金融实证分析结果，在风险中性世界而金融市场又正常健康运行情况下，通常取 $m=1$ 即可.此时有

$$p_k=1/2,\ u_k=a_k+b_k,\ d_k=a_k-b_k \tag{12}$$

这就产生了一个合理且有趣的结论：S 上升和下降的概率是同样的 $p_k=1-p_k=1/2$.为了叙述简洁，不失一般性，下面着重研究 1/2 二叉树模型用于期权定价时所具有的一些性质.

2　1/2 二叉树模型用于标准欧式/美式期权定价性质

连续状态下标准欧式期权的定价模型为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+LV=0 \tag{13}$$

其中

$$LV=\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV.$$

标准美式期权的定价模型为

$$\begin{cases}\min\left\{-\dfrac{\partial V}{\partial t}-LV,V-\varphi\right\}=0\\ V(T,S)=\varphi(S)\end{cases} \tag{14}$$

其中

$$\varphi(S)=\begin{cases}(E-S_N(j))^+,\text{看跌期权;}\\ (S_N(j)-E)^+,\text{看涨期权.}\end{cases}$$

首先证明 1/2 二叉树模型和连续状态模型的相容性，此处以欧式期权为例，美式期权同理可得.

定理 1　1/2 二叉树模型(3)、(12)和相应的偏微分方程(13)相容.

定理 1 的证明　我们需要证明对足够光滑的函数 $V(S,t)$ 和 (S_0,t_0)，当 $\Delta t\to 0$，有如下式子成立：

$$\mathrm{e}^{-r\Delta t}\left(\frac{1}{2}(u-1)+\frac{1}{2}(d-1)\right)=r\Delta t+O(\Delta t^2),$$

$$\mathrm{e}^{-r\Delta t}\left(\frac{1}{2}(u-1)^2+\frac{1}{2}(d-1)^2\right)=\sigma^2\Delta t+O(\Delta t^2),$$

$$\mathrm{e}^{-r\Delta t}\left(\frac{1}{2}(u-1)^3+\frac{1}{2}(d-1)^3\right)=O(\Delta t^2).$$

由 Taylor 展式有

$$\begin{aligned}(V-F_{\Delta t}V)(S,t)=&V(S,t)-\mathrm{e}^{-r\Delta t}V(S,t)-\mathrm{e}^{-r\Delta t}\left(\frac{1}{2}(u-1)+\frac{1}{2}(d-1)\right)S\frac{\partial V}{\partial S}(S,t)-\\&\mathrm{e}^{-r\Delta t}\frac{\partial V}{\partial t}\cdot\Delta t+\mathrm{e}^{-r\Delta t}\left(\frac{1}{2}(u-1)^2+\frac{1}{2}(d-1)^2\right)S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}(S,t)+O(\Delta t^2)=\\&-\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV\right)\Delta t=O(\Delta t^2),\end{aligned}$$

可得

$$\frac{1}{\Delta t}(V-F_{\Delta t}V)(S,t)=-\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}rS\frac{\partial V}{\partial S}-rS\frac{\partial V}{\partial S}+rV\bigg|_{(S,t)}+O(\Delta t),$$

定理 1 证毕.

文献[6]指出对于标准期权，常用的二叉树模型和某一显微分格式等价，下面讨论 1/2 二叉树模型和有限微分方法间的关系.以美式期权为例，欧式期权同理可得.

对(14)式实施变换 $S=\mathrm{e}^x$，得

$$\begin{cases}\min\left\{-\dfrac{\partial V}{\partial t}-\dfrac{1}{2}\sigma^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\left(r-\dfrac{\sigma^2}{2}\right)\dfrac{\partial V}{\partial x}+rV,V-\varphi\right\}=0,\text{在}[0,T)\times(-\infty,+\infty);\\ V(T,S)=\varphi(x),\text{在}(-\infty,+\infty).\end{cases}$$

其中 $\varphi(x)=(e^x-E)^+$ 或 $\varphi(x)=(E-e^x)^+$.

现提供(14)式的一显微分方法,给定网格步长 $\Delta x,\Delta t$, $N\Delta t=T$,令 $Q=\{(n\Delta t,j\Delta x):0\leqslant n\leqslant N,j\in Z\}$ 为网格. V_j^n 表示 $(n\Delta t,j\Delta x)$ 处的数值估计值, $\varphi_j=\varphi(j\Delta x)$,有

$$\min\left\{-\frac{V_j^{n+1}-V_j^n}{\Delta t}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{V_{j+1}^{n+1}-2V_j^{n+1}+V_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{V_{j+1}^{n+1}-V_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}+rV_j^n,V_j^n-\varphi_j\right\}=0,$$

即

$$V_j^n=\max\left\{\frac{1}{1+r\Delta t}\left(\left(1-\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}\right)V_j^{n+1}+\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\Delta x}{2\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)V_{j+1}^{n+1}+\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}V_j^{n+1}+\frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\Delta x}{2\sigma^2}\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\right)V_{j-1}^{n+1}\right),\varphi_j\right\}.$$

令 $\Delta x=\sigma\sqrt{\Delta t}$,有 $$V_j^n=\max\left\{\frac{1}{1+r\Delta t}\left(aV_{j+1}^{n+1}+(1-a)V_{j-1}^{n+1},\varphi_j\right)\right\},$$

其中 $a=1/2+\sqrt{\Delta t}(r-\sigma^2/2)/(2\sigma)$. 忽略 $\sqrt{\Delta t}$,本文提出的二叉树模型和上述微分格式等价.

因美式期权在到期日执行最优,故和欧式看涨期权价值相同,下面皆以美式看跌期权为例,研究1/2二叉树模型性质.

定理2 1/2 二叉树模型有如下性质:

(ⅰ) $V_j^n\geqslant V_{j+1}^n$,对所有 j,n. (ⅱ) $V_j^{n+1}\geqslant V_j^n$,对所有 $n<N,j$. (ⅲ) $V_j^n\leqslant E$,对所有 j,n.

定理2的证明 为证性质(ⅰ),用数学归纳法,显然 $V_j^N=\varphi_j\geqslant\varphi_{j+1}=V_{j+1}^N$,若 $V_j^{k+1}\geqslant V_{j+1}^{k+1}$ 对所有 j,则有

$$V_j^k=\max\left\{e^{r\Delta t}\left(\frac{1}{2}V_{j+1}^{k+1}+\frac{1}{2}V_{j-1}^{k+1}\right),\varphi_j\right\}\geqslant$$
$$\max\left\{e^{r\Delta t}\left(\frac{1}{2}V_{j+2}^{k+1}+\frac{1}{2}V_j^{k+1}\right),\varphi_{j+1}\right\}=V_{j+1}^k.$$

性质(ⅰ)得证. 同理可证性质(ⅱ)、(ⅲ).

记 $$H(V,S,T)=\min\left\{-\frac{\partial V}{\partial t}-LV,V-\varphi\right\},$$

$$USC((0,\infty)\times(0,T])=\{\text{上半连续函数 } u:(0,\infty)\times(0,T]\to\mathrm{R}\},$$
$$LSC((0,\infty)\times(0,T])=\{\text{下半连续函数 } u:(0,\infty)\times(0,T]\to\mathrm{R}\},$$

称函数 $V\in USC((0,\infty)\times(0,T])$(或 $LSC((0,\infty)\times(0,T])$)是问题(13)的粘性下解(或粘性上解),若 $V(S,T)\leqslant\varphi(S)$(或 $V(S,T)\geqslant\varphi(S)$)且对任意 $\phi\in C^{2,1}((0,\infty)\times(0,T))$, $V-\phi$ 在 $(S_0,t_0)\in(0,\infty)\times(0,T)$ 取得局部最大值,同时 $(V-\phi)(S_0,t_0)=0$,我们有

$H(\phi,S_0,t_0)\leqslant0$ 对 $(S_0,t_0)\in(0,\infty)\times(0,T)$. (或 $H(\phi,S_0,t_0)\geqslant0$ 对 $(S_0,t_0)\in(0,\infty)\times(0,T)$).

解的收敛性的证明需要强比较法则,由文献[1,2]可得下列引理.

引理1 对问题(14)强比较法则成立,即若 u 和 v 分别是其粘性下解和粘性上解,则有 $u\leqslant v$.

引理2 问题(14)有唯一粘性解.

为简化起见,模型(4)可改写为: $$V^n=F_{\Delta t}(V^{n+1}) \tag{15}$$

易见(15)是单调的,即 $$F_{\Delta t}U\leqslant F_{\Delta t}V,\text{若 } U\leqslant V \tag{16}$$

且易验证 $$F_{\Delta t}(V+K)\leqslant F_{\Delta t}V+K,K\geqslant0 \tag{17}$$

其中 K 是 Z 上的非负常值函数.

定义延拓函数 $u_{\Delta t}(t,x)$ 如下:对 $x\in\left[\left(j-\frac{1}{2}\right)\Delta x,\left(j+\frac{1}{2}\right)\Delta x\right)$, $t\in\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\Delta t,\left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t\right)$, $u_{\Delta t}(t,x)=V_j^n$,由定义有 $$u_{\Delta t}(t,x)=(F_{\Delta t}u_{\Delta t}(t+\Delta t,\cdot))(x),\text{对所有}(t,x)\in[0,T-\Delta t]\times\mathrm{R} \tag{18}$$

下面利用粘性解的概念证明 1/2 二叉树模型的收敛性.

定理3 假设 $u(t,x)$ 是问题(14)的解,当 $\Delta t\to0$ 时,有 $u_{\Delta t}(t,x)$ 收敛于 $u(t,x)$.

定理3的证明 假设 $u(t,x)$ 是问题(13)的粘性解. 定义

$$u^*(t,x)=\limsup_{\Delta t\to 0,(s,y)\to(t,x)} u_{\Delta t}(s,y),\quad u_*(t,x)=\liminf_{\Delta t\to 0,(s,y)\to(t,x)} u_{\Delta t}(s,y),$$

由定理 2，$u^*(t,x)$ 和 $u_*(t,x)$ 有意义，且 u^* 为粘性上解，u_* 为粘性下解，$u_*(t,x)\leqslant u^*(t,x)$. 若我们能证 u^* 和 u_* 分别是粘性下解和粘性上解，则有 $u^*(t,x)\leqslant u_*(t,x)$，即得 $u_*(t,x)=u^*(t,x)=u(t,x)$.

我们只需证明 u^* 是问题(14)的下解，易证明 $u^*(T,x)=\varphi(x)$. 假设对 $\phi\in C^{1,2}([0,T]\times\mathrm{R})$，$u^*-\phi$ 在 $(t_0,x_0)\in[0,T)\times\mathrm{R}$ 取得局部极大值，且 $(u^*-\phi)(t_0,x_0)=0$. 不妨设 (t_0,x_0) 是 $B_r=\{t_0\leqslant t\leqslant t_0+r,|x-x_0|\leqslant r\}$，$r>0$ 上的严格局部极大值. 设 $\Phi=\phi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$，则 $u^*-\Phi$ 在 (t_0,x_0) 取得严格局部最大值，且

$$(u^*-\Phi)(t_0,x_0)>0 \tag{19}$$

由 u^* 的定义，只存在一列 $u_{\Delta t_k}(S_k,y_k)$ 使得 $\Delta t_k\to 0$, $(S_k,y_k)\to(t_0,x_0)$,

$$u_{\Delta t_k}(S_k,y_k)\to u^*(t,x)，当 k\to\infty.$$

假设 $(S_k,\hat{y}_k)$ 是 $u_{\Delta t_k}-\Phi$ 在 B_r 上的全局最大值点，我们能推导出存在一列子列 $u_{\Delta t_{k_i}}(S_{k_i},\hat{y}_{k_i})$ 使得

$$\Delta t_{k_i}\to 0,(S_{k_i},\hat{y}_{k_i})\to(t_0,x_0),(u_{\Delta t_{k_i}}-\Phi)(S_{k_i},\hat{y}_{k_i})\to(u^*-\Phi)(t_0,x_0)当 k_i\to\infty \tag{20}$$

设 $(S_{k_i},\hat{y}_{k_i})\to(S,\hat{y})$，则

$$(u^*-\Phi)(t_0,x_0)=\lim_{k_i\to\infty}(u_{\Delta t_{k_i}}-\Phi)(S_{k_i},y_{k_i})\leqslant\lim_{k_i\to\infty}(u_{\Delta t_{k_i}}-\Phi)(S_{k_i},\hat{y}_{k_i})\leqslant(u^*-\Phi)(S,\hat{y}),$$

因 (t_0,x_0) 是 $u^*-\Phi$ 的局部严格最大值点，这使得 $(S,\hat{y})=(t_0,x_0)$，于是在 B_r 上，

$$(u_{\Delta t_{k_i}}-\Phi)(S_{k_i}+\Delta t_{k_i},\cdot)\leqslant(u_{\Delta t_{k_i}}-\Phi)(S_{k_i},\hat{y}_{k_i}),$$

即在 B_r 上，

$$u_{\Delta t_{k_i}}(S_{k_i}+\Delta t_{k_i},\cdot)\leqslant\Phi(S_{k_i}+\Delta t_{k_i},\cdot)+(u_{\Delta t_{k_i}}-\Phi)(S_{k_i},\hat{y}_{k_i}),$$

从(19)和(20)式，可得

$$(u_{\Delta t_{k_i}}-\Phi)(S_{k_i},\hat{y}_{k_i})>0，当 k_i 足够大时 \tag{21}$$

由(18)式，有

$$\begin{aligned}(u_{\Delta t_{k_i}}(S_{k_i},\hat{y}_{k_i})=&(F_{(\Delta t_{k_i})}u_{\Delta t_{k_i}}(S_{k_i}+\Delta t_{k_i},\cdot))(\hat{y}_{k_i})\leqslant\\&(F_{(\Delta t_{k_i})}(\Phi(S_{k_i}+\Delta t_{k_i},\cdot)+(u_{\Delta t_{k_i}}-\Phi)(S_{k_i},\hat{y}_{k_i})))(\hat{y}_{k_i})\leqslant\\&(F_{(\Delta t_{k_i})}\Phi(S_{k_i}+\Delta t_{k_i},\cdot))(\hat{y}_{k_i})+(u_{\Delta t_{k_i}}-\Phi)(S_{k_i},\hat{y}_{k_i}),\end{aligned}$$

最后两个不等式由(16)、(17)及(21)式得到. 于是有 $\Phi(S_{k_i},\hat{y}_{k_i})-(F_{(\Delta t_{k_i})}\Phi(S_{k_i}+\Delta t_{k_i},\cdot))(\hat{y}_{k_i})\leqslant 0$,

由相容性，令 $k_i\to\infty$，则得

$$\min\left\{-\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+r\Phi,\Phi-\psi\right\}_{(t_0,x_0)}\leqslant 0,$$

令 $\varepsilon\to 0$，有

$$\min\left\{-\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial\phi}{\partial x}+r\phi,\phi-\psi\right\}_{(t_0,x_0)}\leqslant 0,$$

因 $u(t_0,x_0)=\phi(t_0,x_0)$，即得结论.

3　算例

下面通过两个计算实例来证明 1/2 二叉树模型的有效性，第一个例子考虑了可由 Black-Scholes 公式精确求解的欧式看涨期权，第二个例子考虑了美式看跌期权，计算结果表明 1/2 二叉树模型是收敛的且有很高的精度.

例 1　考虑一个在期权有效期内不支付红利股票的欧式看涨期权的估值. 设相关数据为：$S(0)=50$，$E=45$，$r=0.12$，$\sigma=0.01$. 期权有效期分别取 $T=1$ 个月，3 个月，…，12 个月，表 1 给出了取不同的步长 $\Delta t=T/N$ 时，采用公式(2)、(3)、(7)和(12)得到的计算结果，计算结果中的精确解指用 Black-Scholes 解析公式求得的解. 注意，此例因由(5)式将得到大于 1 或负的概率，故不能用通常的模型公式计算.

表 1　欧式看涨期权价格的计算结果

T	精确解	$N=8$	$N=16$	$N=20$
1	5.442	5.447 8	5.447 8	5.447 8
3	6.312	6.330 0	6.330 0	6.330 0
6	7.614	7.620 6	7.620 6	7.620 6
9	8.876	8.873 1	8.873 1	8.873 1
12	10.089	10.088 6	10.088 6	10.088 6

表 2　美式看跌期权价格的计算结果

T	$N=8$	$N=12$	$N=16$	$N=20$
1	0.836 9	0.843 1	0.846 2	0.847 9
3	1.378 7	1.387 9	1.392 0	1.393 6
6	1.858 0	1.864 9	1.869 3	1.871 1
9	2.189 8	2.195 5	2.200 6	2.200 6
12	2.445 7	2.450 4	2.456 9	2.454 6

例2　考虑一个在期权有效期内不支付红利股票的美式看跌期权的估值. 设相关数据为: $S(0)=40$, $E=40$, $r=0.05$, $\sigma=0.20$. 表2给出了取不同的步长 $\Delta t=T/N$ 时,采用公式(2)、(4)、(7)和(12)得到的计算结果.

参考文献:

[1] Cox J C, Ross S A, Rubinsrein M. Option pricing: a single approach[J]. Journal of Financial Economies, 1979, 7: 229-263.

[2] He H. Convergence from discrete to continuous time contingent claime prices[J]. Review of Financial Studies, 1990, 3: 523-546.

[3] Amin K, Khanna A. Convergence of american options value from ddiscrete to continuous time financial models[J]. Marhematical Finance, 1994, 4: 289-304.

[4] Crandall M G, Ishii H, Lions P L. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations [J]. Bull Amer Soc, 1992, 27: 1-67.

[5] Barles G. Convergence of numerical schemes for degenerate parabolic equations arising in finance theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

[6] 雍炯敏, Rama Con. 数学金融学一理论与实践[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[7] 叶中行, 林建中. 数理金融[M]. 北京: 科学出版社, 2000.

The binomial tree method of fraction for pricing options

WAN Cheng-gao, GAO Shen-shen, XIONG Ying-ying

(School of Mathematics and Computer Science, Hubei University, Wuhan 430062, China)

Abstract: By applying the logarithmic normal distribution of stock price process and the method of stochastic error correcting, the binomial tree method of fraction to price options were obtained. Some properties including consistency were got when the modle was respectivety used to price vanilla European/American options. And the convergence for the binomial tree method of fraction to vanilla European/American options were proved by employing the notion of viscosity solution. At the same time, two numerical experiments were presented to demonstrate the conclusion.

Key words: binomial tree method; vanilla European/American options; consistency; convergence

(责任编辑　肖铿)