Cupid解题报告

湖南省长郡中学 莫涛

## 【题目大意】

给定一个有完备匹配的二分图G，问哪些边一定会出现在完备匹配中，哪些边一定不会出现在完备匹配中。

N<=200000，M<=600000

## 【算法分析】

毋庸置疑，求出该图G的最大匹配是解题的第一步。

第一个问题：一定在完备匹配中的边。首先显然该边一定要在已求出的匹配中，然后只需要确定在没有这条边的情况下，G是否仍有完备匹配。

朴素地删边后求匹配时间复杂度为O(N2M)，但实际上，考虑匹配边(a,b)，删除它之后其余点的匹配情况并未改变，又原匹配是一个完备匹配，所以只需检查是否存在从a出发且到b结束的增广路，(a,b)是所求边当且仅当不存在这样的增广路。

对于每条匹配边求一次增广路，时间复杂度O(NM)。

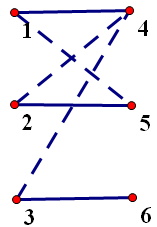
第二个问题：一定不在完备匹配中的边。模仿解第一问的方法，对于非匹配边(a,b)，设a与c匹配，d与b匹配，将边(a,b)强加入匹配中，删除点a与点b，则(a,b)是所求边当且仅当不存在从d出发到c结束的增广路。

对于每条非匹配边求一次增广路，时间复杂度O(M2)。

若用匈牙利算法求最大匹配，总时间复杂度O(NM+M2)，需要优化。

## 【反增广路】

首先以一个实例观察上述算法的运行过程，以期找到突破口。



N=3，M=6，实线表示匹配边

先考虑上述算法的瓶颈第二问，以边(1,5)为例，将该边加入匹配，删除点1与点5后，找到了增广路，故该边可能存在于完备匹配中。实际上可以发现，检查(1,5)等价于找一条从1到5的反增广路，即匹配边比非匹配边多一条，如即是一条符合要求的路径，将该反增广路增广后将(1,5)加入匹配边，则总匹配数不变。

故对于每个点a，可以用一遍BFS检查从a到对面的每个点是否存在反增广路，那么对于从a发出的每条非匹配边(a,b)，(a,b)可能出现在完备匹配中当且仅当存在从a到b的反增广路。

利用该优化，总时间复杂度降为O(NM)，与匈牙利算法求最大匹配的复杂度相同，需要将三个部分的复杂度都优化才能继续降低时间复杂度。

## 【进一步优化】

二分图最大匹配用HK算法可以解决，关键仍在两种边的寻找。

仍然先考虑第二问，观察反增广路的特点，从左边某点出发，依次经过匹配边非匹配边匹配边……，可以发现匹配边一定是从左至右经过，非匹配边一定是从右至左经过。

故若将所有边按该规律定为有向边，那么非匹配边(a,b)一定不存在于完备匹配中当且仅当a到b有路，更进一步，可以发现匹配边(a,b)一定存在于完备匹配中当且仅当b到a有路。

观察询问特点知，每次询问x到y是否有路时，一定存在边(y,x)，故问题等价于判断x与y是否可以相互到达。算法此时已很明显，只需对定向后的G求一遍强连通分量，便可以O(1)的进行判断。

总时间复杂度，可以通过测试数据。

## 【小结】

对增广路性质的深入理解是解决本题的关键，同时也需要利用好完备匹配这一重要条件（反增广路的优化无法应用于非完备匹配）。

HK算法相比普通匈牙利算法只多一个BFS过程，且无论是复杂度还是运行效果均优于匈牙利算法，有学习的价值。

## 【附：Hopcroft-Karp算法介绍】

Hopcroft-Karp算法是Hopcroft和Karp在1972年提出的，该算法的主要思想是在每次增广的同时找几条点不相交的最短增广路，形成极大增广路集，随后可以沿着这几条增广路同时进行增广。

可以证明在寻找增广路集的每一个阶段所寻找到的最短增广路都具有相等的长度，并且随着算法的进行最短增广路的长度是越来越长的，更进一步的分析可以证明最多只需要增广次就可以得到最大匹配。

算法的实现并不复杂，首先从所有X的未盖点进行BFS，BFS之后对每个X节点和Y节点维护距离标号，如果Y节点是未盖点那么就找到了一条最短增广路，BFS完之后就找到了最短增广路集。随后可以直接用DFS对所有允许弧(dist[y]=dist[x]+1)进行类似于匈牙利中寻找增广路的操作，这样每次BFS就可以做到O(M)的复杂度。总时间复杂度。