Zweikörpersysteme - Auftrag PSIT HS 2013

Joris Damian Morger, Nicolas Manuel Alessandro Gagliani, IT12T

October 23, 2013

Auftrag 1: Simulation eines Zweikörperproblems

Die Aufträge A-D sind schriftlich zu bearbeiten. Der Abgabetermin für den ersten Auftrag ist der 25. Oktober 2013. Die Bearbeitungen werden bewertet (Nicht abgegeben = 0 Punkte, ungenügende Bearbeitung = 1 Punkt, Bearbeitung in Ordnung = 2 Punkte). Für hervorragende Bearbeitungen kann + 1 Bonuspunkt vergeben werden. Wichtig für die Bearbeitung ist, dass die eigenen Ideen, Konzepte und Gedanken in geeigneter Weise dokumentiert werden. Im Vordergrund steht nicht ein einfaches Resultat, sondern die Auseinandersetzung mit den Konzepten.

Einleitung: Bei einem Zweikörperproblem werden zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 betrachtet, welche miteinander wechselwirken. Ein Beispiel dafür ist das System Erde – Mond (sofern es isoliert betrachtet wird!), bei dem die beiden Himmelskörper sich über die Gravitation gegenseitig beeinflussen (an-ziehen). Ziel des Auftrags ist (1) ein Modell für ein solches System zu entwickeln und in einer Computersimulation zu testen, (2) das Verhalten der Simulationsresultate bezüglich numerischen Problemen qualitativ und soweit möglich quantitativ zu beschreiben und (3) der Einfluss verschiedener Wechselwirkungsgesetzte auszuprobieren.

A. Modellierung: Finden Sie die Systemgleichungen, welche die Bewegung von zwei Körpern in zwei Dimensionen ($\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t)\right)$) beschreiben.

B. Setzen Sie die Systemgleichungen (A) in ein Flussdiagramm für einen graphischen Modelleditor (Berkeley-Madonna) um (Handskizze).

C. Implementieren Sie das Modell in einen graphischen Modelleditor (Berkeley-Madonna) und simulieren Sie die Bewegung der beiden Körper für verschiedene Zeitschritte und nummerische Verfahren (Euler, RK2, RK4): was fällt auf? Welchen Zusammenhang (qualitativ und quantitativ) beobachten Sie zwischen den Bahnkurven und der Zeitschrittgrösse?

D. Was geschieht, wenn Sie anstelle eines $1/r^2$-Gesetztes eine andere Potent verwenden (z.B. $1/r^3$)? Lässt sich eine Regel (Vermutung) formulieren?

Intro

Wir betrachten im folgenden zwei isolierte Körper Erde und Mond mit den Massen m_{Mond} und M_{Erde}, wobei der Mond in ellipsenförmig um die Erde rotiert. Per Definition:

$$m_{\mathrm{M}} = 7.35 \times 10^{22} \text{ kg[2]}$$

$$m_{\mathrm{E}} = 5.79 \times 10^{24} \text{ kg[2]}$$

$$r_{\mathrm{ME}}(Abstand) = 3,844 \cdot 10^{8} \text{ m[1]}$$

$$\gamma = 6.6742^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Teil A

0.1 Fixer Radius

Erde und Mond ziehen sich an. Die Kraft zwischen den beiden Massen lässt sich wie folgt berechnen.

Wir wissen:

$$T = 27,3217d \approx 2360594s$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$F_Z = m\omega^2 r$$

Daher:

$$\omega_{\mathrm{M}} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{27,3217d} = \frac{2\pi}{2360594s} \approx 2.66 \cdot 10^{-6} s^{-1}$$

$$F_{\mathrm{Z}} = m_{\mathrm{M}} \cdot \omega_{\mathrm{M}}^2 \cdot r_{\mathrm{ME}} \approx 2 \cdot 10^{20} N$$

$$F_{\mathrm{E,M}} = \gamma \cdot \frac{m_{\mathrm{E}} \cdot m_{\mathrm{M}}}{|r_{\vec{ME}}|^2} \cdot \vec{n} \approx -2 \cdot 10^{20} N$$

Aha! Da die Zentripedalkraft vom Mond und die Gravitationskraft zwischen Mond und Erde die gleiche ist, einfach mit anderem Vorzeichen (also Kraft in andere Richtung), erkennen wir das der Mond und die Erde sich in Balance halten. Sie prallen weder aufeinander, noch bewegen sie sich voneinander weg.

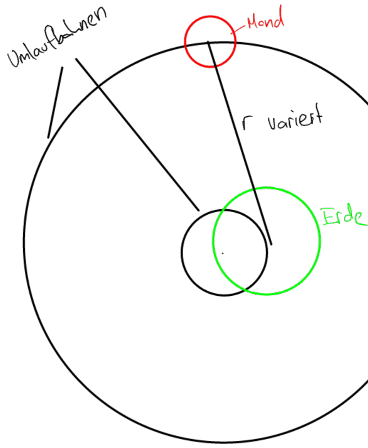

Figure 1: Radius verändert sich

0.2 Variabler Radius

Daher müssen wir ein Prozess finden der den Radius zwischen Mond und Erde genauer beschreibt. Bisher haben wir vernachlässigt das der Radius vom Mond zur Erde nicht immer gleich gross ist, da die Erde sich auch noch um eine Achse dreht.

Wir haben uns folgendes überlegt:

$$r_\mathrm{x} = x_\mathrm{M} - x_\mathrm{E}$$

$$r_\mathrm{y} = y_\mathrm{M} - y_\mathrm{E}$$

$$r = \sqrt[2]{\mathrm{r}_\mathrm{x}^2 - \mathrm{r}_\mathrm{y}^2}$$

$$F_\mathrm{x} = F_\mathrm{E,M} \cdot \frac{r_\mathrm{x}}{r}$$

$$F_\mathrm{y} = F_\mathrm{E,M} \cdot \frac{r_\mathrm{y}}{r}$$

$$A_\mathrm{xM} = \frac{F_\mathrm{x}}{m_\mathrm{m}}$$

$$A_\mathrm{yM} = \frac{F_\mathrm{y}}{m_\mathrm{m}}$$

$$A_\mathrm{xE} = \frac{F_\mathrm{x}}{m_\mathrm{m}}$$

$$A_\mathrm{yE} = \frac{F_\mathrm{y}}{m_\mathrm{m}}$$

$$V_\mathrm{xM} = \int A_\mathrm{xM}$$

... und so weiter für yM , xE und yE

$$X_{\mathrm{M}} = \int V_{\mathrm{xM}}$$

... und so weiter für yM , xE und yE
Als Startwerte nehmen wir:

$$x_{\mathrm{E0}} = x_{\mathrm{M0}} = y_{\mathrm{E0}} = 0$$

$$x_{\mathrm{M0}} = r_{\mathrm{ME}}$$

$$v_{\mathrm{xM}} = v_{\mathrm{xE}} = v_{\mathrm{yE}} = 0$$

$$V_{\mathrm{yM}} = 1'023km/s[?]$$

Teil B

Teil C

Wir haben unser Modell aufgrund unserer Überlegungen aus Aufgabe A und B modelliert.

Je kleiner die Zeitschritte sind, desto näher kommen sich die nummerischen Verfahren Euler, RK2 und RK4 im Resultat. Bei grösseren Zeitschritten geht die Genauigkeit beim Eulerschen Verfahren am schnellsten verloren. Schlussendlich sieht es aus als wäre die Genauigkeit wie auch der Zeitaufwand im Folgenden Schema: Euler ungenauer RK2 ungenauer RK4. Eigentlich hatten wir die Lösung schon längst in Berkeley Madonna, haben aber die längste Zeit nach einem Fehler gesucht der eigentlich keiner war. Das Problem war das wir im Parameter Window zu wenige Zeitschritte gemacht haben und zu früh aufgehört haben. So haben wir nie gesehen wie die eigentliche Kurve sich entwickelt hat.

Teil D

Wir vermuten das sich bei einer anderen Potenz die Laufbahnen sehr schnell, sehr stark verändern würde. Da die Anziehungskraft schwächer wird (je grösser die Potenz), würde es zu ganz anderen Formen kommen, da wir gesehen haben das die Kraft "The Force" eine zentrale Rolle spielt in unserer Berechnung wie auch imBerkeley Madonna Programm.

References

[1] Mond. `http://de.wikipedia.org/wiki/Mond`.

[2] Planetary mass. `http://en.wikipedia.org/wiki/Planetary_mass`.

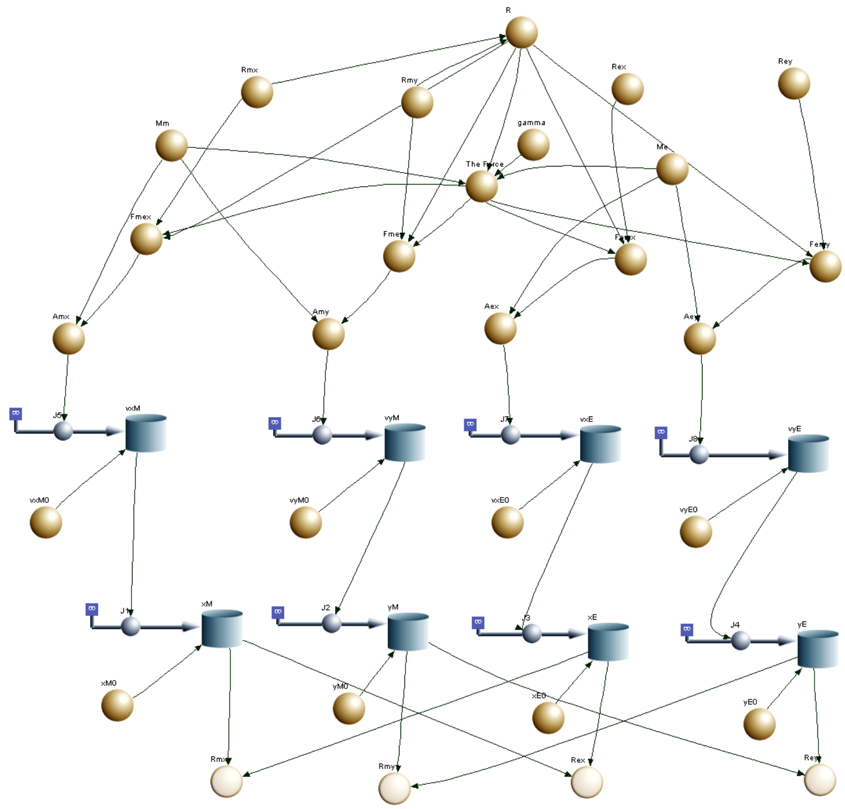

Figure 2: Screenshot unseres Berkeley Madonna Programms

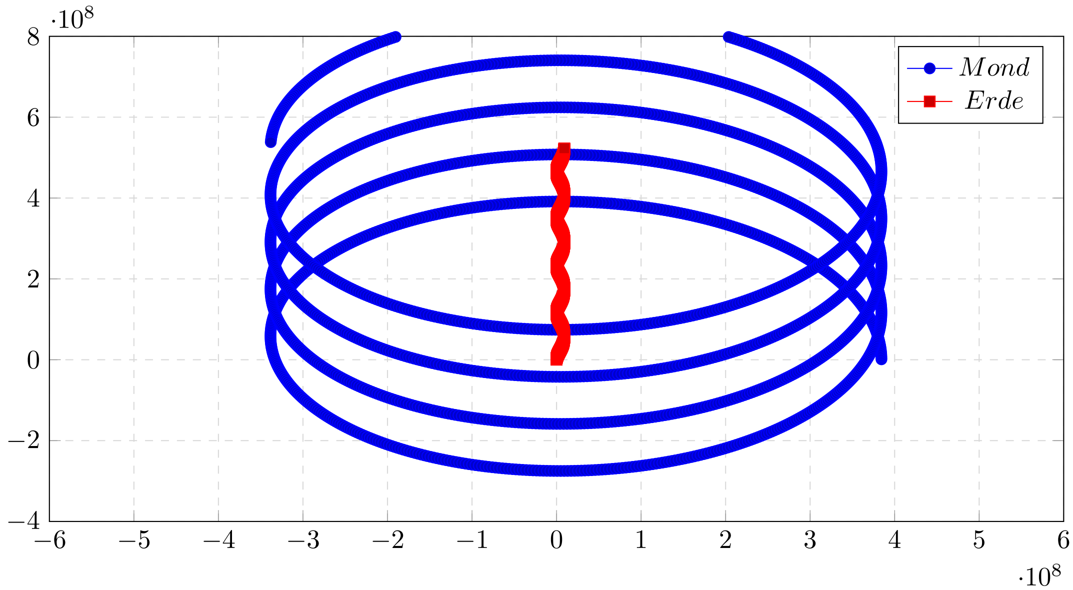

Figure 3: Plot des CSV Files, exportiert aus Berkeley Madonna