- 泰勒展开论文区间划分思路
- 切比雪夫区间划分
    - 误差计算
    - 区间划分，与泰勒展开划分在理论上的不同
    - 区间划分过程
    - 最后区间划分表格与说明
    - 疑问
    - 实现算法

泰勒展开论文区间划分思路

原论文画分区间思路：

$$\epsilon_a \leq \frac{D^3}{ULP(x)} \leq 0.125$$

$$D < (\frac{ULP}{2^{-3}})^{\frac{1}{3}}$$

$$Let\ ULP\ = 2^{-k-23};$$

$$D < 2^{\frac{-k-26}{3}}$$

$if\ want\ \ the\ first\ segment$:

$$Let\ consider\ \ : \frac{-k-26}{3} > -k, than : k > 13$$

取k=14；即从2^{-14}以下自然满足条件，不用在继续划分，之后由于为了保证区间大小为2的整数次方倍，取k步进3，得到以下划分区间：

因为根据公式要求:$D_{max} = 2^{-15} < 2^{-13.33}$

区间范围	子区间大小
$[2^{-4}, 2^{-3})$	2^{-10}
$[2^{-7}, 2^{-4})$	2^{-11}
$[2^{-10}, 2^{-7})$	2^{-12}
$[2^{-13}, 2^{-10})$	2^{-13}
$[2^{-14}, 2^{-13})$	2^{-14}
$[0, 2^{-14})$	2^{-15}

切比雪夫区间划分

误差计算

仿造该思路：

For an arbitrary interval $[a, b]$ a change of variable shows that

$$\left|f(x) - P_{n-1}(x)\right| \le \frac{1}{2^{n-1}n!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^n \max_{\xi\in[a,b]}\left|f^{(n)}(\xi)\right|.$$

对3阶误差进行分析，取n-1=3，n=4，可得

$$\epsilon \le \frac{16\pi^4 D^4}{2^{2*4-1} * 4! * 4\sqrt{2}ULP(x)}$$

$$\epsilon \le \frac{D^4}{11.15ULP} \le 0.125$$

$$So:$$

$$D \le 1.08ULP^{\frac{1}{4}}$$

取1.08取1：

$$ULP = 2^{-k-31}, 32\text{位小数}$$

$$D < 2^{\frac{-k-31}{4}}$$

区间划分，与泰勒展开划分在理论上的不同

确定第一个区间范围：

$$\frac{-k-31}{4} > -k, than: k > 10.33$$

取第一个segment $k_0 = 11$，对应D应该满足

$$D < 2^{-11} < 2^{-10.5}$$

如果泰勒这个时候展开的话，第一个区间就可以不划分了，但是按切比雪夫这样就不可行了：

$$\text{例如取}k = 50，D < 2^{-20}, \text{这显然就不满足要求了}$$

不可以认为，这个区间之下，必然满足要求

原因在于，泰勒展开估计误差时候，D=(x-x_i),这是一个动态的值，比如在0附近D=x-0，

输入越小，则D越小，我们就可以用这种方法去计算在他很小的时候的精度要求必然成立

但是对于切比雪夫展开，就该论文估计Error的方法而言，D在计算系数的时候就决定好了，也就是说：

不管你在这个区间内多靠近某个值，他的误差最大值已经决定好了

也就是*误差分布不是像泰勒展开一样，离展开点越近，误差就越小*

这是由切比雪夫展开的性质决定的，切比雪夫展开就是在一个区间上做一个最优的逼近，即误差的分布比较均匀

所以其实可以选择在0附近用泰勒展开，在其他区间用切比雪夫

要求误差，就必须求区间，那这个k_0值的意义在哪里呢？

这个k_0值表明，接下来的区间里面，一个D内可以满足多个ULP的要求，小于这个k_0值，表明这个ULP的要求需要多个段内区间来满足（数量(D)>1)

区间划分过程

过程如下：

1.选择起始数$a_i(i = 1)$（确认精度要求）

2.根据a_i，求得D_i

3.得到区间$[a_i, a_i + D_i]$

4.$a_{i+1} = a_i$+D_i,$(i = i + 1)$

5.如果已经划分完所有范围，则完成；否则，返回2步骤。

先考虑k<11,即k=11的情况，如果我们按上述方式迭代，下一次迭代的结果是$2^{-11} + 2^{-10.5}$,这意味着，我们无法再2^{-k-n}到2^{-k-n+1}的区间内（这个区间的ULP是一样的），选择一个D来满足了，因此，我们不得不选择最小的来计算，也就是$D = 2^{-11}$

在$x > 2^{-9}$,取$D = 2^{-10}$可以满足要求

在$x > 2^{-5}$,取$D = 2^{-9}$可以满足要求，

k>11的情况如下：第一个区间从k=20,得$D = 2^{-12.75}$,选 上界为2^{-13}

如下：

最后区间划分表格与说明

如果考虑正在0附近用泰勒展开，考虑到sinx~x本身的误差，我们可以通过这种方式来选择最小的下界，经计算：

实际上大约$[0, 2^{-20}]$这个区间内，sinx~x，两者之间的误差就已经小于我们要求的ULP了（相当于在做一阶泰勒展开），在这个区间内可以不用展开了，所以列出以下表格：

Lower Bound	**Upper Bound**	**Segment**	**D(distance)**	n
0	2^{-20}	$in : x; out : 2\pi x$		1
2^{-20}	2^{-15}	$[2^{-20}, 2^{-15}]$	Upper-Lower	1
2^{-15}	2^{-13}	$[2^{-15}, 2^{-13}]$	Upper-Lower	1
2^{-13}	2^{-11}	$[2^{-13}, 2^{-11}]$	Upper-Lower	1
2^{-11}	2^{-9}	$[2^{-11} + (n-1)D, 2^{-11} + nD]$	2^{-11}	1~3
2^{-9}	2^{-5}	$[2^{-9} + (n-1)D, 2^{-9} + nD]$	2^{-10}	1~30
2^{-5}	2^{-3}	$[2^{-5} + (n-1)D, 2^{-5} + nD]$	2^{-9}	1~48

总计系数表个数为：3+1+1+1+1+30+48=85

$$N_{total} = 85$$

另外，用Chybeshev的论文中还设计了一种减小乘法尺寸的方法，但是这种方法会引入一个系数,使得每一个表的系数数量为5。

疑问

单调性是否违例

实现算法

在《数字信号处理的FPGA实现》一书中提到了由于该算法的实现的递推表达式：

为了确定式(2-65)中的函数值，将式(2-59)中的 $T_n(x)$带入并求解式(2-65)。不过为了计算数，更有效的方法是使用式(2-60)对应的迭代规则。这就是著名的切比雪夫递推公式[86]，程如下：

$$
\begin{aligned}
&d(N) = d(N+1) = 0 \\
&d(k) = 2xd(k+1) - d(k+2) + c(k) \qquad k = N-1, N-2, \ldots, 1 \\
&f(x) = d(0) = xd(1) - d(2) + c(0)
\end{aligned}
\tag{2-66}
$$

对于 $N=6$ 且偶系数等于 0 的系统，可以将式(2-66)化简为：

$$
\begin{aligned}
&d(5) = c(5) \\
&d(4) = 2xc(5) \\
&d(3) = 2xd(4) - d(5) + c(3) \\
&d(2) = 2xd(3) - d(4) \\
&d(1) = 2xd(2) - d(3) + c(1) \\
&f(x) = xd(1) - d(2)
\end{aligned}
\tag{2-67}
$$