

Baidu

百科

L-M方法

进入词条

全站搜索

帮助

声明：百科词条人人可编辑，词条创建和修改均免费，绝不存在官方及代理商付费代编，请勿上当受骗。详情>>

首页

分类

秒懂百科

特色百科

用户

权威合作

个人中心

# L-M方法

编辑

讨论

上传视频

本词条由“科普中国”科学百科词条编写与应用工作项目 审核。

L-M方法全称Levenberg-Marquardt方法，是非线性回归中回归参数最小二乘估计的一种估计方法。由D.W.Marquardt于1963年提出，他是根据1944年K.Levenbevq的一篇论文发展的。这种方法是把最速下降法和线性化方法(泰勒级数)加以综合的一种方法。因为最速下降法适用于迭代的开始阶段参数估计值远离最优值的情况，而线性化方法，即高斯牛顿法适用于迭代的后期，参数估计值接近最优值的范围内。两种方法结合起来可以较快地找到最优值 [1]。

中文名	列文伯格-马夸尔特法	简称	L-M方法
外文名	Levenberg-Marquardt method	所属学科	数学（统计学）
别称	Levenberg-Marquardt方法	相关问题	非线性最小二乘问题

目录

1 基本介绍

2 相关结论

3 应用范围

## 基本介绍

Gauss-Newton算法(1809)是一个古老的处理非线性最小二乘问题的方法，该方法在迭代过程中要求矩阵 $J(x_k)$ 列满秩；而这一个条件限制了它的应用。为克服这个困难，Levenberg(1944)提出了一个新的方法，但未受到重视。后来，Marquardt(1963)又重新提出，并在理论上进行了探讨，得到了Levenberg-Marquardt方法，简称L-M方法。再后来，Fletcher(1971)对其实现策略进行了改进，得到了Levenberg-Marquardt-Fletcher方法。实际上，若将L-M方法与信赖域方法结合，效果可能更好 [2]。

L-M方法通过求解下述优化模型来获取搜索方向：

$$d_k = \arg \min_{d \in R^n} \|J_k d + r_k\|^2 + \mu_k \|d\|^2,$$

其中， $\mu_k > 0$ ，由最优性条件知 $d_k$ 满足

$$(J_k^T J_k + \mu_k I) d_k + J_k^T r_k = 0.$$

即

$$d_k = -(J_k^T J_k + \mu_k I)^{-1} J_k^T r(x_k).$$

实际上，利用约束优化问题的最优性条件，L-M方法可以看作是Gause-Newton方法受信赖域方法的启发产生的，因为 $d_k$ 可视为下述约束优化问题的最优解

$$\min \left\{ \|J_k d + r_k\|^2 \mid d \in R^n, \|d\| \leq \Delta_k \right\}.$$

这里， $\Delta_k = \|d_k\|$ 。

下面讨论 $d_k$ 的下降性质，若 $g_k = J_k^T r_k \neq 0$ ，则对任意 $\mu_k > 0$ ,

$$d_k^T (-g_k) = (J_k^T r_k)^T (J_k^T J_k + \mu_k I)^{-1} J_k^T r(x_k) > 0.$$

所以 $d_k$ 是 $f(x)$ 在 $x_k$ 点的下降方向。引入线搜索，我们便得到非线性最小二乘问题的L-M方法：

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k.$$

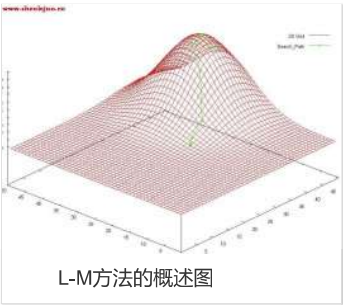
由于 $d_k$ 的取值与 $\mu_k$ 有关，所以从严格意义上讲， $d_k$ 应记为 $d_k(\mu_k)$ 。

L-M方法与Gauss-Newton方法的区别在于前者的搜索方向里面引入了参数 $\mu_k$  [2]。

## 相关结论

根据线性代数的知识，矩阵 $(J_k^T J_k + \mu_k I)^{-1}$ 对向量 $J_k^T r(x_k)$ 的作用无非是改变后者的长度和方向，为此，对 $d_k$ ，我们有下述结论。

性质1  $\|d_k(\mu)\|$ 关于 $\mu > 0$ 单调不增，且当 $\mu \rightarrow \infty$ 时， $\|d_k(\mu)\| \rightarrow 0$ 。



L-M方法的概述图

### 科普中国

致力于权威的科学传播

本词条认证专家为

杜强 | 高级工程师  
中国科学院工程热物理研究所

审核

V百科

往期回顾



### 百科繁星团

限额招募中

权威合作编辑



“科普中国”科学百科词条编写...  
“科普中国”是为我国科普信息化  
建设塑造的全...

什么是权威编辑 查看编辑版本

词条统计

浏览次数：24991次  
编辑次数：11次历史版本  
最近更新：1的69（2018-08-29）

突出贡献榜

乱线

6月热词  
权威发布



- 1 注意力训练方法
- 2 眼袋去掉的方法
- 3 推广方法
- 4 小孩长高方法
- 5 美国前10名大学
- 6 初中生长高方法
- 7 长身高方法
- 8 入籍塞浦路斯
- 9 怎么去掉下眼袋
- 10 生长头发的方法
- 11 海底捞crm系统
- 12 伯克利音乐学院
- 13 清洗纹身的方法
- 14 客服 呼叫中心
- 15 除雀斑好方法
- 16 快消除黑眼圈
- 17 员工薪酬管理
- 18 精锐教育价目表
- 19 训练注意力方法
- 20 陆家嘴办公楼
- 21 伦敦公寓出租
- 22 眼袋怎么去掉

（文中性质的证明请见参考书）

从几何直观来看，当矩阵 $J_k^T J_k$  接近奇异时，由Gauss-Newton算法得到的搜索方向的模 $\|d_k^{GN}\|$  相当大，而在L-M方法中，通过引入正参数 $\mu$ 就避免了这种情形出现。

下面看参数 $\mu$ 对搜索方向角度的影响，

性质2  $d_k(\mu)$  与  $-g_k$  的夹角 $\theta$ 关于 $\mu>0$ 单调不减。

根据性质1和2，当 $\mu=0$ 时， $d_k(\mu)$  就是Gauss-Newton方向 $d_k^{GN}$ 。当 $\mu>0$ 逐渐增大时， $d_k(\mu)$  的长度逐渐缩短，方向则逐渐偏向最速下降方向，可以设想，当参数 $\mu$ 充分大时， $d_k(\mu)$  的方向与目标函数的负梯度方向一致，不但如此，下面的结果表明，我们引入参数 $\mu_k$ 可以使得搜索方向的求解更加趋于稳定，从而我们有理由相信L-M方法的数值效果应该比Gauss-Newton方法好一些。

性质3  $(J_k^T J_k + \mu I)$  的条件数关于 $\mu$ 单调不减。

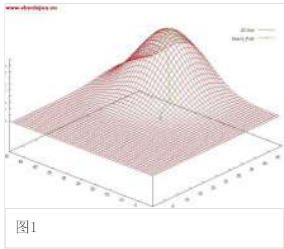
基于以上讨论，在具体的算法中，我们采用类似于调整信赖域半径的策略来调整参数 $\mu$ ，这就得到Levenberg-Marquardt-Fletcher方法 [2]。

应用范围

Levenberg-Marquardt算法是最优化算法中的一种。最优化是寻找使得函数值最小的参数向量。它的应用领域非常广泛，如：经济学、管理优化、网络分析、最优设计、机械或电子设计等等。

根据求导数的方法，可分为2大类。第一类，若f具有解析函数形式，知道x后求导数速度快。第二类，使用数值差分来求导数。根据使用模型不同，分为非约束最优化、约束最优化、最小二乘最优化。

Levenberg-Marquardt算法是使用最广泛的非线性最小二乘算法，中文为列文伯格-马夸尔特法。它是利用梯度求最大（小）值的算法，形象的说，属于“爬山”法的一种。它同时具有梯度法和牛顿法的优点。当 $\lambda$ 很小时，步长等于牛顿法步长，当 $\lambda$ 很大时，步长约等于梯度下降法的步长。图1显示了算法从起点，根据函数梯度信息，不断爬升直到最高点（最大值）的迭代过程。共进行了12步。（备注：图1中绿色线条为迭代过程）。



LM算法的实现并不算难，它的关键是用模型函数 f 对待估参数向量p在其领域内做线性近似，忽略掉二阶以上的导数项，从而转化为线性最小二乘问题，它具有收敛速度快等优点。LM算法属于一种“信赖域法”，所谓的信赖域法，即是：在最优化算法中，都是要求一个函数的极小值，每一步迭代中，都要求目标函数值是下降的，而信赖域法，顾名思义，就是从初始点开始，先假设一个可以信赖的最大位移s，然后再以当前点为中心，以s为半径的区域内，通过寻找目标函数的一个近似函数（二次的）的最优点，来求解得到真正的位移。在得到了位移之后，再计算目标函数值，如果其使目标函数值的下降满足了一定条件，那么就说明这个位移是可靠的，则继续按此规则迭代计算下去；如果其不能使目标函数值的下降满足一定的条件，则应减小信赖域的范围，再重新求解。

LM算法需要对每一个待估参数求偏导，所以，如果你的拟合函数 f 非常复杂，或者待估参数相当多，那么可能不适合使用LM算法，而可以选择Powell算法（Powell算法不需要求导）。

参考资料

1. 郑家亨. 统计大辞典：中国统计出版社，1995年03月第1版：第168页

2. 王宜举，修乃华主编. 非线性规划理论与算法（第二版）：陕西科学技术出版社，2008.2：第120页

学术论文

从德胜，汪玉春. Levenberg-Marquardt Method Optimizing Wax Deposition Rate Model...《CNKI;WanFang》，2009

付清山，张志胜，史金飞. 一种采用L-M方法的无标定视觉伺服控制方法.《中国机械工程》，2008

穆静，蔡远利，王长元. 基于L-M方法的迭代容卡尔曼滤波算法及其应用.《CNKI;WanFang》，2013

何叶丹，马昌凤，范斌. 求解非线性方程组的一种新的L-M方法.《福建师范大学学报(... )》，2014

郭楠. The nonmonotone projected L-M method for convex constrained nonli...《CNKI;WanFang》，2006

[查看全部](#)

搜索发现

- 实木家具
- 网上菲律宾娱乐
- 货源网
- 渔具品牌
- 御龙在天

6月热词  
权威发布



- 🔗 新手上路

成长任务

编辑入门

编辑规则

本人编辑 **NEW**
- 📖 我有疑问

内容质疑

在线客服

官方贴吧

意见反馈
- 🗨️ 投诉建议

举报不良信息

未通过词条申诉

投诉侵权信息

封禁查询与解封

分享

★

👁️

💬

👤

6月热词  
权威发布

