

Nama : Archi Cantona Rusanggara

NPM : 140810180050

Kelas : A

### Studi Kasus 5: Mencari Pasangan Titik Terdekat (Closest Pair of Points)

Tugas:

1. Buatlah program untuk menyelesaikan problem closest pair of points menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++

Program :

```
/*
Nama : Archi Cantona Rusanggara
NPM : 140810180050
Kelas : A
Program : Closest Pair of Point
*/

#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;

// A structure to represent a Point in 2D plane
class Point
{
public:
int x, y;
};

// Needed to sort array of points
// according to X coordinate
int compareX(const void* a, const void* b)
{
Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
return (p1->x - p2->x);
}

// Needed to sort array of points according to Y coordinate
int compareY(const void* a, const void* b)
{
Point *p1 = (Point *)a, *p2 = (Point *)b;
return (p1->y - p2->y);
}

// A utility function to find the
```

```

// distance between two points
float dist(Point p1, Point p2)
{
    return sqrt( (p1.x - p2.x)*(p1.x - p2.x) +
                (p1.y - p2.y)*(p1.y - p2.y)
                );
}

// A Brute Force method to return the
// smallest distance between two points
// in P[] of size n
float bruteForce(Point P[], int n)
{
    float min = FLT_MAX;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = i+1; j < n; ++j)
            if (dist(P[i], P[j]) < min)
                min = dist(P[i], P[j]);
    return min;
}

// A utility function to find
// minimum of two float values
float min(float x, float y)
{
    return (x < y)? x : y;
}

// A utility function to find the
// distance between the closest points of
// strip of given size. All points in
// strip[] are sorted according to
// y coordinate. They all have an upper
// bound on minimum distance as d.
// Note that this method seems to be
// a O(n^2) method, but it's a O(n)
// method as the inner loop runs at most 6 times
float stripClosest(Point strip[], int size, float d)
{
    float min = d; // Initialize the minimum distance as d

    qsort(strip, size, sizeof(Point), compareY);

    // Pick all points one by one and try the next points till the difference
    // between y coordinates is smaller than d.
    // This is a proven fact that this loop runs at most 6 times
    for (int i = 0; i < size; ++i)
        for (int j = i+1; j < size && (strip[j].y - strip[i].y) < min; ++j)

```

```

        if (dist(strip[i], strip[j]) < min)
            min = dist(strip[i], strip[j]);

    return min;
}

// A recursive function to find the
// smallest distance. The array P contains
// all points sorted according to x coordinate
float closestUtil(Point P[], int n)
{
    // If there are 2 or 3 points, then use brute force
    if (n <= 3)
        return bruteForce(P, n);

    // Find the middle point
    int mid = n/2;
    Point midPoint = P[mid];

    // Consider the vertical line passing
    // through the middle point calculate
    // the smallest distance dl on left
    // of middle point and dr on right side
    float dl = closestUtil(P, mid);
    float dr = closestUtil(P + mid, n - mid);

    // Find the smaller of two distances
    float d = min(dl, dr);

    // Build an array strip[] that contains
    // points close (closer than d)
    // to the line passing through the middle point
    Point strip[n];
    int j = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        if (abs(P[i].x - midPoint.x) < d)
            strip[j] = P[i], j++;

    // Find the closest points in strip.
    // Return the minimum of d and closest
    // distance is strip[]
    return min(d, stripClosest(strip, j, d) );
}

// The main function that finds the smallest distance
// This method mainly uses closestUtil()
float closest(Point P[], int n)
{
    qsort(P, n, sizeof(Point), compareX);

```

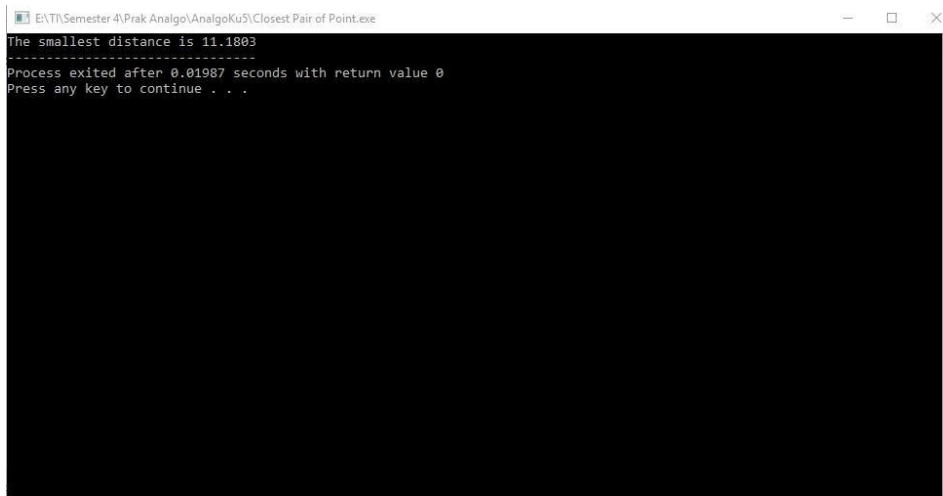
```

// Use recursive function closestUtil()
// to find the smallest distance
return closestUtil(P, n);
}

// Driver code
int main()
{
    Point P[] = {{2, 3}, {12, 30}, {40, 50}, {5, 1}, {12, 10}, {3, 4}};
    int n = sizeof(P) / sizeof(P[0]);
    cout << "The smallest distance is " << closest(P, n);
    return 0;
}

```

## Screenshot :



2. Tentukan rekurensi dari algoritma tersebut, dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode recursion tree untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O ( $n \lg n$ )

Jawab :

### Kompleksitas Waktu

Biarkan kompleksitas waktu dari algoritma di atas menjadi  $T(n)$ . Mari kita asumsikan bahwa kita menggunakan algoritma pengurutan  $O(n \lg n)$ . Algoritma di atas membagi semua titik dalam dua set dan secara rekursif memanggil dua set. Setelah membelah, ia menemukan strip dalam waktu  $O(n)$ , mengurutkan strip dalam waktu  $O(n \lg n)$  dan akhirnya menemukan titik terdekat dalam strip dalam waktu  $O(n)$ .

Jadi  $T(n)$  dapat dinyatakan sebagai berikut

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n) + O(n \log n) + O(n)$$

$$T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n)$$

$$(n) = T(n \times \log n \times \log n)$$

#### Catatan

1. Kompleksitas waktu dapat ditingkatkan menjadi  $O(n \log n)$  dengan mengoptimalkan langkah 5 dari algoritma di atas.
2. Kode menemukan jarak terkecil. Dapat dengan mudah dimodifikasi untuk menemukan titik dengan jarak terkecil.
3. Kode ini menggunakan pengurutan cepat yang bisa  $O(n^2)$  dalam kasus terburuk. Untuk memiliki batas atas sebagai  $O(n (\log n)^2)$ , algoritma pengurutan  $O(n \log n)$  seperti pengurutan gabungan atau pengurutan tumpukan dapat digunakan

### Studi Kasus 6: Algoritma Karatsuba untuk Perkalian Cepat

#### Tugas:

- 1) Buatlah program untuk menyelesaikan problem fast multiplication menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan (Algoritma Karatsuba). Gunakan bahasa C++

Program :

```
/*
Nama    : Archi Cantona Rusanggara
NPM     : 140810180050
Kelas  : A
Program : Closest Pair of Point
*/

#include<iostream> #include<stdio.h>

using namespace std;

int makeEqualLength(string &str1, string &str2)
{
    int len1 = str1.size(); int len2 = str2.size(); if (len1 < len2)
    {
        for (int i = 0 ; i < len2 - len1 ; i++) str1 = '0' + str1;
        return len2;
    }
    else if (len1 > len2)
    {
        for (int i = 0 ; i < len1 - len2 ; i++) str2 = '0' + str2;
    }
    return len1; // If len1 >= len2
}
```

```

// The main function that adds two bit sequences and returns the addition string addBitStrings( string first, string second )
{
    string result; // To store the sum bits

    // make the lengths same before adding
    int length = makeEqualLength(first, second); int carry = 0; // Initialize carry

    // Add all bits one by one
    for (int i = length-1 ; i >= 0 ; i--)
    {
        int firstBit = first.at(i) - '0';
        int secondBit = second.at(i) - '0';

        // boolean expression for sum of 3 bits
        int sum = (firstBit ^ secondBit ^ carry)+'0'; result = (char)sum + result;
        // boolean expression for 3-bit addition
        carry = (firstBit&secondBit) | (secondBit&carry) | (firstBit&carry);
    }

    // if overflow, then add a leading 1 if (carry) result = '1' + result;

    return result;
}

// A utility function to multiply single bits of strings a and b int multiplySingleBit(string a, string b)
{
    return (a[0] - '0')*(b[0] - '0');
}

// The main function that multiplies two bit strings X and Y and returns
// result as long integer
long int multiply(string X, string Y)
{
    // Find the maximum of lengths of x and Y and make length
    // of smaller string same as that of larger string int n = makeEqualLength(X, Y);

    // Base cases
    if (n == 0) return 0;
    if (n == 1) return multiplySingleBit(X, Y);

    int fh = n/2; // First half of string, floor(n/2)
    int sh = (n-fh); // Second half of string, ceil(n/2)

    // Find the first half and second half of first string.
    // Refer http://goo.gl/ILmgn for substr method string Xl = X.substr(0, fh);
    string Xr = X.substr(fh, sh);

```

```

// Find the first half and second half of second string string Yl = Y.substr(0, fh);
string Yr = Y.substr(fh, sh);

// Recursively calculate the three products of inputs of size n/2 long int P1 = multiply(Xl, Yl);
long int P2 = multiply(Xr, Yr);
long int P3 = multiply(addBitStrings(Xl, Xr), addBitStrings(Yl, Yr));

// Combine the three products to get the final result. return P1*(1<<(2*sh)) + (P3 - P1 - P2)*(1<<sh) + P2;
}

// Driver program to test above functions int main()
{
printf ("%d\n", multiply("1100", "1010"));
printf ("%d\n", multiply("110", "1010"));
printf ("%d\n", multiply("11", "1010"));
printf ("%d\n", multiply("1", "1010"));
printf ("%d\n", multiply("0", "1010"));
printf ("%d\n", multiply("111", "111"));
printf ("%d\n", multiply("11", "11"));
}

```

## Screenshot :

```

E:\T1\Semester 4\Prak Analgo\AnalgoKu5\problem fast multiplication Karatsuba Algorithm.exe
30
36
120
14
0
98
36
-----
Process exited after 0.02064 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

1. Rekurensi dari algoritma tersebut adalah  $T(n) = 3T(n/2) + O(n)$ , dan selesaikan rekurensinya menggunakan metode substitusi untuk membuktikan bahwa algoritma tersebut memiliki Big-O ( $n \lg n$ )

Jawab :

- Let's try divide and conquer.
  - Divide each number into two halves.
    - $x = x_H r^{n/2} + x_L$
    - $y = y_H r^{n/2} + y_L$
  - Then:
$$xy = (x_H r^{n/2} + x_L) y_H r^{n/2} + y_L$$
$$= x_H y_H r^n + (x_H y_L + x_L y_H) r^{n/2} + x_L y_L$$
  - Runtime?
    - $T(n) = 4 T(n/2) + O(n)$
    - $T(n) = O(n^2)$
- Instead of 4 subproblems, we only need 3 (with the help of clever insight).
- Three subproblems:
  - $a = x_H y_H$
  - $d = x_L y_L$
  - $e = (x_H + x_L) (y_H + y_L) - a - d$
- Then  $xy = a r^n + e r^{n/2} + d$
- $T(n) = 3 T(n/2) + O(n)$
- $T(n) = O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.584...})$

## Studi Kasus 7: Permasalahan Tata Letak Keramik Lantai (Tiling Problem)

Tugas:

1. Buatlah program untuk menyelesaikan problem tiling menggunakan algoritma divide & conquer yang diberikan. Gunakan bahasa C++ Jawab :

Program :

```
/*
Nama    : Archi Cantona Rusanggara
NPM     : 140810180050
Kelas  : A
Program : Closest Pair of Point
*/

// C++ implementation to count number of ways to
// tile a floor of size n x m using 1 x m tiles
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

// function to count the total number of ways
```



```
int countWays(int n, int m)
{
    // table to store values
    // of subproblems
    int count[n + 1];
    count[0] = 0;

    // Fill the table upto value n
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        // recurrence relation
        if (i > m)
            count[i] = count[i - 1] + count[i - m];

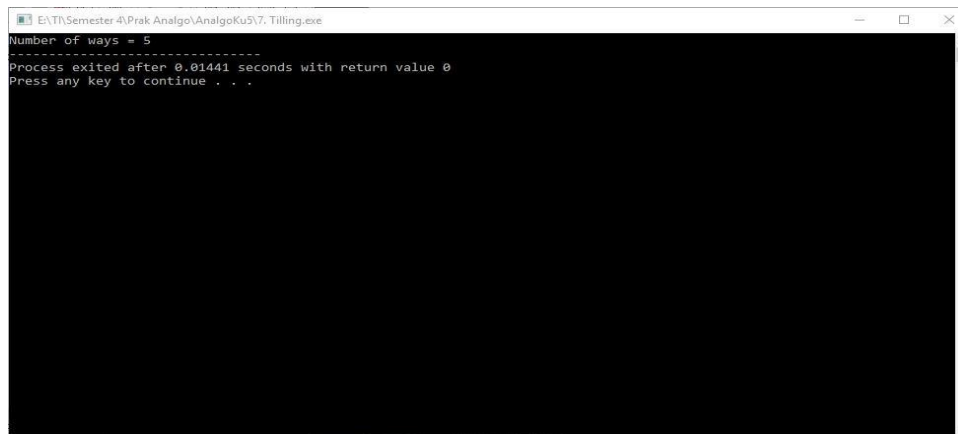
        // base cases
        else if (i < m)
            count[i] = 1;

        // i == m
        else
            count[i] = 2;
    }

    // required number of ways
    return count[n];
}

// Driver program to test above
int main()
{
    int n = 4, m = 2;
    cout << "Number of ways = "
         << countWays(n, m);
    return 0;
}
```

## Screenshot :



```
E:\T\Semester 4\Prak Analgo\AnalgoKu5\7. Tiling.exe
Number of ways = 5
-----
Process exited after 0.01441 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .
```

// n adalah ukuran kotak yang diberikan, p adalah lokasi sel yang hilang Tile (int n, Point p)

1. Kasus dasar:  $n = 2$ , A  $2 \times 2$  persegi dengan satu sel yang hilang tidak ada apa-apanya tapi ubin dan bisa diisi dengan satu ubin.
2. Tempatkan ubin berbentuk L di tengah sehingga tidak menutupi subsquare  $n/2 \times n/2$  yang memiliki kuadrat yang hilang. Sekarang keempatnya subsquare ukuran  $n/2 \times n/2$  memiliki sel yang hilang (sel yang tidak perlu diisi). Lihat gambar 2 di bawah ini.
  - 1) Memecahkan masalah secara rekursif untuk mengikuti empat. Biarkan  $p_1, p_2, p_3$  dan  $p_4$  menjadi posisi dari 4 sel yang hilang dalam 4 kotak.
    - a) Ubin ( $n/2, p_1$ )
    - b) Ubin ( $n/2, p_2$ )
    - c) Ubin ( $n/2, p_3$ )
    - d) Ubin ( $n/2, p_4$ )
2. Relasi rekurensi untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta.  $T(n) = 4T(n/2) + C$ . Selesaikan rekurensi tersebut dengan Metode Master Jawab :

Kompleksitas Waktu:

Relasi perulangan untuk algoritma rekursif di atas dapat ditulis seperti di bawah ini. C adalah konstanta.

$$T(n) = 4T(n/2) + C$$

Rekursi di atas dapat diselesaikan dengan menggunakan Metode Master dan kompleksitas waktu adalah  $O(n^2)$

Bagaimana cara kerjanya?

Pengerjaan algoritma Divide and Conquer dapat dibuktikan menggunakan Mathematical Induction. Biarkan kuadrat input berukuran  $2k \times 2k$  di mana  $k \geq 1$ .

Kasus Dasar: Kita tahu bahwa masalahnya dapat diselesaikan untuk  $k = 1$ . Kami memiliki  $2 \times 2$  persegi dengan satu sel hilang.

Hipotesis Induksi: Biarkan masalah dapat diselesaikan untuk  $k-1$ .

Sekarang perlu dibuktikan untuk membuktikan bahwa masalah dapat diselesaikan untuk  $k$  jika dapat diselesaikan untuk  $k-1$ . Untuk  $k$ , ditempatkan ubin berbentuk L di tengah dan memiliki empat subsquare dengan dimensi  $2k-1 \times 2k-1$  seperti yang ditunjukkan pada gambar 2 di atas. Jadi jika dapat menyelesaikan 4 subskuares, dapat menyelesaikan kuadrat lengkap.

