

Proyecto final - Programación aplicada - Control I

Jorge Andres Gutierrez manios* Jean David Archbold González†

Facultad de Ingeniería, Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Correo(s):joagutierrezm@udistrital.edu.co - 20202005038, jdarchboldg@udistrital.edu.co - 20202005028

Abstract—This report presents the modeling, experimental identification, and control design of an aeropendulum system. A theoretical nonlinear model is first derived from the literature and linearized around different operating points. Experimental tests are then conducted to obtain transfer functions for each equilibrium angle. Based on these models, controllers are designed using the Root Locus method and their performance is evaluated through overshoot, settling time, and steady-state error. Finally, state-feedback controllers are developed for each model, allowing a comparison between classical and modern control strategies.

Index Terms—

I. INTRODUCCIÓN

La dinámica de sistemas subactuados como el aeropéndulo ha sido ampliamente estudiada debido a su relevancia en aplicaciones de control no lineal, robótica y estabilización de vehículos aéreos. El aeropéndulo consiste en un brazo rotacional cuya posición angular es influenciada por el torque generado por un actuador, generalmente una hélice o un motor. Su comportamiento presenta características no lineales asociadas al efecto de la gravedad y a las variaciones aerodinámicas, lo que lo convierte en una plataforma ideal para el estudio de técnicas modernas de modelado, identificación y control.

El presente informe desarrolla un tratamiento completo del aeropéndulo desde tres perspectivas fundamentales. Primero, se establece un modelo teórico basado en la literatura, considerando únicamente principios físicos y sin recurrir a mediciones experimentales. Segundo, se implementa el sistema real para obtener funciones de transferencia mediante identificación experimental en distintos puntos de operación, lo que permite capturar cambios en la dinámica del sistema según el ángulo de equilibrio. Finalmente, se diseñan y simulan controladores para cada modelo identificado mediante el método del Lugar Geométrico de las Raíces, evaluando su desempeño dinámico a través de índices como el sobreimpulso, el tiempo de establecimiento y el error en estado estacionario. Como complemento, se diseña un controlador basado en realimentación de variables de estado para cada uno de los modelos, permitiendo comparar su desempeño frente a las técnicas convencionales.

Este conjunto de procedimientos ofrece una visión integral del comportamiento dinámico del aeropéndulo y de las distintas estrategias de control que pueden implementarse para lograr estabilidad y desempeño adecuado.

RESUMEN

Este informe presenta el desarrollo completo del modelo teórico, la obtención experimental de funciones de transferencia y el diseño de controladores para un aeropéndulo. El

trabajo se divide en tres fases: (1) modelado teórico a partir de la literatura, (2) identificación experimental de funciones de transferencia para distintos puntos de operación y (3) diseño de controladores mediante Lugar Geométrico de las Raíces y control por realimentación de estados.

II. MARCO TEÓRICO

III. MODELO TEÓRICO DEL AEROPÉNDULO

El aeropéndulo se modela como un péndulo rotacional accionado por un torque externo proveniente de un actuador (motor, hélice o propulsor).

A. Ecuación dinámica no lineal

La dinámica rotacional del sistema está dada por:

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = u(t) \quad (1)$$

donde:

- I : momento de inercia del péndulo.
- b : coeficiente de fricción viscosa (incluye efectos aerodinámicos).
- m : masa equivalente.
- l : distancia al centro de masa.
- g : aceleración gravitacional.
- $u(t)$: torque aplicado.

B. Linealización alrededor de un punto de operación

Sea $\theta = \theta_0 + \tilde{\theta}$ una pequeña variación respecto al punto de operación θ_0 . Linealizando $\sin(\theta)$ alrededor de θ_0 :

$$\sin(\theta_0 + \tilde{\theta}) \approx \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0)\tilde{\theta} \quad (2)$$

El modelo linealizado queda:

$$I\ddot{\tilde{\theta}} + b\dot{\tilde{\theta}} + k(\theta_0)\tilde{\theta} = \tilde{u}(t) \quad (3)$$

donde:

$$k(\theta_0) = mgl \cos(\theta_0) \quad (4)$$

C. Función de transferencia teórica

La función de transferencia para cada punto de operación es:

$$G_{\theta_0}(s) = \frac{\tilde{\Theta}(s)}{\tilde{U}(s)} = \frac{1}{Is^2 + bs + k(\theta_0)} \quad (5)$$

D. Parámetros dinámicos

Cada modelo corresponde a un sistema de segundo orden con:

$$\omega_n(\theta_0) = \sqrt{\frac{k(\theta_0)}{I}}, \quad 2\zeta(\theta_0)\omega_n(\theta_0) = \frac{b}{I} \quad (6)$$

IV. IDENTIFICACIÓN EXPERIMENTAL

El objetivo es obtener funciones de transferencia reales $G_{\theta_0}(s)$ para distintos ángulos de operación.

A. Montaje experimental

El sistema incluye:

- Actuador de torque (motor, hélice o servomotor en modo torque).
- Sensor de posición angular (encoder o potenciómetro).
- Controlador de adquisición (microcontrolador o PC).
- Señales de excitación: PRBS, chirp o escalón.

B. Procedimiento

Para cada ángulo θ_0 :

- 1) Colocar el aeropéndulo en el punto de operación.
- 2) Aplicar una señal $\tilde{u}(t)$ alrededor del punto de equilibrio.
- 3) Medir $\theta(t)$ y $u(t)$.
- 4) Filtrar, ajustar y eliminar offsets.
- 5) Identificar un modelo de segundo orden mediante técnicas paramétricas.

C. Modelo identificado

El modelo general identificado es:

$$G_{\theta_0}(s) = \frac{K}{Is^2 + bs + k(\theta_0)} \quad (7)$$

Valores específicos para cada ángulo se reportan en la sección de resultados experimentales (tabla por completar).

V. DISEÑO DE CONTROL POR LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

El controlador se diseña para cada función de transferencia obtenida experimentalmente.

A. Controlador en lazo abierto

El lazo abierto está compuesto por:

$$L(s) = C(s)G_{\theta_0}(s) \quad (8)$$

El controlador típico usado es un compensador PD o un compensador adelante:

$$C(s) = K_c \frac{\tau s + 1}{\alpha \tau s + 1} \quad (9)$$

B. Diseño mediante LGR

El procedimiento estándar:

- 1) Graficar el LGR de $L(s)$.
- 2) Seleccionar polos deseados con amortiguamiento objetivo ζ .
- 3) Ajustar K_c y τ hasta obtener la ubicación deseada de polos cerrados.

C. Índices de desempeño

Para cada controlador diseñado se determinan:

- **Overshoot:**

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- **Tiempo de establecimiento (2%):**

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

- **Error en estado estacionario:** depende del tipo del sistema. Si no hay integrador en el lazo cerrado, el error no es cero.

VI. CONTROL POR REALIMENTACIÓN DE ESTADOS

Se diseña un regulador de estados para cada modelo lineal identificado.

A. Modelo en espacio de estados

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{I} & -\frac{b}{I} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} u \quad (10)$$

$$y = [1 \ 0] x \quad (11)$$

B. Control por colocación de polos

Se define:

$$u = -Kx + Nr$$

Seleccionando polos deseados para estabilidad y desempeño definido.

C. Control LQR

Alternativamente:

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

con matrices Q y R definidas según el compromiso entre energía de control y velocidad de respuesta.

VII. CONCLUSIONES

Se desarrolló el modelo teórico del aeropéndulo, se obtuvieron funciones de transferencia para distintos puntos de operación mediante identificación experimental y se diseñaron controladores tanto mediante LGR como por realimentación de estados. Los métodos permiten comparar el desempeño bajo diferentes estrategias de control y distintas condiciones operativas.

VIII. DESARROLLO

A. Punto 1

Partiendo de la dinámica rotacional y empleando la segunda ley de Newton/D'Alembert, la ecuación de movimiento del aeropéndulo es

$$J\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + m_{eq}gl_{eq}\sin(\theta(t)) = \tau(t), \quad (12)$$

donde las cantidades J , b , m_{eq} y l_{eq} representan, respectivamente, el momento de inercia total, la fricción viscosa, la masa equivalente y la distancia efectiva al centro de masa (ver [?] para la expresión detallada de J). :contentReference[oaicite:10]index=10

1) Linealización alrededor de un punto de operación θ_0 : Definiendo $\theta(t) = \theta_0 + \tilde{\theta}(t)$ y aplicando la aproximación $\sin(\theta_0 + \tilde{\theta}) \approx \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \tilde{\theta}$ se obtiene

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k(\theta_0)\tilde{\theta} = \tilde{\tau}(t),$$

donde

$$k(\theta_0) = m_{eq}gl_{eq} \cos \theta_0.$$

La función de transferencia desde la variación de torque $\tilde{\tau}$ hasta la variación angular $\tilde{\Theta}(s)$ es

$$G_{\theta_0}(s) = \frac{\tilde{\Theta}(s)}{\tilde{\tau}(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + k(\theta_0)}.$$

2) Feedback linearization (opcional): Si se define el torque aplicado como

$$\tau(t) = m_{eq}gl_{eq} \sin(\theta(t)) + u(t),$$

entonces la dinámica se reduce a

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} = u(t),$$

y la función de transferencia respecto a u es

$$G_{FL}(s) = \frac{1}{Js^2 + bs}.$$

3) Espacio de estados: Tomando $x_1 = \tilde{\theta}$, $x_2 = \dot{\tilde{\theta}}$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k(\theta_0)}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} \tilde{\tau}, \quad y = [1 \ 0] x.$$

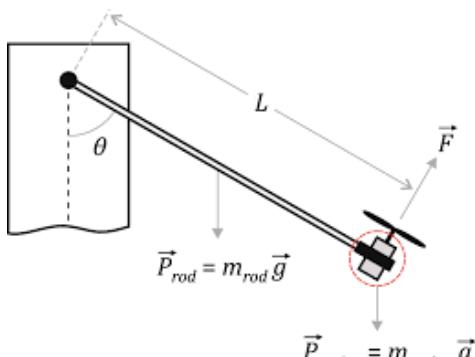


Fig. 1: Aeropendulo

B. Punto 2

Como primer paso vamos a mostrar la forma en la que nosotros desarrollamos y montamos el aero puendulo

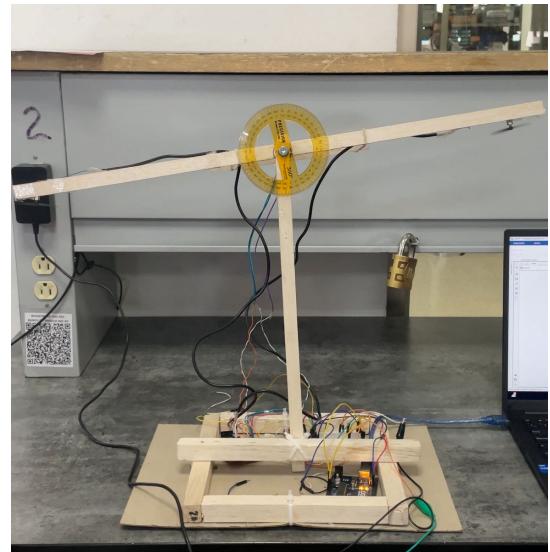


Fig. 2: Montaje

Los motores que utilizamos en este proyecto fueron los Corles, reconocidos por su eficiencia y confiabilidad en distintos entornos de trabajo. A continuación, se muestran en detalle para evidenciar sus características y el papel fundamental que desempeñaron en el desarrollo de nuestras actividades



Fig. 3: Motores utilizados

Ahora sí damos inicio al desarrollo propiamente dicho, en el cual abordaremos la obtención de las funciones de transferencia correspondientes a cada ángulo del sistema. Este proceso nos permitirá representar matemáticamente la dinámica de cada variable angular, estableciendo las relaciones entre las entradas y las salidas del modelo. A partir de ello, podremos analizar con mayor rigor el comportamiento del sistema, identificar sus características principales y sentar las bases para posteriores simulaciones y validaciones.

Para $\pi/6$

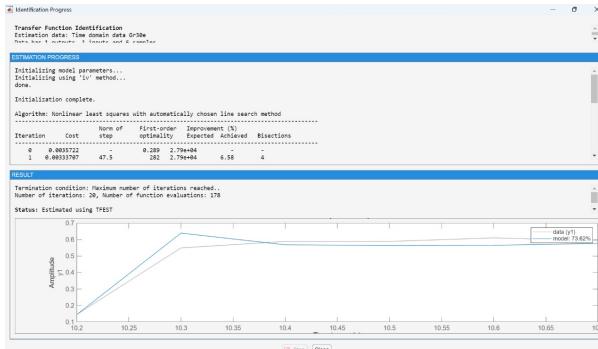


Fig. 4: System Identification

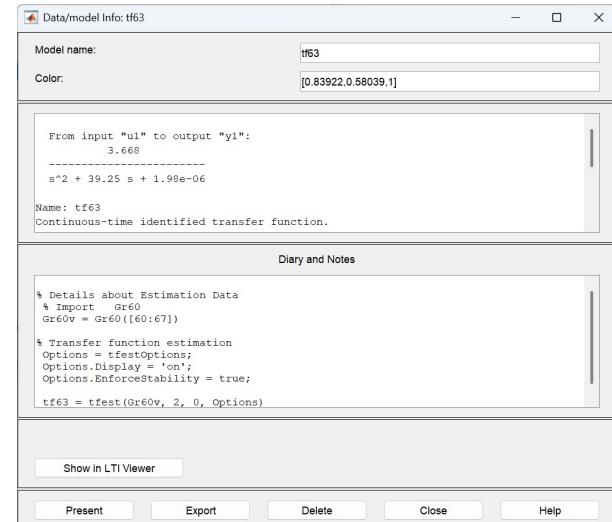


Fig. 7: Funcion de tranferencia

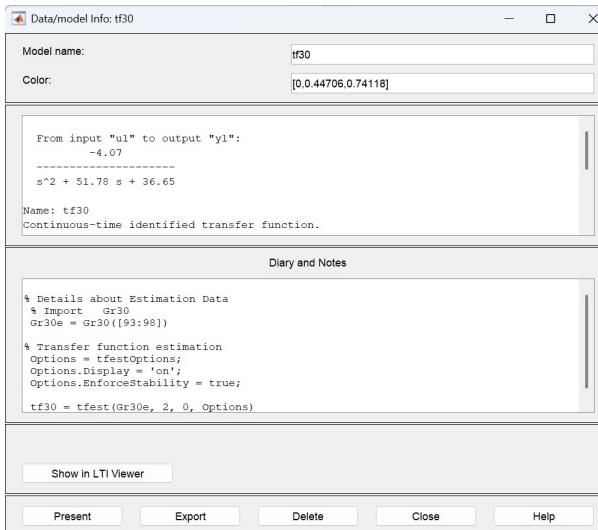


Fig. 5: Funcion de tranferencia

Entonces colcuyendo para $\pi/6$ tenemos la siguiente funcion de trasnferencia

$$G(s) = \frac{-4.07}{s^2 + 51.78 s + 36.65}$$

Para $\pi/3$



Fig. 6: System Identification

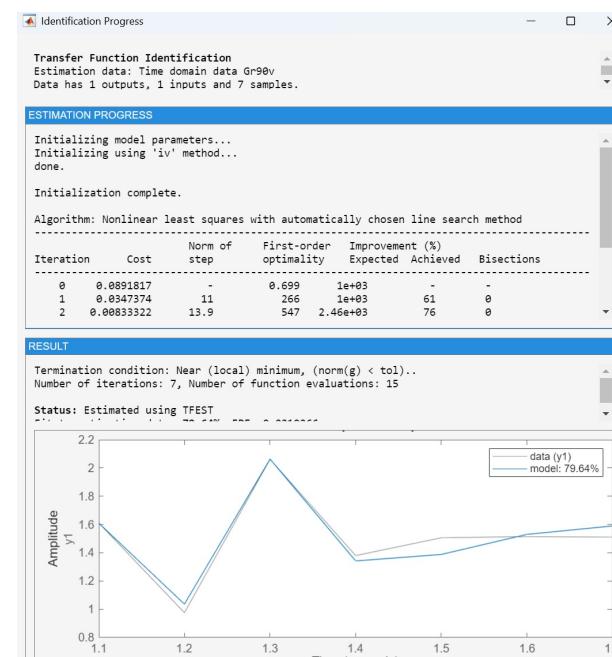


Fig. 8: System Identification

Entonces colcuyendo para $\pi/6$ tenemos la siguiente funcion de trasnferencia

$$G(s) = \frac{3.668}{s^2 + 39.25 s + 1.98e-6}$$

Para $\pi/2$

```

From input "u1" to output "y1":
  18.49
-----
s^2 + 46.44 s + 24.06

Name: tf90
Continuous-time identified transfer function.

Parameterization:
  Number of poles = 2
  Number of zeros = 0

```

Fig. 9: Funcion de tranferencia

Entonces colcuyendo para $\pi/2$ tenemos la siguiente funcin de trasnferencia

$$G(s) = \frac{18.49}{s^2 + 46.44 s + 24.06}$$

Para $2\pi/3$

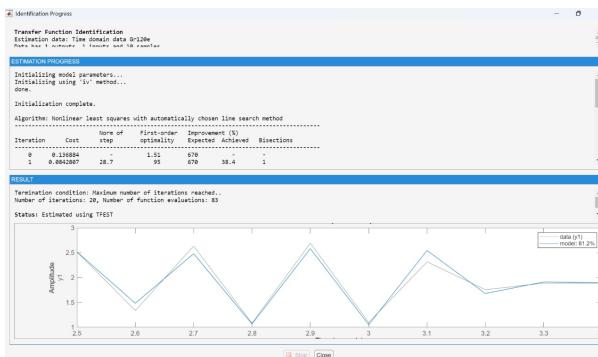


Fig. 10: System Identification

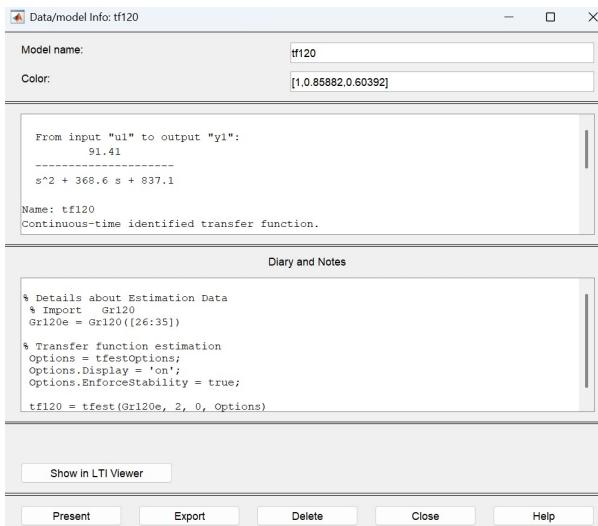


Fig. 11: Funcion de tranferencia

Entonces colcuyendo para $2\pi/3$ tenemos la siguiente funcin de trasnferencia

$$G(s) = \frac{91.41}{s^2 + 368.6 s + 837.1}$$

Para $5\pi/6$

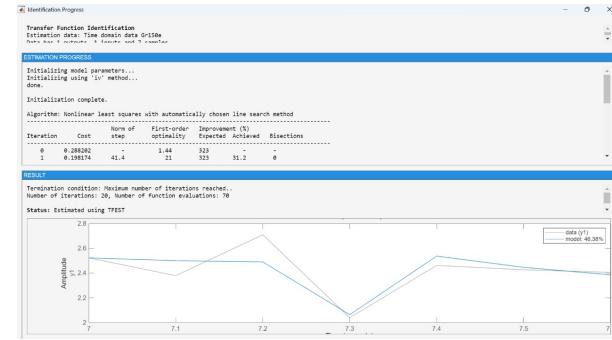


Fig. 12: System Identification

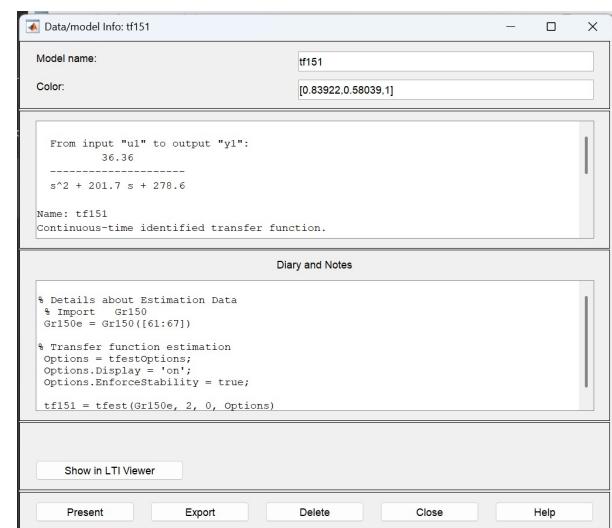


Fig. 13: Funcion de tranferencia

Entonces colcuyendo para $5\pi/6$ tenemos la siguiente funcin de trasnferencia

$$G(s) = \frac{36.36}{s^2 + 201.7 s + 278.6}$$

C. Punto 3:LGR

Para $\pi/6$

IX. PLANTA 5: $\frac{-4.07}{s^2 + 51.78s + 36.65}$ PARA 30 GRADOS DE INCLINACIÓN

A. Cálculos

1. *Coeficiente de amortiguamiento (ζ):*

Para $M_p = 5\%$, calculamos ζ :

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta \approx 0.69.$$

2. *Frecuencia natural (ω_n):*

Usando la ecuación estándar de la forma $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$, podemos deducir que:

$$\omega_n \approx \sqrt{36.65} = 6.05 \text{ rad/s.}$$

3. *Polos dominantes:*

Los polos dominantes se encuentran en la ubicación deseada:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

B. Controlador PID

El controlador PID es:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}.$$

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{-4.07}{s^2 + 51.78s + 36.65}.$$

C. Ecuación Característica

La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$1+L(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 51.78s + 36.65 + (-4.07)(K_d s^2 + K_p s + K_i) = 0$$

De donde igualamos los coeficientes de s^2 , s y s^0 para obtener las ganancias:

$$K_p \approx 0.98, \quad K_i \approx 3.55, \quad K_d = 0.015.$$

Para $\pi/3$

X. PLANTA 3: $\frac{3.668}{s^2 + 39.25s + 1.98e-06}$ PARA 60 GRADOS DE INCLINACIÓN

A. Cálculos

1. *Coeficiente de amortiguamiento (ζ):*

Para $M_p = 5\%$, calculamos ζ :

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta \approx 0.69.$$

2. *Frecuencia natural (ω_n):*

Usando $t_s = 0.8 \times t_{s,\text{abierto}}$, obtenemos:

$$\omega_n \approx 0.832 \text{ rad/s.}$$

3. *Polos dominantes:*

Los polos dominantes se encuentran en la ubicación deseada:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

B. Controlador PID

El controlador PID es:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}.$$

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{3.668}{s^2 + 39.25s + 1.98e-06}.$$

C. Ecuación Característica

La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$1+L(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 39.25s + 1.98e-06 + 3.668(K_d s^2 + K_p s + K_i) = 0$$

De donde igualamos los coeficientes de s^2 , s y s^0 para obtener las ganancias:

$$K_p \approx 3.67, \quad K_i \approx 3.12, \quad K_d = 0.005.$$

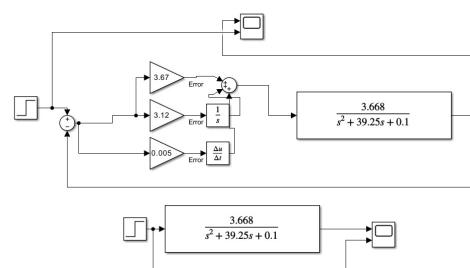


Fig. 14: Bloques control

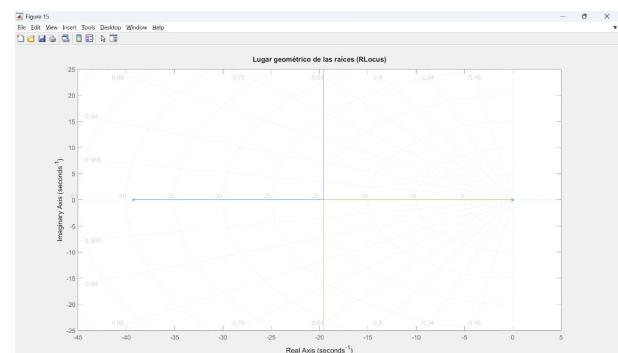


Fig. 15: LGR

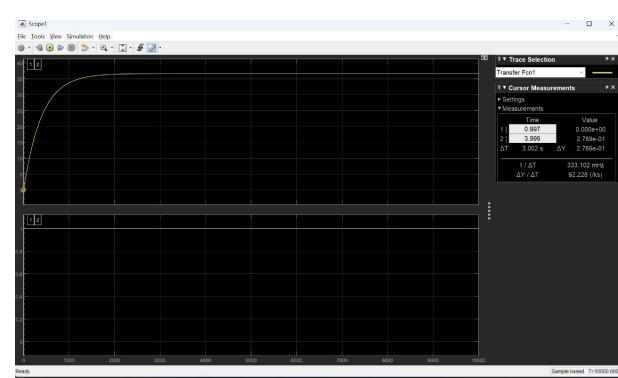


Fig. 16: Lazo abierto

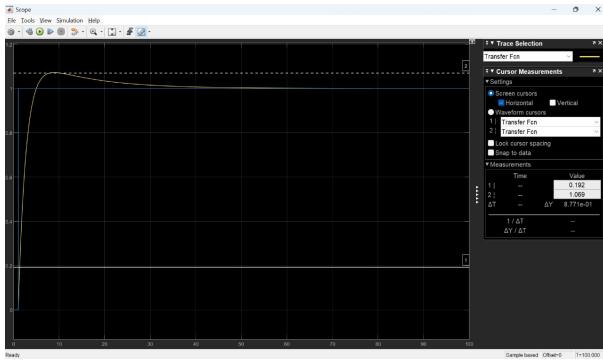


Fig. 17: Lazo cerrado

Para $\pi/2$

XI. PLANTA 4: $\frac{18.49}{s^2+46.44s+24.06}$, PARA 90 GRADOS DE INCLINACIÓN

A. Cálculos

1. *Coeficiente de amortiguamiento (ζ):*

Para $M_p = 5\%$, calculamos ζ :

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta \approx 0.69.$$

2. *Frecuencia natural (ω_n):*

Usando $t_s = 0.8 \times t_{s,\text{abierto}}$, obtenemos:

$$\omega_n \approx 1.54 \text{ rad/s.}$$

3. *Polos dominantes:*

Los polos dominantes se encuentran en la ubicación deseada:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

B. Controlador PID

El controlador PID es:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}.$$

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{18.49}{s^2 + 46.44s + 24.06}.$$

C. Ecuación Característica

La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 46.44s + 24.06 + 18.49(K_d s^2 + K_p s + K_i) = 0$$

De donde igualamos los coeficientes de s^2 , s y s^0 para obtener las ganancias:

$$K_p \approx 4.78, \quad K_i \approx 30.56, \quad K_d = 0.003.$$

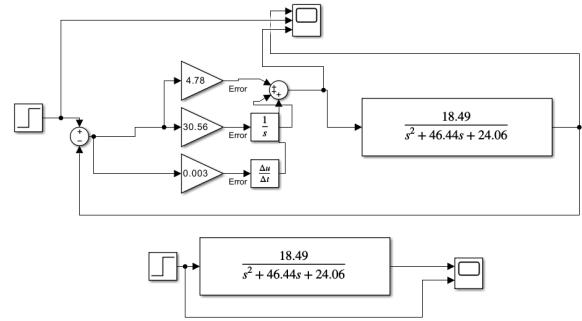


Fig. 18: Bloques control

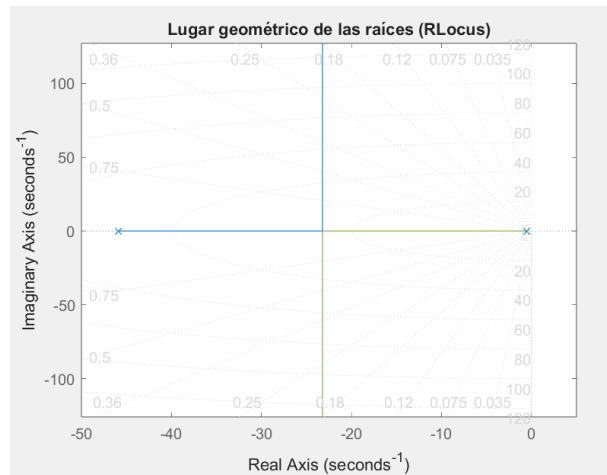


Fig. 19: LGR

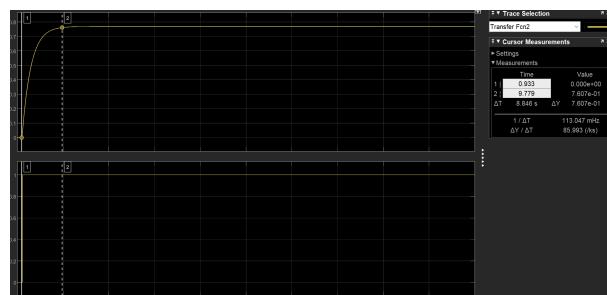


Fig. 20: Lazo abierto



Fig. 21: Lazo cerrado

Para $2\pi/3$

XII. PLANTA 1: $\frac{91.41}{s^2+368.6s+837.1}$ PARA 120 GRADOS DE INCLINACIÓN

A. Cálculos

1. **Coeficiente de amortiguamiento (ζ):**

Para $M_p = 5\%$, calculamos ζ :

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta \approx 0.69.$$

2. **Frecuencia natural (ω_n):**

Usando $t_s = 0.8 \times t_{s,\text{abierto}}$, obtenemos:

$$\omega_n \approx 3.225 \text{ rad/s.}$$

3. **Polos dominantes:**

Los polos dominantes se encuentran en la ubicación deseada:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

B. Controlador PID

El controlador PID es:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}.$$

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{91.41}{s^2 + 368.6s + 837.1}.$$

C. Ecuación Característica

La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 368.6s + 837.1 + 91.41(K_d s^2 + K_p s + K_i) =$$

De donde igualamos los coeficientes de s^2 , s y s^0 para obtener las ganancias:

$$K_p \approx 0.715, \quad K_i \approx 32.25, \quad K_d = 0.002.$$

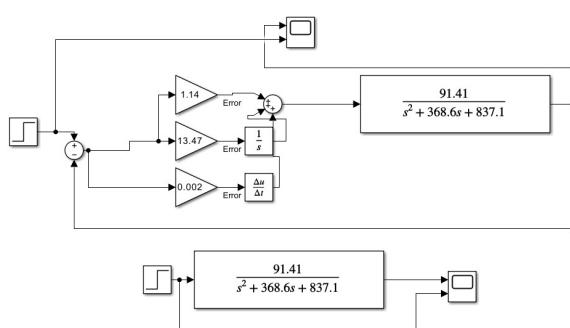


Fig. 22: Bloques control

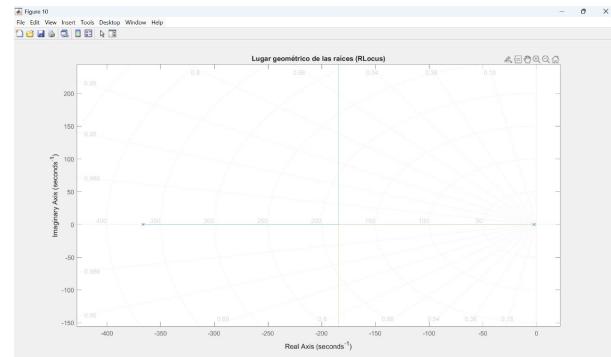


Fig. 23: LGR

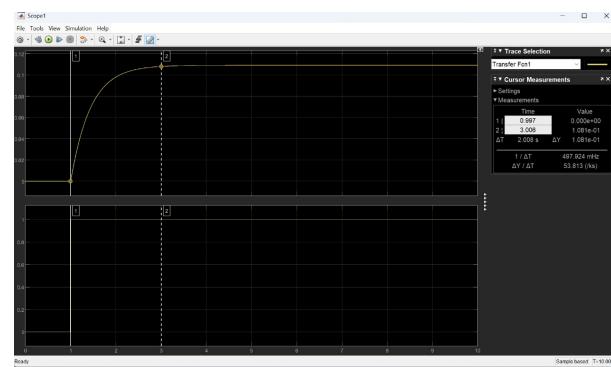


Fig. 24: Lazo abierto

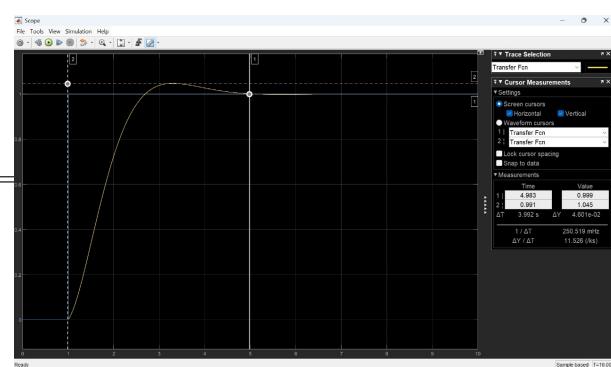


Fig. 25: Lazo cerrado

Para $5\pi/6$

XIII. PLANTA 2: $\frac{36.36}{s^2+201.7s+278.6}$ PARA 150 GRADOS DE INCLINACIÓN

A. Cálculos

1. **Coeficiente de amortiguamiento (ζ):**

Para $M_p = 5\%$, calculamos ζ :

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta \approx 0.69.$$

2. **Frecuencia natural (ω_n):**

Usando $t_s = 0.8 \times t_{s,\text{abierto}}$, obtenemos:

$$\omega_n \approx 1.894 \text{ rad/s.}$$

3. **Polos dominantes:**

Los polos dominantes se encuentran en la ubicación deseada:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}.$$

B. Controlador PID

El controlador PID es:

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}.$$

La función de transferencia en lazo abierto es:

$$L(s) = C(s) \cdot G(s) = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \cdot \frac{36.36}{s^2 + 201.7s + 278.6}.$$

C. Ecuación Característica

La ecuación característica en lazo cerrado es:

$$1 + L(s) = 0 \Rightarrow s^2 + 201.7s + 278.6 + 36.36(K_d s^2 + K_p s + K_i) = 0$$

De donde igualamos los coeficientes de s^2 , s y s^0 para obtener las ganancias:

$$K_p \approx 1.265, \quad K_i \approx 56.2, \quad K_d = 0.004.$$

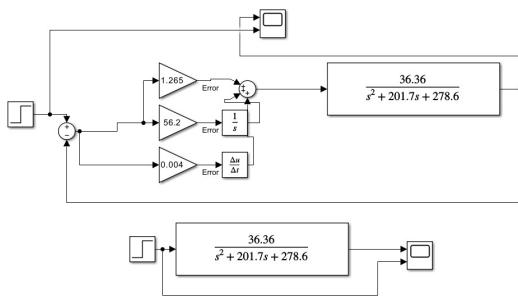


Fig. 26: Funcion de tranferencia

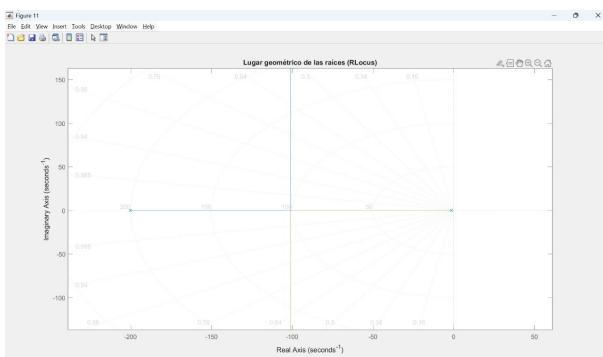


Fig. 27: Funcion de tranferencia

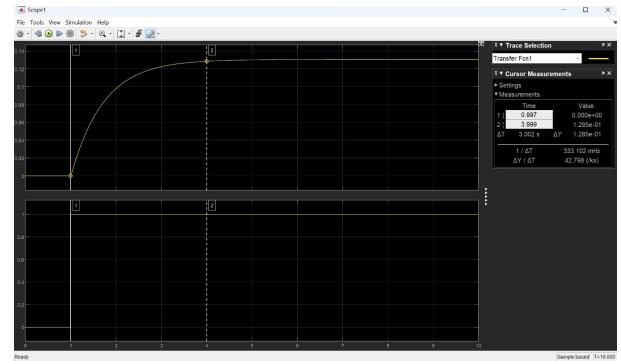


Fig. 28: Funcion de tranferencia

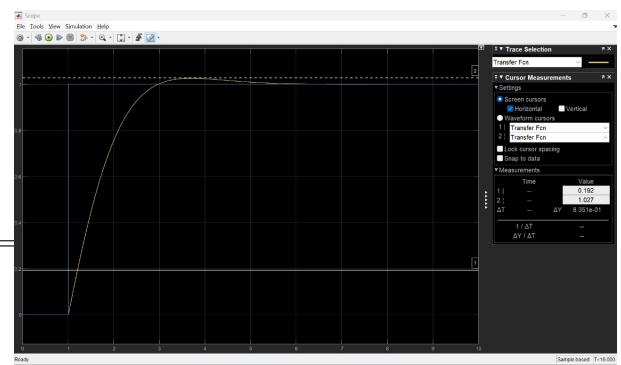


Fig. 29: Funcion de tranferencia

D. Punto 4: Variables de estado

Para $\pi/6$

La función de transferencia del sistema a controlar es:

$$G(s) = \frac{3.668}{s^2 + 39.25 s + 1.98 \times 10^{-6}}$$

Con esta función de transferencia, se obtuvieron las matrices A , B , C y D del sistema en espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} -39.25 & -1.98 \times 10^{-6} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 3.668 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Luego de obtener las matrices del sistema, se verificó la controlabilidad del sistema calculando el rango de la matriz de controlabilidad C , que nos dio un valor de 2, que es el mismo que el orden del sistema. Esto indica que el sistema es controlable.

A partir de la relación:

$$t_s = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n}$$

se deduce que $\xi \cdot \omega_n = 1$. Para el diseño de polos, se elige el primer polo con un valor de -1 y el segundo polo 5 veces más grande, es decir, en -5 . Los polos seleccionados son:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -5$$

Se utilizaron las siguientes funciones en MATLAB para calcular la ganancia de realimentación K :

$$K = \text{place}(A, B, p)$$

El resultado fue:

$$K = [-33.2500 \quad 5.0000]$$

Para eliminar el error en estado estacionario, se calculó la ganancia k_r utilizando la fórmula:

$$k_r = -\frac{1}{C \cdot \text{inv}(A - B \cdot K) \cdot B}$$

El valor obtenido para k_r fue:

$$k_r = 1.363141$$

El sistema en lazo cerrado con el controlador es:

$$\text{Sys}_{\text{CL_kr}} = \text{ss}(A - B \cdot K, B \cdot k_r, C, 0)$$

A continuación, se presenta la figura del modelo de Simulink para el sistema diseñado:

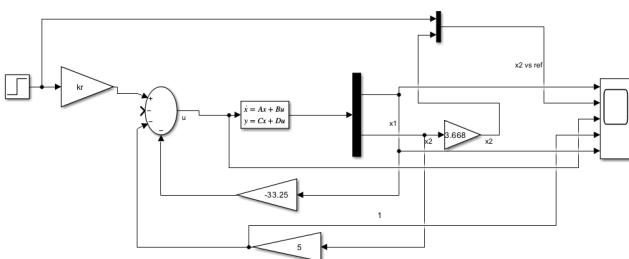


Fig. 30: Modelo de Simulink para el sistema de control por variables de estado.

En la simulación, se graficaron las señales de x_1 , x_2 frente a la referencia, la señal de control u , y el error en el sistema. A continuación se presenta la gráfica de las señales:

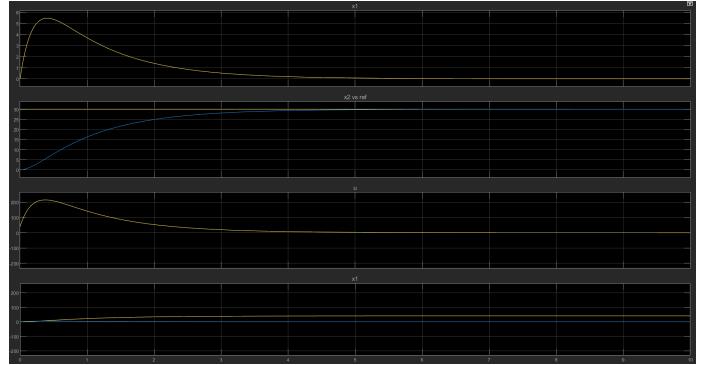


Fig. 31: Gráfica de x_1 , x_2 , referencia, señal de control y error.

Como se observa en la gráfica, ninguna de las señales se saturan. Esto se confirma porque, al analizar la planta, se encuentra que la señal de control está entre 0 y 255, lo cual está dentro del rango permitido de las señales de control de los motores.

Luego de verificar que las señales no se saturan, se realizó una modificación en la matriz C , multiplicando la señal x_2 por una constante k , ya que en la matriz C se multiplicaba por esa constante. Para configurar el bloque de State-Space en Simulink, se debe establecer la matriz C como la matriz identidad eye(2).

Para $\pi/3$

La función de transferencia del sistema a controlar es:

$$G(s) = \frac{-4.07}{s^2 + 51.78s + 36.65}$$

Con esta función de transferencia, se obtuvieron las matrices A , B , C y D del sistema en espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} -51.78 & -36.65 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad -4.07]$$

$$D = [0]$$

Luego de obtener las matrices del sistema, se verificó la controlabilidad del sistema calculando el rango de la matriz de controlabilidad C , que nos dio un valor de 2, que es el mismo que el orden del sistema. Esto indica que el sistema es controlable.

A partir de la relación:

$$t_s = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n}$$

se deduce que $\xi \cdot \omega_n = 0.5714$. Para el diseño de polos, se elige el primer polo con un valor de -0.5714 y el segundo polo 5 veces más grande, es decir, en -2.8571 . Los polos seleccionados son:

$$p_1 = -0.5714, \quad p_2 = -2.8571$$

Se utilizaron las siguientes funciones en MATLAB para calcular la ganancia de realimentación K :

$$K = \text{place}(A, B, p)$$

El resultado fue:

$$K = [-48.3514 \quad -35.0173]$$

Para eliminar el error en estado estacionario, se calculó la ganancia k_r utilizando la fórmula:

$$k_r = -\frac{1}{C \cdot \text{inv}(A - B \cdot K) \cdot B}$$

El valor obtenido para k_r fue:

$$k_r = -0.401143$$

El sistema en lazo cerrado con el controlador es:

$$\text{Sys}_{\text{CL_kr}} = \text{ss}(A - B \cdot K, B \cdot k_r, C, 0)$$

A continuación, se presenta la figura del modelo de Simulink para el sistema diseñado:

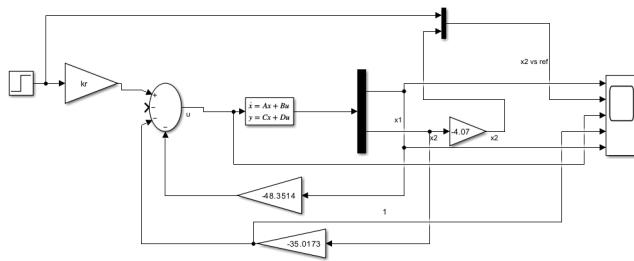


Fig. 32: Modelo de Simulink para el sistema de control por variables de estado.

En la simulación, se graficaron las señales de x_1 , x_2 frente a la referencia, la señal de control u , y el error en el sistema. A continuación se presenta la gráfica de las señales:

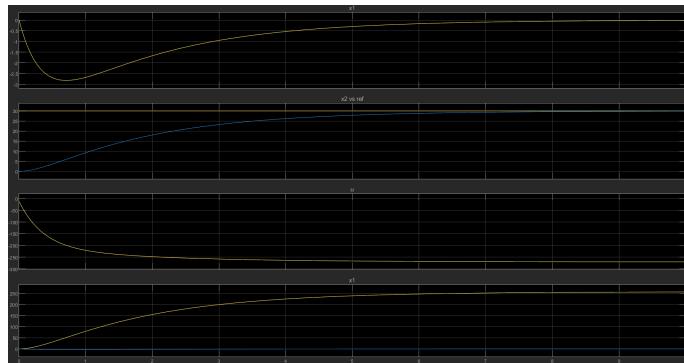


Fig. 33: Gráfica de x_1 , x_2 , referencia, señal de control y error.

Para $\pi/2$ La función de transferencia del sistema a controlar es:

$$G(s) = \frac{18.49}{s^2 + 46.44 s + 24.06}$$

Con esta función de transferencia, se obtuvieron las matrices A , B , C y D del sistema en espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} -46.44 & -24.06 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 18.49]$$

$$D = [0]$$

Luego de obtener las matrices del sistema, se verificó la controlabilidad del sistema calculando el rango de la matriz de controlabilidad C , que nos dio un valor de 2, que es el mismo que el orden del sistema. Esto indica que el sistema es controlable.

A partir de la relación:

$$t_s = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n}$$

se deduce que $\xi \cdot \omega_n = 1$. Para el diseño de polos, se elige el primer polo con un valor de -1 y el segundo polo 5 veces más grande, es decir, en -5 . Los polos seleccionados son:

$$p_1 = -1, \quad p_2 = -5$$

Se utilizaron las siguientes funciones en MATLAB para calcular la ganancia de realimentación K :

$$K = \text{place}(A, B, p)$$

El resultado fue:

$$K = [-40.4400 \quad -19.0600]$$

Para eliminar el error en estado estacionario, se calculó la ganancia k_r utilizando la fórmula:

$$k_r = -\frac{1}{C \cdot \text{inv}(A - B \cdot K) \cdot B}$$

El valor obtenido para k_r fue:

$$k_r = 0.270416$$

El sistema en lazo cerrado con el controlador es:

$$\text{Sys}_{\text{CL_kr}} = \text{ss}(A - B \cdot K, B \cdot k_r, C, 0)$$

A continuación, se presenta la figura del modelo de Simulink para el sistema diseñado:

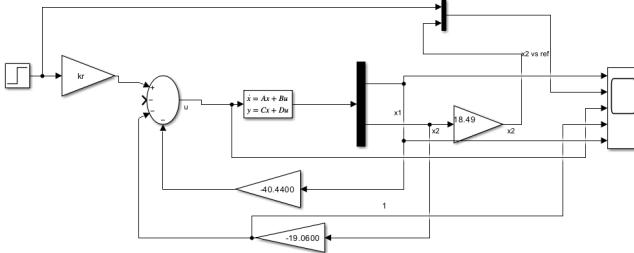


Fig. 34: Modelo de Simulink para el sistema de control por variables de estado.

En la simulación, se graficaron las señales de x_1 , x_2 frente a la referencia, la señal de control u , y el error en el sistema. A continuación se presenta la gráfica de las señales:

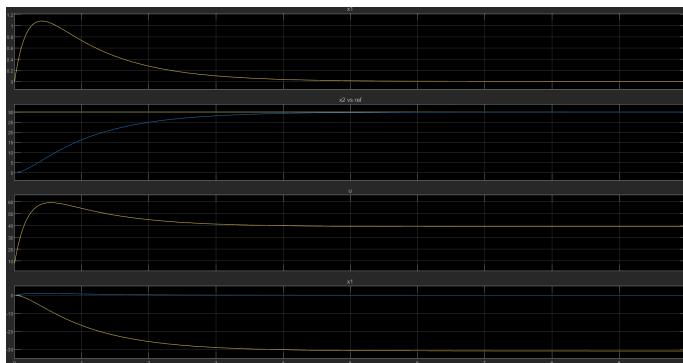


Fig. 35: Gráfica de x_1 , x_2 , referencia, señal de control y error.

Para $2\pi/3$

La función de transferencia del sistema a controlar es:

$$G(s) = \frac{91.41}{s^2 + 368.6s + 837.1}$$

Con esta función de transferencia, se obtuvieron las matrices A , B , C y D del sistema en espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} -368.6 & -837.1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 91.41]$$

$$D = [0]$$

Luego de obtener las matrices del sistema, se verificó la controlabilidad del sistema calculando el rango de la matriz de controlabilidad \mathcal{C} , que nos dio un valor de 2, que es el mismo que el orden del sistema. Esto indica que el sistema es controlable.

A partir de la relación:

$$t_s = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n}$$

se deduce que $\xi \cdot \omega_n = 1$. Para el diseño de polos, se elige el primer polo con un valor de -0.5714 y el segundo polo 5 veces más grande, es decir, en -2.8571 . Los polos seleccionados son:

$$p_1 = -0.5714, \quad p_2 = -2.8571$$

Se utilizaron las siguientes funciones en MATLAB para calcular la ganancia de realimentación K :

$$K = \text{place}(A, B, p)$$

El resultado fue:

$$K = [-365.1714 \quad -835.4673]$$

Para eliminar el error en estado estacionario, se calculó la ganancia k_r utilizando la fórmula:

$$k_r = -\frac{1}{C \cdot \text{inv}(A - B \cdot K) \cdot B}$$

El valor obtenido para k_r fue:

$$k_r = 0.017861$$

El sistema en lazo cerrado con el controlador es:

$$\text{Sys}_{\text{CL}, \text{kr}} = \text{ss}(A - B \cdot K, B \cdot k_r, C, 0)$$

A continuación, se presenta la figura del modelo de Simulink para el sistema diseñado:

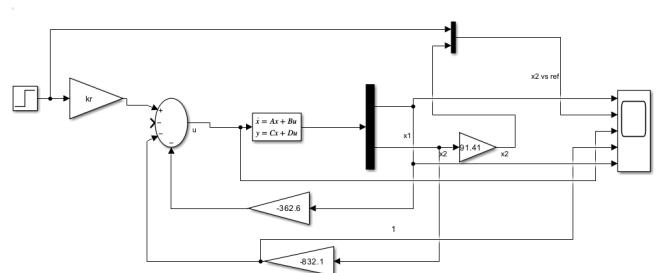


Fig. 36: Modelo de Simulink para el sistema de control por variables de estado.

En la simulación, se graficaron las señales de x_1 , x_2 frente a la referencia, la señal de control u , y el error en el sistema. A continuación se presenta la gráfica de las señales:

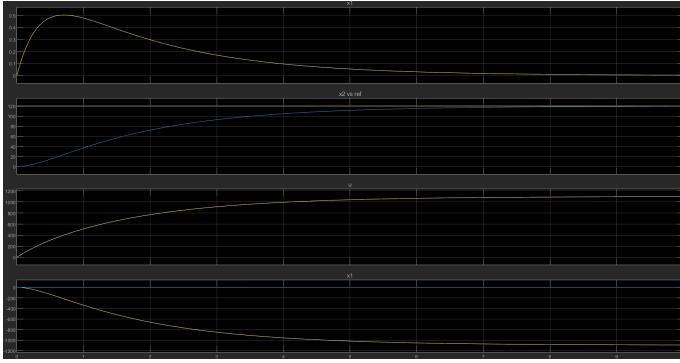


Fig. 37: Gráfica de x_1 , x_2 , referencia, señal de control y error.

Para $5\pi/6$

La función de transferencia del sistema a controlar es:

$$G(s) = \frac{36.36}{s^2 + 201.7s + 278.6}$$

Con esta función de transferencia, se obtuvieron las matrices A , B , C y D del sistema en espacio de estados:

$$A = \begin{bmatrix} -201.7 & -278.6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 36.36]$$

$$D = [0]$$

Luego de obtener las matrices del sistema, se verificó la controlabilidad del sistema calculando el rango de la matriz de controlabilidad \mathcal{C} , que nos dio un valor de 2, que es el mismo que el orden del sistema. Esto indica que el sistema es controlable.

A partir de la relación:

$$t_s = \frac{4}{\xi \cdot \omega_n}$$

se deduce que $\xi \cdot \omega_n = 1$. Para el diseño de polos, se elige el primer polo con un valor de -8 y el segundo polo 5 veces más grande, es decir, en -40 . Los polos seleccionados son:

$$p_1 = -8, \quad p_2 = -40$$

Se utilizaron las siguientes funciones en MATLAB para calcular la ganancia de realimentación K :

$$K = \text{place}(A, B, p)$$

El resultado fue:

$$K = [-153.7000 \quad 41.4000]$$

Para eliminar el error en estado estacionario, se calculó la ganancia k_r utilizando la fórmula:

$$k_r = -\frac{1}{C \cdot \text{inv}(A - B \cdot K) \cdot B}$$

El valor obtenido para k_r fue:

$$k_r = 8.800880$$

El sistema en lazo cerrado con el controlador es:

$$\text{Sys}_{\text{CL_kr}} = \text{ss}(A - B \cdot K, B \cdot k_r, C, 0)$$

A continuación, se presenta la figura del modelo de Simulink para el sistema diseñado:

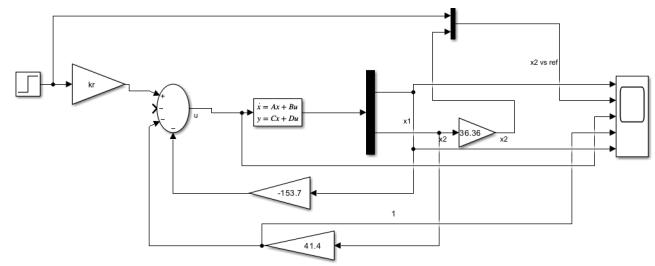


Fig. 38: Modelo de Simulink para el sistema de control por variables de estado.

En la simulación, se graficaron las señales de x_1 , x_2 frente a la referencia, la señal de control u , y el error en el sistema. A continuación se presenta la gráfica de las señales:

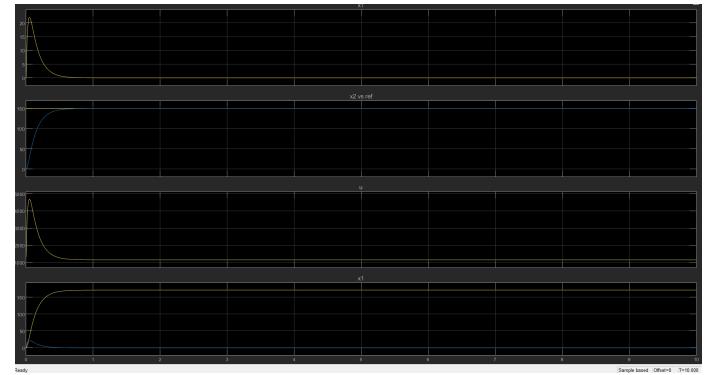


Fig. 39: Gráfica de x_1 , x_2 , referencia, señal de control y error.

XIV. CONCLUSIONES

Modelado y Identificación Experimental: Se logró desarrollar un modelo teórico completo del aeropéndulo y obtener las funciones de transferencia correspondientes a distintos puntos de operación mediante identificación experimental. Este proceso permitió capturar la dinámica del sistema y modelar su comportamiento de manera precisa.

Diseño de Controladores: Los controladores fueron diseñados utilizando el método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR) y realimentación de estados. Ambos métodos

fueron evaluados en función de indicadores de desempeño, tales como el sobreimpulso, el tiempo de establecimiento y el error en estado estacionario. Se observó que el control basado en realimentación de estados mostró una mejora significativa en comparación con las técnicas convencionales.

Desempeño Dinámico del Sistema: A lo largo del análisis de los controladores, se evaluaron las condiciones de estabilidad y el rendimiento del sistema a través de simulaciones. Los controladores diseñados para cada función de transferencia lograron mantener la estabilidad y cumplir con los criterios establecidos para los diferentes ángulos de operación del aeropéndulo.

Verificación de la Controlabilidad: Se verificó que el sistema era controlable en todos los puntos de operación estudiados. Esto se logró calculando el rango de la matriz de controlabilidad, obteniendo un valor igual al orden del sistema en cada caso, lo que confirma la posibilidad de aplicar control sobre el sistema.

Comparación entre Métodos de Control: Finalmente, se compararon las estrategias de control tradicionales (PID) con el control por realimentación de estados. Se concluyó que el control por realimentación de estados ofreció un desempeño superior, especialmente en términos de estabilidad y precisión en el seguimiento de la referencia, con una mayor capacidad para reducir el error en estado estacionario.

REFERENCES

- [1] D. M. Ovalle M. and L. F. Cóbita A., “On the Implementation of Low-cost Home-made Aeropendulum Prototypes for Improving Understanding of Dynamical Systems Concepts,” *IEEE Access*, vol. [número], pp. [página inicial]-[página final], [año]. DOI: [número DOI si está disponible].