可数个可数集的并的可数性

毛克宁（广东省肇庆科技职业技术学院　肇庆　526020）

摘　要：“可数个可数集的并是可数集”这一定理在有关集合论的教材中常以“对角线方法”给出证明。本文将对角线方法的证明中“可数无限个互不相交的可数无限集的并与正整数集 Z+的对应关系”以映射的形式给出，可以比较清楚地反映这一对应关系，并具有一定的典型性。同时以另一套方法证明了“可数个可数集的并是可数集”这一定理，使得这一定理的证明更加严格。

关键词：可数集　并集　映射

定义　与正整数集$Z^+\{1,2,3,\cdots\}$对等的集合称为可数无限集，有限集(包括空集φ)与可数无限集统称为可数集。

第一部分：

设 $A_1=\{u_{11}\cdots,u_{2n}\cdots,\}$,$A_2=\{u_{211}\cdots,u_{2n}\cdots,\}$$A_m=\{u_{m1}\cdots,u_{mn}\cdots,\}$是可数无限个互不相交的可数无限集，它们的并为$A=\bigcup\limits_{m\in z^+}Am$。

A中任一元素a_{mn}的两足码之和$m+n$称为a_{mn}的高。所谓“对角线方法”就是A对中元素进行如下排列：高不相同时，小者排在前；高相同时，第一个足码小者排在前。即$a_{11},a_{12},a_{21},a_{13},a_{22},a_{31},a_{14},a_{23},a_{32},a_{41},\cdots\cdots$于是$A$的全部元素排成一个无限序列。

对角线方法可以形象地表示为

$$A_1=\{a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},\cdots\}$$
$$A_2=\{a_{21},a_{22},a_{23},\cdots\}$$
$$A_3=\{a_{31},a_{32},\qquad\cdots\}$$
$$A_4=\{a_{41},\qquad\qquad\cdots\}$$
$$\cdots\cdots$$

可以建立象征对角线方法的A到的Z^+双射。

因为A中高为$h(\geq2)$的元素共有$h-1$个：$a_{1(h-1)},\cdots,a_{1(h-1)}$，按对角线方法排列，$a_{mn}(m+n\geq3)$是高为$m+n$的元素中的第$m$个元素。因此$a_{mn}$排在整个序列的第

$[1+2+\cdots+(m+n-2)]+m=\sum\limits_{i=1}^{m+n-2}i+m$个位置，而$a_{11}$排在整个序列的第 1 个位置。

现作A到Z^+的映射f：$f(a_{mn})=\sum\limits_{i=1}^{m+n-2}i+m$,这里$m+n\geq3$,$f(a_{11})=1$。

下面证明f是双射，为此先给出一个关于整数运算的性质。

命题　$\forall k\in Z^+,k\geq2$则$\exists m,n\in z^+,m+n+\geq3$,使得$k=\sum\limits_{i=1}^{m+n-2}i+m$，并且这样$m$、$n$的是被$k$唯一确定的。

证明　$k=2$时，有$k=\sum\limits_{i=1}^{m+n-2}i+m$(取$m=1,n=2$即可)。

假定$k=\sum\limits_{i=1}^{m+n-2}i+m,n\in Z^+,m+n\geq3$，则

(i)当$n\geq2$时；$k+1=\sum\limits_{i=1}^{(m+1)+(n-1)-2}i+(m+1)$，这时$m+1,n-1\in Z^+$，并且$(m+1)+(n-1)=m+n\geq3$；

(ii)当$n=1$时，

$k=\sum\limits_{i=1}^{m-1}i+m=\sum\limits_{i=1}^{m}i\Rightarrow k+1=\sum\limits_{i=1}^{m}i+1=\sum\limits_{i=1}^{1+(m+1)-2}i+1$；这时，1，$m+1\in Z^+$，并且，$1+(m+1)=1+(m+n)>m+n\geq3$。

由(i)，(ii)知命题存在性对$k+1$成立，由归纳法原理，命题存在性得证。

设$m,n,m',n'\in Z^+,m+n\geq3,m'+n'\geq3$，并且有

$\sum\limits_{i=1}^{m+n-2}i+m=\sum\limits_{j=1}^{m'+n'-2}j+m'$

若$m'\neq m$,不妨设$m'>m$,则有$m+n-2>m'+n'-2$，于是$m+n-2\leq\sum\limits_{i=1}^{m+n-2}i-\sum\limits_{j=1}^{m'+n'-2}i=m'-m\leq m'-1$,因此有

$m+n-2\leq m'-1=m'+1-2\leq m'+n'-2$,这与

$m+n-2>m'+n'-2$矛盾，故应$m'=m$,从而$n'=n$,唯一性得证。

因为当$m+n\geq3,m'+n'\geq3,a_{mn}\neq a_{m'n'}$时，$m\neq m'$与$n\neq n'$至少有一个成立，于是由命题唯一性知，$\sum\limits_{i=1}^{m+n-2}i+m\neq\sum\limits_{j=1}^{m'+n'-2}j+m'$，又$\sum\limits_{i=1}^{m+n-2}i+m\neq1$，即$f(a_{mn})\neq f(a_{m'n'})$,$f(a_{mn})\neq f(a_{11})$，故$f$是单射。再由$f$的定义以及命题即知$f$是满射，因此$f$是到$A$的$Z^+$双射。这就证明了$A$是可数无限集。

直接从f的定义可知，对于$m,n,m',n',\in Z^+$

(1)当$m'+n'>m+n\geq3$时，

$$f(a_{mn})\geq\sum_{i=1}^{1+2}i+m=1+m\geq2>f(a_{11})\quad f(a_{m'n'})-f(a_{mn})=\left(\sum_{j=1}^{m'+n'-2}j-\sum_{i=1}^{m+n-2}i\right)+(m'-m)$$

$$\geq(m'+n'-2)+(m'-m)=[(m'+n')-(m+1)]+(m'-1)\geq(m'+n')-(m+n)>0。$$

从而$f(a_{m'n'})>(a_{mn})$。

(2)当$m'+n'=m+n\geq3$，且$m'>m$时，

$$f(a_{m'n'})-f(a_{mn})=\left(\sum_{j=1}^{m'+n'-2}j-\sum_{i=1}^{m+n-2}i\right)+(m'-m)$$

$=m'-m>0$

从而$f(a_{m'n'})>f(a_{mn})$。

因此，f是象征对角线方法中A与Z^+的对应关系。

第二部分：

引理 1　可数无限集的子集是可数集。

引理 2　设集合$A\neq\varphi$,则A是可数集⇔存在Z^+到A的满射。

证明　⇒　若A是可数无限集，则结论自然成立。

设$A=\{a_1,\cdots,a_n\}$是有限集，作$f:Z^+\to A$

$f(k)=a_k,1\leq k\leq n$；$f(k)=a_1,k>n$,则f是Z^+到A的满射。⇐ 设f是Z^+到A的满射，作$\varphi:A\to Z^+$。$\forall a\in A,\varphi(a)=min\{n\in Z^+|f(n)=a\}$。设$a_1,a_2\in A,a_1\neq a_2$，令$(\varphi(a_i),=n_i(\in Z^+)$，$i=1,2$，若$\varphi(a_1)=\varphi(a_2)$,则有$n_1=n_2$,由$\varphi$的定义，$f(n_i)=a_i,i=1,2$，故$a_1=a_2$，结果矛盾。因此$\varphi(a_1)\neq\varphi(a_2)$，于是$A$与 Im$\varphi$对等，而 Im$\varphi\subseteq Z^+$,由引理 1 知，Im$\varphi$是可数集，从而（下转 95 页）

粽子——zongzi

当然，对于初次接触中国文化的外国旅游者来说，这些词听起来也许陌生，但只要经过导游一二次的讲解和指点之后，他们是会"恍然大悟的"。

3.3 诗词的翻译策略

⑴ 铺垫法笔头翻译中因怕"隔阂"而避免借用典故，这在很多大师们有关古诗词的译文中不难发现。许渊冲先生在翻译苏东坡的'欲把西湖比西子，淡妆浓抹总相宜"时，先后把西子译成"the fair lady"和"beauty of the west"。若不加铺垫，直接将现成的译文朗诵给旅游者听，他们就无法了解到中国有个西子，更遑论"西子湖"，"西子国宾馆"了。因此在翻译导游词时，通过必要的铺垫，介绍"西施"乃浙江本地人，中国古代四大美女之一，说明"西子"以自然美著称，在通过西方人熟知的比喻（把西子比做 a Chinese Cleopatra），从而表明西子在中国人心目中的地位。接着面对诗情画意的西湖，向旅游者推出苏东坡的《饮湖上初晴后雨》的英译文。这种情景交融的介绍法，往往会赢得旅游者的欢呼声。

⑵ 补充法：有时仅运用铺垫法尚不能完全奏效，还需要作一些必要的补充。比如在梅雨季节里，向外国旅游者介绍刘禹锡的'东边日出西边雨，道是无晴却有晴"。要让游客们了解这首诗描写初恋少女那种既怀着希望又含有疑虑，既欢喜又担忧的复杂心理，似乎并不太难。但'道是无晴（情）却有晴（情）是中文里特有的双关语。若直接将英译文 The west is veiled in rain，the east enjoys sunshine；My dear is as deep in love as day is fine。朗诵给"老外"们听，他们是无法体会诗中运用了形象比喻和谐声双关来表达少女的微妙恋情的。所以除了事先介绍汉语中的'sunny day'暗指 love，而 no sunny day 则暗示'no love"。在读完英译文之后，还需补充一句'No sunny day？"But there is still love。这样才会获得老外们的一片赞扬。

⑶ 展示法：在介绍唐朝诗人刘禹锡的《玄都观桃花》时，最好在桃花盛开的时候将外国旅游者带到现场，即使因故不能去现场亲身感受，最好也能通过图示、或图片、幻灯、录像等向游客现场展示，即景抒情，朗诵该诗，将游客带入特有的意境。

紫陌红尘拂面来，
无人不道看花回，
玄都观里桃千树，
尽是刘郎去后栽。

The capital streets bustled with people and activity，
Everybody never said but they were back from seeing flowers,
In Xuandu Taoist Temple blooming peach trees are so many，
All were planted after I departed from the court hours.

4 结语

由于旅游的综合性，决定了旅游文本所涵盖的知识面之广，文化性之浓，专业性之强，远非其他文本所能及。因此导游词文本的翻译（而且大多是现场口译）对英文导游员来说是一个在心理上、知识上、文化上、语言转换上等方面极大的挑战。既要有一定的翻译理论作指导，又不拘泥于教条主义，既要在语言转换上"对等"地表达原语的本质含意，又要灵活机动，不为原文所困，让旅游者不仅获取文化方面的信息，同时也让他们的身心得到放松。

参考文献：

1.陈 刚.旅游翻译与涉外导游[M].北京：中国对外翻译出版公司，2004

2.郭著章，李庆生.英汉互译实用教程[M].武汉：武汉大学出版社，2003

3.刘宓庆.翻译教学：实务与理论[M.北京：中国对外翻译出版公司，2003

4.Nida，Eugene and LiaoQiyi."Translation and Translation Studies"[J].Journal of Foreign Languages， 2000.

（上接 96 页）A是可数集。

引理 3 $\forall n\in Z^+, \exists k,m\in Z^+$，使得$n=2^{k-1}(2m-1)$，并且这样的$k$与$m$是被$n$唯一确定的。

（本引理用算术基本定理易证，这里从略）。

定理 可数个可数集的并是可数集。

证明 (I) 设$A_1,\cdots,A_n$是n个可数集。

若对于每个$P\in\{1,\cdots,n\}$都有$A_p=\phi$，则$\bigcup\limits_{p=1}^{n}A_p=\phi$；

若存在某个$P_0\in\{1,\cdots,n\}, A_{p_0}\neq\phi$则作映射

$f:Z^+\to\bigcup\limits_{p=1}^{n}A_p$，对于任意$k,m\in Z^+$，

$$f\left[2^{k-1}(2m-1)\right]=\begin{cases} f_k(m), & \text{当}1\le k\le n\text{，且}A_k\neq\phi\text{时；} \\ f_{p_0}(m), & \text{当}k>n\text{或}1\le k\le n\text{且}A_k=\phi\text{时。}\end{cases}$$

其中f_p是当$A_p\neq\phi$时Z^+到A_p的满射，$P\in\{1,\cdots,n\}$，则f是Z^+到$\bigcup\limits_{p=1}^{n}A_p=\phi$的满射，由引理 2，$\bigcup\limits_{p=1}^{n}A_p=\phi$是可数集。

(Ⅱ) 设$A_1,\cdots,A_k\cdots$是可数无限个可数集。

若对于每个$k\in Z^+$都有：

$A_k=\phi$，则$\bigcup\limits_{k\in Z^+}A_k=\phi$；

若存在某个$k_0\in Z^+, A_k\neq\phi$，则做映射

$g:Z^+\to\bigcup\limits_{k\in Z^+}A_k$，对任意$k,m\in Z^+$

$$g\left[2^{k-1}(2m-1)\right]=\begin{cases} g_k(m), & \text{当}A_k\neq\phi\text{时；} \\ g_{k_0}(m), & \text{当}A_k=\phi\text{时。}\end{cases}$$

其中g_k是当$A_k\neq\phi$时，Z^+到A_k的满射。则g是Z^+到$\bigcup\limits_{k\in Z^+}A_k$的满射，由引理 2，得出$\bigcup\limits_{k\in Z^+}A_k$是可数集。

由(Ⅰ)、Ⅱ)即知本定理结论为真。

还需指出，在第一部分中，建立A到Z^+的双射还有其他方法，例如，命$\psi:A\to Z^+, \forall m,n\in Z^+, \psi(a_{mn})=2^{m-1}(2n-1)$，则$\psi$是$A$到$Z^+$的双射，但$\psi$却不象征对角线方法中$A$与$Z^+$的对应关系。

参考文献：

1.夏道行，吴卓人，严绍宗，舒五昌.实变函数与泛函分析.北京：人民教育出版社，1978:24～25