Московский Физико-Технический Институт

Кафедра общей физики

Эффект Тальбота

2021 г.

1 Теоретическая часть

1.1 Небольшое введение

В данном эффект, а также во многих других задачах мы решаем уравнение Гельмгольца с граничными условиями, для того чтобы найти распределение поля $E(r,t) = A(r)e^{-iwt}$ в некоторой области

$$\begin{cases} \Delta A + k^2 A = 0 \\ A|_\Sigma = A_0(r) \end{cases}$$

Если $A_0(r)$ – интегрируемая, периодическая функция, то по теореме Фурье, она представима в виде ряда фурье, каждое слагаемое которого является плоской волной, а тогда и решение краевой задачи будет представимо в виде суперпозиции плоских волн (по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши)

1.2 Саморепродукция

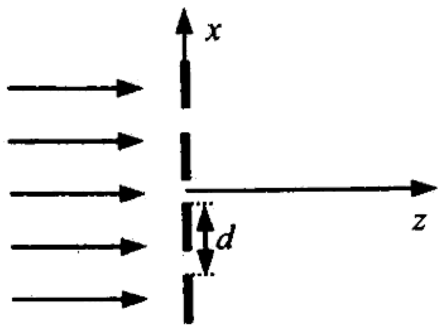

Рис. 1: Дифракционная решетка

Если рассмотреть дифракцию на предмете, имеющем некую периодическую структуру, то можно будет пронаблюдать эффект саморепродукции: на некотором расстоянии от предмета вдоль распространения волны появится изображение той же переодической структуры. Физическая природа этого эффекта заключается в том, что при прохождении волны через периодечкую структуры комплексная амплитуда волны, идущая после предмета будет тоже периодичной. В таком случае будет существовать плоскость, в которой волны, прищедшие от предмета, будут иметь задержку по фазе, кратную 2π. Следовательно в этой плоскости возникнет репродуцированное изображение.

Для простоты рассмотрим структуру периодичную только вдоль оси x:

Пусть слева на экран падает плоская волна вдоль оси z

$$A(x,z) = A_0 e^{ikz},\ z < 0 \tag{1}$$

Вследствие периодичности структуры экрана функция пропускания $D(x)$ периодична, поле справа от него при $z = +0$ может быть представленно в виде ряда Фурье :

$$A(x,+0) = D(x) \cdot A(x,-0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{iu_n x} \tag{2}$$

$$u_n = n\Omega,\ \Omega = 2\pi/d \tag{3}$$

Каждое слагаемое в сумме пораждает в области $z > 0$ волну :

$$A(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{iu_n x + iw_n z},\ \text{где } w_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} \tag{4}$$

Если период структуры $d \gg \lambda$ (вдоль оси x), то для не слишком больших номеров гармоник n можно считать $u_n \gg k$ и записать:

$$w_n \approx k - u_n^2/2k \tag{5}$$

Таким образом получаем распределение поля в пространстве:

$$A(x,z) = e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n exp\left(iu_n x - i\frac{u_n^2}{2k}z\right) \tag{6}$$

Тогда на некотором расстоянии z от экрана(периодической структуры) будет выполнено условие :

$$\frac{u_n^2}{2k}z = 2\pi p,\ p \in \mathbb{Z} \tag{7}$$

Несложно заметить, что на таком расстоянии структура поля будет воспроизводиться, поскольку относительный набег фаз всех слагаемых окажется равным 2π. Данное условие выполняется в точках:

$$z = mz_t,\ z_t = 2\pi\frac{2k}{\Omega^2} = \frac{2d^2}{\lambda} \tag{8}$$

1.3 Число «копий»

В предшествующих выводах мы никак не учитывали, что периодическая структура имеет конечные размеры. Для конкретики, рассмотрим дифракционную решетку. Если мы нарисуем три продифрагированных луча порядков n = {-1, 0, 1} (рис. 2). Распространяясь от решетки конечных размеров D, эти три волны перестают перекрываться на расстоянии:

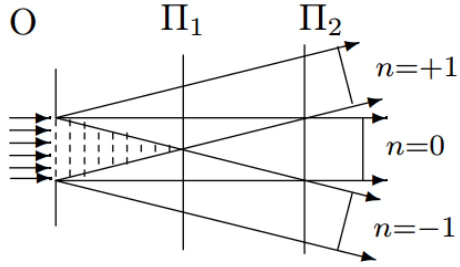

Рис. 2: Зависимость освещенности в максимуме от высоты входной щели

$$L = \frac{D}{2}\operatorname{ctg}\theta, \tag{9}$$

где θ– угол дифракции, который определяется из условия $d\sin\theta = \lambda$. Считая, что $d \gg \lambda$, получаем, что $\theta \gg 1$:

$$L \approx \frac{D}{2\theta} \approx \frac{Dd}{2\lambda} \tag{10}$$

И тогда на этом расстоянии число плоскcотей саморепродукции составляет

$$N \approx \frac{L}{z_t} \approx \frac{D}{4d} \tag{11}$$

1.4 Ковер Талбота

Рассмотрим в качестве периодической структуры дифракционную решетку с периодом d. Эффект саморепродукции конечно проявляется и в этом случае. Но больший интерес представляет картина поля в одном периоде (см. рис. 3). Впервые этот интерференционный паттерн наблюдал Генри Фокс Талбот в 1836 году.

Здесь образ оригинала, представляющего засветку щелевого экрана при z = 0, повторяется с периодом, кратным длине Талбота. Фантастическая структура ковра указывает на то, что в данном случае имеет место фрактально-подобная организация интерференции в ближней зоне.

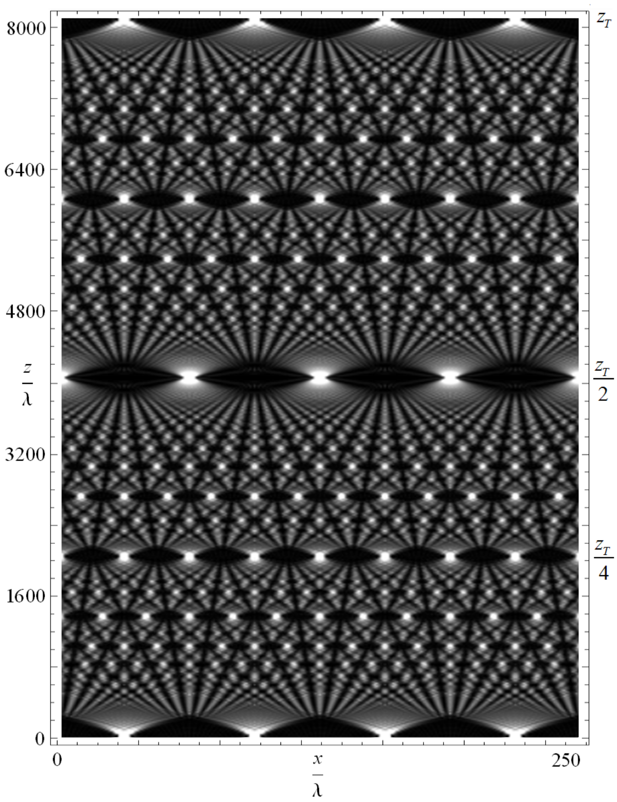

Рис. 3: Ковер Талбота

2 Применение

- В работе The Talbot effect in self-assembled red blood cells investigated by digital holography авторы рассказывают как применяли наблюдение эффекта тальбота на двумерной дифракционной решетке из эритрацитов и по значениям Z_t определяли ее параметры

3 Список литературы

- Принципы оптики. Кириченко Н.А.
- Общий курс физики (том 4). Оптика. Сивухин Д. В.
- The Talbot effect in self-assembled red blood cells investigated by digital holography Pasquale Memmolo1, Lisa Miccio1, Francesco Merola1 and Pietro Ferraro1