Modelli di Ricerca Operativa

Contents

1 Progammazione Lineare

La funzione obiettivo e i vincoli sono rappresentati mediante espressioni lineari. Le variabili di decisione possono assumere valori reali.

1.1 Modelli di pianificazione della produzione

I modelli di pianificazione della produzione consentono di formulare problemi per l'allocazione ottimale di **risorse** (materie prime, macchinari, manodopera), disponibili in quantità limitata e utilizzate per realizzare un numero finito di **prodotti**. Per ciascun prodotto è noto il processo produttivo, riassumibile nel consumo di un quantitativo noto di risorse. La vendita di ciascuna unità di prodotto genera un profitto noto e la funzione obiettivo consiste nel massimizzare il profitto derivante dalla vendita di tutti i prodotti realizzati.
Si supponga di disporre di un numero m di risorse disponibili per la produzione di n prodotti. Si indichi con a_{ij} la quantità di risorsa i necessaria per produrre un'unità di prodotto j; b_i indica la quantità disponibile della risorsa i, mentre p_j il profitto lordo unitario ricavabile dalla vendita del prodotto j. Le variabili di decisione sono x_j, ciascuna delle quali indicante il livello di produzione del prodotto j.

$$\begin{aligned}
\max z(x) = &\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i && i = 1, ..., m \\
&x_j \geq 0 && j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

In alcuni casi, la realizzazione di un prodotto richiede la scelta di risorse disponibili tra più alternative (per esempio, un'operazione meccanica di tornitura può essere eseguita su uno qualsiasi dei torni disponibili dell'officina). In questo caso, le variabili di decisione devono esprimere sia il livello produttivo per ogni prodotto, sia la specifica risorsa impegnata. E' quindi necessario ricorrere a una formulazione a due indici per le variabili di decisione, cioè x_{ij} ciascuna delle quali rappresentante la quantità di prodotto j realizzata utilizzando la risorsa i.

1.2 Modelli di miscelazione

Nei problemi di miscelazione si dispone di un insieme di materie prime (**ingredienti**), ciascuna caratterizzata da un contenuto nodo di determinati **componenti**. L'obiettivo è miscelare gli ingredienti, secondo opportune proporzioni, per ottenere un prodotto finito (**miscela**), che soddisfi determinati requisiti di qualità, esprimibili in termini di contenuto complessivo di ciascun componente nella miscela. Le variabili di decisione corrispondono al contenuto di ciascun ingrediente nella miscela, i vincoli sono tipicamente associati alle caratteristiche di qualità della miscela e alle disponibilità limitate degli ingredienti, mentre la funzione obiettivo è rappresentata dal costo degli ingredienti impiegati.
Si supponga di avere a disposizione n ingredienti, ognuno dei quali contenente

una certa quantità di ciascuno degli m componenti. Si indichi con a_{ij} la quantità di componente i presente nell'ingrediente j, mentre b_i rappresenta la quantità minima di componente i richiesto nella miscela. Il costo unitario dell'ingrediente j è indicato con c_j. La variabile di decisione x_j indica la quantità di ingrediente j presente nella miscela da realizzare.

$$\begin{aligned}
\min z(x) = & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & i = 1, ..., m \\
& x_j \geq 0 & j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Ulteriori vincoli potrebbero essere necessari. Per esempio, nel caso in cui sia richiesto che un dato componente i sia presente nella miscela in un quantitativo non superiore a un valore prefissato d_i (per esempio, nel *problema della dieta*), occorre imporre che:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i \qquad i = 1, ..., m$$

In altri casi, potrebbe essere imposta una limitazione u_j sul massimo quantitativo di ingrediente j da utilizzare per realizzare la miscela, il che si rappresenta formalmente aggiungedo i seguenti vincoli:

$$x_j \leq u_j \qquad j = 1, ..., n$$

Nel caso in cui sia necessario produrre un quantitativo prefissato q di miscela, occorre aggiungere il seguente vincolo:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = q$$

Nel caso in cui il numero di miscele da realizzare sia $p > 1$, il modello generale di miscelazione si modifica in accordo alla scelta delle variabili di decisione, che, in questo caso, sono del tipo x_{jk}, ciascuna delle quali rappresenta la quantità di ingrediente j necessaria per realizzare la miscela k.

1.3 Modelli di flusso su rete

1.3.1 Problema di flusso a costo minimo

Dato un grafo orientato (**digrafo**) $D = (N, A)$, si indichi con b_i la **fornitura** (se $b_i > 0$) o **domanda** (se $b_i < 0$) del nodo i e con c_{ij}, l_{ij}, u_{ij}, rispettivamente il **costo**, la **capacità minima** e la **capacità massima** dell'arco (i, j). La struttura $R = (N, A, b, c, l, u)$ si definisce **rete**. Ad ogni arco (i, j) si associa una variabile di decisione x_{ij}, che rappresenta il flusso sull'arco (i, j). I vincoli sono detti di **conservazione del flusso**: essi stabiliscono che, per ogni nodo i della rete, la differenza tra la quantità di flusso totale uscente dal nodo i e la quantità di flusso totale entrante in i deve essere uguale alla fornitura/domanda b_i del nodo. Affinché il problema ammetta una soluzione ammissibile è necessario imporre che la somma di tutte le forniture/domande dei nodi i sia pari a 0.

$$
\begin{aligned}
\min z(x) = & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
& \sum_{j\in N:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j\in N:(j,i)\in A} x_{ji} = b_i & i \in N \\
& \sum_{i\in N} b_i = 0 & \\
& l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij} & (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

1.3.2 Problema del cammino orientato a costo minimo

Dato un **digrafo** $D = (N, A)$, si supponga che a ogni arco $(i, j) \in A$ sia associato un costo c_{ij}. Occorre garantire che 1) alla sequenza di nodi corrisponda una sequenza concatenata di archi e 2) che non esistano nodi ripetuti. Il costo del cammino orientato è la somma dei costi associati agli archi che lo compongono. Il problema che si vuole affrontare riguarda la determinazione del cammino orientato di costo minimo da un nodo **origine** s ad un nodo **destinazione** t. Questo è un caso particolare di un problema di flusso a costo minimo su una rete R.

$$
\begin{aligned}
\min z(x) = & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
& \sum_{j\in N:(s,j)\in A} x_{sj} - \sum_{j\in N:(j,s)\in A} x_{js} = 1 & \\
& \sum_{j\in N:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j\in N:(j,i)\in A} x_{ji} = 0 & i \in N, i \neq s, t \\
& \sum_{j\in N:(t,j)\in A} x_{tj} - \sum_{j\in N:(j,t)\in A} x_{jt} = -1 & \\
& x_{ij} \ge 0 & (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

Il problema potrebbe consistere nella determinazione dei cammini orientati di costo minimo da un nodo origine s a più destinazioni.In questo caso, il problema può essere formulato ponendo $b_s = n - 1$, dove n indica il numero di nodi della rete con $b_i = -1, i \in N, i \neq s$. La ragione di tale formulazione è legata al fatto che il problema del cammino orientato di costo minimo dal nodo s agli altri $n - 1$ nodi della rete può essere visto come composto da $n - 1$ problemi di cammino orientato di costo minimo da uno stesso nodo origine s a un nodo destinazione $j \in N, j \neq s$.

1.3.3 Problema del massimo flusso

Sia data una rete $R = (N, A, b, c, l, u)$ per la quale si assume che $c_{ij} = l_{ij} = 0, (i,j) \in A$, e nella quale si individuano due nodi particolari s e t, detti rispettivamente **sorgente** e **pozzo**; inoltre, si assume $b_i = 0, i \in N \setminus \{s,t\}$. L'obiettivo che ci si pone è quello di inviare la massima quantità di flusso possibile dal nodo sorgente s al nodo pozzo t, rispettando i vincoli di capacità sugli archi della rete. Indicando con v la componente del vettore di fornitura/domanda relativa al nodo s che, in questo caso, non è un parametro del problema, ma una variabile dipendente dalle variabili di flusso x_{ij}, il problema del massimo flusso può essere descritto formalmente attraverso il seguente modello di flusso su rete:

$$
\begin{aligned}
& \max z(x) = v \\
& \qquad \sum_{j \in N:(s,j) \in A} x_{sj} - \sum_{j \in N:(j,s) \in A} x_{js} = v \\
& \qquad \sum_{j \in N:(i,j) \in A} x_{ij} - \sum_{j \in N:(j,i) \in A} x_{ji} = 0 && i \in N, i \neq s,t \\
& \qquad \sum_{j \in N:(t,j) \in A} x_{tj} - \sum_{j \in N:(j,t) \in A} x_{jt} = -v \\
& \qquad 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij} && (i,j) \in A
\end{aligned}
$$

1.3.4 Problema di trasporto

Siano date n_1 **origini** (per esempio, stabilimenti di produzione) presso le quali è disponibile un certo prodotto in quantità pari a a_i e n_2 **destinazioni** (per esempio, punti vendita), ciascuna delle quali caratterizzata da un valore di domanda b_j di prodotto: sia inoltre c_{ij} il costo unitario di trasporto del prodotto dall'origine i alla destinazione j. Il problema di trasporto consiste nel determinare il quantitativo di prodotto da inviare da ciascuna origine verso ciascuna destinazione in modo tale da minimizzare il costo complessivo di trasporto, rispettando i vincoli sulla quantità di prodotto disponibile presso ciascuna origine e garantendo il soddisfacimento delle domande da parte di ogni destinazione. Affinché tale problema ammetta soluzione, è necessario imporre che la quantità di prodotto complessivamente disponibile presso le varie origini sia sufficiente a soddisfare la domanda complessiva delle destinazioni.

$$
\begin{aligned}
\min z(x) = &\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} c_{ij}x_{ij} \\
&\sum_{j=1}^{n_2} x_{ij} \le a_i && i=1,...,n_1 \\
&\sum_{i=1}^{n_1} x_{ij} = b_j && j=1,...,n_2 \\
&\sum_{i=1}^{n_1} a_i \ge \sum_{j=1}^{n_2} b_j \\
&x_{ij} \ge 0 && i=1,...,n_1, j=1,...,n_2
\end{aligned}
$$

Spesso il problema del trasporto è formulato con soli vincoli di uguaglianza, assumendo quindi che la disponibilità complessiva delle sorgenti sia esattamente pari alla domanda complessiva delle destinazioni.
Una variante del problema è il cosiddetto *problema di trasporto a due stadi*, per il quale si assume che la distribuzione del prodotto dai punti origine alle destinazioni finali possa avvenire anche utilizzando p punti intermedi di transito. Tali punti possono anche interscambiare quantitativi di prodotto tra loro. Supponendo che continui a valere la relazione, il problema di trasporto a due stati può essere ricondotto a una formulazione a stadio singolo, assumendo che i punti di trasbordo siano contemporaneamente punti di origine e punti di destinazione.

$$
\begin{aligned}
\min z(x) = &\sum_{i=1}^{n_1+p}\sum_{j=1}^{n_2+p} c_{ij}x_{ij} \\
&\sum_{j=1}^{n_2+p} x_{ij} \le a_i && i=1,...,n_1 \\
&\sum_{i=1}^{n_1+p} x_{ij} = b_j && j=1,...,n_2 \\
&\sum_{j=1}^{n_2+p} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n_2} b_j && i=n_1+1,...,n_1+p \\
&\sum_{i=1}^{n_1+p} x_{ij} = \sum_{k=1}^{n_2} b_k && j=n_2+1,...,n_2+p \\
&x_{ij} \ge 0 && i=1,...,n_1+p, j=1,...,n_2+p
\end{aligned}
$$

1.3.5 Problema dell'assegnamento

Si supponga di avere n **oggetti** (per esempio, lavoratori) e altrettanti **posti** (per esempio, mansioni da svolgere). Si indichi con c_{ij} il costo associato all'assegnamento dell'oggetto i al posto j. Il problema dell'assegnamento consiste nel determinare il modo più conveniente di assegnare ogni oggetto i a uno e un solo posto j. Apparentemente, il problema dell'assegnamento rientra nella classe di problemi di PI di tipo binario. Infatti, le variabili di decisione sono x_{ij}, ognuna delle uqali avente valore pari a 1, se l'oggetto i viene assegnato al posto j, 0 altrimenti.

$$\begin{aligned}
\min z(x) = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} & \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & i = 1, ..., n \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & j = 1, ..., n \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, ..., n, j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Si osservi che, data la particolare struttura dei vincoli, esiste una soluzione ottima del problema a componenti intere, per cui è possibile rimpiazzare l'ultimo vincolo con:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1, ..., n, j = 1, ..., n$$

o meglio

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, ..., n, j = 1, ..., n$$

giacché ogni variabile di decisione non negativa non potrà mai assumere valori maggiori di uno, a causa della presenza dei vincoli precedenti. Di conseguenza, il problema dell'assegnamento può essere visto come caso particolare di problema di trasporto e, quindi, come problema di flusso di rete.
Varianti del problema, note come *problema dell'abbinamento*, si possono ottenere considerando un numero di oggetti diverso dal numero di posti e, in questo caso, i vincoli di uguaglianza devono essere opportunamente trasformati in vincoli di disuguaglianza del tipo $\leq$.

1.4 Modelli multiperiodo

I modelli di PL multiperiodo conentono di assumere decisioni riguardanti un orizzonte temporale più lungo, che si assume discreto e suddiviso in T **periodi di tempo**. Tali modelli possono riguardare differenti contesti ma per semplicità si farà riferimento soltanto al caso della *pianificazione multiperiodo di un unico prodotto*.
Si indichi con t il generico periodo dell'orizzonte temporale di pianificazione. Per ogni t si assumono note la quantità d_t **richiesta di prodotto** e il **costo unitario c_t di produzione**. In ogni periodo di tempo è possibile immagazzinare le quantità di prodotto non vendute e che faranno parte della disponibilità di prodotto per i periodi successivi. Il **costo unitario di stoccaggio** si suppone noto e pari a h_t.
Il problema consiste nel determinare le quantità di prodotto da realizzare in

ciascun periodo dell'orizzonte di pianificazione, in modo da soddisfare le richieste della clientela in ogni periodo di tempo, minimizzando il costo complessivo dato dalla somma dei costi di produzione di stoccaggio.
Le variabili di decisione sono rappresentate da x_t, ciascuna delle quali indicante la quantità di prodotto da realizzare al periodo di tempo t. Inoltre, si indichi con I_t, la quantità di prodotto stoccata al periodo di tempo t. Tali variabili sono dipedenti dalle variabili x_t dal momento che, per ogni periodo di tempo t, valgono le seguenti relazioni dette *vincoli di bilanciamento*:

$$I_{t-1} + x_t = d_t + I_t$$

per le quali si assume noto il valore I_0, ossia il livello iniziale di scorta di prodotto. Il modello complessivo risulta:

$$\begin{aligned}
\min z(x, I_t) = &\sum_{t=1}^{T}(c_t x_t + h_t I_t) & \\
&I_{t-1} + x_t = d_t + I_t & t = 1, ..., T \\
&x_t, I_t \geq 0 & t = 1, ..., T
\end{aligned}$$

In tale modello possono essere inseriti anche vincoli sulla capacità produttiva o sul livello di scorte per ogni periodo di tempo, cioè:

$$\begin{aligned}
x_t &\leq u_t \\
I_t &\leq S_t
\end{aligned}$$

2 Progammazione Lineare Intera

Alcune variabili di decisione sono vincolate ad assumere valori interi e/o binari. Nel primo caso, si parla di modelli di PI pura, nel secondo di modelli di PI mista. Tali modelli consentono di rappresentare matematicamente tutti quei problemi di decisione che sono caratterizzati dall'indivisibilità delle variabili o dalla necessità di scegliere tra un numero finito di alternative. Bisogna tenere conto che esistono dei casi in cui è possibile trascurare il vincolo di interezza sulle variabili di decisione, per esempio come nel caso del *problema dell'assegnamento*. Questo si può verificare anche quando la soluzione, determinata arrotondando i valori frazionari ottenuti risolvendo il modello di ottimizzazione come se le variabili di decisione fossero continue, ha un effetto trascurabile sia sul mancato soddisfaceimento dei vincoli e sia sul valore della funzione obiettivo.

2.1 Modelli di taglio ottimo

Si vuole minimizzare lo sfrido derivante dalle operazioni di taglio di **moduli** (stoffa, pelle, lamiera,...) di dimensioni standard, per ottenere moduli richiesti di dimensioni minori.
Il modello di taglio ottimo più semplice è quello di tipo mono-dimensionale, per il quale si assume di dover ricavare, da moduli di dimensione pari a D, moduli

di dimensioni diverse d_i. Si indichi con r_i il numero di moduli di dimensioni d_i che devono essere prodotti. Ciascuno modulo standard può essere tagliato in modi diversi, considerando n diversi schemi di taglio. Sia a_{ij} il numero di moduli di dimensione d_i ottenuti da un modulo standard tagliato secondo lo schema di taglio j. Le variabili di decisione sono le quantità x_j, ciascuna delle quali rappresenta il numero di moduli standard tagliati secondo lo schema di taglio j.
Per minimizzare lo sfrido, è sufficiente minimizzare il numero di moduli standard utilizzati.

$$\begin{aligned}
\min z(x) = &\sum_{j=1}^{n} x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq r_i && i = 1, ..., m \\
&x_j \geq 0, \text{intero} && j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

2.2 Modelli dello zaino

Dato un insieme di n **oggetti**, a ciascuno dei quali è associato un **valore** c_j e un **peso** p_j, definita una limitazione b sul peso totale trasportabile di uno zaino, il problema consiste nello scegliere il sottoinsieme di oggetti da inserire nello zaino in modo tale da massimizzare il valore complessivo, nel rispetto del vincolo di peso, cioè, della capacità dello zaino stesso. Le variabili di decisione devono esprimere la scelta di inserire o meno ciascun oggetto nello zaino. Di conseguenza, esse sono di tipo binario e si indicano con x_j, ciascuna delle quali assume valore pari a 1 se l'oggetto j è inserito nello zaino, 0 altrimenti.
Il problema dello zaino può essere utilizzato per rappresentare problemi di *pianificazione degli investimenti*. Dato un certo budget e un insieme di possibili progetti di investimento indipendenti e competitivi, ognuno dei quali ha un rendimento e comporta un esborso iniziale di capitale, l'obiettivo del problema di pianificazione è quello di scegliere il sottoinsieme di progetti di investimento da realizzare.

$$\begin{aligned}
\max z(x) = &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq b \\
&x_j \in \{0, 1\} && j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Si assume ovviamente che $c_j > 0$, altrimenti non si avrebbe alcun vantaggio nell'inserire j nello zaino. Si assume inoltre che $p_j \leq b$, cioè che ogni oggetto preso singolarmente non violi il vincolo di capacità. Infine, affinché il problema sia significativo, si assume

$$\sum_{j=1}^{n} p_j > b$$

altrimenti la soluzione banale in cui tutti gli oggetti possono essere inseriti nello zaino rappresenterebbe la soluzione ottima del problema.
Si può considerare una versione del modello dello zaino nella quale ciascuna variabile di decisione rappresenti il numero di oggetti di un certo tipo da selezionare. Il problema, in questo cao, consiste nello scegliere quanti oggetti di ciascun tipo inserire nello zaino ed è realizzabile cambiando la variabile x_j da binaria ad intera

$$x_j \geq 0, \text{intero} \qquad\qquad j = 1, ..., n$$

Il modello dello zaino può essere facilmente modificato in modo da rappresentare situazioni in cui si prevede l'impiego di diversi tipi di risorse, disponibili in quantità limitata, oppure di un'unica risorsa, la cui disponibilità varia nel tempo. Per esempio, nel caso della pianificazione finanziaria, è ragionevole ipotizzare che, accanto alle risorse finanziarie, sia necessario prevedere anche l'utilizzo di risorse umane, tecnologiche e di materie prime, oppure vi possono essere situazioni in cui l'investimento finanziario avviene su base multiperiodale e la realizzazione di ciascun progetto richiede un certo finanziamento nell'arco del periodo di riferimento. In termini generali, il *problema dello zaino multidimensionale* si può formulare assumendo di disporre di m risorse o di considerare un orizzonte di pianificazione caraterizzato da m periodi di tempo; a ogni progetto j oltre al valore c_j, vengono associati m pesi p_{ij} ciascuno dei quali rappresenta la quantità di risorsa i utilizzata dall'oggetto j. Supponendo inoltre che, la quantità di risorsa disponibile per ogni risorsa i sia b_i otteniamo:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \leq b_i \qquad\qquad i = 1, ..., m$$

2.3 Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento

Un tipico problema che rientro in un contesto del genere è quello relativo alla pianificazione di produzione di beni, che richiedono l'attrezzaggio e la configurazione dei macchinari usati nel processo produttivo. I costi corrispondenti sono detti **costi fissi** e sono sostanzialmente indipendenti dalla quantità prodotto, ma devono essere sostenuti esclusivamente se la produzione del corrispondente bene viene attivata.
Si supponga di avviare una prouzione con costi fissi f_j e costi per unità prodotta c_j. Rappresentiamo con $x_j \geq 0$ il numero di prodotti che si decide di produrre e introduciamo una variabile $y_j \in \{0, 1\}$ che rappresenta se decidiamo o meno di produrre un prodotto j per eliminare la discontinuità all'origine causata dal costo fisso f_j. Per ogni prodotto, consideriamo una domanda b_j ed un vincolo di produzione massima M_j.

$$
\begin{aligned}
\min z(x,y) = & \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + f_j x_j) & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & i = 1, ..., m \\
& x_j \leq M_j y_j & j = 1, ..., n \\
& x_j \geq 0 & j = 1, ..., n \\
& y_j \in \{0, 1\} & j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

2.4 Modelli di localizzazione

Rappresentano i principali strumenti quantitativi per la pianificazione territoriale di reti e servizi. In particolare, l'obiettivo che si vuole perseguire è quello di stabilire dove localizzare dei centri di servizio (impianti di produzione, centri di distribuzione, centri sanitari,...), in modo da soddisfare la domanda distribuita su una data area geografica e da minimizzare una funzione di costo opportunamente definita.
Il problema di localizzazione più noto e diffuso è il *problema CPL* ossia *Capacitated Plant Location*. Esso può essere schematizzato utilizzando un grafo orientato completo bipartito $G = (N_1 \cup N_2, A)$, in cui i nodi in N_1 rappresentano i siti potenziali, i nodi in N_2 descrivono i nodi successori e gli archi in A sono associati ai flussi di prodotti tra i siti potenziali e i nodi successori. In un generico periodo di tempo di cui si compone l'orizzonte di pianificazione, sia $d_j, j \in N_2$, la stima della domanda media del nodo successore j, $q_i, i \in N_1$, il massimo livello di attività del sito potenziale i, $k_{ij}, i \in N_1, j \in N_2$, il costo unitario di trasporto dal sito potenziale i al nodo successore j, $f_i, i \in N_2$, il costo fisso di avviamento nell'intero orizzonte di pianificazione. Le variabili di decisione sono $y_j, j \in N_1$, di tipo binario, ognuna delle quali avente valore pari a 1 se si decide di attivare il sito potenziale i, o altrimenti; $s_{ij}, i \in N_1, j \in N_2$, ciascuna delle quali indicante il flusso di prodotto dal nodo i al nodo successore j. La funzione obiettivo, da minimizzare, identifica, nel generico periodo dell'orizzonte di pianificazione, la somma dei costi fissi di avviamento e dei costi di trasporto.

$$
\begin{aligned}
\min z(s,y) = & \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} k_{ij} s_{ij} + \sum_{i \in N_1} f_i y_i & \\
& \sum_{i \in N_1} s_{ij} = d_j & j \in N_2 \\
& \sum_{j \in N_2} s_{ij} \leq q_i y_i & i \in N_1 \\
& s_{ij} \geq 0 & i \in N_1, j \in N_2 \\
& y_i \in \{0, 1\} & i \in N_1
\end{aligned}
$$

Il problema può essere riformulato nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
\min z(s,y) = & \sum_{i\in N_1}\sum_{j\in N_2} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in N_1} f_i y_i \\
& \sum_{i\in N_1} x_{ij} = 1 && j \in N_2 \\
& \sum_{j\in N_2} d_j x_{ij} \leq q_i y_i && i \in N_1 \\
& c_{ij} = k_{ij} d_j && i \in N_1, j \in N_2 \\
& x_{ij} \geq 0 && i \in N_1, j \in N_2 \\
& y_i \in \{0,1\} && i \in N_1
\end{aligned}
$$

Il modello CPL può essere facilmente adattato per tener conto di ulteriori condizioni di interesse pratico. Per esempio, potrebbe essere previsto che non sia economicamente conveniente attivare un nodo logicistico $i \in N_1$, quando il suo livello medio di attività in un periodo di tempo risulti inferiore a un valore q_i^- o superiore a una soglia q_i^+.

$$
\begin{aligned}
& \sum_{j\in N_2} d_j x_{ij} \leq q_i^+ y_i && i \in N_1 \\
& \sum_{j\in N_2} d_j x_{ij} \geq q_i^- y_i && i \in N_1
\end{aligned}
$$

Se i nodi logistici potenziali non hanno vincoli sul livello di attività, le relazioni possono essere rimpiazzate dai vincoli che esprimano soltanto il legame esistente tra le variabili di decisione x_{ij} e le variabili y_j. Si ottiene così il modello SPL, *Simple Plant Location*:

$$
\sum_{j\in N_2} x_{ij} \leq |N_2| y_i \qquad i \in N_1
$$

Altri problemi di localizzazione possono essere formulati modificando il modello CPL. In particolare se occorre prevedere un numero p prefissato di nodi logistici da attivare, allora al modello CPL si può aggiungere il vincolo:

$$
\sum_{i\in N_1} y_i = p
$$

Considerando costi di avviamento uguali per ogni nodo, $d_j = 1, j \in N_2$ e $q_i = |N_2|, i \in N_1$, si ottiene il *modello p-mediana*.
Se, invece, è richiesto che uno specifico sottoinsieme dei nodi logistici $N_1' \subseteq N_1$ sia necessariamente attivato, allora si possono aggiungere i vincoli:

$$
y_i = 1 \qquad i \in N_1'
$$

2.5 Modelli di caricamento di contenitori

Nel caso più semplice, noto con l'acronimo *1BP* (*1Bin Packing*), si assume di avere a disposizione un numero finito di m **oggetti** che devono essere inseriti in al più n **contenitori** di uguale capacità pari a q. Ogni oggetto i è caratterizzato da un certo peso p_i. L'obiettivo è quello di assegnare gli oggetti ai contenitori in modo tale che ogni oggetto sia inserito in esattamente un contenitore, il peso totale degli oggetti assegnati a ogni contenitore non superi la capacità dello stesso e il numero di contenitori utilizzati sia minimizzato. Il problema può essere formulato tramite le variabili di decisione di tipo binario x_{ij}, ognuna delle quali uguale a 1 se l'oggetto i è assegnato al contenitore j, 0 altrimenti, e le variabili di decisione di tipo binario y_j, ciascuna delle quali avente valore pari a 1 se il contenitore j è utilizzato, 0 altrimenti.

$$\begin{aligned}
\min z(x,y) = & \sum_{j=1}^{n} y_j \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{m} p_j x_{ij} \leq q y_j & j = 1, ..., n \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & i = 1, ..., m1, j = 1, ..., n \\
& y_j \in \{0,1\} & j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Il secondo vincolo assicura che ogni oggetto sia inserito in esattamente un contenitore. Il terzo vincolo invece garantisce che ogni contenitore sia eventualmente utilizzato in modo tale da rispettarne la capacità.
Un altro modello di caricamento di contenitori è ottenuto modificando il problema precedente e supponendo che ciascun contenitore abbia capacità differente q_j e un costo di utilizzo c_j. Il modello risultante è il seguente:

$$\begin{aligned}
\min z(x,y) = & \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \\
& \sum_{i=1}^{m} p_j x_{ij} \leq q_j y_j & j = 1, ..., n \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & i = 1, ..., m, j = 1, ..., n \\
& y_j \in \{0,1\} & j = 1, ..., n
\end{aligned}$$

Altri modelli di caricamento a più dimensioni (in cui gli oggetti da caricare e i contenitori sono caratterizzati da parametri quali lunghezza, larghezza e altezza) possono essere formulati utilizzando modelli di partizionamento d'insieme.

2.6 Modelli di copertura, riempimento e partizionamento di insieme

In questi modelli si fa riferimento a un insieme $I = \{1, ..., m\}$ costituito da m elementi, a una **collezione** $C = \{C_1, ..., Cn\}$ di n sottoinsiemi di I, a ognuno dei quali è associato il valore c_j, e a una **sottocollezione** SC di C.

2.6.1 Modelli di copertura o set covering

L'obiettivo che si vuole raggiungere è determinare una sottocollezione SC di valore minimo, tale che ogni elemento dell'insieme I appartenga ad **almeno un sottoinsieme** di SC. In questo caso, l'insieme SC si dice **copertura**. Per rappresentare matematicamente una sottocollezione SC, si introduca una matrice A (di copertura) $m \times n$, il cui generico elemento a_{ij} assume il valore 1 se $i \in C_j$, 0 altrimenti. Le variabili di decisione sono identificate con x_j di tipo binario, ognuna delle quali assume valore se $C_j \in SC$, 0 altrimenti.

$$
\begin{aligned}
\min z(x, y) = &\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 1 && i = 1, ..., m \\
&x_j \in \{0, 1\} && j = 1, ..., n
\end{aligned}
$$

Applicazioni reali di questo modello potrebbero essere:

- Localizzazione di centri di emergenza: è necessario che, in caso di emergenza, ogni abitante sia coperto dall'assistenza di almeno un centro di emergenza. Infatti, considerando le città come nodi $1, ..., n$ e i centri di assistenza come nodi distinti $A, B, C, ...$, si può costruire la matrice di adiacenza con i centri di emergenza sulle colonne e le città sulle righe, impostando ad 1 il valore a_{ij} se i due nodi sono adiacenti (e quindi vicini e appartenenti alla stessa area di emergenza), 0 altrimenti.
- Pianificazione dei turni di lavoro
- Strumenti di navigazione

Tramite stessi ragionamenti, possono essere modellati il problema del set packing e del set partitionin.

2.6.2 Modelli di riempimento o set packing

L'obiettivo è determinare una sottocollezione SC di valore massimo, tale che ogni elemento di I appartenga ad **al più una sottocollezione** di SC. In altre parole, lo scopo è posizionare un insieme di risorse massimizzando il valore ed evitando che se ne presentino troppe. Un esempio reale potrebbe essere il posizionamento di edifici che generano disturbo per la popolazione (antenne radio, discariche,...).

$$\max z(x,y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \qquad i = 1, ..., m$$
$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, ..., n$$

2.6.3 Modelli di partizionamento o set partition

Si vuole individuare una sottocollezione SC di valore minimo definita in modo tale che ogni elemento di I appartenga **esattamente a una sottocollezione** SC.

$$\min z(x,y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1 \qquad i = 1, ..., m$$
$$x_j \in \{0,1\} \qquad j = 1, ..., n$$

Si possono considerare le colonne della matrice come dei tragitti da percorrere in camion, mentre le righe rappresentano i clienti: $a_{ij} = 1$ se il cliente i è stato incluso nel tragitto j.

2.7 Rappresentazione di condizioni logiche

- Implicazione
  La relazione logica *se α è vera anche β deve essere vera*, si esprime tramite il vincolo:
  $$x_\alpha \leq x_\beta$$
- OR
  La relazione logica *γ è vera se almeno una delle due condizioni α e β è vera*, può essere espressa matematicamente mediante:
  $$x_\alpha \leq x_\gamma$$
  $$x_\beta \leq x_\gamma$$
  $$x_\gamma \leq x_\alpha + x_\beta$$
  L'ultimo vincolo garantisce che x_γ assuma il valore nullo, se entrambe le condizioni α e β sono false.
- AND
  La relazione logica *γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere*
  $$x_\alpha \geq x_\gamma$$
  $$x_\beta \geq x_\gamma$$
  $$x_\gamma \geq x_\alpha + x_\beta - 1$$

L'ultimo vincolo garantisce che $x_\gamma = 1$ quando α e β sono entrambe vere.

- *Al massimo una tra le tre condizioni α, β, γ sia vera*

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma \leq 1$$

- *Esattamente una tra le tre condizioni α, β, γ sia vera*

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma = 1$$

- *Almeno una tra le tre condizioni α, β, γ sia vera*

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma \geq 1$$

2.8 Rappresentazione di vincoli alternativi

Ind iverse applicazioni, i problemi di ottimizzazione da affrontare potrebbero imporre la presenza di vincoli alternativi, per i quali, cioè, è necessario garantire che almeno uno di essi debba essere soddisfatto. Si consideri il caso in cui i vincoli alternativi siano esprimibili genericamente come:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} u_j x_j \leq b_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \leq b_2
\end{aligned}$$

Siano y_1 e y_2 due variabili di tipo binario. La prima, y_1 vale 0 se il primo vincolo è soddisfatto, 1 altrimenti, analogamente y_2 vale 0 se il secondo vincolo è soddisfatto, 1 altrimenti. Con M sufficientemente grande, il tutto può essere riscritto come:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} u_j x_j - My_1 \leq b_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} v_j x_j - My_2 \leq b_2 \\
&y_1 + y_2 = 1 \\
&y_1, y_2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Il tutto può essere ulteriormente semplificato nel seguente modello:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} u_j x_j - My_1 \leq b_1 \\
&\sum_{j=1}^{n} v_j x_j - M(1 - y_1) \leq b_2 \\
&y_1 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

Le considerazioni precedenti possono essere facilmente estese al caso generale di un modello di ottimizzazione caratterizzato dalla presenza di m vincoli in cui si vuole garantire che almeno, esattamente, oppure al più k di essi siano soddisfatti.

3 Programmazione Non-Lineare

La programmazione non-lineare, o PNL, studia problemi di ottimizzazione in cui la funzione obiettivo o alcuni vincoli sono non-lineari. Alcune applicazioni possono essere economie di scala, riformulazioni quadratiche, modelli di sistemi fisici non lineari, modelli che implicano l'uso di distanze Euclidee oppure, per esempio, minimizzazione dell'errore quadratico medio in problemi di controllo ottimo, classificazione automatica, machine learning e fitting di dati sperimentali.
Le tecnice per la PNL tuttavia, sono le più deboli dal punto di vista algoritmico, poiché non sempre possono garantire l'ottimalità della soluzione. A differenza della PL e della PLI, infatti, gli attuali solutori commerciali non garantiscono l'ottimalità globale. Essi restituiscono piuttosto un ottimo locale, cioè una soluzione che è ottima relativamente al suo intorno. Non a caso, diversi metodi per la ricerca dell'ottimo globale dei problemi di PNL consistono proprio nel ripetere l'ottimizzazione partendo da soluzioni iniziali ogni volta diverse.
I solutori di PNL usano varianti più o meno sofisticate dell'*algoritmo del gradiente*, che consiste nello spostarsi iterativamente da una soluzione all'altra, seguendo la direzione di massimo miglioramento della funzione obiettivo. Tali algoritmi si fermano quando raggiungono soluzioni localmente ottime, nelle quali il ggradiente è (quasi) nullo.

3.1 Minima distanza tra punti tridimensionali

L'energia di interazione tra l'atomo stesso e un altro atomo sonda che gli viene avicinato, è dato dalla formula $E = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$, dove A e B sono parametri caratteristici dell'atomo, mentre r è la distanza Euclidea tra l'atomo e la sonda.
Sono dati N atomi, indicati da un indice i. Di ciascuno sono note le coordinate (x_i, y_i, z_i) e i coefficienti A_i e B_i. Il problema decisionale consiste nel decidere dove localizzare il punto di minima energia. Si possono introdurre quindi tre variabili continue e libere, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, che indicano la posizione del punto di minima energia. Risulta comodo introdurre anche variabili continue e non-negative r_i, che indicano la distanza della sonda da ogni atomo i e variabili continue libere e_i, che indicano l'energia di interazione tra la sonda e l'atomo i. Stabilendo

$$r_i = \sqrt{(x_i - \overline{x})^2 + (y_i - \overline{y})^2 + (z_i - \overline{z})^2} \qquad i = 1, ..., N$$

riusciamo ad ottenere il seguente modello matematico:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } v = & \sum_{i=1}^{N} e_i \\
& r_i = \sqrt{(x_i - \overline{x})^2 + (y_i - \overline{y})^2 + (z_i - \overline{z})^2} && i = 1, ..., N \\
& e_i = \frac{A_i}{r_i^{12}} - \frac{B_i}{r_i^{6}} && i = 1, ..., N \\
& \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \text{ libere} \\
& r_i \geq 0 && i = 1, ..., N \\
& e_i \text{ libere} && i = 1, ..., N
\end{aligned}
$$

3.2 Funzione obiettivo lineare su circonferenza

Data una circonferenza di centro $C = (x_C, y_C)$, un raggio r e un fascio di rette parallele di equazione $ax + by = z$, il problema decisionale consiste nel trovare una retta appartenente al fascio di rette dato. Perciò essendo dati a e b, si tratta di determinare il valore del parametro z che identifica la retta. Equivalentemente si tratta di determinare il punto P in cui la retta e la circonferenza sono tangenti. Si vuole dunque massimizzare il valore di z, tale che:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } z = & ax_P + by_P \\
& ((x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2)^{1/2} = r
\end{aligned}
$$

3.3 Minima distanza tra retta e cerchio

Dato un punto $C = (x_C, y_C)$ e una retta di equazione $ax + by = c$, il problema decisionale consiste nel determinare un punto P appartenente alla retta data. Assumiamo quindi le variabili, continue e libere, (x_P, y_P), che sono legate tra loro dalla relazione $ax_P + by_P = c$ poiché P appartiene alla retta. Abbiamo quindi introdotto 2 variabili e un vincolo di uguaglianza, cioè un solo grado di libertà.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } z = & ((x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2)^{1/2} \\
& ax_P + by_P = c
\end{aligned}
$$

3.4 Massimo raggio

Si vuole costruire un acceleratore di particelle a forma di 8, senza interferire coi centri abitati nelle vicinanze. Viene data una regione rettangolare nel piano cartesiano, identificata dai valori limite x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}. Sono date $N = 16$ città e indichiamo con un indice $i = 1, ..., N$ ciascuna di esse. Di ciascuna sono date le coordinate del centro (x_i, y_i) ed il raggio r_i. Si specifica un numero $A = 2$ di anelli da localizzare, indicati da un indice $j = 1, ..., A$.
Il problema consiste nel decidere dove localizzare i due anelli uguali e tangenti, di centro C_1 e C_2 e raggio R_1 e R_2 in modo tale da massimizzare ilr aggio dell'acceleratore, cioè R_1 (o R_2 indifferentemente). Dunque, per ciascun anello,

definiamo due variabili continue e libere, x_{C_j} e y_{C_j}, che rappresentano le coordinate cartesiano del suo centro. Definiamo un'altra variabile R_j corrispondente al raggio dell'anello j.

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } z = & R_1 \\
& ((x_i - x_{C_j})^2 + (y_i - y_{C_j})^2)^{1/2} \geq r_i + R_j \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1, ..., N, j = 1, ..., A \\
& ((x_{C_1} - x_{C_2})^2 + (y_{C_1} - y_{C_2})^2)^{1/2} = R_1 + R_2 \\
& R_1 = R_2 \\
& x_{C_j} - R_j \geq x_{min} && j = 1, ..., A \\
& x_{C_j} + R_j \leq x_{max} && j = 1, ..., A \\
& y_{C_j} - R_j \geq x_{min} && j = 1, ..., A \\
& y_{C_j} + R_j \leq x_{max} && j = 1, ..., A
\end{aligned}
$$

3.5 Disposizione di cerchi senza sovrapposizione

Sono dati N cerchi nel piano cartesiano, di ogni cerchio è dato il raggio r_i. Trovare la disposizione dei centri dei cerchi nel piano, tale per cui:

- i cerchi non sono sovrapposti
- i cerchi siano tutti contenuti in un cerchio più grande
- il raggio del cerchio che li contiene sia minimo

Il problema decisionale consiste nel decidere dove localizzare ciascun cerchio dato. Per ciascun cerchio definiamo quindi due variabili continue libere, che rappresentano le coordinate cartesiane del suo centro. Abbiamo quindi le variabili x_i e y_i. Un'ulteriore variabile z rappresenta il raggio del cerchio contenente, che deve essere minimizzato.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } & z \\
& (x_i^2 + y_i^2)^{1/2} \leq z - r_i && i = 1, ..., N \\
& ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2} \geq r_i + r_j && i, j = 1, ..., N, i \neq j
\end{aligned}
$$

3.6 Mediana, centro e baricentro dei dati

Dato un insieme di punti in posizione nota nel piano cartesiano, si vogliono localizzare tre punti: la mediana, il centro e il baricentro dei punti dati. La mediana è il punto che minimizza la somma delle distanza dai punti dati; il centro è il punto che minimizza la massima distanza dai punti dati; il baricentro è il punto che minimizza il quadrato delle distanze dai punti dati.
Il problema decisionale consiste nel decidere dove localizzare i tre punti richeisti, indicati da M (mediana), C (centro) e B (baricentro). Per ciascuno di essi definiamo quindi due variabili continue libere, che ne rappresentano le coordinate cartesiane. Abbiamo quindi le variabili x_M, y_M, x_C, y_C, x_B, y_B.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } z = & z_M + z_C + z_B \\
& z_M = \sum_{i=1}^{N} d(i, M) \\
& z_C \geq d(i, C) & i = 1, ..., N \\
& z_B = \sum_{i=1}^{N} d(i, B)^2 \\
& d(i, P) = ((x_i - x_P)^2 + (y_i - y_P)^2)^{1/2} & i = 1, ..., N, P = M, C, B
\end{aligned}
$$

3.7 Massima area

Un reparto di artiglieria deve schierarsi su un piano dal quale deve battere un altopiano posto oltre una cresta rocciosa. La traiettoria dei proiettili è una parabola, la cui equazione dipende dalla posizione del reparto, dalla velocità iniziale del proietto e dall'angolo di rito. La velocità iniziale è costante, mentre l'angolo di tiro può essere scelto a piacimento (entro certi limiti). L'obiettivo del reparto è di trovare la localizzazione ottimale per poter battere la maggior area possibile oltre la cresta rocciosa. Si assume inoltre che, se il reparto tira dal punto (x_0, y_0), allora l'equazione della traiettoria sarebbe la seguente

$$y - y_0 = tg(\alpha)(x - x_0) - \frac{g}{2v^2 cos^2(\alpha)}(x - x_0)^2$$

dove α è l'angolo di tiro, g è l'accelerazione di gravità e v è la velocità iniziale. Per svolgere il problema, bisogna definire inoltre p, h, M e D, rispettivamente la massima ascissa del punto di tiro, l'altitudine del'altopiano, l'altezza della cresta rocciosa e l'ascissa della cresta rocciosa.
Il problema decisionale consiste nel decidere dove localizzare la batteria, risulta quindi naturale introdurre una variabile x_0, continua e libera, per indicarne l'ascissa. Poi è opportuno introdurre due variabili continue, x_1 e x_2, per indicare l'ascissa minima e massima del punto su cui può cadere il proietto. Il modello risultate è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } z = & x_2 - x_1 \\
& tg(\alpha_1)(x_1 - x_0) - \frac{g}{2v^2cos^2(\alpha_1)}(x_1 - x_0)^2 = h \\
& tg(\alpha_2)(x_2 - x_0) - \frac{g}{2v^2cos^2(\alpha_2)}(x_2 - x_0)^2 = h \\
& -\frac{g}{2v^2cos^2(\alpha_1)}(D - x_0)^2 + tg(\alpha_1)(D - x_0) \geq M \\
& -\frac{g}{2v^2cos^2(\alpha_2)}(D - x_0)^2 + tg(\alpha_2)(D - x_0) \geq M \\
& x_0 \leq p \\
& x_1 \geq D \\
& 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2} \\
& 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

3.8 Ottimizzazione delle scorte

Un'azienda alimentare si rifornisce di un certo numero di prodotti agricoli. Di ogni prodotto è nota la quantità necessaria che occorre comprare ogni anno per produrre cibo. Poiché i viaggi per i rifornimenti costano, l'azienda ha acquistato un magazzino in cui stoccare le scorte di prodotti agricoli in attesa di lavorazione.
In azienda si discute se sia meglio avere grandi quantità rifornite raramente (per ridurre il numero di viaggi) oppure rifornirsi spesso di quantità piccole (per ridurre i costi di stoccaggio). Si vuole quindi determinare quale sia la quantità ottimale di prodotti agricoli da ricevere ad ogni rifornimento e di conseguenza la frequenza ottimale per i rifornimenti.
Sono dati N prodotti, indicati da un indice i. Di ciascuno sono noti la domanda d_i e il costo di stoccaggio unitario s_i. Inoltre è dato il costo fisso k di ogni viaggio, la capacità Q del veicolo e la capacità S di ogni sacco.
Il problema decisionale consiste nel decidere quanto rifornire di ogni prodotto (q_i, inteso come quantità di prodotto i rifornita ogni volta), o in modo equivalente, quanto spesso effettuare il rifornimento (T_i, inteso come periodo che intercorre tra due rifornimenti successivi).

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } z = & \frac{k}{T} + \sum_{i=1}^{N} \frac{s_i q_i}{2} \\
& q_i = d_i T && i = 1, ..., N \\
& \sum_{i=1}^{N} q_i \leq Q \\
& q_i = S y_i && i = 1, ..., N \\
& y_i \in \{0, 1\} && i = 1, ..., N
\end{aligned}
$$

Poiché entrambi i termini di costo sono funzioni convesse delel variabili, la funzione obiettivo è convessa e quindi, poiché i vincoli sono tutti lineari, il problema è di programmazione convessa e quindi le soluzioni trovate sono ottime globalmente e non solo localmente.

3.9 Massimo profitto

Sono dati il lato L dei piattini di un servizio da tè, i limiti minimo k_{min} e massimo k_{max} al rapporto tra i semiassi dell'ellisse, il numero minimo n_{min} e massimo n_{max} di piattini, il valore v del servizio da tè, il costo c_v del materiale del vassoio e il costo c_p del materiale per i piattini. Il problema decisionale consiste nel decidere la forma dell'ellisse, cioè la lunghezza dei due semiassi a e b (continue non-negative) e la dimensione del rettangolo formato dai piattini, cioè le sue due dimensioni w e h (intere non-negative) misurate in numero di piattini. Tra i vincoli è necessario il vincolo di contenimento del rettangolo nell'ellisse (i piattini sono quadrati, il vassoio è ellittico).

$$\begin{aligned}
\text{minimize } z = & v \cdot h \cdot w - c_v \cdot \pi \cdot a \cdot b - c_P \cdot L^2 \cdot w \cdot h \\
& k_{min} \leq \frac{a}{b} \leq k_{max} \\
& n_{min} \leq w \cdot h \leq n_{max} \\
& \frac{(\frac{Lw}{2})^2}{a^2} + \frac{(\frac{Lh}{2})^2}{b^2} \leq 1 \\
& a, b \geq 0 \\
& w, h \text{ intere}
\end{aligned}$$

3.10 Minima distanza tra due punti e una retta

Nel sottosuolo della città bisogna scavare un tunnell rettilineo per la nuova linea della metropolitana. Esso dovrà essere poi collegato tramite altri tunnel secondari alle uscite, collocate in alcune piazze già identificate, che ovviamente non sono tutte perfettamente allineate. Si vuole definire la posizione del tunnel in modo da minimizzare la lunghezza degli scavi dei tunnel secondari, cioè in modo da minimizzare la somma delle distanze tra il tunnel principale e le uscite. Imponendo come variabili continue e libere a, b e c per decidere dove localizzare un segmento di retta, e sapendo che la distanza di un punto (x_0, y_0) da una retta di equazione $ax + by + c = 0$ è data da $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, il modello risultante è il seguente:

$$\begin{aligned}
\text{minimize } z = & \sum_{i=1}^{N} d_i \\
& d_i = \frac{|ax_i + by_i + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} && i = 1, ..., N \\
& d_i \geq 0 && i = 1, ..., N \\
& a^2 + b^2 = 1 \\
& a, b, c \text{ libere}
\end{aligned}$$

Può essere utile, per evitare problemi numerici, imporre un'ulteriore condizione di normalizzazione tra i valori a e b, ad esempio $a^2 + b^2 = 1$

3.11 Minimi costi di trasporto

Sono dati N punti che rappresentano i clienti, indicati da un indice i. Di ciascuno sono note le coordinate (x_i, y_i) e la domanda q_i. Sono noti inoltre il numero di magazzini P e la capacità Q dei magazzini. Il problema decisionale consiste nel decidere dove localizzare i magazzini e come assegnare loro la domanda, risulta comodo quindi introdurre:

- P coppie di variabili continue e libere $(\overline{x}_j, \overline{y}_j)$, che indicano la posizione del magazzino j
- una matrica di variabili binario w_{ij}, che indica se l'utente i è assegnato al magazzino j o no
- variabili continue e non-negative d_{ij}, che indicano la distanza Euclidea di ogni utente i da ogni magazzino j

La funzione obiettivo è data dai costi di trasporto tra utenti e magazzino. Il problema verrà dunque modellato nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } v = & \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{P} d_{ij} w_{ij} \\
& d_{ij} = \sqrt{(x_i - \overline{x}_j)^2 + (y_i - \overline{y}_j)^2} && i = 1, ..., N, j = 1, ..., P \\
& \sum_{j=1}^{P} w_{ij} = 1 && i = 1, ..., N \\
& \sum_{i=1}^{N} w_{ij} q_i \leq Q && j = 1, ..., P \\
& \overline{x}_j, \overline{y}_j \text{ libere} && j = 1, ..., P \\
& w_{ij} \in \{0, 1\} && i = 1, ..., N, j = 1, ..., P
\end{aligned}
$$

3.12 Minima lunghezza

Sono dati N robot, indicati da un indice i. Di ciascuno è noto il raggio d'azione r_i della sua area di lavoro. Queste aree di lavoro non devono sovrapporsi e il coordinamento tra i robot impone che ciascuno sia collegato con tutti gli altri con cavi di fibra ottica. Poiché i cavi sono costosi, è necessario che il progetto sia fatto in modo tale da minimizzarne la lunghezza totale di fibre ottiche impiegate. Il problema decisionale consiste nel decidere dove localizzare i robot nel piano Cartesiano. Si possono introdurre quindi N coppie di variabili continue e libere (x_i, y_i), che indicano la posizione di ogni robot i. Risulta utile introdurre anche variabili continue e non-negative d_{ij}, che indicano la distanza Euclidea tra ogni coppia di robot i e j.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } z = & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1:i\neq j}^{N} d_{ij} & \\
& d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} & i = 1, ..., N, j = 1, ..., N \\
& d_{ij} \geq r_i + r_j & i = 1, ..., N, j = 1, ..., N, i \neq j \\
& x_i, y_i \text{ libere} &
\end{aligned}
$$

3.13 Minimo perimetro di un triangolo

Parlando di ragnatele, sono dati N appigli, indicati da un indice i. Di ciascuno è nota la posizione (x_i, y_i, z_i). Viene data inoltre l'area minima A che una ragnatela deve avere. Il problema decisionale consiste nel decidere dove localizzare i vertici del triangolo che definisce la struttura della ragnatela. Si possono introdurre quindi 3 terne di variabili continue e libere $(\overline{x}_j, \overline{y}_j, \overline{z}_j)$, che indicano la posizione di ogni vertice j. Risulta utile indicare con d_i la distanza tra i vertici i del triangolo e il corrispondente appiglio i e con l_{ij} la lunghezza del lato del triangolo tra il vertice i e il vertice j. Si cerca dunque di minimizzare la lunghezza dei lati del triangolo.

$$
\begin{aligned}
\text{minimize } v = & \sum_{i=1}^{3} d_i + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3} l_{ij} & \\
& l_{ij} = \sqrt{(\overline{x}_i - \overline{x}_j)^2 + (\overline{y}_i - \overline{y}_j)^2 + (\overline{z}_i - \overline{z}_j)^2} & \\
& \qquad\qquad i = 1, ..., 2, j = 2, ..., 3 & \\
& d_i = \sqrt{(x_i - \overline{x}_i)^2 + (y_i - \overline{y}_i)^2 + (z_i - \overline{z}_i)^2} & i = 1, ..., 3 \\
& p = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3} \frac{l_{ij}}{2} & \\
& \sqrt{p \cdot (p - l_{12}) \cdot (p - l_{13}) \cdot (p - l_{23})} \geq A & \\
& \overline{x}_j, \overline{y}_j, \overline{z}_j \text{ libere} & i = 1, ..., 3
\end{aligned}
$$

4 Funzioni obiettivo particolari

4.1 Rappresentazione di funzioni obiettivo non lineari

Alcune funzioni obiettivo non lineari possono essere rappresentate in modelli lineari attraverso l'uso di variabili di decisione di tipo binario.

4.1.1 Funzione lineare a tratti

Sia $z(x)$ la seguente funzione obiettivo di un modello di ottimizzazione

$$
z(x) = \begin{cases} a_1 + b_1 x & \text{se } x \in [i_1, i_2] \\ a_2 + b_2 x & \text{se } x \in (i_2, i_3] \end{cases}
$$

Si ponga $I_1 = i_2 - i_1$ e $I_2 = i_3 - i_2$. Si indichi con y_1 una variabile di decisione di tipo binario, che assume il valore 1 se $x \in [i_1, i_2]$, 0 altrimenti. Analogamente, sia y_2 una seconda variabile di decisione di tipo binario, avente valore 1 se $x \in (i_2, i_3]$, 0 altrimenti. Dal momento che x deve appartenere a uno solo dei due intervalli, si impone $y_1 + y_2 = 1$.
Se $x \in [i_1, i_2]$ allora $x = i_1 + w_1$ con w_1 variabile ausiliaria tale che $0 \leq w_1 \leq I_1$. Considerazioni analoghe vanno fatte per $x \in (i_2, i_3]$, ottenendo $x = i_1y_1 + w_1 + i_2y_2 + w_2$, e dunque:

$$\begin{aligned}
&\min z(y_1, y_2, w_1, w_2) = a_1y_1 + b_1(i_1 + w_1) + a_2y_2 + b_2(i_2y_2 + w_2)\\
&0 \leq w_1 \leq I_1y_1\\
&0 \leq w_2 \leq I_2y_2\\
&y_1 + y_2 = 1\\
&y_1, y_2 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

4.1.2 Funzione in valore assoluto

Si consideri il caso in cui la funzione obiettivo di un problema di ottimizzazione si $z(x) = |f(x)|$.

$$z(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Il modello di ottimizzazione, nel caso in cui la funzione obiettivo deve essere minimizzata, risulta il seguente:

$$\begin{aligned}
\min z(x) =& k\\
& k \geq f(x)\\
& k \geq -f(x)\\
& x \in X
\end{aligned}$$

Diversa è la situazione in cui la funzione obiettivo debba essere massimizzata, cioè quando il modello di ottimizzazione assume la seguente forma:

$$\begin{aligned}
\max z(x) =& k & &\\
& k \leq f(x) & & \text{se } f(x) \geq 0\\
& k \leq -f(x) & & \text{se } f(x) < 0\\
& x \in X & &
\end{aligned}$$

Ovvero, con M abbastanza grande:

$$\begin{aligned}
\max z(x) =& k\\
& k \leq f(x) + My\\
& k \leq -f(x) + M(1 - y)\\
& M(1 - y) \geq f(x)\\
& My \geq -f(x)\\
& y \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

4.1.3 Minimizzare l'errore quadratico medio

Ipotizziamo E elettrodomestici e G giorni. Indichiamo con t_{ge} e c_g rispettivamente, il tempo di funzionamento dell'elettrodomestico e il giorno g e il consumo letto sul contatore nel giorno g. Definiamo una variabile continua non-negativa per ogni elettrodomestico per calcolare i valori di potenza assorbita, e chiamiamola x_e. Risulta inoltre necessario introdurre una variabile ausiliaria, continua e libera, a_g, per esprimere l'approssimazione nella lettura del contatore in ogni giorno g.
Per minimizzare l'errore quadratico medio sulle misurazioni, bisogna ricorrere ad una funzione quadratica, cioè non-lineare: $\min f^{(d)} = \frac{1}{G}\sum_{g=1}^{G} a_g^2$. La soluzione si può tuttavia ricavare imponendo che siano nulle le derivate della funzione obiettivo rispetto a ciascuna delle variabili x_e. Si ottengono così E equazioni lineari in altrettante incognite, riconducendosi da un problema di ottimizzazione quadratico ad un problema di esistenza lineare. Per ricavare le condizioni analitiche, si procede facilmente come segue:
$\frac{\delta f^{(d)}}{\delta x_e} = \sum_{g=1}^{G} \frac{\delta f^{(d)}}{\delta a_g} \cdot \frac{\delta a_g}{\delta x_e} = \sum_{g=1}^{G} \frac{1}{G} 2a_g \cdot (-t_{ge}) = -\frac{2}{G}\sum_{g=1}^{G} t_{ge}a_g$
Dunque il seguente modello:

$$
\begin{aligned}
\min z(a) = & \frac{1}{G}\sum_{g=1}^{G} a_g^2 \\
& a_g = c_g - \sum_{e=1}^{E} t_{ge}x_e & \quad g = 1,...,G \\
& x_e \geq 0 & \quad e = 1,...,E
\end{aligned}
$$

Risulta riscrivibile come:

$$
\begin{aligned}
& a_g = c_g - \sum_{e=1}^{E} t_{ge}x_e & \quad g = 1,...,G \\
& \sum_{g=1}^{G} t_{ge}a_g = 0 & \quad e = 1,...,E \\
& x_e \geq 0 & \quad e = 1,...,E
\end{aligned}
$$

4.2 Funzione obiettivo min-max e max-min

Prendiamo come esempio un problema dove è richiesto di massimizzare il minimo profitto. La funzione obiettivo risulterà:

$$\max z(x) = \min\{q_i x_i\}$$

Tuttavia, per poter riportare il problema all'interno del solutore riscrivendolo in AMPL, è necessario riscrivere nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
\max z(x) = & y \\
& y \leq q_i x_i & \quad i = 1,...,N
\end{aligned}
$$

Analogamente, per un modello in cui è richiesto di minimizzare il massimo, si prosegue nello stesso modo, cambiando max con min nella funzione obiettivo e invertendo il segno di $\leq$ per far si che risulti $\geq$.

5 Formule note

5.1 Contenimento di rettangolo in ellisse

Date $\frac{Lw}{2}$ e $\frac{Lh}{2}$ le coordinate di un rettangolo:

$$\frac{(\frac{Lw}{2})^2}{a^2} + \frac{(\frac{Lh}{2})^2}{b^2} \leq 1$$

5.2 Distanza Euclidea bidimensionale

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

5.3 Distanza Euclidea tridimensionale

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

5.4 Distanza Euclidea n-dimensionale

Con N numero di dimensioni:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{N}(k_1 - k_2)^2}$$

5.5 Distanza punto-retta

Dato un punto (x_0, y_0) e una retta di equazione $ax + by + c = 0$:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

5.6 Formula di Erone

Dato il semiperimetro p di un triangolo, ottenibile tramite:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

L'area A del triangolo equivale a:

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

5.7 Moto del proiettile

$$y - y_0 = tg(\alpha)(x - x_0) - \frac{g}{2v^2 cos^2(\alpha)}(x - x_0)^2$$

5.8 Normalizzazione di rette

Per evitare errori durante gli arrotondamenti:

$$a^2 + b^2 = 1$$

5.9 Normalizzazione tra intervalli

Dato un intervallo $[a, b]$:

$$x' = (b - a)\frac{x - \min x}{\max x - \min x} + a$$

per ritornare ai valori originali:

$$x = (x' - a)\frac{\max x - \min x}{b - a} + \min x$$

5.10 Teorema di Carnot

Dato un triangolo con lati a, b, c e angoli A, B, C opposti ad essi:

$$\begin{aligned} cos(C) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ sin(C) &= \sqrt{1 - \cos^2(C)} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{2ab} \end{aligned}$$