第 16 卷第 5 期　　吉安师专学报(自然科学)　　Vol. 16 No. 5
1995 年 10 月　　Journal of Ji'an Teachers' College(Natural Science)　　Oct. 1995

数学分析中悬而未决的问题

欧阳耿
(漳州师范学院　漳州 363000)

摘　要　讨论了数学分析中未解决的新、旧问题，分析存在于几代数学分析基础理论中的缺陷，提出了解决问题的一条思路.

关键词　数学分析　问题

60年代初，美国数学家罗滨逊提出了非标准数学分析理论，为数学分析理论的发展增添了一个新的篇章. 如果我们把牛顿、莱布尼兹时代的数学分析理论称为第一代数学分析理论，将标准分析称为第二代；那么，非标准分析可被称为第三代数学分析理论.

通常，人们认为建立在实数连续统上的第二代数学分析理论已经很完善了，而第三代理论诞生后，不少人又认为它将成为未来的数学分析理论. 但是，从下面的讨论中，我们将清楚地看到，第二代理论实际上没有从本质上解决数学的第二次危机，而第三代理论也同样不具备解决这危机的能力. 三代理论有着共同的本质性缺陷.

1　无穷小增量悖论与第二次数学危机

至少从阿基米德时代起，无穷小量方法已是力学和几何学里的一个重要工具. 到了16、17世纪，除了求曲线长度及曲线所包围的面积等类问题外，还产生了诸如求速度、切线和极大、极小值等新问题. 终于，在17世纪晚期形成了微积分这门科学.

新诞生的微积分方法一方面以其运用的广泛性和运算的完整性证实了它自身的价值和科学性而迅速地成长、壮大，成为解决问题的重要工具；同时，也因其运算过程中所存在的一种前所未有的神秘性而暴露了数学中与有穷、无穷概念体系相关的基础理论的缺陷，使人们走上了漫长的探索"微增量"性质之路.

以求落体的瞬时速度为例，用 dt 表示时间的无穷小增量，ds 表示相应的距离增量，我们要求 ds/dt，这是个有穷数值. 为了求出 $t=1$ 到 $t=1+dt$ 之间的距离增量，要求当 $t=1$ 时落体的位置：$\frac{1}{2}\times 9.8\times 1^2=4.9\ (\mathrm{m})$，再求当 $t=1+dt$ 时落体的位置：$\frac{1}{2}\times 9.8(1+dt)^2(\mathrm{m})$；我们可求出距离的增量：$9.8dt+\frac{1}{2}\times 9.8dt^2(\mathrm{m})$，所以，所求的瞬时速度就是比值：$ds/dt=9.8+\frac{1}{2}\times 9.8dt\ (\mathrm{m/s})$，这时需令 $dt=0$，得 $ds/dt=9.8(\mathrm{m/s})$.

在这样的一种数学运算中，人们称 dt 为无穷小. 但无穷小是什么 —— 它只能有一种身份：不是 0 就是非 0 的有穷数. 可是事实却是不管它是 0 或某有穷数都会导至悖论. 人们将此运算

收稿日期：1995－05－17，收修改稿日期：1995－06－20

过程中所存在的逻辑矛盾称为“第二次数学危机”.著名的贝克莱道出了这危机的本质,他说:“因为当说到增量消失,即增量不存在或没有增量,那么,原先增量为某数或有增量的假定就被破坏了,但却保留了在这假定下推出的结论,即靠它得到的表达式却被保留了,这是错误的推理方法”. dt 之谜耗费了人类大量的心血,但实际上,是传统的有穷、无穷概念体系的缺陷导致了第二次数学危机的产生.

2 第二代数学分析理论中的新、旧问题

人们普遍认为,经过近200年的努力之后所创立的第二代数学分析理论彻底解决了数学的第二次危机.这理论想通过在微积分中赶走无穷小来达到巩固其基础的目的.对于上述求瞬时速度的例子,其作法是放弃了把它当作无穷小增量的比值来计算的企图,而把它定义为有穷增量的比值所逼近的极限:令 Δt 为一变动的有穷增量,Δs 为相应地变化着的距离增量,那么 $\Delta s/\Delta t$ 是变量 $32+16\Delta t$;所以,由定义,当 $t=1$ 时的瞬时速度就是32.

对于以极限论为基础的这种作法,实际上人们还有不少忧虑.一方面人们发觉,在操作上,第一代理论中那个“dt 先不为0而被引进,参与运算,然后宣布为0而被扬弃”的过程实际上完全等价于第二代理论中的“Δt 先不充分变小($\Delta t\to 0$)而被引进算式,参与运算,然后突然宣布它充分变小($\Delta t\to 0$)而被扬弃”的过程.另一方面,从理论上看,在第一代理论中,人们无法阐明为什么同一个 dt,一会儿可以说它是非0的很小的数,一会儿又可以说它是0.而第二代理论中,人们也同样无法阐明为什么同一个 Δt,一会儿可以说它是“变动的有穷增量”,一会儿又可以说它是“变动的充分小的量”(或叫“无限趋于0的量”).事实说明,第一代中的“dt 之谜”就是第二代理论中的“Δt 之谜”,只不过是换了一种说法而已.还有,在第二代数学分析理论中,人们用“$\varepsilon-\delta$”语言来定义 Δt,可是也用这完全相同的“$\varepsilon-\delta$”语言来定义无穷小.明摆着的事实是:只要在数学中承认无限,就没办法在数学分析中避开无穷小.可见,第二代理论根本没有能力真的从数学分析中赶走无穷小,而仅是在某些场合中给原来的那固定无穷小以及与之相关的数学内容换些称呼而已——原来的 dt 确实是给换上了一种很玄的,似有似无的名称:变量.无穷小已不是一种固定的数,而是一种处于不断变化中的变量.这下子问题解决了,因为它既然是变量,则可在任何时候变成你所需要的数量形式.比如在求导数过程中,同一个 Δt,你可以说它“还不充分变小”而将它引入算式,参与有穷数的各种运算,而当你想将它从式中赶走时,只要搬出那“$\varepsilon-\delta$”语言,过一道例行手续,再说声“这时 Δt 已充分变小”,它就不知去向了.这里有个使人感到无法搞清楚的问题是:究竟该在何时对变量办理“$\varepsilon-\delta$”语言手续,而让它们一下子都成为“无限趋于0的数学内容”竟然没有任何理论根据,凭感觉?凭需要?这情况恰恰又与当初人们批评在第一代分析理论中对无穷小任意办理“令”的手续,使其一下子突然变成0的情况完全一样.此外,第二代理论中还有一种很有趣的情况:理论上必须一口咬定“变动的无限趋于0的量”不是数,但实际上,只要这样的数学内容出现在数学里有穷数的算式中,却谁也不敢说它们不是数而将它们从算式里赶走,倒是老老实实地让它们与各种有穷数一起进行 只有数学里的有穷数才可以有的各种运算.所以,只要冷静一点,认真一点,人们马上会发现,实际上标准分析的基础理论根本无法解决贝克莱悖论,根本无法解决数学的第二次危机.

当然,在微积分问题中,人们事先已都知道了正确的结果,因此,想怎样去称呼那个 Δt,打算怎样去解释与 Δt 有关的那一切,似乎都无关紧要,有关争论可无休止地进行下去.可是在下面这个与调和级数敛散性有关的证明中(以下简称“原证”)所发现的新的疑难,却给人们提出

了完全不同的另一类新的问题，这不同的情况可帮我们从另一角度来认识存在于第二代分析理论中的缺陷.

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots \tag{1}$$

$$=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k})+\cdots \tag{2}$$

$$>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k})+\cdots \tag{3}$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\rightarrow\infty \tag{4}$$

这个证明最早是 Oresme 于 1360 年左右在《欧几里德几何问题》小册子中给出的. 我们可在现有的. 由任何语言所写的许多数学分析书中看到这个被公认的，很简单但却有着不寻常意义的证明. 对它有两种解释：

1) 对级数(1) 加上无穷多个括号而得到一个新的，含有无穷多个大于 1/2 的数的正数项无穷常增级数(3)；然后，通过 $s_n\rightarrow\infty$ 的新级数(3) 的发散性证得级数(1) 发散.

2) 对级数(1) 加上许多个括号而得 $s_n\geqslant k\cdot 1/2$，在此，k 大于任给正数，然后取极限，当 $n\rightarrow\infty$ 时，$k\rightarrow\infty$，因此 $s_n\rightarrow\infty$ 而证得级数(1) 发散.

原证中的思路与作法是数学中传统的有穷、无穷概念体系和与之相关的极限论很彻底而又自然的表现.

对于第一种解释，承认无穷常减的调和级数中的 $u_n\rightarrow 0$ 这一事实，原证中那种使用多项式加括号法则去处理调和级数中的无穷多个 $u_n\rightarrow 0$ 的数量形式而制造出无穷多个大于 1/2 的量的思路与作法不妥. 这个古老的证明中有个新被发现的问题：如想对级数(1) 加上无穷多个括号而制造出无穷多个大于 1/2 的量，就要求级数提供无穷多个被加的量，即需 $n\rightarrow\infty$，但是当 $n\rightarrow\infty$ 时，按定义，级数中必出现无数以 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}u_n=0$，$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}u_{n-1}=0$，…，$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}u_{n-a}=0$，… 的形式所表现的那类数量形式，而使如此多项式运算的加括号法则再也没办法制造出任何大于 1/2 的量了. 所以，如此加括号法则仅能处理调和级数中的一部分数项而制造出许多个大于 1/2 的量，但却没有能力处理调和级数中的无穷数项而得到无穷多个大于 1/2 的量.

如果原证中那种随心所欲的作法是允许的，那我们只要改变原证中的加括号法则，依法炮制，就可将调和级数变成任意的正数项无穷常增级数. 这样，一个 $u_n\rightarrow 0$ 的无穷常减级数就可以象变戏法一样变成了任意的 $s_n\rightarrow\infty$ 的无穷常增级数，难道这样两种性质上有很大区别的无穷级数果然真的可以互相转化?这只能给原来的"无穷"、"无穷小" 概念再添上一层神秘的色彩. 人们不自觉地在现代数学分析中以不同的语言再现了古老的"人龟赛跑" 芝诺悖论. 这样的悖论会以不同的形式反复出现，是由传统有穷、无穷理论体系的缺陷所造成的.

对于第二种解释，我们承认可对级数(1) 的有穷数项加上有穷多个括号而得 $s_n\geqslant k\cdot 1/2$，但如果接下去说"要取极限"，而断言当 $n\rightarrow\infty$，$k\rightarrow\infty$，因此 $s_n\rightarrow\infty$ ，就错了。因为当我们说 $n\rightarrow\infty$ 时，实际上就同时承认了 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}u_n=0$，$\lim\limits_{n\rightarrow\infty}u_{n-1}=0$，…，这类事实的存在，而再也没有"原料" 让那样的一种多项式加括号法去制造出任何大于 1/2 的数了. 这决定 k 根本就不具备趋于 ∞ 的条件，$s_n\rightarrow\infty$ 的推论是没有根据的. 在原证中，有穷与无穷的概念是那样的模糊不清，"取极限" 是那样的随心所欲. 我们清楚地看到，在整个证明中，竟然可以不必分析级数中的 $u_n\rightarrow 0$ 是什么意思，竟然可以只字不提无穷常减级数中是否存在"无限趋于 0 的数量形式"(或"无穷

小")，如果有，该如何处理它们，为什么要那样处理?比如说，能否象在求导数的运算中那样，对这些无穷小数项(或叫无限趋于0的量)过一道“$\varepsilon-\delta$”语言的手续，而让它们都从多项式加法运算式中消失?是数学家把这些问题给忘了吗?不，问题的关键是：在传统的有穷、无穷理论体系中该在什么时候对什么样的数学内容取极限毫无理论根据。而更重要的是：在传统的体系中，“无穷”是个很笼统的数学内容，它根本无法明确地表现与无穷概念相关的各种数量形式，这必然使人们无法认识调和级数中 $u_n\to 0$ 所表示的数学意义，该如何认识与处理这类与 $u_n\to 0$ 有关的无数数项人们心里是无数的：既然古人想那样处理调和级数中的数项，大家就别多嘴就是了，以免再引来一场不可能有结局的争论. 换句话说，以现有数学中传统的有穷、无穷理论体系和与之相关的极限论，谁也无法自圆其说地回答，用那样一种加括号法则去处理调和级数，究竟能制造出多少个大于 1/2 的量 —— 有穷多个或无穷多个?很明显，不管是哪种结论都会产生悖论.

3 第三代数学分析理论中所存在的问题

罗滨逊教授在《非标准分析》一书的再版序言中指出，非标准分析之所以比标准分析好而能成为未来的数学分析理论，有两个理由.

第一个理由，他说：“虽然将来的情况也许会有变化，但是迄今为止我们所提出的非标准方法，相对于公认的数学原理(如 Zermelo — Frankel 公理，包括选择公理)来说毕竟是保守的，这就是说，一个非标准证明总能用一个标准证明来代替，虽然后者可能比较复杂并且不直观，所以本书作者抱有这种观点，即对一种特殊的数学学科，是否采用非标准分析，这只是个选择问题. 自然，每个人实际上怎样取舍依赖于他早年所受的训练”. 而在另一篇文章《非标准 $\lambda:\varphi_2^4(x)$ 模型 · I · 理论物理中的非标准分析方法》的引言中，他说：“使用非标准分析，我们能获得随时合乎于用标准方法计算所要求的结果，而且我们还能在非标准系统中重新解释这些结果”. 这第一个理由很明确地表明标准分析与非标准分析之间的主要区别就在操作上的简繁性及所用语言的不同上. 其实我们也从一些已出版的书中看到不少人已将第二代数学分析中的内容翻译成第三代中的内容. 对于上述那求自由落体瞬时速度的例子，翻译后的情况如下：

标准分析

令 $t'=1+\Delta t$，Δt 为一变动的正有穷数

则 $s'=\dfrac{1}{2}\times 9.8(1+\Delta t)^2$

$$\Delta s=s'-s=9.8\Delta t+\frac{1}{2}\times 9.8\Delta t^2$$

$$\Delta s/\Delta t=9.8+\frac{1}{2}\times 9.8\Delta t.$$

给定不论多小的正数 ε，可选 $\delta=\varepsilon/4.9$，那么对一切 $|\Delta t|<\delta$，

$$\Delta s/\Delta t-9.8=4.9\Delta t<4.9\delta=\varepsilon$$

瞬时速度 $=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta s/\Delta t=9.8.$

非标准分析

令 $t'=1+\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}t$ 为正无穷小数

则 $$s' = \frac{1}{2} \times 9.8(1 + \mathrm{d}t)^2$$

$$\mathrm{d}s = s' - s = 9.8\mathrm{d}t + \frac{1}{2} \times 9.8\mathrm{d}t^2$$

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = 9.8 + \frac{1}{2} \times 9.8\mathrm{d}t$$

因为 $\mathrm{d}t$ 是无穷小数，故 $9.8\mathrm{d}t$ 也是无穷小，9.8 是标准数，故瞬时速度为 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ 的标准实数部分 $= 9.8$.

第二个理由讲的是由紧致性定理所推证出的新无穷小在数学分析中的意义.

正如我们所知道的那样，这两点已成了许多人认为非标准分析比标准分析优越而要成为未来的数学分析理论的理由. 但实际上这样的理由说明不了任何问题.

对于第一种理由，从上面的讨论中我们已知道，第二代理论的主要缺陷并不在于它太繁琐，太复杂，而在于其基础理论的缺陷. 从所周知，如都不考虑解决问题的能力而只考虑操作上的简繁性，这三代理论要属第一代最简，整个运算过程干脆利索！然而，做这样的比较毫无意义. 既然第二代分析理论具有很本质性的缺陷，而决定第三代理论优越性的第一个理由竟然是第二、三代分析理论的所有内容之间都可以互相翻译，人们很自然地会产生这样的疑问：为什么有那么大的把握说一个非标准证明总能用一个标准证明来代替？第二代数学分析中所存在的那些无法解决的问题是否随之就以不同的形式出现在第三代数学分析中？

再看第二个理由. 首先我们认为第一代分析理论中的那个旧无穷小，第二代中的那个“变动的无限趋于 0 的量”，以及第三代中的那个新无穷小，这三者之间并没有什么本质性区别. 在定义上，它们都是大于 0 小于任给正实数的数学内容. 只不过是由于其理论体系在形式上的限制而决定了它们在叫法上该有所区别. 在操作上它们都是来去相当自由的东西. 且看它们是如何被赶出算式的：在第一代中，某时，人们说声“令其为 0”，它就不见了；在第二代中，人们麻烦一点，先过道“$\varepsilon - \delta$”语言手续，再说声“取极限”，它就无影无踪了，在第三代中，人们说声“取标准数”，它就消失了. 换一种场合，再看三代理论对调和级数中 $u_n \to 0$ 这类数项的认识与处理，也都毫无区别.

其次，我们冷静地将第二代理论中的“点”与第三代理论中的“单子”进行比较，我们会发现，第二代理论中的“点及其邻域”的结构就等价于第三代中的“单子”的结构.“点的任意小（也被叫作无穷小）邻域”则等价于“单子中的无穷小部分”，“不同阶的、变动的无限趋于0的量（有时也被叫作不同阶的无穷小）”就等价于“不同层次的单子中的无穷小”，而运算过程中的“取极限步骤”就等价于“取标准数步骤”.

可见这“新无穷小”实际上一点儿也不新. 正是由于这样一种深层结构中的等价性，才导致了“一种非标准证明总能由一种标准证明来代替”，确保了第二、三代数学分析内容之间可以互相翻译的可行性. 而这深层结构中的等价性是由相同的那种传统的有穷、无穷理论体系所决定的. 关于非标准分析理论通过单子结构第一次对层次概念作出数学刻划的说法言过其实，因为非标准分析理论所做的仅是在同一个传统（古典）的有穷、无穷理论体系框架内对标准分析中有关内容开展一场改名换姓的运动而已. 这决定了这样一种不够彻底的“新”无穷小理论不可能解决数学分析中原来所存在的那些谜与问题，不可能成为未来的数学分析理论.

4 结论

第一、二、三代数学分析中都存在着其理论体系无法解决的完全相同的谜与问题,根本的原因在于它们都以传统的有穷、无穷概念体系为其基础理论,但这基础理论有本质性缺陷.

只有突破传统体系的束缚,从有穷、无穷概念体系的科学性入手,认识与"无穷"概念相关的各种新的数学内容,才可能构造出科学的(第四代)数学分析理论,彻底解决现有数学分析中与"无穷"概念相关的各种谜与问题. 并且,第四代数学分析理论不可能与旧的三代理论中的任何一代等价. 现有数学分析中绝大部分成果是正确的,但基础理论部分的改造使一些新的数学内容产生,会有某些不同的数学操作,甚至还会有某些不同的结论.

沿着本文的思路,我们的研究工作的意义将远远超出数学,远远超出数学分析本身.

参 考 文 献

1 克莱因 M. 古今数学思想. 张理京等译. 上海:上海科学技术出版社,1979,1980,1981

2 戈丁 L. 数学概观. 胡作玄译. 北京:科学出版社,1984

3 波耶 C B. 微积分学概念史. 上海师范大学数学系翻译组译. 上海:上海人民出版社,1977

4 爱德华 C H. 微积分发展史. 张鸿林译. 北京:北京出版社,1985

5 菲赫金哥尔茨 Γ M. 微积分学教程. 叶彦谦等译. 北京:人民教育出版社,1955

6 鲁金 H H. 微分学. 谭家岱,张理京译. 北京:高等教育出版社,1956

7 鲁金 H H. 积分学. 张理京,谭家岱译. 北京:人民教育出版社,1958

8 西安交通大学《高等数学》编写组. 高等数学. 北京:人民教育出版社,1975

9 潘承洞,于秀源. 阶的估计. 济南:山东科学技术出版社,1983

10 罗滨逊 A. 非标准分析. 陆传务等译. 武汉:华中工学院出版社,1980

11 赵国清等. 非标准微积分. 哈尔滨:黑龙江科学技术出版社,1983

---

26. 数学分析中的矛盾问题研究
27. 中国经济悬而未决的几大问题
28. 龙涎香此案悬而未决
29. 数学分析中的矛盾问题研究
30. 浅析北美自由贸易协定中悬而未决的问题
31. 用定义研究数学分析中的极限问题
32. 德班世界气候大会闭幕 诸多问题悬而未决
33. 由猿进化到人:几个悬而未决的问题
34. 巴西世界杯10大悬而未决问题
35. 对话之四：土地问题——最大制约 悬而未决
36. 数学在经济分析中的应用
37. 浅谈数学分析中的数学思想
38. 江淮两款产品遭投诉,问题仍悬而未决
39. 明天,悬而未决(组诗)
40. “悬而未决”的PIPE市场
41. 悬而未决的种子专利问题
42. 悬而未决的海湾战争赔款问题
43. 数学分析中悬而未决的问题
44. 美国“财政悬崖”悬而未决
45. 悬而未决的发展中国家外债问题
46. 悬而未决，“国Ⅲ”分步实施还有这些问题亟需解决
47. 管理中四个悬而未决的问题
48. 妊娠糖尿病悬而未决的问题
49. 悬而未决的仍然是文明的未来
50. 中国那悬而未决的3G……