报告题目: Riemann zeta 函数的非平凡零点
报告人: 钮鹏程(西北工业大学应用数学系, 西安)

报告摘要: 本文讨论 Riemann zeta 函数的非平凡零点的性质.

报告人钮鹏程个人简历:

钮鹏程, 男, 1962 年 11 月出生, 江苏宜兴人, 教授, 博士生导师.

1983 年 7 月毕业于四川大学数学系, 1989 年 7 月从郑州大学数学系获硕士学位(导师魏光祖教授), 1995 年 6 月从兰州大学数学系获博士学位(导师陈庆益教授和罗学波教授), 1997 年 6 月从西北工业大学结束博士后研究, 同年晋升副教授, 1999 年破格晋升为教授, 2005 年担任博士生导师. 2008 年至 2011 年任中国数学会理事, 2012 年至 2015 年任第 12 届陕西省数学会理事. "数学评论"评论员, 德国"数学评论"评论员.

主持完成三项国家自然科学基金面上项目. 在数学 SCI 检索期刊发表论文 80 余篇, 发表论文的刊物包括 Journal of Functional Analysis, Journal of Differential Equations 等, 其中被 SCI 总引 171 次, SCI 他引 93 次. 获陕西省科学技术奖二等奖一项, 出版专著三部. 指导毕业博士生 21 人(含一名巴基斯坦人), 在读博士生 10 人, 毕业硕士生 40 多人, 博士后 6 人, 获得省优秀博士学位论文 4 人, 获得国家奖学金 2 人.

Riemann zeta 函数的非平凡零点

钮鹏程
(西北工业大学应用数学系, 西安)

设$\Xi(t)$是与 Riemann zeta 函数相关的函数. 本文构造了一个与$\Xi(t)$相关的函数v, 它在$\Xi(t)$的零点处满足一个非奇异微分方程的非自伴边值问题. 通过研究该函数v的性质和利用零点的已有性质, 我们证明了 Riemann zeta 函数的非平凡零点都有实部$\frac{1}{2}$, 从而证明了 Riemann 猜想.

1 引言

文[1, Riemann, 1859]指出定义于$\mathrm{Re}\, s>1$上的函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \tag{1.1}$$

可解析延拓到整个复平面 $\mathbb{C}$，$s=1$ 是其唯一的一个极点. Riemann 猜想是说 Riemann zeta 函数 $\zeta(s)$ 的非平凡零点都有实部 $\frac{1}{2}$. 已经知道函数 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点均位于复平面上的区域 $0<\mathrm{Re}\,s<1$ 内. 令

$$\xi(s)=\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)\,, \tag{1.2}$$

其中 $\Gamma(s)$ 为 Gamma 函数, 则 $\xi(s)$ 是整函数, 成立函数方程

$$\xi(s)=\xi(1-s)\,,$$

且 $\xi(s)$ 的零点与函数 $\zeta(s)$ 的非平凡零点相重合. 函数 $\xi(s)$ 有无穷多个零点, 这些零点关于实轴和直线 $\mathrm{Re}\,s=\frac{1}{2}$ 对称, 关于点 $\frac{1}{2}$ 对称, 零点的实部位于 $(0,1)$ 中(见[2, Apostol, T. M., Introduction to analytic number theory], [3, 潘承洞, 潘成彪, 解析数论基础], [6, 卢昌海, 黎曼猜想漫谈]). 设 $s=\mathrm{Re}\,s+i\,\mathrm{Im}\,s$ 为 $\xi(s)$ 在 $\mathbb{C}$ 上的零点, 记

$$s:=\frac{1}{2}+it\,, \tag{1.3}$$

其中

$$\mathrm{Re}\,t=\mathrm{Im}\,s\in\mathbb{R}\,,\ \ \mathrm{Im}\,t=\frac{1}{2}-\mathrm{Re}\,s\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\,.$$

利用已知结果 $|\mathrm{Im}\,s|>6$ (见[3]), 即知

$$|\mathrm{Re}\,t|>6\,. \tag{1.4}$$

令

$$\Xi(t)=\xi(\frac{1}{2}+it)\,, \tag{1.5}$$

则 Riemann 猜想可据此表述为:

$$\Xi(t)=0\Rightarrow t\in\mathbb{R}\,. \tag{1.6}$$

由[1]可知, 函数 $\Xi(t)$ 可表示为 Fourier cosine 积分:

$$\Xi(t)=4\int_1^\infty\frac{d(x^{\frac{3}{2}}\psi'(x))}{dx}x^{-\frac{1}{4}}\cos(\frac{t}{2}\log x)dx\,,$$

其中 $\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp\{-n^2\pi x\}$, $x\in(0,\infty)$. 通过作变量替换 $y=\frac{1}{2}\log x$, 上式可表为

$$\Xi(t)=2\int_0^\infty\cos(tx)\Phi(x)dx\,,$$

其中

$$\Phi(x)=2\pi\exp\{\frac{5x}{2}\}\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi\exp\{2x\}n^2-3)n^2\exp\{-n^2\pi\exp\{2x\}\}.$$

已有众多数学家研究了 Riemann 猜想，出现了大量的文献，也出现了许多研究思路，包括

循计算思路，有 G. Gram, C. L. Siegel, A. Turing, A. M. Odlyzko 等;

循代数思路，有 E. Artin, A. Weil, P. Deligne, A. Connes 等;

循分析思路，有 A. Selberg, N. Levinson，楼世拓，姚琦, B. Conrey 等;

循物理学和微分方程思路, G. Pólya, F. Dyson, H. Montgomery 等

这里我们不详细叙述有关结果，只是指出 Pólya 在文[4]中对于与 Sturm-Liouville 型算子相关且类似于 $\Xi(t)$ 的函数证明了仅有实根.

Hilbert-Pólya 猜想: Riemann ζ 函数的非平凡零点与某个 Hermite 算符的特征值相对应(卢昌海: 黎曼猜想漫谈, P99).

确切的说，该猜想是指若把 Riemann ζ 函数的非平凡零点写成 $s=\frac{1}{2}+it$ 的形式，则那些 t 与某个 Hermite 算符的特征值相对应．已经知道, Hermite 算符的特征值都是实数，因此如果那些 t 与某个 Hermite 算符的特征值相对应，则 t 为实数，从而非平凡零点 $s=\frac{1}{2}+it$ 的实部都是 $\frac{1}{2}$，即证得 Riemann 猜想.

M. R. Pistorius (arXiv:1608.01555v2, Aug 5, 2016，已撤销)构造了函数

$$v(y)=\int_0^{\infty}\cos(tx+t\cos y)\Phi(x)dx,\quad y\in(0,\frac{\pi}{2}),\quad t\text{满足}\Xi(t)=0,$$

则

$$v''(y)=-t^2(\sin y)^2v(y)+\frac{\cos y}{\sin y}v'(y),$$

$$v'(0)=v(\frac{\pi}{2})=0.$$

然后利用已知的 Sturm-Liouville 理论，推出 t^2 是实数，进而推出 t 是实数．但由于所导出方程是奇异的，所以不能使用 Sturm-Liouville 理论．虽然其证明错了，但启发我们构造合适的函数，来证明 Riemann 猜想．我们试图改进 Pistorius 构造的函数，但遇到本质困难．构造的函数应对应一个非奇异方程.

E. Kamke (常微分方程手册, PP456-457): 二阶方程

$$v''+\lambda v=0$$

(这是一个非奇异方程)的通解是

$$v=\begin{cases}C_1ch(\sqrt{\lambda}x)+C_2sh(\sqrt{\lambda}x), & \lambda<0,\\ C_1+C_2x, & \lambda=0,\\ C_1\cos(\sqrt{\lambda}x)+C_2\sin(\sqrt{\lambda}x), & \lambda>0,\end{cases}$$

对应的特征值问题

$$v(a)=v(b),\quad v'(a)=-v'(b)$$

是非自伴的, 每一个λ都是特征值(可以是复数), 并且是单一的, 特征函数是

$$\varphi=\begin{cases} ch[k(x-\frac{a+b}{2})], \quad \lambda=-k^2, \\ 1, \quad \lambda=0, \\ \cos[k(x-\frac{a+b}{2})], \quad \lambda=k^2. \end{cases}$$

我们构造函数时受到此问题的启发.

我们注意到Bender, Brody和Müller [5]最近提出了一类非自伴Hamilton算子, 指出通过研究其特征值性质, 可能获得Riemann猜想的证明.

本文的主要结果是

定理 1 (1.6)是正确的, 因此Riemann猜想成立.

为证(1.6), 只需证$\Xi(t)$的零点$t=t_1+it_2$ ($t_1=\mathrm{Re}\,t, t_2=\mathrm{Im}\,t$)满足$t_2=0$. 我们的证明思路是构造一个与$\Xi(t)$相关的函数$v$, 且$v$显含$t$. 假设$\Xi(t)$的零点$t=t_1+it_2$满足$t_2\neq 0$, 通过讨论$v$的性质并利用非平凡零点的已有性质, 得到$t^2$是实数, 进而说明与$t$是零点矛盾.

本文的难点是构造合适的函数v. 在构造函数v时, 我们用到了双曲函数, 这可以用来说明v满足一个非奇异微分方程的非自伴边值问题. 与Hilbert-Pólya猜想比较, 我们得到的问题是非自伴的. 为了得到t^2是实数的断言, 我们除了在v的表达式中加上了二次函数外, 还引入了小参数ε. 注意函数v的构造中只涉及了$\Xi(t)$的零点, 因此我们认为本文的方法对证明其他Riemann型猜想也有启示作用.

本文组织如下: 第二节给出定理1的证明, 第三节给出第二节中用到的几个公式的证明.

2 定理 1 的证明

本节我们要证(1.6). 证明分四个部分.

2.1 构造函数v

构造一个函数

$$v(y;t,\varepsilon):=ch[t(y-\frac{b}{2})]+\frac{1}{2\varepsilon}t(y-\frac{b}{2})^2+\Xi(t)y, \tag{2.1}$$

其中$y\in[0,b]$, b是待定正实数, $t\in\mathbb{C}$是复参数, ε是待定参数. 显然$v(y;t,\varepsilon)$关于y是无穷可微函数.

由(2.1)可知

$$v(0;t,\varepsilon)=ch(t\cdot\frac{-b}{2})+\frac{1}{2\varepsilon}t\cdot(\frac{-b}{2})^2,$$

$$v(b;t,\varepsilon)=ch(t\cdot\frac{b}{2})+\frac{1}{2\varepsilon}t(\frac{b}{2})^2+b\ \Xi(t)\,.$$

对(2.1)关于 y 求导有

$$v'(y;t,\varepsilon)=tsh[t(y-\frac{b}{2})]+\frac{1}{\varepsilon}t(y-\frac{b}{2})+\Xi(t)\,,$$

且有

$$v'(0;t,\varepsilon)=tsh[t(\frac{-b}{2})]+\frac{1}{\varepsilon}t(\frac{-b}{2})+\Xi(t)\,,$$

$$v'(b;t,\varepsilon)=tsh(t\frac{b}{2})+\frac{1}{\varepsilon}t(\frac{b}{2})+\Xi(t)\,.$$

易知

$$v''(y;t,\varepsilon)=t^2ch[t(y-\frac{b}{2})]+\frac{1}{\varepsilon}t=t^2v(y;t,\varepsilon)-\frac{1}{2\varepsilon}t^3(y-\frac{b}{2})^2-t^2\ \Xi(t)\ y+\frac{1}{\varepsilon}t\,.$$

设 $t=t_1+it_2$ 满足

$$\Xi(t)=0 \tag{2.2}$$

(至此 t,t_1 和 t_2 均被固定), 则从前述可得

$$v(y;\varepsilon):=ch[t(y-\frac{b}{2})]+\frac{1}{2\varepsilon}t(y-\frac{b}{2})^2\,, \tag{2.3}$$

$$v(0;\varepsilon)=v(b;\varepsilon)=ch(t\cdot\frac{b}{2})+\frac{1}{2\varepsilon}t\cdot(\frac{b}{2})^2, \tag{2.4}$$

$$v'(y;\varepsilon)=tsh[t(y-\frac{b}{2})]+\frac{1}{\varepsilon}t(y-\frac{b}{2})\,,$$

$$v'(0;\varepsilon)=-v'(b;\varepsilon)=-tsh(t\frac{b}{2})-\frac{1}{\varepsilon}t\frac{b}{2}, \tag{2.5}$$

$$v''(y;\varepsilon)=t^2v(y;\varepsilon)-\frac{1}{2\varepsilon}t^3(y-\frac{b}{2})^2+\frac{1}{\varepsilon}t\,. \tag{2.6}$$

我们注意到方程(2.6)与边值条件(2.4)和(2.5)一起构成一个非奇异微分方程的非自伴边值问题. 对该问题不能用 Sturm-Liouville 理论来证明 t^2 为实数.

我们要证 $t_2=0$. 用反证法, 假设 $t_2\neq 0$. 不失一般性, 我们下面总设

$$0<t_2<\frac{1}{2}.$$

根据 $\Xi(t)$ 的零点关于 t_2 轴对称, 我们还设

$$t_1>6\,.$$

为方便，将 $v(y;\varepsilon)$ 简记为 v， $v'(y;\varepsilon)$ 简记为 v' , $v''(y;\varepsilon)$ 简记为 v'' , $v(0;\varepsilon)$ 简记为 $v(0)$， $v(b;\varepsilon)$ 简记为 $v(b)$， $v'(0;\varepsilon)$ 简记为 $v'(0)$， $v'(b;\varepsilon)$ 简记为 $v'(b)$.

在(2.6)式两边同乘以$\overline{v}$ ($\overline{v}=\overline{v}(y;\varepsilon)=ch[\overline{t}(y-\frac{b}{2})]+\frac{1}{2\varepsilon}\overline{t}(y-\frac{b}{2})^2$), 并对$y\in[0,b]$积分, 就有

$$\int_0^b v''\overline{v}dy=\int_0^b[t^2v\overline{v}-\frac{1}{2\varepsilon}t^3(y-\frac{b}{2})^2\overline{v}+\frac{1}{\varepsilon}t\overline{v}]dy$$

和

$$\int_0^b v''\overline{v}dy=\int_0^b\overline{v}dv'=\overline{v}v'\,|_0^b-\int_0^b v'\overline{v}'dy=2\overline{v}(b)v'(b)-\int_0^b v'\overline{v}'dy\ ,$$

即得

$$t^2\int_0^b v\overline{v}dy-\frac{1}{2\varepsilon}t^3\int_0^b(y-\frac{b}{2})^2\overline{v}dy+\frac{1}{\varepsilon}t\int_0^b\overline{v}dy=2\overline{v}(b)v'(b)-\int_0^b v'\overline{v}'dy\ . \qquad (2.7)$$

我们来计算(2.7)中左端的第二, 三项和右端的第一项. 利用变量替换$y_1=y-\frac{b}{2}$和

$$\begin{aligned}
&\int y_1^2[ch(\overline{t}y_1)+\frac{\overline{t}}{2\varepsilon}y_1^2]dy_1\\
&=\int y_1^2\frac{1}{\overline{t}}dsh(\overline{t}y_1)+\int\frac{\overline{t}}{2\varepsilon}y_1^4dy_1\\
&=\frac{1}{\overline{t}}y_1^2sh(\overline{t}y_1)-\frac{2}{\overline{t}}\int sh(\overline{t}y_1)y_1dy_1+\frac{\overline{t}}{10\varepsilon}y_1^5\\
&=\frac{1}{\overline{t}}y_1^2sh(\overline{t}y_1)-\frac{2}{\overline{t}}\int\frac{1}{\overline{t}}y_1dch(\overline{t}y_1)+\frac{\overline{t}}{10\varepsilon}y_1^5\\
&=\frac{1}{\overline{t}}y_1^2sh(\overline{t}y_1)-\frac{2}{\overline{t}^2}[y_1ch(\overline{t}y_1)-\frac{1}{\overline{t}}sh(\overline{t}y_1)]+\frac{\overline{t}}{10\varepsilon}y_1^5+C\\
&=\frac{1}{\overline{t}}y_1^2sh(\overline{t}y_1)-\frac{2}{\overline{t}^2}y_1ch(\overline{t}y_1)+\frac{2}{\overline{t}^3}sh(\overline{t}y_1)+\frac{\overline{t}}{10\varepsilon}y_1^5+C,
\end{aligned}$$

并利用(2.3), 知(2.7)左端第二项为

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\varepsilon}t^3\int_0^b(y-\frac{b}{2})^2\overline{v}dy\\
&=-\frac{1}{2\varepsilon}t^3\int_0^b(y-\frac{b}{2})^2\{ch[\overline{t}(y-\frac{b}{2})]+\frac{\overline{t}}{2\varepsilon}(y-\frac{b}{2})^2\}dy\\
&=-\frac{1}{2\varepsilon}t^3\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}y_1^2[ch(\overline{t}y_1)+\frac{\overline{t}}{2\varepsilon}y_1^2]dy\\
&=-\frac{1}{2\varepsilon}t^3[\frac{2}{\overline{t}}(\frac{b}{2})^2sh(\overline{t}\frac{b}{2})-\frac{4}{\overline{t}^2}\frac{b}{2}ch(\overline{t}\frac{b}{2})+\frac{4}{\overline{t}^3}sh(\overline{t}\frac{b}{2})+\frac{2\overline{t}}{10\varepsilon}(\frac{b}{2})^5]
\end{aligned}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}t^3[\frac{1}{\bar{t}}(\frac{b}{2})^2 sh(\bar{t}\frac{b}{2})-\frac{2}{\bar{t}^2}\frac{b}{2}ch(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{2}{\bar{t}^3}sh(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{\bar{t}}{10\varepsilon}(\frac{b}{2})^5] . \tag{2.8}$$

对(2.7)中左端第三项, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}t\int_0^b \bar{v}dy &= \frac{1}{\varepsilon}t\int_0^b \{ch[\bar{t}(y-\frac{b}{2})]+\frac{1}{2\varepsilon}\bar{t}(y-\frac{b}{2})^2\}dy\\ &= \frac{1}{\varepsilon}t\{\frac{1}{\bar{t}}sh[\bar{t}(y-\frac{b}{2})]+\frac{1}{2\varepsilon}\bar{t}\cdot\frac{1}{3}(y-\frac{b}{2})^3\}|_0^b\\ &= \frac{1}{\varepsilon}t[\frac{2}{\bar{t}}sh(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{2}{6\varepsilon}\bar{t}(\frac{b}{2})^3]\\ &= \frac{2}{\varepsilon}\frac{t}{\bar{t}}sh(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{1}{3\varepsilon^2}t\bar{t}(\frac{b}{2})^3 ,\end{aligned} \tag{2.9}$$

其中 $t\bar{t}=t_1^2+t_2^2$. 对(2.7)中右端第一项, 成立

$$\begin{aligned}2\bar{v}(b)v'(b) &= 2[ch(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{1}{2\varepsilon}\bar{t}(\frac{b}{2})^2][tsh(t\frac{b}{2})+\frac{1}{\varepsilon}t\frac{b}{2}]\\ &= 2[tch(\bar{t}\frac{b}{2})sh(t\frac{b}{2})+\frac{1}{\varepsilon}t\frac{b}{2}ch(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{1}{2\varepsilon}t\bar{t}(\frac{b}{2})^2 sh(t\frac{b}{2})+\frac{1}{2\varepsilon^2}t\bar{t}(\frac{b}{2})^3] .\end{aligned} \tag{2.10}$$

将(2.8), (2.9)和(2.10)代入(2.7), 得

$$\begin{aligned}&t^2\int_0^b v\bar{v}dy-\frac{1}{\varepsilon}\frac{t^4}{t\bar{t}}(\frac{b}{2})^2 sh(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{2}{\varepsilon}\frac{t^5}{(t\bar{t})^2}\frac{b}{2}ch(\bar{t}\frac{b}{2})-\frac{2}{\varepsilon}\frac{t^6}{(t\bar{t})^3}sh(\bar{t}\frac{b}{2})-\frac{t^2t\bar{t}}{10\varepsilon^2}(\frac{b}{2})^5\\ &\qquad+\frac{2}{\varepsilon}\frac{t^2}{t\bar{t}}sh(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{1}{3\varepsilon^2}t\bar{t}(\frac{b}{2})^3\\ &=-\int_0^b v'\overline{v'}dy+2tch(\bar{t}\frac{b}{2})sh(t\frac{b}{2})+\frac{2}{\varepsilon}t\frac{b}{2}ch(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{1}{\varepsilon}t\bar{t}(\frac{b}{2})^2 sh(t\frac{b}{2})+\frac{1}{\varepsilon^2}t\bar{t}(\frac{b}{2})^3 .\end{aligned} \tag{2.11}$$

令

$$\begin{aligned}P(b;\varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{t^4}{t\bar{t}}(\frac{b}{2})^2 sh(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{2}{\varepsilon}\frac{t^5}{(t\bar{t})^2}\frac{b}{2}ch(\bar{t}\frac{b}{2})-\frac{2}{\varepsilon}\frac{t^6}{(t\bar{t})^3}sh(\bar{t}\frac{b}{2})+\frac{2}{\varepsilon}\frac{t^2}{t\bar{t}}sh(\bar{t}\frac{b}{2})\\ &\quad -2tch(\bar{t}\frac{b}{2})sh(t\frac{b}{2})-\frac{2}{\varepsilon}t\frac{b}{2}ch(\bar{t}\frac{b}{2})-\frac{1}{\varepsilon}t\bar{t}(\frac{b}{2})^2 sh(t\frac{b}{2}) ,\end{aligned} \tag{2.12}$$

则(2.11)变为

$$t^2\int_0^b v\bar{v}dy+P(b;\varepsilon)-\frac{t^2t\bar{t}}{10\varepsilon^2}(\frac{b}{2})^5-\frac{2}{3\varepsilon^2}t\bar{t}(\frac{b}{2})^3+\int_0^b v'\overline{v'}dy=0 . \tag{2.13}$$

下面我们要确定一个 $b_0>0$ 和一个适当小的 $\varepsilon_0>0$, 使得

$$P(b_0;\varepsilon_0) \text{ 的虚部为零, 从而 } P(b_0;\varepsilon_0) \text{ 为实数,} \tag{2.14}$$

且成立

$$\int_0^{b_0} v\bar{v}dy - \frac{t\bar{t}}{10\varepsilon_0^2}(\frac{b_0}{2})^5 \neq 0; \tag{2.15}$$

再从(2.13)中的量$\int_0^{b_0} v\bar{v}dy$ ($=\int_0^{b_0}|v|^2 dy$), $\frac{t\bar{t}}{10\varepsilon_0^2}(\frac{b_0}{2})^5$, $-\frac{2}{3\varepsilon_0^2}t\bar{t}(\frac{b_0}{2})^3$和$\int_0^{b_0} v'\overline{v'}dy$ ($=\int_0^{b_0}|v'|^2 dy$)均为实数且不为零, 知t^2必为实数.

2.2 $P(b;\varepsilon)$的虚部$f(b;\varepsilon)$

回顾到公式: 对$x, y\in\mathbb{R}$,

$$sh(x\pm iy) = shx\cos y \pm ichx\sin y,$$

$$ch(x\pm iy) = chx\cos y \pm ishx\sin y,$$

并注意到

$$t^2 = (t_1+it_2)(t_1+it_2) = t_1^2 - t_2^2 + i\cdot 2t_1t_2\ ,$$

$$t^4 = t^2\cdot t^2 = (t_1^2-t_2^2)^2 - (2t_1t_2)^2 + i\cdot 2(t_1^2-t_2^2)\cdot(2t_1t_2)\ ,$$

$$\begin{aligned} t^5 &= t\cdot t^4 \\ &= t_1[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2] - t_2\cdot 2(t_1^2-t_2^2)\cdot(2t_1t_2) \\ &\quad + i\{t_1\cdot 2(t_1^2-t_2^2)\cdot(2t_1t_2) + t_2[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t^6 &= t^2\cdot t^4 \\ &= (t_1^2-t_2^2)[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2] - (2t_1t_2)\cdot 2(t_1^2-t_2^2)(2t_1t_2) \\ &\quad + i\{(t_1^2-t_2^2)\cdot 2(t_1^2-t_2^2)(2t_1t_2) + 2t_1t_2[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]\} \\ &= (t_1^2-t_2^2)[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2] - 2(t_1^2-t_2^2)(2t_1t_2)^2 \\ &\quad + i\cdot 2t_1t_2[3(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2], \end{aligned}$$

$$sh(\bar{t}\frac{b}{2}) = sh(t_1\frac{b}{2} - it_2\frac{b}{2}) = sh(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2}) - ich(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2}),$$

$$sh(t\frac{b}{2}) = sh(t_1\frac{b}{2} + it_2\frac{b}{2}) = sh(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2}) + ich(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2}),$$

$$ch(\bar{t}\frac{b}{2}) = ch(t_1\frac{b}{2} - it_2\frac{b}{2}) = ch(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2}) - ish(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2}),$$

$$
\begin{aligned}
ch(\bar{t}\frac{b}{2})sh(t\frac{b}{2}) &= \frac{1}{2}(e^{\bar{t}\frac{b}{2}}+e^{-\bar{t}\frac{b}{2}})\cdot\frac{1}{2}(e^{t\frac{b}{2}}-e^{-t\frac{b}{2}}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{(t+\bar{t})\frac{b}{2}}-e^{(\bar{t}-t)\frac{b}{2}}+e^{(t-\bar{t})\frac{b}{2}}-e^{(-t-\bar{t})\frac{b}{2}}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{2t_1\frac{b}{2}}-e^{-2it_2\frac{b}{2}}+e^{2it_2\frac{b}{2}}-e^{-2t_1\frac{b}{2}}) \\
&= \frac{1}{2}[sh(t_1b)+i\sin(t_2b)],
\end{aligned}
$$

将这些代入(2.12)中得

$P(b;\varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2\frac{1}{t\bar{t}}[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2+i\cdot 2(t_1^2-t_2^2)\cdot(2t_1t_2)] \\
&\qquad \cdot[sh(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})-ich(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})] \\
&+\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}\frac{1}{(t\bar{t})^2}\{t_1[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]-t_2\cdot 2(t_1^2-t_2^2)\cdot(2t_1t_2) \\
&\qquad +i\{t_1\cdot 2(t_1^2-t_2^2)\cdot(2t_1t_2)+t_2[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]\}\} \\
&\qquad \cdot[ch(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})-ish(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})] \\
&-\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{(t\bar{t})^3}\{(t_1^2-t_2^2)[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]-2(t_1^2-t_2^2)(2t_1t_2)^2+i\cdot 2t_1t_2[3(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]\} \\
&\qquad \cdot[sh(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})-ich(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})] \\
&+\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{t\bar{t}}[t_1^2-t_2^2+i\cdot 2t_1t_2]\cdot[sh(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})-ich(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})] \\
&-2(t_1+it_2)\cdot\frac{1}{2}[sh(t_1b)+i\sin(t_2b)] \\
&-\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}(t_1+it_2)\cdot[ch(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})-ish(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})] \\
&-\frac{1}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2 t\bar{t}[sh(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})+ich(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})].
\end{aligned}
$$

将 $P(b;\varepsilon)$ 的虚部 $\operatorname{Im}P(b;\varepsilon)$ 记为 $f(b;\varepsilon)$，这是一个实函数，满足

$f(b;\varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
&=-\frac{1}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2\frac{1}{t\bar{t}}\{[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]\cdot[-ch(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})]\\
&\qquad\qquad +2(t_1^2-t_2^2)\cdot(2t_1t_2)sh(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\}\\
&\quad+\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}\frac{1}{(t\bar{t})^2}\{\{t_1[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]-t_2\cdot 2(t_1^2-t_2^2)\cdot(2t_1t_2)\}\cdot[-sh(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})]\\
&\qquad\qquad +\{t_1\cdot 2(t_1^2-t_2^2)\cdot(2t_1t_2)+t_2[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]\}\cdot ch(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\}\\
&\quad-\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{(t\bar{t})^3}\{\{(t_1^2-t_2^2)[(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]-2(t_1^2-t_2^2)(2t_1t_2)^2\}\cdot[-ch(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})]\\
&\qquad\qquad +2t_1t_2[3(t_1^2-t_2^2)^2-(2t_1t_2)^2]sh(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\}\\
&\quad+\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{t\bar{t}}\{(t_1^2-t_2^2)[-ch(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})]+2t_1t_2sh(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\}\\
&\quad-[t_1\sin(t_2b)+t_2sh(t_1b)]\\
&\quad-\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}\{t_1[-sh(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})]+t_2ch(t_1\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\}\\
&\quad-\frac{1}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2t\bar{t}ch(t_1\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2}). \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

显然 $f(0;\varepsilon)=0$.

2.3 确定使(2.14)和(2.15)成立的 b_0 和 ε_0

我们先将 $f(b;\varepsilon)$ 进行变形. 令

$$t_1=\alpha t_2, \qquad (2.17)$$

则从 $t_1>6$ 和 $0<t_2<\frac{1}{2}$ 可知

$$\alpha>12, \qquad (2.18)$$

而 $f(b;\varepsilon)$ 变为

$f(b;\varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2\frac{1}{\alpha^2+1}\{[(\alpha^2-1)^2t_2^2-4\alpha^2t_2^2]\cdot[-ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})] \\
&\qquad +2(\alpha^2-1)\cdot 2\alpha t_2^2 sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\} \\
&\quad +\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}\frac{1}{(\alpha^2+1)^2}\{\{\alpha t_2[(\alpha^2-1)^2-4\alpha^2]-t_2\cdot 2(\alpha^2-1)\cdot 2\alpha\}\cdot[-sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})] \\
&\qquad +\{\alpha t_2\cdot 2(\alpha^2-1)\cdot 2\alpha+t_2[(\alpha^2-1)^2-4\alpha^2]\}\cdot ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\} \\
&\quad -\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{(\alpha^2+1)^3}\{\{(\alpha^2-1)[(\alpha^2-1)^2-4\alpha^2]-2(\alpha^2-1)4\alpha^2\}\cdot[-ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})] \\
&\qquad +2\alpha[3(\alpha^2-1)^2-4\alpha^2]sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\} \\
&\quad +\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{\alpha^2+1}\{(\alpha^2-1)[-ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})]+2\alpha sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\} \\
&\quad -[\alpha t_2\sin(t_2 b)+t_2 sh(\alpha t_2 b)] \\
&\quad -\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}\{\alpha t_2[-sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})]+t_2 ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\} \\
&\quad -\frac{1}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2(\alpha^2+1)t_2^2 ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2\frac{t_2^2}{\alpha^2+1}[(\alpha^4-6\alpha^2+1)\cdot ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})-4\alpha(\alpha^2-1)sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})] \\
&\quad +\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}\frac{t_2}{(\alpha^2+1)^2}\{(\alpha^5-10\alpha^3+5\alpha)[-sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})] \\
&\qquad +(5\alpha^4-10\alpha^2+1)ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\} \\
&\quad +\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{(\alpha^2+1)^3}\{[(\alpha^2-1)(\alpha^4-6\alpha^2+1)-8\alpha^2(\alpha^2-1)]ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2}) \\
&\qquad -2\alpha[3(\alpha^2-1)^2-4\alpha^2]sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\} \\
&\quad +\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{\alpha^2+1}\{(\alpha^2-1)[-ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})]+2\alpha sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})\} \\
&\quad -[\alpha t_2\sin(t_2 b)+t_2 sh(\alpha t_2 b)] \\
&\quad +\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}t_2[\alpha sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})-ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})] \\
&\quad -\frac{1}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2(\alpha^2+1)t_2^2 ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2}),
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

注意(2.19)的第一项与第七项含因子t_2^2，第二项与第六项含因子t_2，第三项，第四项和第五项不含因子t_2，分别将第一项与第七项合并，第二项与第六项合并，第三项与第四项合并，第五项照写，则有

$$f(b;\varepsilon)$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2\frac{t_2^2}{\alpha^2+1}[(\alpha^4-6\alpha^2+1)\cdot ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})-4\alpha(\alpha^2-1)sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})$$

$$-(\alpha^2+1)^2 ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})]$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}\frac{t_2}{(\alpha^2+1)^2}[(-\alpha^5+10\alpha^3-5\alpha)sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})+(5\alpha^4-10\alpha^2+1)ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})$$

$$+\alpha(\alpha^2+1)^2 sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})-(\alpha^2+1)^2 ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})]$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{(\alpha^2+1)^3}[(\alpha^2-1)(\alpha^4-14\alpha^2+1)ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})$$

$$-2\alpha[3(\alpha^2-1)^2-4\alpha^2]sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})$$

$$-(\alpha^2-1)(\alpha^2+1)^2 ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})+2\alpha(\alpha^2+1)^2 sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})]$$

$$-[\alpha t_2\sin(t_2 b)+t_2 sh(\alpha t_2 b)]$$

$$=\frac{2}{\varepsilon}(\frac{b}{2})^2\frac{t_2^2}{\alpha^2+1}[(-4\alpha^2)ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})+(-2\alpha^3+2\alpha)sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})]$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}\frac{b}{2}\frac{t_2}{(\alpha^2+1)^2}[(12\alpha^3-4\alpha)sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})+(4\alpha^4-12\alpha^2)ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})]$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}\frac{1}{(\alpha^2+1)^3}[(-16\alpha^4+16\alpha^2)ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})+(-4\alpha^5+24\alpha^3-4\alpha)sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})]$$

$$-[\alpha t_2\sin(t_2 b)+t_2 sh(\alpha t_2 b)]$$

$$:=\frac{2}{\varepsilon}Q(b)-[\alpha t_2\sin(t_2 b)+t_2 sh(\alpha t_2 b)], \tag{2.20}$$

其中

$$Q(b)$$

$$=(\frac{b}{2})^2\frac{t_2^2}{\alpha^2+1}[(-4\alpha^2)ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})+(-2\alpha^3+2\alpha)sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})]$$
$$+\frac{b}{2}\frac{t_2}{(\alpha^2+1)^2}[(12\alpha^3-4\alpha)sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})+(4\alpha^4-12\alpha^2)ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})]$$
$$+\frac{1}{(\alpha^2+1)^3}[(-16\alpha^4+16\alpha^2)ch(\alpha t_2\frac{b}{2})\sin(t_2\frac{b}{2})+(-4\alpha^5+24\alpha^3-4\alpha)sh(\alpha t_2\frac{b}{2})\cos(t_2\frac{b}{2})].$$

我们来证明存在$b_1>0$，使得$Q(b_1)>0$．令

$$\frac{b}{2}t_2=\sigma, \tag{2.21}$$

其中$\sigma>0$待定，则

$$Q(b)=Q(\frac{2\sigma}{t_2})$$
$$=\frac{1}{\alpha^2+1}[(-4\alpha^2\sigma^2)ch(\alpha\sigma)\sin\sigma+(-2\alpha^3+2\alpha)\sigma^2 sh(\alpha\sigma)\cos\sigma]$$
$$+\frac{1}{(\alpha^2+1)^2}[(12\alpha^3-4\alpha)\sigma sh(\alpha\sigma)\sin\sigma+(4\alpha^4-12\alpha^2)\sigma ch(\alpha\sigma)\cos\sigma]$$
$$+\frac{1}{(\alpha^2+1)^3}[(-16\alpha^4+16\alpha^2)ch(\alpha\sigma)\sin\sigma+(-4\alpha^5+24\alpha^3-4\alpha)sh(\alpha\sigma)\cos\sigma]$$
$$=\frac{1}{(\alpha^2+1)^3}[-4\alpha^2(\alpha^2+1)^2\sigma^2 ch(\alpha\sigma)\sin\sigma+(-2\alpha^3+2\alpha)(\alpha^2+1)^2\sigma^2 sh(\alpha\sigma)\cos\sigma$$
$$+(12\alpha^3-4\alpha)(\alpha^2+1)\sigma sh(\alpha\sigma)\sin\sigma+(4\alpha^4-12\alpha^2)(\alpha^2+1)\sigma ch(\alpha\sigma)\cos\sigma$$
$$+(-16\alpha^4+16\alpha^2)ch(\alpha\sigma)\sin\sigma+(-4\alpha^5+24\alpha^3-4\alpha)sh(\alpha\sigma)\cos\sigma]$$
$$=\frac{1}{(\alpha^2+1)^3}\{\frac{e^{\alpha\sigma}}{2}[-4\alpha^2(\alpha^2+1)^2\sigma^2+(12\alpha^3-4\alpha)(\alpha^2+1)\sigma+(-16\alpha^4+16\alpha^2)]\sin\sigma$$
$$+\frac{e^{\alpha\sigma}}{2}[(-2\alpha^3+2\alpha)(\alpha^2+1)^2\sigma^2+(4\alpha^4-12\alpha^2)(\alpha^2+1)\sigma+(-4\alpha^5+24\alpha^3-4\alpha)]\cos\sigma$$
$$+\frac{e^{-\alpha\sigma}}{2}[-4\alpha^2(\alpha^2+1)^2\sigma^2+(-12\alpha^3+4\alpha)(\alpha^2+1)\sigma+(-16\alpha^4+16\alpha^2)]\sin\sigma$$
$$+\frac{e^{-\alpha\sigma}}{2}[(2\alpha^3-2\alpha)(\alpha^2+1)^2\sigma^2+(4\alpha^4-12\alpha^2)(\alpha^2+1)\sigma+(4\alpha^5-24\alpha^3+4\alpha)]\cos\sigma\}$$
$$:=\frac{1}{(\alpha^2+1)^3}\{\frac{e^{\alpha\sigma}}{2}[g_1(\sigma)\sin\sigma+g_2(\sigma)\cos\sigma]+\frac{e^{-\alpha\sigma}}{2}[g_3(\sigma)\sin\sigma+g_4(\sigma)\cos\sigma]\}. \tag{2.22}$$

对$g_1(\sigma)$(其中$\sigma>0$)，由于其首项系数为负，所以$g_1(\sigma)$开口向下；而其判别式

$$(12\alpha^3-4\alpha)^2(\alpha^2+1)^2-4[-4\alpha^2(\alpha^2+1)^2](-16\alpha^4+16\alpha^2)$$

小于零(利用$\alpha>12$)，故有

$$g_1(\sigma) < 0.$$

类似地, 成立

$$g_2(\sigma) < 0, \quad g_3(\sigma) < 0, \quad g_4(\sigma) > 0.$$

现在取 $\sigma = \frac{3\pi}{2}$, 则

$$b_1 = \frac{3\pi}{t_2},$$

以及 $\sin\frac{3\pi}{2} = -1, \quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0$, 且有

$$g_1(\frac{3\pi}{2})\sin\frac{3\pi}{2} > 0, \quad g_2(\frac{3\pi}{2})\cos\frac{3\pi}{2} = 0, \quad g_3(\frac{3\pi}{2})\sin\frac{3\pi}{2} > 0, \quad g_4(\frac{3\pi}{2})\cos\frac{3\pi}{2} = 0,$$

于是从(2.22)知 $Q(b_1) > 0$.

取 $b_2 = \frac{5\pi}{t_2}$, 从(2.22)知 $Q(b_2) < 0$. 我们断定能在(2.20)中取适当小的 $\varepsilon_1 > 0$, 使得

$$f(b_1, \varepsilon_1) > 0, f(b_2, \varepsilon_1) < 0. \tag{2.23}$$

事实上, 记

$$I(b) = \alpha t_2 \sin(t_2 b) + t_2 sh(\alpha t_2 b), \ b \in [b_1, b_2] = [\frac{3\pi}{t_2}, \frac{5\pi}{t_2}].$$

当 $\alpha > 12$ 时, 由于 $\sin(t_2 b) \geq -1, \quad e^{\alpha t_2 b} > 1 + \alpha t_2 b, e^{-\alpha t_2 b} < 0, \quad t_2 b \geq 3\pi$, 可得

$$I(b) = \alpha t_2 \sin(t_2 b) + t_2 \frac{e^{\alpha t_2 b} - e^{-\alpha t_2 b}}{2} \geq -\alpha t_2 + t_2 \frac{1 + \alpha t_2 b - 1}{2}$$

$$= -\alpha t_2 + t_2 \frac{\alpha t_2 b}{2} \geq -\alpha t_2 + t_2 \frac{3\pi\alpha}{2} = \alpha t_2 (-1 + \frac{3\pi}{2}) > 0, \ b \in [b_1, b_2].$$

从 $Q(b_1) > 0$, 可取 $\varepsilon_1 > 0$, 使得 $f(b_1, \varepsilon_1) > 0$, 同时对此 ε_1 及用 $Q(b_2) < 0$, 有 $f(b_2, \varepsilon_1) < 0$. 至此(2.23)得证.

注 2.1 我们不可以直接对 $f(b, \varepsilon_1)$ 结合(2.23)用连续函数的介值定理得到 $b_0 \in (b_1, b_2)$, 使 $f(b_0, \varepsilon_1) = 0$, 因这难以保证(2.15)成立. 因此为同时得到(2.14)和(2.15), 需作更细致的分析.

记

$$h(b,\varepsilon)=\int_0^b v\bar{v}dy-\frac{t\bar{t}}{10\varepsilon^2}(\frac{b}{2})^2,\quad \varepsilon>0\,. \tag{2.24}$$

通过计算容易得

$$h(b,\varepsilon)=F(b)+\frac{1}{\varepsilon}G(b),\qquad b\in[b_1,b_2], \tag{2.25}$$

其中

$$F(b)=\frac{1}{4}\left[\frac{e^{\alpha t_2 b}-e^{-\alpha t_2 b}}{\alpha t_2}+\frac{1}{t_2}\sin(t_2 b)\right]>0, \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}G(b)=&t_1\int_0^b\cos[t_2(y-\frac{b}{2})]ch[t_1(y-\frac{b}{2})](y-\frac{b}{2})^2dy\\&+t_2\int_0^b\sin[t_2(y-\frac{b}{2})]sh[t_1(y-\frac{b}{2})](y-\frac{b}{2})^2dy\,.\end{aligned} \tag{2.27}$$

我们把(2.25)-(2.27)的证明放在第三节中.

下面继续接着(2.23)进行研究. 注意函数 $f(b,\varepsilon),Q(b)$ 和 $G(b)$ 均是连续函数，可正可负，零点是孤立分布的. 我们来证明存在 $b_0\in(b_1,b_2)$ 和 $\varepsilon_0>0$，使得

$$f(b_0,\varepsilon_0)=0\,,\quad 且\ F(b_0)+\frac{1}{\varepsilon_0}G(b_0)\neq 0. \tag{2.28}$$

下面仅详细考虑函数 $G(b)$ 在 $[b_1,b_2]$ 内最多有一个零点的情形，对 $G(b)$ 在 $[b_1,b_2]$ 内有多于一个零点的情形，证明是类似的.

(1) 若 $G(b)$ 在 $[b_1,b_2]$ 内没有零点，则 $G(b)$ 在 $[b_1,b_2]$ 内恒大于 0 或恒小于 0，于是存在 $c_0>0$，使得

$$G(b)\ge c_0\ 或\ G(b)\le -c_0\,,\ \ b\in[b_1,b_2]\,. \tag{2.29}$$

对 $G(b)\ge c_0$，$b\in[b_1,b_2]$，考虑到 $F(b)>0$，显然有对任意 $\varepsilon>0$ 和 $b\in(b_1,b_2)$，有 $F(b)+\frac{1}{\varepsilon}G(b)>0,$ 从而

$$F(b)+\frac{1}{\varepsilon_1}G(b)\neq 0.$$

利用(2.23)，$f(b,\varepsilon_1)$ 在 $[b_1,b_2]$ 上连续和连续函数的介值定理知存在 $b_0\in(b_1,b_2)$，使得 $f(b_0,\varepsilon_1)=0$. 再从上式立即有 $F(b_0)+\frac{1}{\varepsilon_1}G(b_0)\neq 0.$ (2.28)得证.

对 $G(b)\le -c_0$，$b\in[b_1,b_2]$，取 $\varepsilon_2=\dfrac{c_0}{\max\limits_{b\in[b_1,b_2]}F(b)}>0$，就有

$$F(b)+\frac{1}{\varepsilon_2}G(b)\le \max_{b\in[b_1,b_2]}F(b)+\frac{-c_0}{\varepsilon_2}=0\ ,$$

所以

$$F(b)+\frac{1}{\varepsilon}G(b)<F(b)+\frac{1}{\varepsilon_2}G(b)\le 0,\quad 0<\varepsilon<\varepsilon_2\,. \tag{2.30}$$

从(2.23)和 $f(b,\varepsilon)$ 的表达式(2.20)可知

$$f(b_1,\varepsilon)>0, f(b_2,\varepsilon)<0,\ \text{对任意}\ \varepsilon, 0<\varepsilon<\varepsilon_1\,.$$

取 $\varepsilon_0, 0<\varepsilon_0<\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, 则从上式和连续函数的介值定理知存在 $b_0\in(b_1,b_2)$，使得 $f(b_0,\varepsilon_0)=0$，且由(2.30)知 $F(b_0)+\frac{1}{\varepsilon_0}G(b_0)\ne 0$. (2.28)得证.

(2) 若 $G(b)$ 在 $[b_1,b_2]$ 上有零点 b',，则有三种可能: (i) $b'\in(b_1,b_2)$; (ii) $b'=b_1$; (iii) $b'=b_2$.

(i) 若 $b'\in(b_1,b_2)$，则我们对函数 $Q(b)$ 考虑两种情形: $Q(b')>0$ 和 $Q(b')\le 0$.

当 $Q(b')>0$ 时，由 $Q(b)$ 的连续保号性知可取 $b_1'>b'$ (从而 $b_1<b'<b_1'<b_2$), 使得 $Q(b_1')>0$；相应地取 $\varepsilon_1>0$，使得 $f(b_1',\varepsilon_1)>0, f(b_2,\varepsilon_1)<0,$. 此时 $G(b)$ 在 $[b_1',b_2]$ 上同为正或同为负，于是同情形(1)中处理过的一样推导可取 ε_0, $0<\varepsilon_0<\varepsilon_1$，且存在 $b_0\in[b_1',b_2]\subset[b_1,b_2]$, 使得 $f(b_0,\varepsilon_0)=0$，且 $F(b_0)+\frac{1}{\varepsilon_0}G(b_0)\ne 0$. (2.28)得证.

当 $Q(b')\le 0$ 时，从 $f(b,\varepsilon)$ 的表达式(2.20)可知 $f(b',\varepsilon_1)<0$. 由 $f(b,\varepsilon_1)$ 的连续保号性知可取 $b_2'<b'$ (即有 $b_1<b_2'<b'<b_2$)，使得 $f(b_1,\varepsilon_1)>0, f(b_2',\varepsilon_1)<0$. 此时 $G(b)$ 在 $[b_1,b_2']$ 上同为正或同为负，于是与情形(1)中处理过的一样推导可取 ε_0, $0<\varepsilon_0<\varepsilon_1$，且存在 $b_0\in[b_1,b_2']\subset[b_1,b_2]$, 使得 $f(b_0,\varepsilon_0)=0$， 且 $F(b_0)+\frac{1}{\varepsilon_0}G(b_0)\ne 0$. (2.28)得证.

(ii) 若 $G(b_1)=0$，则从 $f(b_1,\varepsilon_1)>0$ (见(2.23))和 $f(b,\varepsilon_1)$ 连续及连续函数的保号性可知，存在 b_1', $b_1<b_1'<b_2$, 使得 $f(b_1',\varepsilon_1)>0, f(b_2,\varepsilon_1)<0$, 且 $G(b)$ 在 $[b_1',b_2]$ 上不变

号, 然后同(1)一样处理.

(iii) 若 $G(b_2)=0$, 则从 $f(b_2,\varepsilon_1)<0$ (见(2.23))和 $f(b,\varepsilon_1)$ 连续及连续函数的保号性可知, 存在 b_2', $b_1<b_2'<b_2$, 使得 $f(b_2',\varepsilon_1)<0, f(b_1,\varepsilon_1)>0$, 且 $G(b)$ 在 $[b_1,b_2']$ 上不变号, 然后同(1)一样处理.

(3) 若 $G(b)$ 在 $[b_1,b_2]$ 上有两个零点 b_1',b_2', 则可能出现下列四种情形：

(i) $b_1<b_1'<b_2'<b_2$; (ii) $b_1=b_1'<b_2'<b_2$; (iii) $b_1<b_1'<b_2'=b_2$; (iv) $b_1=b_1'<b_2'=b_2$.

这里(i)说明两个零点在 (b_1,b_2) 中, (ii)和(iii)说明两个零点中有一个在 $[b_1,b_2]$ 的端点, (iv)说明两个零点均在端点处. 我们注意到 $Q(b_1)>0$, $Q(b_2)<0$.

对(i) $b_1<b_1'<b_2'<b_2$, 从 $G(b_1')=0$, 有 $Q(b_1')>0$ 或 $Q(b_1')\le 0$; 从 $G(b_2')=0$, 有 $Q(b_2')>0$ 或 $Q(b_2')\le 0$. 于是我们分别处理:

(i,a) $Q(b_1')>0$, $Q(b_2')>0$. 从 $Q(b_2')>0$, 可知 $f(b_2',\varepsilon_1)>0$, 利用 $f(b,\varepsilon_1)$ 在 $[b_1,b_2]$ 上连续, 可取 $b_2''>b_2'$, 使得 $f(b_2'',\varepsilon_1)>0$; 从 $Q(b_2)<0$ 已有 $f(b_2,\varepsilon_1)<0$; 此时 $G(b)$ 在 $[b_2'',b_2]$ 上不变号, 可用前面对(1)的过程.

(i,b) $Q(b_1')>0$, $Q(b_2')\le 0$. 此时易知 $f(b_1',\varepsilon_1)>0, f(b_2',\varepsilon_1)<0.$ 利用 $f(b,\varepsilon_1)$ 连续, 可取 $b_1''>b_1'$ 及 $b_2''<b_2'$, 且 $b_1''<b_2''$, 使得 $f(b_1'',\varepsilon_1)>0, f(b_2'',\varepsilon_1)<0.$ 又 $G(b)$ 在 $[b_1'',b_2'']$ 上不变号, 与前一样讨论.

(i,c) $Q(b_1')\le 0$, $Q(b_2')>0$.利用 $Q(b_1)>0$, 有 $f(b_1,\varepsilon_1)>0$; 从 $Q(b_1')\le 0$ 可得 $f(b_1',\varepsilon_1)<0$, 取 $b_1''<b_1'$,使得 $f(b_1'',\varepsilon_1)<0,$ 再注意到 $G(b)$ 在 $[b_1,b_1'']$ 上不变号, 与前一样讨论.

(i,d) $Q(b_1')\le 0$, $Q(b_2')\le 0$. 利用 $Q(b_1)>0$ 和 $Q(b_1')\le 0$, 同(i, c)一样讨论.

关于(ii) $b_1=b_1'<b_2'<b_2$, 当 $G(b_1)$=$G(b_1')$=0 时已知 $Q(b_1)$=$Q(b_1')>0$, 从 $G(b_2')$=0 有情形 $Q(b_2')>0$ 或 $Q(b_2')\le 0$. 我们分别处理:

(ii,a) $Q(b_1)>0$, $Q(b_2')>0$. 从 $Q(b_2')>0$ 及 $Q(b_2)<0$, 可知 $f(b_2',\varepsilon_1)>0,$ $f(b_2,\varepsilon_1)<0$. 取 $b_2''>b_2'$, 则 $f(b_2'',\varepsilon_1)>0,$ 再注意到 $G(b)$ 在 $[b_2'',b_2]$ 上不变号, 与前

一样讨论.

(ii,b) $Q(b_1)>0$，$Q(b_2')\le 0$．易得 $f(b_1,\varepsilon_1)>0,\ f(b_2',\varepsilon_1)<0$．取 $b_1''>b_1$，使得 $f(b_1'',\varepsilon_1)>0$, 再取 $b_2''<b_2'$，使得 $f(b_2'',\varepsilon_1)<0$，而 $G(b)$ 在 $[b_1'',b_2'']$ 上不变号，与前一样讨论.

对(iii) $b_1<b_1'<b_2'=b_2$，可与(ii)一样讨论.

对(iv) $b_1=b_1'<b_2'=b_2$，从 $Q(b_1)>0,\ \ Q(b_2)<0$，可取 $b_1''>b_1, b_2''<b_2$，且 $b_1''<b_2''$，使得 $f(b_1'',\varepsilon_1)>0,\ \ f(b_2'',\varepsilon_1)<0$，且 $G(b)$ 在 $[b_1'',b_2'']$ 上不变号，与前一样讨论.

综合上述讨论，我们从(2.13)看到 t^2 是实数.

2.4 定理 1 的证明的完成

从 t^2 是实数及

$$t^2=(t_1+it_2)\cdot(t_1+it_2)=t_1^2-t_2^2+i\cdot 2t_1t_2$$

可知 $t_1t_2=0$．又由假设 $t_2\ne 0$ 及 $t_1>6$ 知这不可能，因此 $t_2=0$，即 $\Xi(t)$ 的零点必须是实数．从而(1.6)成立，至此定理 1 证完.

3 (2.25)-(2.27)的证明

在这节我们证明(2.25)-(2.27)．对 $h(b,\varepsilon)=\int_0^b v\bar{v}dy-\frac{t\bar{t}}{10\varepsilon^2}(\frac{b}{2})^2,\varepsilon>0,$ 我们从(2.3)知

$$v=\frac{e^{t(y-\frac{b}{2})}+e^{-t(y-\frac{b}{2})}}{2}+\frac{1}{2\varepsilon}t(y-\frac{b}{2})^2,$$

利用

$t=t_1+it_2$,

$$e^{t(y-\frac{b}{2})}=e^{t_1(y-\frac{b}{2})}\left[\cos(t_2(y-\frac{b}{2}))+i\sin(t_2(y-\frac{b}{2}))\right],$$

$$e^{-t(y-\frac{b}{2})}=e^{-t_1(y-\frac{b}{2})}\left[\cos(t_2(y-\frac{b}{2}))-i\sin(t_2(y-\frac{b}{2}))\right],$$

$$e^{t(y-\frac{b}{2})}+e^{-t(y-\frac{b}{2})}=2\cos(t_2(y-\frac{b}{2}))ch(t_1(y-\frac{b}{2}))+2i\sin(t_2(y-\frac{b}{2}))sh(t_1(y-\frac{b}{2})),$$

可得

$$v=\cos(t_2(y-\frac{b}{2}))ch(t_1(y-\frac{b}{2}))+\frac{t_1}{2\varepsilon}(y-\frac{b}{2})^2+i\left[\text{in}(t_2(y-\frac{b}{2}))sh(t_1(y-\frac{b}{2}))+\frac{t_2}{2\varepsilon}(y-\frac{b}{2})^2\right],$$

$$\overline{v}=\cos(t_2(y-\frac{b}{2}))ch(t_1(y-\frac{b}{2}))+\frac{t_1}{2\varepsilon}(y-\frac{b}{2})^2-i\left[\text{in}(t_2(y-\frac{b}{2}))sh(t_1(y-\frac{b}{2}))+\frac{t_2}{2\varepsilon}(y-\frac{b}{2})^2\right],$$

以及

$$\begin{aligned}v\overline{v}=&\cos^2(t_2(y-\frac{b}{2}))ch^2(t_1(y-\frac{b}{2}))+\sin^2(t_2(y-\frac{b}{2}))sh^2(t_1(y-\frac{b}{2}))\\&+\frac{t_1}{\varepsilon}\cos(t_2(y-\frac{b}{2}))ch(t_1(y-\frac{b}{2}))(y-\frac{b}{2})^2+\frac{t_2}{\varepsilon}\sin(t_2(y-\frac{b}{2}))sh(t_1(y-\frac{b}{2}))(y-\frac{b}{2})^2\\&+\frac{t_1^2}{4\varepsilon^2}(y-\frac{b}{2})^4+\frac{t_2^2}{4\varepsilon^2}(y-\frac{b}{2})^4.\end{aligned}$$

因为

$$\int_0^b\frac{t_1^2}{4\varepsilon^2}(y-\frac{b}{2})^4dy+\int_0^b\frac{t_2^2}{4\varepsilon^2}(y-\frac{b}{2})^4dy=\frac{t_1^2+t_2^2}{10\varepsilon^2}(\frac{b}{2})^5=\frac{t\overline{t}}{10\varepsilon^2}(\frac{b}{2})^5,$$

所以

$$\begin{aligned}h(b,\varepsilon)=&\int_0^b\cos^2(t_2(y-\frac{b}{2}))ch^2(t_1(y-\frac{b}{2}))dy+\int_0^b\sin^2(t_2(y-\frac{b}{2}))sh^2(t_1(y-\frac{b}{2}))dy\\&+\frac{1}{\varepsilon}\left[t_1\int_0^b\cos(t_2(y-\frac{b}{2}))ch(t_1(y-\frac{b}{2}))(y-\frac{b}{2})^2dy+t_2\int_0^b\sin(t_2(y-\frac{b}{2}))sh(t_1(y-\frac{b}{2}))(y-\frac{b}{2})^2dy\right].\end{aligned}$$

上式即(25), 其中右端第一项即是$F(b)$, 第二项中方括号即$G(b)$. 由于

$$\begin{aligned}&\int_0^b\cos^2(t_2(y-\frac{b}{2}))ch^2(t_1(y-\frac{b}{2}))dy\\&=\int_0^b\frac{1+\cos(2t_2(y-\frac{b}{2}))}{2}\cdot\frac{e^{2t_2(y-\frac{b}{2})}+2+e^{-2t_2(y-\frac{b}{2})}}{2}dy\\&=\frac{1}{8}\int_0^b\left[e^{2t_2(y-\frac{b}{2})}+2+e^{-2t_2(y-\frac{b}{2})}+\cos(2t_2(y-\frac{b}{2}))e^{2t_2(y-\frac{b}{2})}+2\cos(2t_2(y-\frac{b}{2}))+\cos(2t_2(y-\frac{b}{2}))e^{-2t_2(y-\frac{b}{2})}\right]dy,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^b\sin^2(t_2(y-\frac{b}{2}))sh^2(t_1(y-\frac{b}{2}))dy\\&=\int_0^b\frac{1-\cos(2t_2(y-\frac{b}{2}))}{2}\cdot\frac{e^{2t_2(y-\frac{b}{2})}-2+e^{-2t_2(y-\frac{b}{2})}}{2}dy\\&=\frac{1}{8}\int_0^b\left[e^{2t_2(y-\frac{b}{2})}-2+e^{-2t_2(y-\frac{b}{2})}-\cos(2t_2(y-\frac{b}{2}))e^{2t_2(y-\frac{b}{2})}+2\cos(2t_2(y-\frac{b}{2}))-\cos(2t_2(y-\frac{b}{2}))e^{-2t_2(y-\frac{b}{2})}\right]dy,\end{aligned}$$

所以

$$
\begin{aligned}
F(b) &= \int_0^b \cos^2(t_2(y-\frac{b}{2}))ch^2(t_1(y-\frac{b}{2}))dy + \int_0^b \sin^2(t_2(y-\frac{b}{2}))sh^2(t_1(y-\frac{b}{2}))dy \\
&= \frac{1}{8}\int_0^b \left[2e^{2t_1(y-\frac{b}{2})} + 2e^{-2t_1(y-\frac{b}{2})} + 4\cos(2t_2(y-\frac{b}{2}))\right]dy \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{2}{t_1}e^{2t_1\frac{b}{2}} - \frac{2}{t_1}e^{-2t_1\frac{b}{2}} + \frac{2}{t_2}\sin(2t_2\frac{b}{2})\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{t_1 b} - e^{-t_1 b}}{t_1} + \frac{1}{t_2}\sin(t_2 b)\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{\alpha t_2 b} - e^{-\alpha t_2 b}}{\alpha t_2} + \frac{1}{t_2}\sin(t_2 b)\right],
\end{aligned}
$$

其中最后一式用到了 $t_1 = \alpha t_2$.

下面证明 $F(b) > 0, b \in [b_1, b_2]$. 利用 $e^{\alpha t_2 b} > 1 + \alpha t_2 b$, $e^{-\alpha t_2 b} < 1$, $\sin(t_2 b) \geq -1$, 可得

$$
F(b) > \frac{1}{4}\left(\frac{1+\alpha t_2 b - 1}{\alpha t_2} - \frac{1}{t_2}\right) = \frac{1}{4}\left(b - \frac{1}{t_2}\right).
$$

注意 $bt_2 \in [3\pi, 5\pi]$, 即有

$$
F(b) > \frac{1}{4}\left(b - \frac{1}{t_2}\right) \geq \frac{1}{4}\frac{3\pi - 1}{t_2} > 0.
$$

至此(2.26)得证.

4 一些注记

(a) 本文构造函数 v 时既要与 $\Xi(t)$ 有关, 又能在取 $\Xi(t)$ 的零点 t 时导出 t^2 是实数. 我们提到Pólya的工作, 也注意到Pistorius构造的函数隐式地包含了 $\Xi(t)$. 我们构造的函数受到他们的启发, 但有本质不同. 我们将这里构造函数 v 的方法称作“双曲函数+二次函数”方法.

(b) 在得到 v 满足非自伴边值问题后, 无现成理论可用来导出 t^2 是实数, 如何有效地处理非自伴边值问题, 是一个挑战. 我们在方程两边乘以 v 的共轭函数, 利用分部积分, 结合边值条件和零点已有性质(包括零点的对称性, 零点的实部 $\operatorname{Re} s \in (0,1)$ 和 $|\operatorname{Im} s| > 6$), 最后证得 t^2 是实数, 进而结合反证法证得 t 是实数.

(c) 从证明过程看, $\alpha > 12$ (这从 $|\operatorname{Im} s| > 6$ 即 $|\operatorname{Re} t| > 6$ 导出)用于判别 $g_1(\sigma) < 0$, $g_2(\sigma) < 0$, $g_3(\sigma) < 0$ 和 $g_4(\sigma) > 0$.

(d) b_0 的选取不是唯一的. 为得到使 $Q(b)>0$ 成立的 b_1，由于 $Q(b)$ 较复杂，我们借助了数值分析以提供启发.

这里的证明方法可能也适用于研究关于Dirichlet L函数的Riemann猜想和多变量 Riemann zeta 函数的 Riemann 猜想.

Acknowledgement

I am grateful to Qianqiao Guo, Xueli Bai, J. Gélinas, Huiju Wang, Shihong Zhang, Junli Zhang and Xiaoxue Ji for their comments, to Junqiang Han and Pengfei Ma for their help in numeric analysis and to Leyun Wu for her type setting.

参考文献

[1] Riemann, B., Űber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grősse, Monat. der Kőnigl. Preuss. Akad. der Wissen. zu Berlin aus der Jahre 1859 (1860), 671-680
[2] Apostol, T. M., Introduction to analytic number theory, Springer-Verlag, 1976
[3] Pan, C. D., Pan, C. B., Basic analytic number theory, Harbin Institute of Technology Press, 2016
[4] Pólya, G., Bemerkung über die integraldarstellung der Riemannschen ξ-function, Acta Mathematica, 48(1926), 305-317
[5] Bender. C. M., Brody D. C., M. P. Müller, Hamiltonian for the zeros of the Riemann zeta function, Physical Review Letters, 118, 130201 (2017)
[6] Lu C. H., The Riemann Hypothesis, Qinghua University Press, 2012

附录 1 关于使得 $Q(b)>0$ 成立的 b 的存在性

我们给出通过数值计算获得的结果. 下面的表 1 是当 t_2 变小， α 变大时使得 $Q(b)>0$ 成立的 b 的取值范围:

表 1 当 t_2 变小， α 变大时 b 的取值范围

t_2	α	使 $Q(b)>0$ 的 b 所在区间
$1/2^2$	$\alpha=13$	（14，38）
$1/2^3$	$\alpha=26$	（27，76）
$1/2^4$	$\alpha=39$	（52，152）
$1/2^5$	$\alpha=52$	（103，304）
$1/2^6$	$\alpha=65$	（205，607）
$1/2^7$	$\alpha=78$	（409，1212）
$1/2^8$	$\alpha=91$	（816，2423）
$1/2^9$	$\alpha=104$	（1629，4845）
$1/2^{10}$	$\alpha=117$	（3252，9865）

$1/2^{11}$	$\alpha = 130$	（6497，19364）
$1/2^{12}$	$\alpha = 143$	（12983，38718）
$1/2^{13}$	$\alpha = 156$	（25946，77417）
...	...	...

下面的表 2 是当 t_2 固定，α 变大时使得 $Q(b) > 0$ 成立的 b 的取值范围:

表 2 当 t_2 固定，α 变大时 b 的取值范围

t_2	α	使 $Q(b) > 0$ 的 b 所在区间
$1/2^2$	13	（14，38）
$1/2^2$	26	（14，38）
$1/2^2$	39	（13，38）
$1/2^2$	52	（13，38）
$1/2^2$	65	（13，37）
$1/2^2$	78	（13，37）
$1/2^2$	91	（13，37）
$1/2^2$	104	（13，37）
$1/2^2$	117	（13，37）
$1/2^2$	130	（13，37）
$1/2^2$	143	（13，37）
...	...	...

下面的表 3 是当 t_2 变小，α 固定时使得 $Q(b) > 0$ 成立的 b 的取值范围:

表 3 当 t_2 变小，α 固定时 b 的取值范围

t_2	α	使 $Q(b) > 0$ 的 b 所在区间
$1/2^2$	143	（13，37)
$1/2^3$	143	（26，75）
$1/2^4$	143	（51，151）
$1/2^5$	143	（102，302）
$1/2^6$	143	（203，604）
$1/2^7$	143	（406，1209）
$1/2^8$	143	（812，2419）
$1/2^9$	143	（1623，4839）
$1/2^{10}$	143	（3246，9679）
$1/2^{11}$	143	（6492，19359）
...	...	...

这几个数值表提示我们，使得

$$Q(b) > 0$$

成立的b与α无关，与t_2成倒数关系，于是我们尝试取$b_1=\dfrac{3\pi}{t_2}$，获得了成功.

注记：若$t=t_1+it_2$满足

$$\Xi(t)=0,$$

这里$t_1\in\mathbb{R}$，$t_2\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. 容易知道$t$关于$t_1$轴和$t_2$轴以及原点对称且$|t_1|>6$. 显然$t=0$不是$\Xi(t)$的零点，这从

$$\Xi(0)=2\int_0^\infty\cos(0\cdot x)\Phi(x)dx=2\int_0^\infty\Phi(x)dx>0$$

立即看出. 另外，$t=it_2$ $(t_2\neq 0)$也不满足$\Xi(t)=0$，这是因为从

$$\cos(tx)=\cos(it_2x)=\frac{e^{-t_2x}+e^{t_2x}}{2}>0,$$

即知$\Xi(it_2)>0$ (后文未用到).

附录 2 非自伴边值问题

给定一个微分型

$$L(u)=\sum_{\nu=0}^{n}f_\nu u^{(\nu)},$$

其中f_ν为n阶连续可微函数，$L(u)$的自伴形式为

$$L^*(u)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu(f_\nu u)^{(\nu)}.$$

若$L(u)=L^*(u)$，则称微分型$L(u)$是自伴的. 对于n阶连续可微函数$u(x)$和$w(x)$，成立 Lagrange 恒等式

$$wL(u)-uL^*w=\frac{d}{dx}\mathcal{L}[u,w],$$

其中$\mathcal{L}[u,w]=\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{p+q=r}(-1)^p u^{(q)}(f_{r+1}w)^{(p)}$；由此得到 Green 公式

$$\int_a^b[wL(u)-uL^*w]dx=\mathcal{L}[u,w]|_a^b,$$

其右端是由两组数

$$u(a),u'(a),\cdots,u^{(n-1)}(a),u(b),u'(b),\cdots,u^{(n-1)}(b)$$

和

$$w(a), w'(a), \cdots, w^{(n-1)}(a), w(b), w'(b), \cdots, w^{(n-1)}(b)$$

构成的双线性微分型, 且此双线性微分型的行列式不为 0.

称边值问题

$$L(u) = 0, \quad x \in (a,b)$$

$U_\mu(u) = 0(\mu = 1, \cdots, n)$, 当 x 位于 (a,b) 的端点时

是自伴的, 如果

$L(u) = L^*(u)$, 且 $\mathcal{L}[u,w]|_a^b = 0$.

例如, 下面的边值问题

$$v'' + \lambda v = 0, \quad x \in (a,b)$$

$$v(a) = v(b), \quad v'(a) = -v'(b)$$

是一个非自伴边值问题.