Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №3 по курсу "Анализ алгоритмов"

Тема Алгоритмы сортировки

Студент Романов С.К.

Группа ИУ7-55Б

Оценка (баллы) ______________________

Преподаватели Волкова Л.Л., Строганов Ю.В.

Москва — 2022 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Цель лабораторной работы: изучить, реализовать и протестировать алгоритмы сортировки, оценить их трудоемкость.

Задачи лабораторной работы:

1. Изучить алгоритмы сортировки.
   - Пузырьковая сортировка.
   - Сортировка подсчетом.
   - Быстрая сортировка.
2. Оценить трудоемкость алгоритмов и сравнивать их временые характеристики экспериментально.
3. Сделать выводы на основе полученных результатов.

Для достижения поставленных целей и задач необходимо:

1. Изучить теоретические основы алгоритмов сортировки.
2. Реализовать алгоритмы сортировки.
3. Протестировать корректность алгоритмов сортировки.
4. Провести экспериментальное исследование.

В ходе работы будут затронуты следующие темы:

1. Алгоритмы сортировки.
2. Сложность алгоритмов.
3. Тестирование алгоритмов

1 Аналитическая часть

В данном разделе приведены аналитические данные о перечисленных во введении алгоритмах.

1.1 Пузырьковая сортировка

1.1.1 Описание алгоритма

Алгоритм состоит из повторяющихся проходов по сортируемому массиву. За каждый проход элементы последовательно сравниваются попарно и, если порядок в паре неверный, выполняется обмен элементов. Проходы по массиву повторяются $N - 1$ раз, но есть модифицированная версия, где если окажется, что обмены больше не нужны, значит проходы прекращаются. При каждом проходе алгоритма по внутреннему циклу очередной наибольший элемент массива ставится на свое место в конце массива рядом с предыдущим "наибольшим элементом", а наименьший элемент массива перемещается на одну позицию к началу массива ("всплывает" до нужной позиции, как пузырёк в воде – отсюда и название алгоритма).[1]

1.1.2 Псевдокод

procedure BubbleSort(A)
    $n \leftarrow$ `len`(A)
    for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
        for $j \leftarrow 1$ **to** $n - i$ **do**
            if $A[j] > A[j+1]$ **then**
                $SWAP(A[j], A[j+1])$
            end if
        end for
    end for
end procedure

1.1.3 Анализ алгоритма

- Время выполнения алгоритма: $O(n^2)$
- Память: $O(1)$

1.2 Сортировка подсчетом

1.2.1 Описание алгоритма

Сортировка подсчетом — простейший способ упорядочить массив за линейное время. Применять его можно только для целых чисел, небольшого диапазона, т.к. он требует O(M) дополнительной памяти, где M — ширина диапазона сортируемых чисел. Алгоритм особо эффективен когда мы сортируем большое количество чисел, значения которых имеют небольшой разброс — например: массив из 1000000 целых чисел, которые принимают значения от 0 до 1000.[2]

1.2.2 Псевдокод

procedure Counting Sort(A)
    $n \leftarrow \texttt{len}(A)$
    $C \leftarrow \texttt{new array}(n)$
    for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
        $C[i] \leftarrow 0$
    end for
    for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
        $C[A[i]] \leftarrow C[A[i]] + 1$
    end for
    $i \leftarrow 0$
    $j \leftarrow 0$
    while $i \neq len(A) \&\& j \neq n$ **do**
        if $C[j] \neq 0$ **then**
            $A[i] \leftarrow j$
            $C[j] \leftarrow C[j] - 1$
            $i \leftarrow i + 1$

```
        else
            j ← j + 1
        end if
    end while
end procedure
```

1.2.3 Анализ алгоритма

- Время выполнения алгоритма: $O(n + k)$
- Память: $O(n + k)$
  - n - размер массива
  - k - максимальное значение элемента массива
- Сортировка подсчетом работает только с целыми числами
- Сортировка подсчетом не является устойчивой
- Сортировка подсчетом не подходит для сортировки больших массивов

1.3 Быстрая сортировка

1.3.1 Описание алгоритма

Общая идея алгоритма состоит в следующем:

- выбрать из массива элемент, называемый опорным. Это может быть любой из элементов массива. От выбора опорного элемента не зависит корректность алгоритма, но в отдельных случаях может сильно зависеть его эффективность
- сравнить все остальные элементы с опорным и переставить их в массиве так, чтобы разбить массив на три непрерывных отрезка, следующих друг за другом: «элементы меньшие опорного», «равные» и «большие».
- для отрезков «меньших» и «больших» значений выполнить рекурсивно ту же последовательность операций, если длина отрезка больше единицы.

На практике массив обычно делят не на три, а на две части: например, «меньшие опорного» и «равные и большие»; такой подход в общем случае эффективнее, так как упрощает алгоритм разделения.[1]

1.3.2 Псевдокод

procedure $\textsc{QuickSort}(A)$
  $n \leftarrow \texttt{len}(A)$
  $S \leftarrow \{\}$ ▷ Стек
  $S \leftarrow S \cup \{0, n-1\}$
  while $S \neq \{\}$ **do**
    $r \leftarrow S[n_S - 1]$
    $l \leftarrow S[n_S - 2]$
    $S \leftarrow S \setminus \{r, l\}$
    $p \leftarrow \texttt{partition}(A, l, r)$
    $S \leftarrow S \cup \{l, p-1\}$
    $S \leftarrow S \cup \{p+1, r\}$
  end while
end procedure

1.3.3 Анализ алгоритма

- Время выполнения алгоритма: $O(n \log n)$
- Память: $O(\log n)$

Вывод

В данном разделе были описаны основные алгоритмы сортировки. Были рассмотрены следующие алгоритмы:

- Сортировка пузырьком
- Сортировка подсчетом
- Быстрая сортировка

Были рассмотрены их особенности, сложность, а также приведен псевдокод.

2 Конструкторская часть

2.1 Разработка алгоритмов

На рисунках 2.1, 2.2 и рисунках 2.3, 2.4 приведены схемы алгоритмов сортировки пузырьком, сортировки подсчетом и быстрой сортировки соответственно.

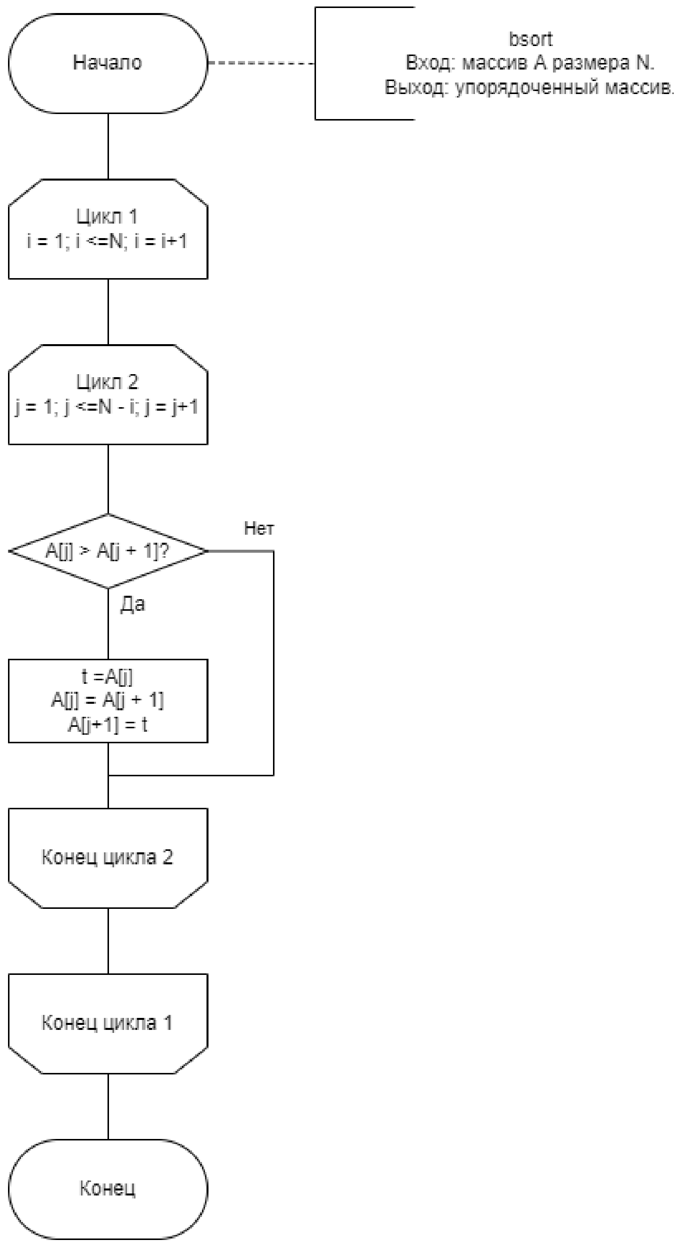


Рисунок 2.1 – Сортирвка пузырьком

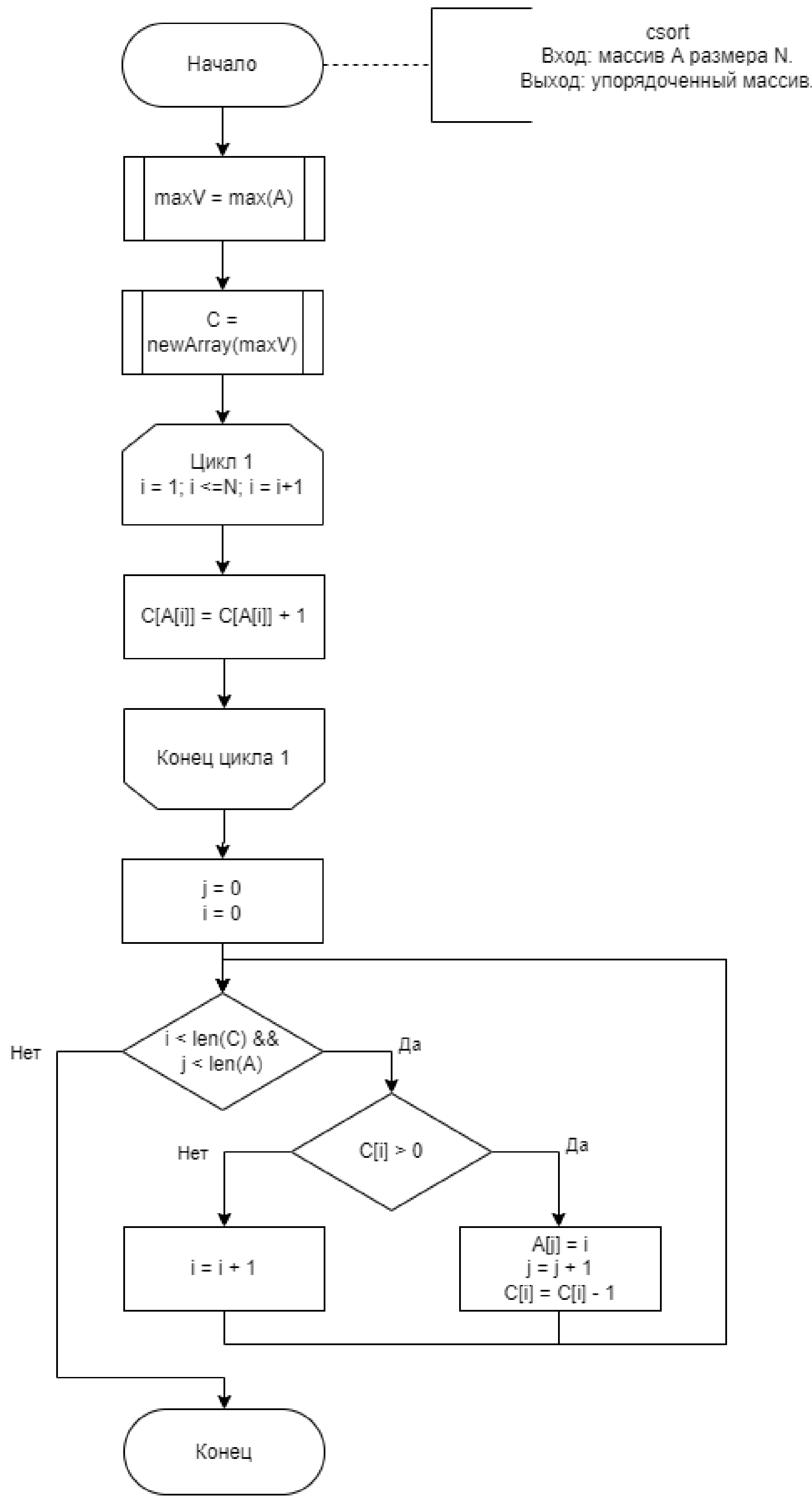


Рисунок 2.2 – Сортировка вставками

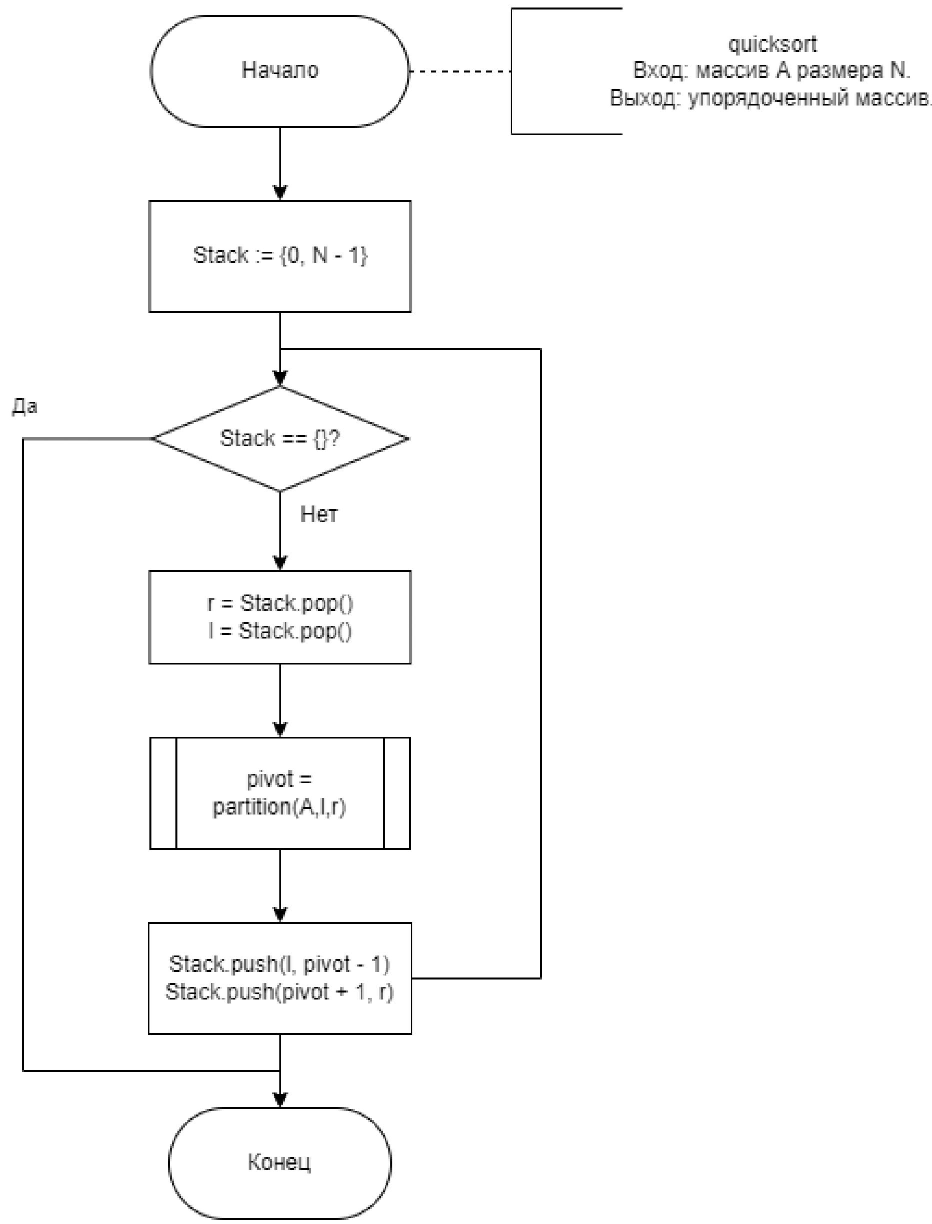


Рисунок 2.3 – Быстрая сортировка

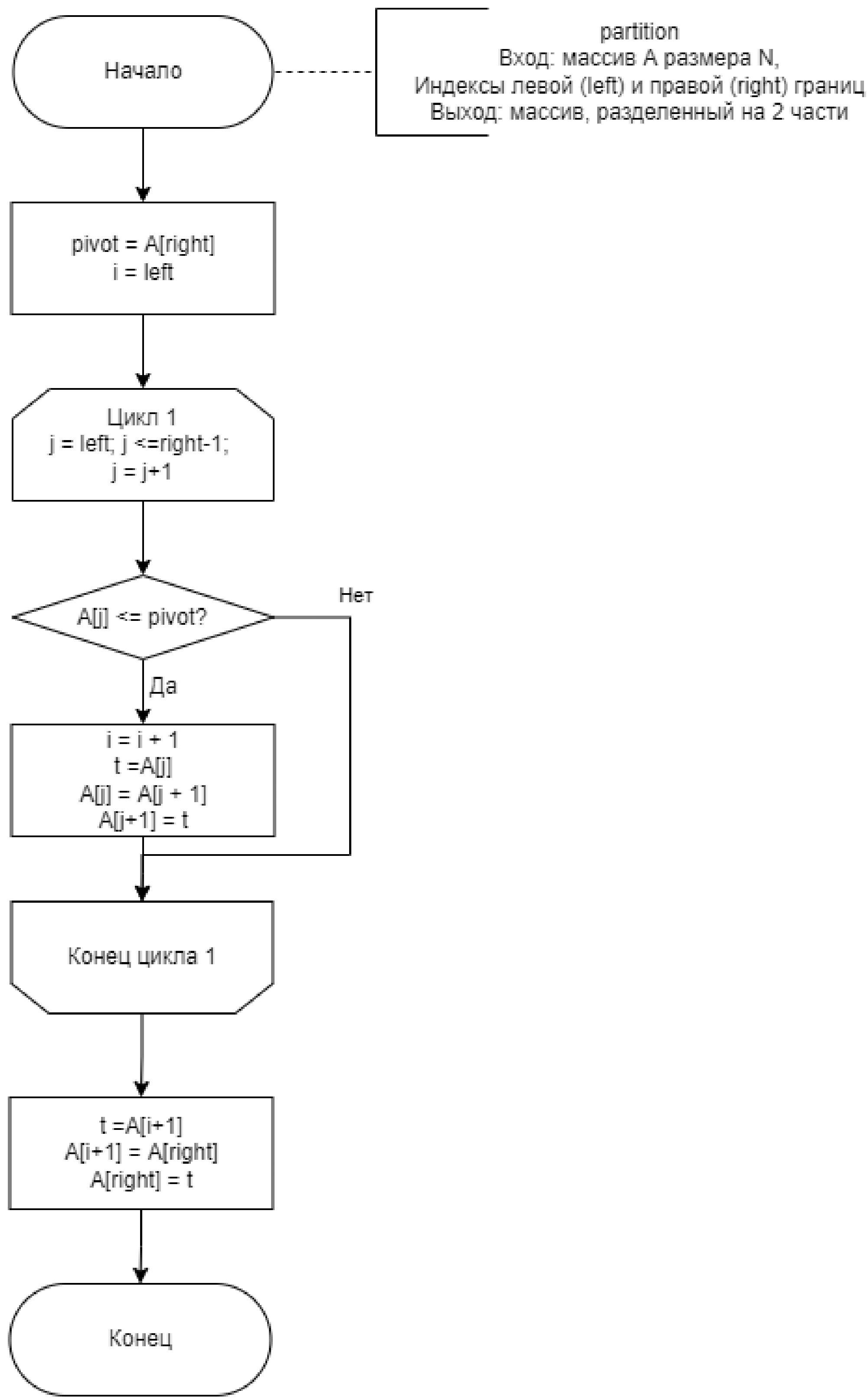


Рисунок 2.4 – Быстрая сортировка, разделение массива

2.2 Трудоёмкость алгоритмов

2.3 Модель вычислений

Для последующего вычисления трудоемкости введём модель вычислений:

1. Операции из списка (2.1) имеют трудоемкость 1.

$$+, -, /, \%, ==, != , <, >, <=, >=, [], ++, -- \tag{2.1}$$

2. Трудоемкость оператора выбора if условие then A else B рассчитывается, как (2.2).

$$f_{if} = f_{\text{условия}} + \begin{cases} f_A, & \text{если условие выполняется,} \\ f_B, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{2.2}$$

3. Трудоемкость цикла рассчитывается, как (2.3).

$$f_{for} = f_{\text{инициализации}} + f_{\text{сравнения}} + N(f_{\text{тела}} + f_{\text{инкремента}} + f_{\text{сравнения}}) \tag{2.3}$$

4. Трудоемкость вызова функции равна 0.

2.4 Трудоёмкость алгоритмов

Пусть размер массивов во всех вычислениях обозначается как N.

2.4.1 Алгоритм сортировки пузырьком

Трудоёмкость алгоритма сортировки пузырьком состоит из:

- трудоёмкость сравнения и инкремента внешнего цикла $i \in [1..N)$ (2.4)

$$f_i = 2 + 2(N - 1) \tag{2.4}$$

- суммарная трудоёмкость внутренних циклов, количество итераций которых меняется в промежутке $[1..N-1]$ (2.5)

$$f_j = 3(N-1) + \frac{N \cdot (N-1)}{2} \cdot (3 + f_{if}) \tag{2.5}$$

- трудоёмкость условия во внутреннем цикле (2.6)

$$f_{if} = 4 + \begin{cases} 0, & \text{в лучшем случае} \\ 9, & \text{в худшем случае} \end{cases} \tag{2.6}$$

Трудоёмкость в **лучшем** случае (2.7)

$$f_{best} = \frac{7}{2}N^2 + \frac{3}{2}N - 3 \approx \frac{7}{2}N^2 = O(N^2) \tag{2.7}$$

Трудоёмкость в **худшем** случае (2.8)

$$f_{worst} = 8N^2 - 8N - 3 \approx 8N^2 = O(N^2) \tag{2.8}$$

2.4.2 Алгоритм сортировки подсчетом

Трудоёмкость алгоритма сортировки подсчетом состоит из:

1. нахождение максимального числа в массиве A.
2. трудоёмкость инициализации массива C размером k нулями, где $k = max(A)$.
3. проход по массиву A и подсчет количества вхождений каждого числа в массиве C.
4. проход по массиву C и запись чисел в массив A в соответствии с их количеством в массиве C.

Вычислим каждую трудоёмкость отдельно.

1. Трудоёмкость нахождения максимального числа в массиве A(2.9).

$$f_{max} = 2 + 2(N-1) = 4N - 3 \tag{2.9}$$

2. Трудоёмкость инициализации массива C(2.10).

$$f_C = 2 + 2(k-1) = 4k - 3 \tag{2.10}$$

3. Трудоёмкость подсчета количества вхождений каждого числа в массиве C(2.11).

$$f_{count} = 2 + 2(N-1) = 4N - 3 \tag{2.11}$$

4. проход по массиву C и запись чисел в массив A в соответствии с их количеством в массиве C(2.12).

$$f_{write} = 6 + 7 * N + \begin{cases} 0, & \text{в лучшем случае} \\ 3k, & \text{в худшем случае} \end{cases} \tag{2.12}$$

Трудоёмкость в **лучшем** случае (2.13)

$$f_{best} = 15N + 4k - 3 \approx 15N + 4k = O(N + k) \tag{2.13}$$

Трудоёмкость в **худшем** случае (2.14)

$$f_{worst} = 15N + 7k - 3 \approx 15N + 7k = O(N + k) \tag{2.14}$$

2.4.3 Алгоритм итеративной быстрой сортировки

Трудоёмкость алгоритма итеративной быстрой сортировки (2.15)

$$T(N) = T(J) + T(N - J) + M(N) \tag{2.15}$$

где

1. $T(N)$ - трудоемкость быстрой сортировки массива размера N.
2. $T(J)$ - трудоемкость быстрой сортировки массива размера J.
3. $T(N - J)$ - трудоемкость быстрой сортировки массива размера N-J.

4. $M(N)$ - трудоёмкость разделения массива на две части.

   Вычислим для лучшего случая:

- $T(N) = 2T(\frac{N}{2}) + C * N$ - трудоемкость быстрой сортировки массива размера N.
  - $2T(\frac{N}{2})$ поскольку мы разделяем массив на 2 равные части
  - $C * N$ поскольку мы будем проходить все элементы массива на каждом уровне "дерева"
- Следующий шаг - разделить дальше на 4 части ((2.16) и (2.17))

$$T(N) = 2(2 * T(\frac{N}{4}) + C * N/2) + C * N \tag{2.16}$$

$$T(N) = 4T(\frac{N}{4}) + 2C * N \tag{2.17}$$

- В общем случае (2.18):

$$T(N) = 2^k * T(N/(2^k)) + k * C * N \tag{2.18}$$

- Для лучшего случая - $N = 2^k$ - идеально распределенное дерево (отсюда следует, что $k = log_2(N)$) (2.19)

$$T(N) = 2^k * T(1) + k * C * (2^k) \tag{2.19}$$

– Вычислим T(1) - трудоемкость при массиве длинной 1 - и C - трудоемкость разделения (2.20)

$$T(1) = 6 + 1 * 9 = 15; C = 12 + N/(2^k) * 8 \tag{2.20}$$

- Полная сложность (при $k = log_2(N)$) (2.21):

$$T(N) = 15N + log_2(N) * (12 + 8) = 15N + 20Nlog_2(N) \tag{2.21}$$

Теперь вычислим для худшего случая:

- $T(N) = T(N-1) + C * N$ - трудоемкость быстрой сортировки массива размера N.
  - $T(N-1)$ поскольку мы разделяем массив на 2 неравные части: пустое множество и полное множество за исключением "середины"
- Следующие шаги очевидны (2.22), (2.23)

$$T(N) = T(N-2) + C(N-1) + C * N = T(N-2) + 2C * N - C \quad (2.22)$$

$$T(N) = T(N-3) + 3C * N - 2C * N - C \quad (2.23)$$

- В общем случае (2.24):

$$T(N) = T(N-k) + k * C * N - C(\frac{k(k-1)}{2}) \quad (2.24)$$

- Для худшего случая - $N = k$ - нераспределенное дерево (2.25)

$$T(N) = T(0) + N * C * N - C(\frac{N(N-1)}{2}) \quad (2.25)$$

– Вычислим параметры (2.26)

$$T(0) = 1; C = 12 + (N-k) * 8 \quad (2.26)$$

- Полная сложность (при $N = k$) (2.27)

$$T(N) = 1 + N * N * 12 - 12 * (\frac{N(N-1)}{2}) = 1 + 6N^2 + 6N \quad (2.27)$$

Трудоёмкость в **лучшем** случае (2.28)

$$f_{best} = 15N + 20Nlog_2(N) \approx 20Nlog_2(N) = O(Nlog_2(N)) \quad (2.28)$$

Трудоёмкость в **худшем** случае (2.29)

$$f_{worst} = 1 + 6N^2 + 6N \approx 6N^2 = O(N^2) \tag{2.29}$$

Вывод

На основе теоретических данных, полученных из аналитического раздела, были построены схемы трёх алгоритмов сортировки. Оценены их трудоёмкости в лучшем и худшем случаях.

3 Технологическая часть

В данном разделе приведены требования к программному обеспечению, средства реализации и сами реализации алгоритмов.

3.1 Требования к программному обеспечению

К программе предъявляется ряд условий:

– на вход программе подается размер массива (целое число) и массив (целые числа);

– на выходе программа должна выдать отсортированный массив одним из 3 способов;

– программа должна быть реализована на языке Go;

3.2 Средства реализации

Для реализации данной лабораторной работы необходимо установить следующее программное обеспечение:

- Golang 1.19.1 - язык программирования
- Benchdraw 0.1.0 - Средство визуализации данных
- LaTeX - система документооборота

3.3 Рализация алгоритмов

В листингах 3.1, 3.2 и 3.3 приведены реализации алгоритмов сортировки пузырьком, подсчетом и итеративная быстрая соответственно.

Листинг 3.1 – Сортировка массива пузырьком

```
func BubbleSort[T constraints.Ordered](array []T) {
    n := len(array) - 1
    for i := 0; i < n; i++ {
        for j := 0; j < n-i; j++ {
            if array[j] > array[j+1] {
                array[j], array[j+1] = array[j+1], array[j]
            }
        }
    }
}
```

Листинг 3.2 – Сортировка массива подсчетом

```
func CountingSort(array []int) {
    minVal := array[0]
    maxVal := array[0]
    for _, val := range array {
        if val > maxVal {
            maxVal = val
        }
        if val < minVal {
            minVal = val
        }
    }

    temp := make([]int, maxVal+1-minVal)
    fmt.Println(len(temp))
    for _, val := range array {
        fmt.Println(val - minVal)
        temp[val-minVal]++
    }

    j, i := 0, 0

    for i < len(temp) && j < len(array) {
        if temp[i] > 0 {
            array[j] = i + minVal
            j++
            temp[i]--
        } else {
            i++
        }
    }
}
```

Листинг 3.3 – Итеративная быстрая сортировка массива

```
func partition[T constraints.Ordered](arr []T, left int, right int) int {
    pivot := arr[right]
    i := left - 1
    for j := left; j <= right-1; j++ {
        if arr[j] <= pivot {
            i++
            arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]
        }
    }
    arr[i+1], arr[right] = arr[right], arr[i+1]

    return i + 1
}

func Quicksort[T constraints.Ordered](array []T) {
    if len(array) < 2 {
        return
    }

    left := 0
    right := len(array) - 1
    stack := Stack[[2]int]{}
    stack.Push([2]int{left, right})
    for !stack.IsEmpty() {
        lr := stack.Pop()
        left, right = lr[0], lr[1]
        if right <= left {
            continue
        }
        pivot := partition(array, left, right)
        stack.Push([2]int{left, pivot - 1})
        stack.Push([2]int{pivot + 1, right})
    }
}
```

В таблице 3.1 приведены тесты для функций, реализующих алгоритмы сортировки. Все тесты пройдены успешно.

Таблица 3.1 – Тестирование функций

Входной массив	Результат	Ожидаемый результат
$[1, 2, 3, 4, 5]$	$[1, 2, 3, 4, 5]$	$[1, 2, 3, 4, 5]$
$[5, 4, 3, 2, 1]$	$[1, 2, 3, 4, 5]$	$[1, 2, 3, 4, 5]$
$[-1, -2, -3, -2, -5]$	$[-5, -3, -2, -2, -1]$	$[-5, -3, -2, -2, -1]$
$[-2, 7, 0, -1, 3]$	$[-2, -1, 0, 3, 7]$	$[-2, -1, 0, 3, 7]$
$[50]$	$[50]$	$[50]$
$[-40]$	$[-40]$	$[-40]$
Пустой массив	Пустой массив	Пустой массив

Вывод

В данном разделе был разработан исходный код трёх алгоритмов сортировки: пузырьком, вставками и быстрая сортировка.

4 Исследовательская часть

Ниже приведены технические характеристики устройства, на котором было проведено тестирование ПО:

- Операционная система: Windows 11, используя Windows Subsystem for Linux 2 (WSL2)[3] Имитирующей Arch Linux[4] 64-bit.
- Оперативная память: 16 ГБ.
- Процессор: 11th Gen Intel® Core™ i5-11320H @ 3.20ГГц[5].

4.1 Время выполнения алгоритмов

Алгоритмы замерялись при помощи инструментов замера времени, предоставляемых встроенными средствами языка Go[6]. Пример функции по замеру времени приведен в листинге 4.1. Количество повторов регулируется тестирующей системой самоятоятельно, хотя при желание оные можно задать. Точное количество повторов определяется в зависимости от того, был ли получен стабильный результат согласно системе.

Листинг 4.1 – Пример бенчмарка

```
func BenchmarkQuicksortSorted(b *testing.B) {
    for steps, amount := 0, 0; steps < STEPS; steps++ {
        amount += INC
        b.Run(fmt.Sprintf("size=%d", amount), func(b *testing.B) {
            sample := GenerateSortedArray(amount)
            sampleCopy := make([]int, amount)
            b.ResetTimer()
            for i := 0; i < b.N; i++ {
                //b.StopTimer()  // Disabled Due performance reasons
                copy(sampleCopy, sample)
                //b.StartTimer() // Disabled Due performance reasons
                Quicksort(sampleCopy)
            }
        })
    }
}
```

График времени выполнения сортировок на отсортированных данных (в наносекундах)

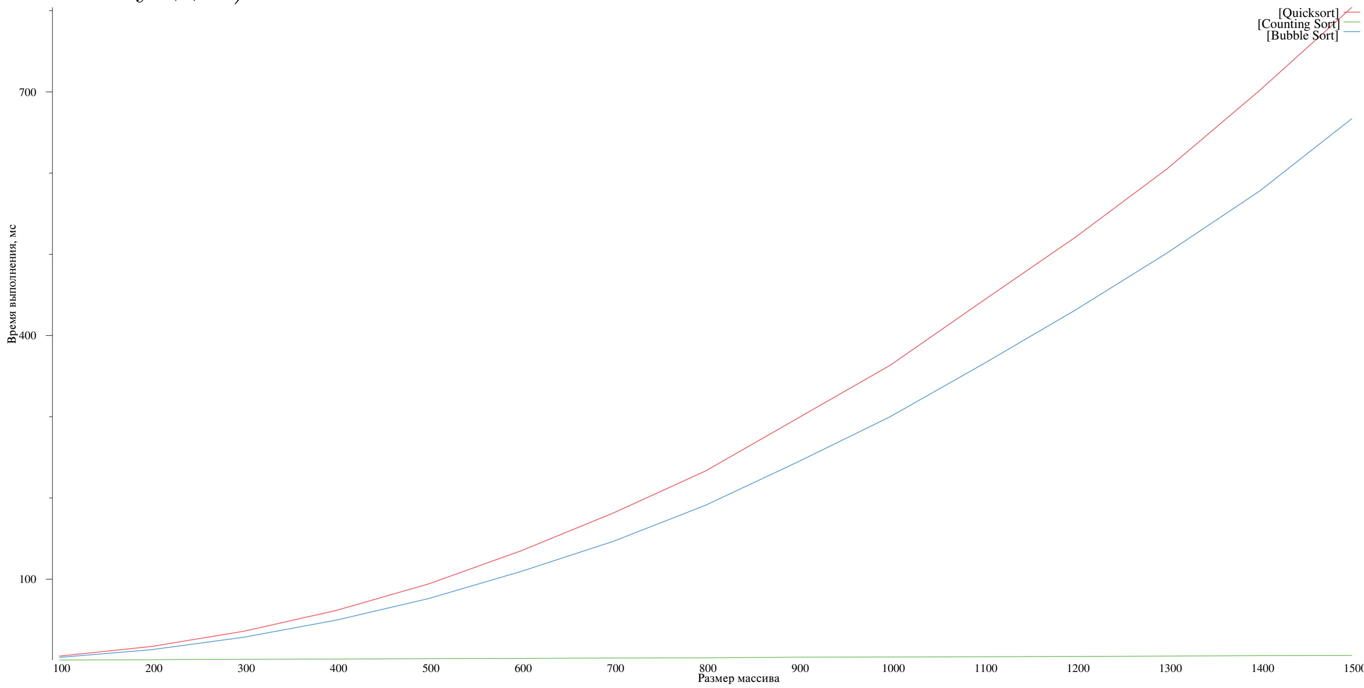


График времени выполнения сортировок на отсортированных данных в обратном порядке (в наносекундах)

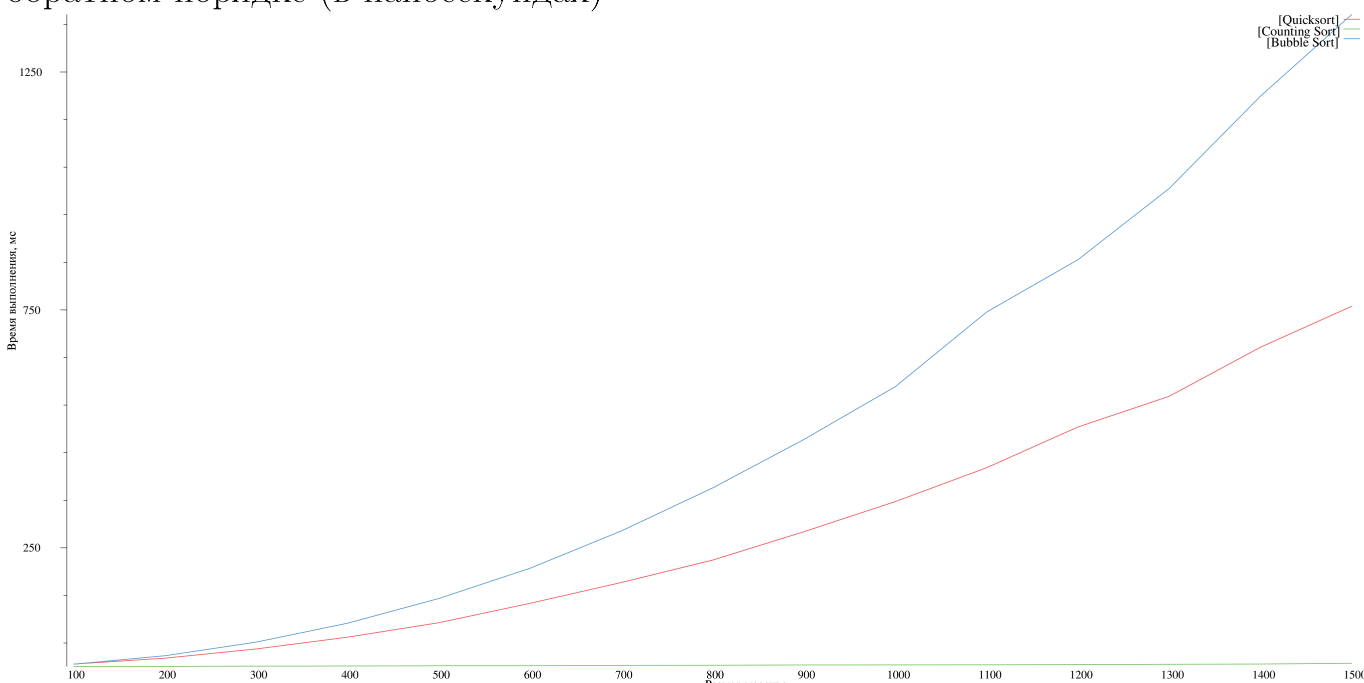
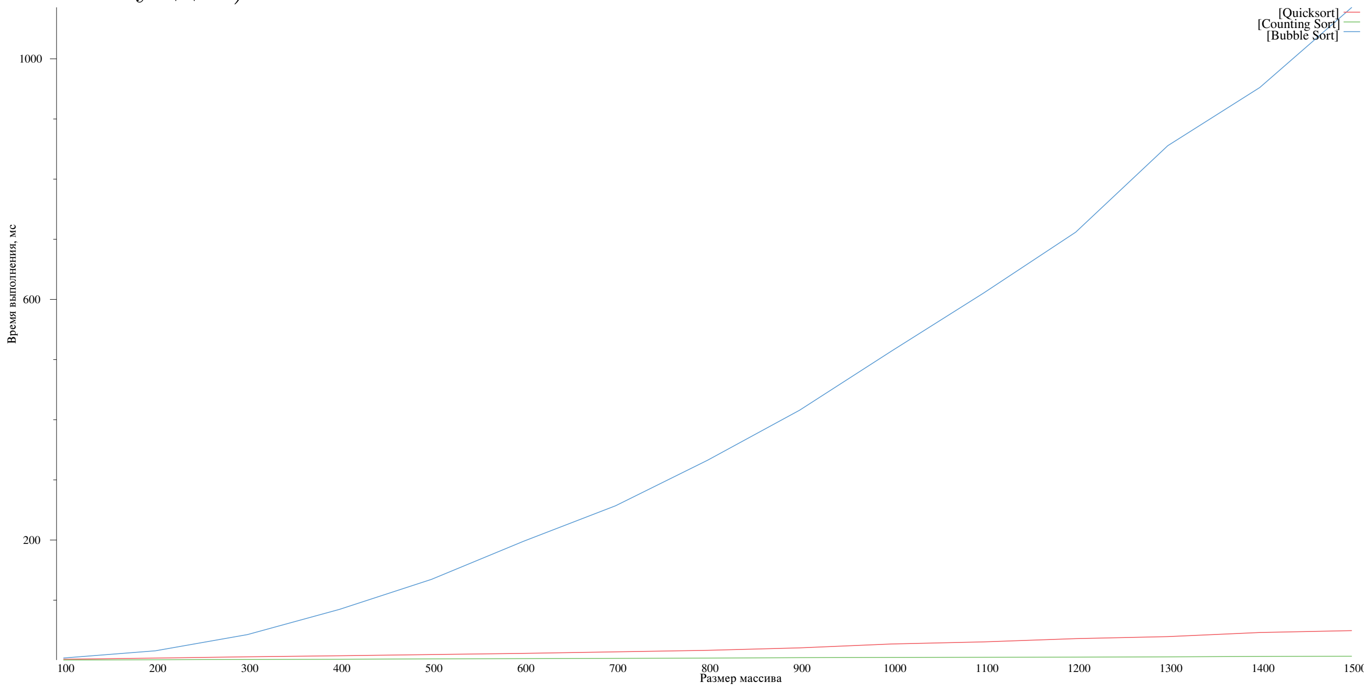


График времени выполнения сортировок на случайных данных (в наносекундах)



Вывод

Как и можно было ожидать, сортировка подсчетом оказалась самой быстрой, а сортировка пузырьком самой медленной при случайных данных. Быстрая сортировка оказалась быстрой, но при отсортированных данных она оказалась медленнее сортировки пузырьком из-за сложности алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения лабораторной работы были достигнуты следующие задачи:

- были изучены и реализованы 3 алгоритма сортировки: пузырёк, подсчетом, быстрая сортировка;
- были приведены аналитические данные о выше перечисленных алгоритмах;
- были приведены подробные блок-схемы, описывающие алгоритмы;
- был проведён сравнительный анализ алгоритмов на основе экспериментальных данных.

Экспериментальные данные показали различные сильные и слабые стороны каждого алгоритма. Так например:

– сортировка пузырьком работает крайне медленно независимо от входных данных;

– быстрая сортировка работает быстрее на случайных данных, поэтому лучше всего подходит как общее решение абстрактной задачи на сортировку данных;

– быстрая сортировка работает медленно на отсортированном массиве.

– сортировка подсчетом работает быстрее всех выше перечисленных алгоритмов, однако требует сильно больше памяти, чем остальные алгоритмы.

Цели лабораторной работы по изучению и исследованию особенностей алгоритмов сортировок были достигнуты

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *А.В. Л.* Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. — 2006. — Дата обращения: 19.09.2022.
2. Introduction to Algorithms / T. H. Cormen [и др.]. — 2009. — Дата обращения: 19.09.2022.
3. Windows Subsystem for Linux 2 [Электронный ресурс]. — Дата обращения: 19.09.2022. Режим доступа: `https://learn.microsoft.com/en-us/windows/wsl/about`.
4. Arch Linux [Электронный ресурс]. — Дата обращения: 19.09.2022. Режим доступа: `https://archlinux.org/`.
5. Процессор Intel® Core™ i5-11320H [Электронный ресурс]. — Дата обращения: 19.09.2022. Режим доступа: `https://ark.intel.com/content/www/ru/ru/ark/products/217183/intel-core-i511320h-processor-8m-cache-up-to-4-50-ghz-with-ipu.html`.
6. Go [Электронный ресурс]. — Дата обращения: 19.09.2022. Режим доступа: `https://go.dev/`.