Курс "Практикум по математической статистике"

3 курс ФПМИ МФТИ, осень 2020

Домашнее задание 2. Методы нахождения оценок

Дедлайн --- 26 октября 9:00

Это первое обязательное домашнее задание нашего курса. Мы предлагаем выполнять задания прямо в этом ноутбуке. Пожалуйста, не стирайте условия задач.

Информация о выполнении и курсе в целом есть в [этой папке].

В этом и последующих заданиях вам потребуется выполнять генерацию случайных величин из некоторого распределения. Для этого вам понадобится библиотека **scipy.stats.** Мы настоятельно рекомендуем для генерации выборок использовать именно эту библиотеку.

Настоятельно рекомендуемая форма оформления домашних заданий — это **Jupyter Notebook** и его **pdf**-версия с:

- условием задачи,
- решением (если требуется некоторый теоретический вывод),
- описанием плана решения, который потом реализуется в коде,
- собственно кодом,
- построенными графиками (если это требуется) и **выводом**, который как правило должен заключаться в объяснении практических результатов с использованием теоретических фактов. ***Вывод требуется даже в том случае, если в условии об этом явно не сказано!***
- некоторыми другими вещами, если об этом будет указано в задании.

Оценка за каждую задачу складывается из правильного выполнения всех этих пунктов. Закрывая на них глаза, вы сознательно понижаете свою оценку.

Каждая задача оценивается в **10** баллов, если не оговорено иного.

Загрузим все необходимые датасеты. Если что-то пошло не так, то просто скачайте файлы по ссылке вручную.

In [1]:

```
!pip install -q gdown
!gdown https://drive.google.com/uc?id=1fMQ0H-_E4U25XHB2SH7ryoZPLG2MHlLQ
!gdown https://drive.google.com/uc?id=1cJywRii7wBZa0B2uAvvu56JFCLPnlOSs
```

```
Downloading...
From: https://drive.google.com/uc?id=1fMQ0H-_E4U25XHB2SH7ryoZPLG2MHlLQ
To: /home/archie/matstat_prac/Task2/Cauchy.csv
100%|████████████████████████████████████| 18.7k/18.7k [00:00<00:00, 7.27MB/s]
Downloading...
From: https://drive.google.com/uc?id=1cJywRii7wBZa0B2uAvvu56JFCLPnlOSs
To: /home/archie/matstat_prac/Task2/Weibull.csv
100%|████████████████████████████████████| 17.9k/17.9k [00:00<00:00, 11.2MB/s]
```

In [2]:

```
import pandas as pd
import numpy as np
from scipy import stats as sps

from matplotlib import pyplot as plt
import seaborn as sns

sns.set(style="darkgrid", font_scale=1.4)
```

Задача 1

На высоте **1** метр от поверхности Земли закреплено устройство, которое периодически излучает лучи на поверхность Земли (считайте, что поверхность Земли представляет из себя прямую). Пусть l — перпендикуляр к поверхности Земли, опущенный из точки, в которой закреплено устройство. Угол к прямой l (под которым происходит излучение) устройство выбирает случайно из равномерного распределения на от-резке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (все выборы осуществляются независимо). В этих предположениях точки пересечения с поверхностью имеют распределение Коши с плотностью $p(x) = \frac{1}{\pi(1+(x-x_0)^2)}$. Неизвестный параметр сдвига x_0 соответствует проекции точки расположения устройства на поверхность Земли (направление оси и начало координат на поверхности Земли выбраны заранее некоторым образом независимо от расположения устройства). В файле **Cauchy.csv** находятся координаты точек пересечения лучей с поверхностью Земли.

In [3]:

```
sample_1 = pd.read_csv("Cauchy.csv")["sample"].values

sample_1.shape
```

Out[3]:

```
(1000,)
```

Оцените параметр сдвига методом максимального правдоподобия

- по первым **10** измерениям
- по первым **100** измерениям
- по всей выборке.

Оценку произведите по сетке (т.е. возьмите набор точек с некоторым шагом и верните ту, на которой достигается максимум функции правдоподобия). Известно, что параметр сдвига принадлежит интервалу $[-1000, 1000]$. Выберите шаг равным **0.01**. Интервал можете итеративно уменьшать, но не стоит делать его длину меньше **50**.

Распределение коши корректно в данном случае:

$\pi(U-\frac{1}{2}) \sim U(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, где $U \sim U(0,1)$

Тогда $x_0 + \tan\pi(U-\frac{1}{2}) \sim Cauchy(x_0, 1)$

In [4]:

```
# YOUR_CODE_GOES_HERE
x_0 = np.arange(-1000, 1000, 0.01)

def CauchyPdf(x, x_0):
    return 1 / (np.pi * (1 + (x-x_0)**2))

def CauchyMLE(grid, sample):
    log_likelihood = np.array([np.log(CauchyPdf(sample, estimation)).sum() for estimatio
n in grid])
    return grid[log_likelihood.argmax()]
```

In [5]:

```
CauchyMLE(x_0, sample_1[:10])
```

Out[5]:

```
208.52999999890085
```

In [6]:

```
CauchyMLE(x_0, sample_1[:100])
```

Out[6]:

```
207.89999999890142
```

In [7]:

```
CauchyMLE(x_0, sample_1)
```

Out[7]:

```
207.97999999890135
```

In [8]:

```
sps.cauchy.fit(sample_1)[0]
```

Out[8]:

```
207.97772827944334
```

Сравните полученные результаты с `sps.cauchy.fit`

Видим что оценка полученная методом `CauchyMLE` совпадает с библиотечной реализацией

Задача 2

В банкомате "Тинькофф" в Новом Корпусе МФТИ каждую минуту подсчитывается баланс по сравнению с началом дня **(6** часов утра**).** В полночь работники банка измеряют две величины**:** X^1 **–** максимальное значение баланса за день**,** X^2 **–** значение баланса в полночь**.** Считается**,** что величина $X = X^1 - X^2$ имеет распределение Вейбулла с функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-x^{\gamma}} (x > 0),$ где $\gamma > 0$ **–** параметр формы**.** В течение **10** лет каждый день банк проводил измерение величины $X,$ получив в результате выборку $X_1, \ldots, X_{3652}.$ В файле **Weibull.csv** находятся соответствующие измерения**.**

In [9]:

```
sample_2 = np.loadtxt("Weibull.csv")

sample_2.shape
```

Out[9]:

```
(3652,)
```

Проведем небольшой предварительный анализ**.** Итак**,** если наши данные распределены согласно распределению Вейбулла**,** то справедливы следующие рассуждения**:**

$$F(x) = 1 - e^{-(x)^{\gamma}}$$
$$-\ln(1 - F(x)) = x^{\gamma}$$
$$\underbrace{\ln(-\ln(1 - F(x)))}_{y'} = \underbrace{\gamma \ln x}_{kx'}$$

А значит и

$$\underbrace{\ln(-\ln(1 - \hat{F}(x)))}_{y'} \approx \underbrace{\gamma \ln x}_{kx'}$$

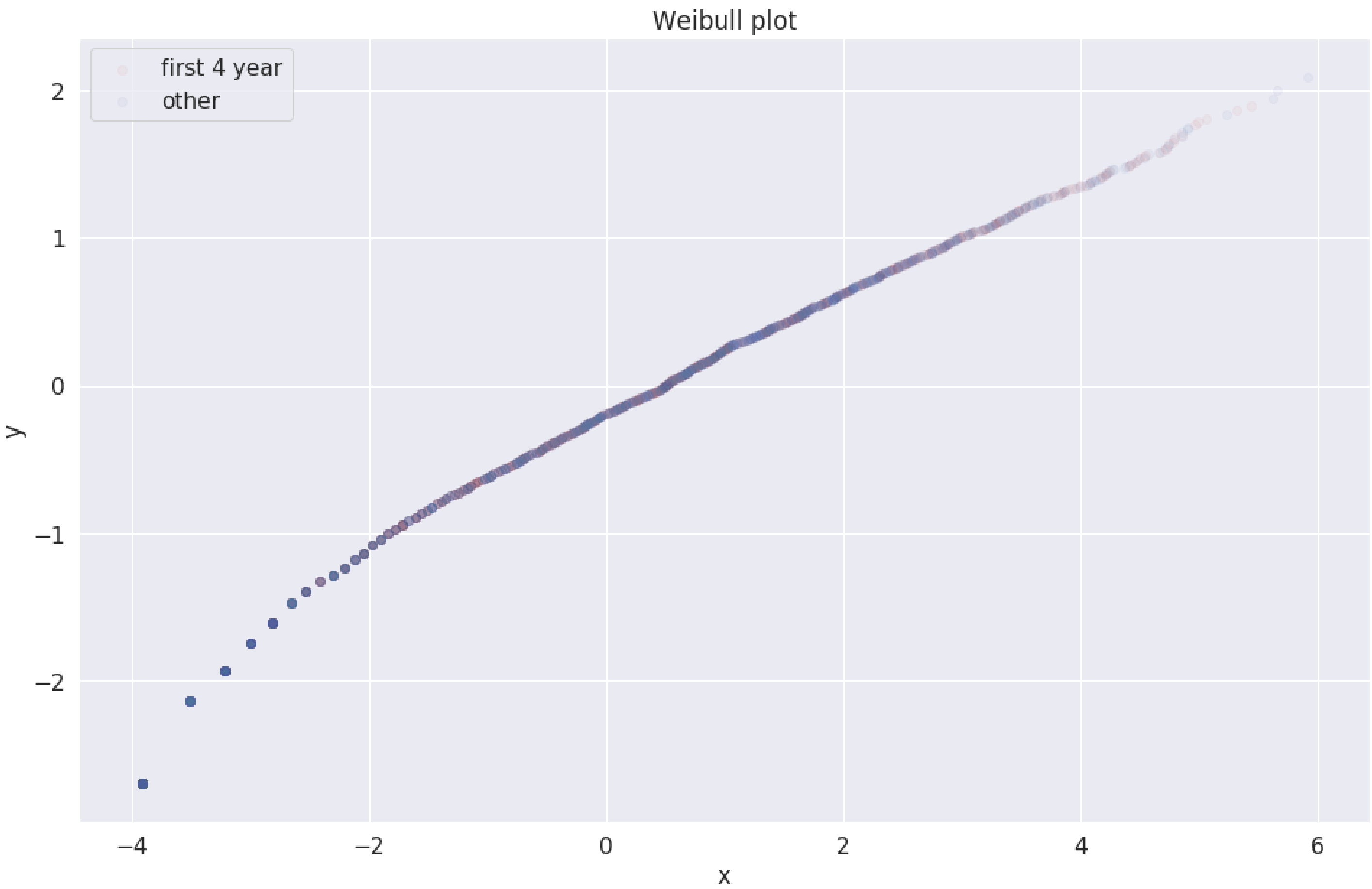
Подсчитайте эмпирическую функцию распределения и

$$y' = \ln(-\ln(1 - \hat{F}(x))) \quad x' = ln x$$

где x
– элементы исходной выборки. Постройте график (`plt.scatter`) выделив данные за первые четыре года красным цветом (`sample_2[:1461]`), остальные синим (`sample_2[1461:]`). Не забудьте про `alpha=0.05` и легенду. Такой график называется `Weibull plot` и является аналогом `qqplot` для распределения Вейбулла.

In [10]:

```
from statsmodels.distributions.empirical_distribution import ECDF
from sklearn import linear_model

import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

# YOUR_CODE_GOES_HERE

# Видим что у нас есть нули в выборке, выкинем их
# иначе мы будем натыкаться на логарифм нуля в методе максимального правдоподобия
# и при построении Weibull plot'a
sample_2 = sample_2[sample_2 != 0]

ecdf = ECDF(sample_2, side="left")
x_weib = np.log(sample_2)
y_weib = np.log(-np.log(1-ecdf(sample_2)))

plt.figure(figsize=(16,10))
plt.scatter(x_weib[:1461], y_weib[:1461], color="r", alpha=0.05, label="first 4 year")
plt.scatter(x_weib[1461:], y_weib[1461:], color="b", alpha=0.05, label="other")

plt.legend()
plt.title("Weibull plot")
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")

plt.show()
```



Сделайте вывод.

Вывод

Видно что график хорошо аппроксимируется прямой. Из этого можно сделать вывод, что данные хорошо описываются распределением Вейбулла.

Оцените параметр формы методом максимального правдоподобия

- по первым **4** годам;
- по всей выборке. Оценку произведите по сетке (в логарифмической шкале). Известно, что $\log_{10}\gamma \in [-2, 2]$. Выберите шаг равным 10^{-3}.

Плотность распределения вейбулла:

$$p(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-(x)^\gamma}) = \gamma x^{\gamma-1} e^{-(x)^\gamma}$$

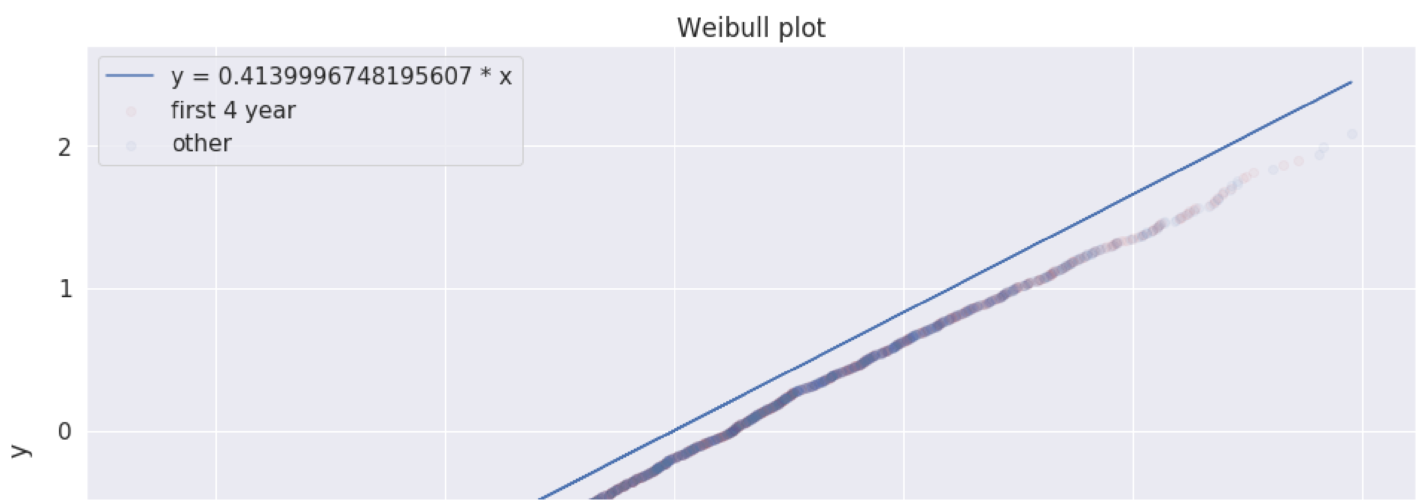
In [11]:

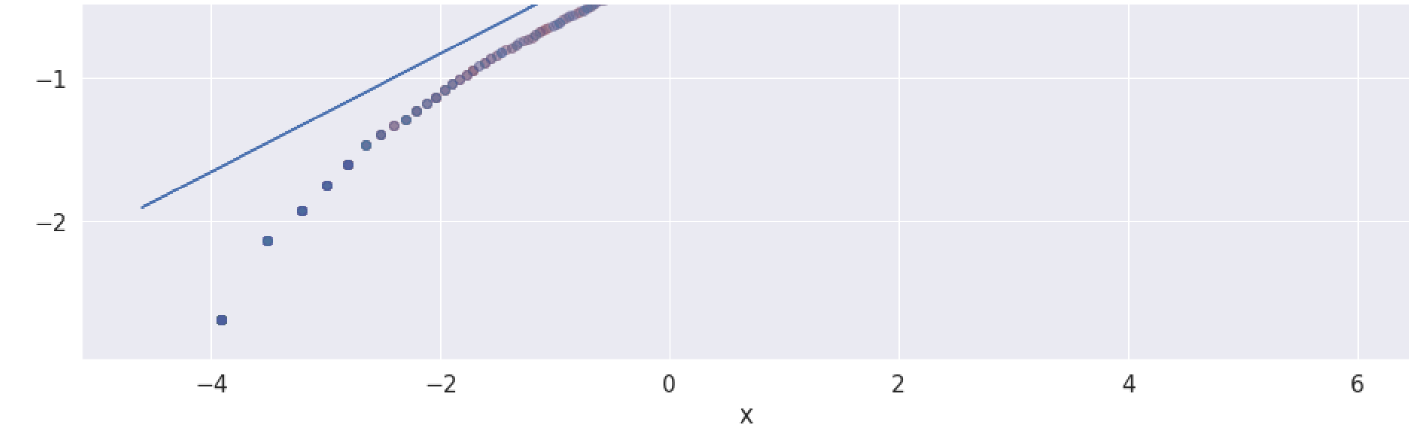
```
# YOUR_CODE_GOES_HERE
log_gamma_grid = np.arange(-2, 2, step=1e-3)

def WeibullPdf(x, log_gamma):
    gamma = 10 ** log_gamma
    return gamma * x ** (gamma-1) * np.exp(-(x**gamma))

def WeibullMLE(grid, sample):
    log_likelihood = np.array([np.log(WeibullPdf(sample, estimation)).sum() for estimati
on in grid])
    return grid[log_likelihood.argmax()]

def plotGraph(gamma):
    plt.figure(figsize=(16,10))
    first_4 = plt.scatter(x_weib[:1461], y_weib[:1461], color="r", alpha=0.05, label="fi
rst 4 year")
    other = plt.scatter(x_weib[1461:], y_weib[1461:], color="b", alpha=0.05, label="othe
r")
    fit = plt.plot(x_weib, gamma * x_weib, label = "y = {} * x".format(gamma))

    plt.title("Weibull plot")
    plt.xlabel("x")
    plt.ylabel("y")
    plt.legend()

    plt.show()
```

In [12]:

```
gamma = 10 ** WeibullMLE(log_gamma_grid, sample_2[:1461])
print(gamma)
plotGraph(gamma)
```

0.4139996748195607

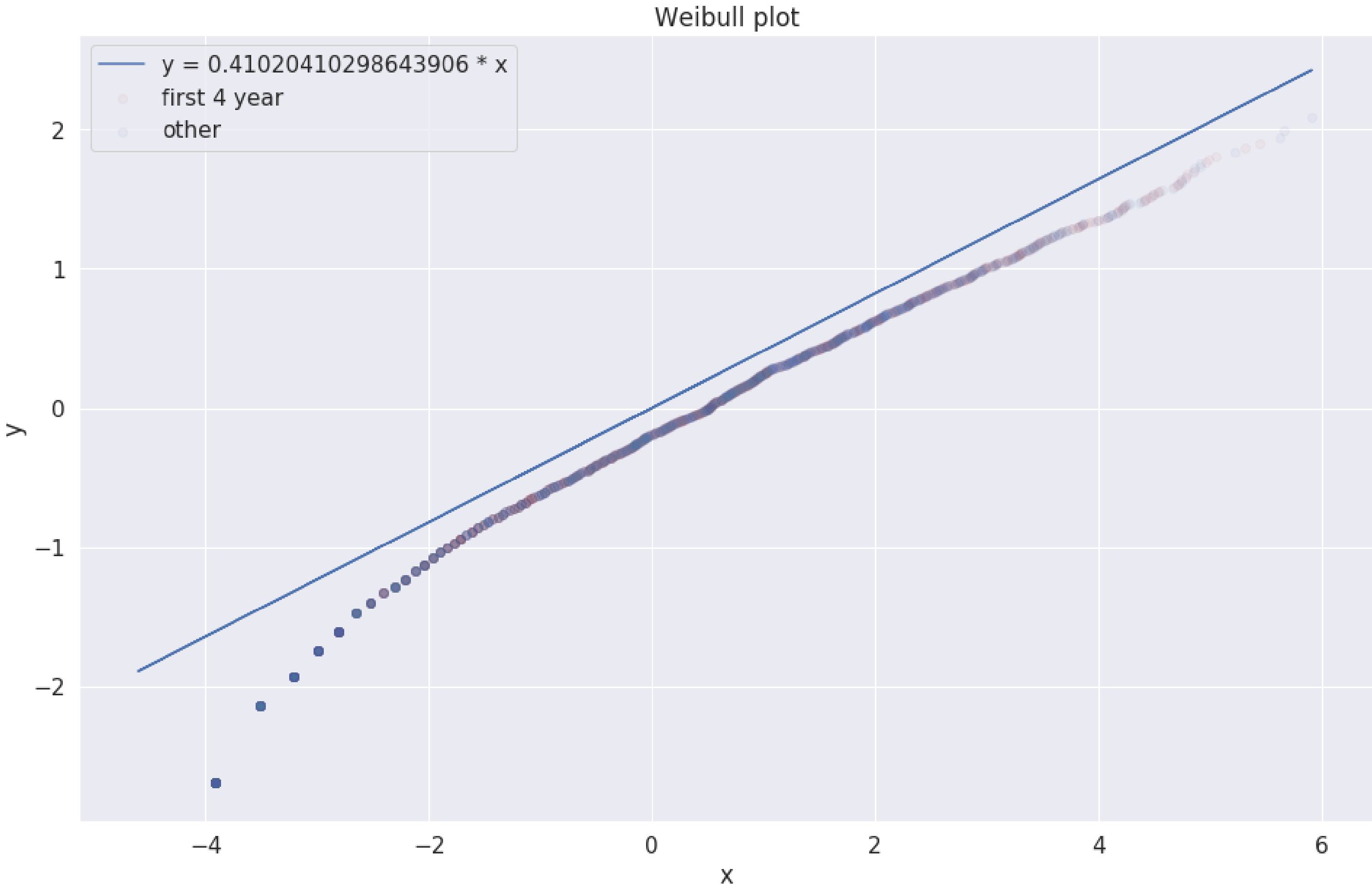




In [13]:

```
gamma = 10 ** WeibullMLE(log_gamma_grid, sample_2)
print(gamma)
plotGraph(gamma)
```

0.41020410298643906

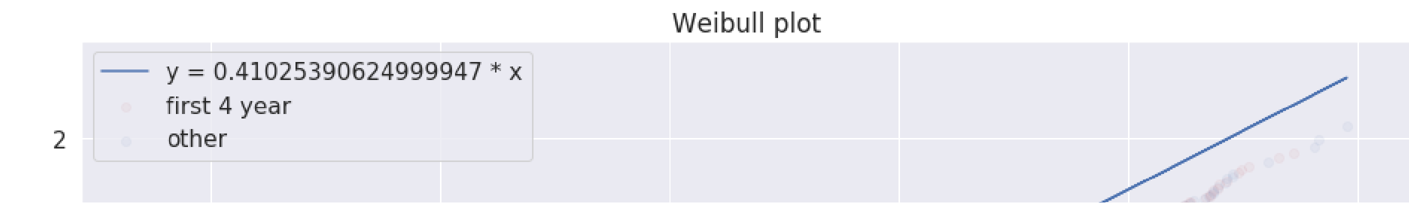


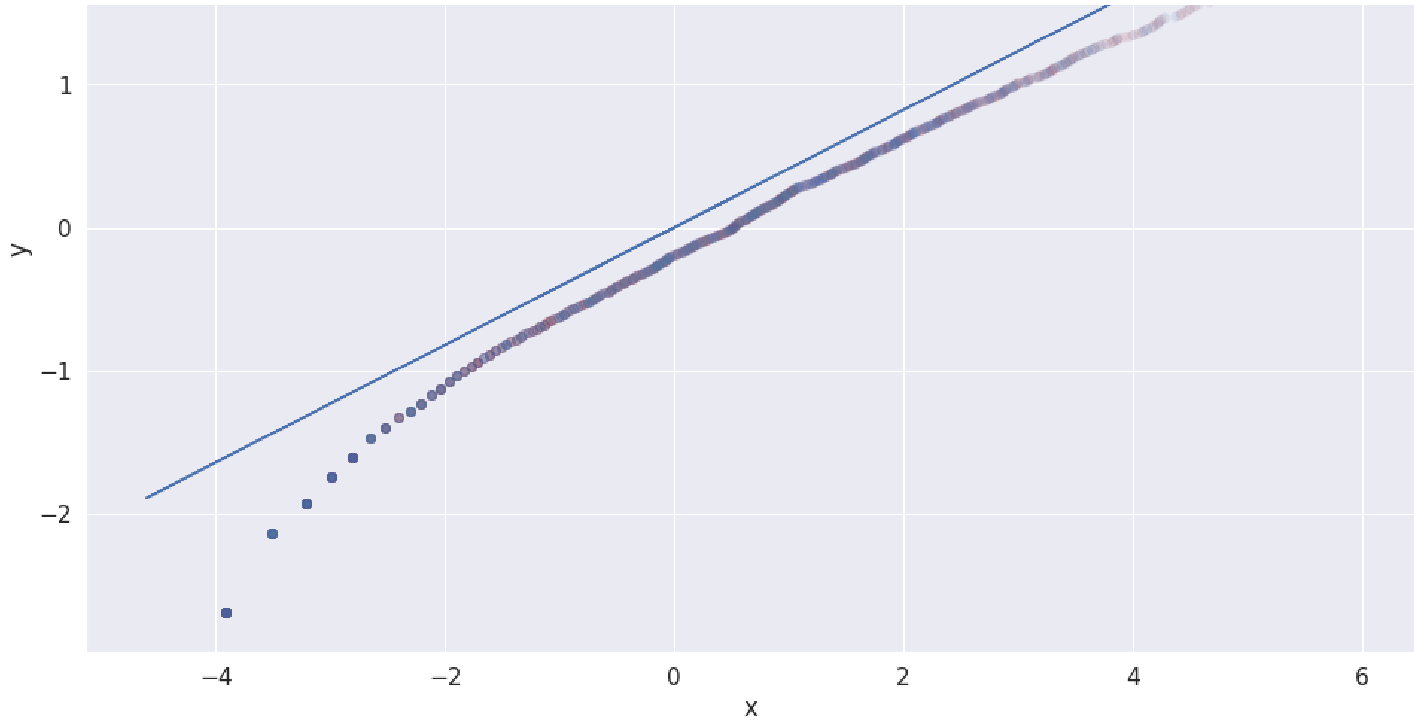
Сравните результаты с `sps.weibull.fit(sample_2, fscale=1, floc=0)`

In [14]:

```
# YOUR_CODE_GOES_HERE
gamma = sps.weibull_min.fit(sample_2, fscale=1, floc=0)[0]
print(gamma)
plotGraph(gamma)
```

0.41025390624999947





Постройте график $y = \gamma \cdot x$
для всех полученных γ
(`plt.plot`) и `scatter plot` из предыдущего пункта ($y' \ x'$
). Хорошо ли линии соответствуют выборке? Как вы думаете, почему?

Вывод

Из линий графика $y = \gamma \cdot x$
можно убедиться, что оценка полученная **MLE** является состоятельной, но в то же время смещенной

Задача 3

Сгенерируйте выборки $X_1, \ldots, X_N$
из $\mathrm{N}(0, \theta)$
, $U(0, \theta)$
, $\Gamma(1, \theta)$
(параметризация
$\boldsymbol{k, \theta}$**)**, $\theta = 3$
для всех распределений $(N = 1000)$.
Для всех $n \le N$
посчитайте значения оценок (по выборке $X_1, \ldots X_n$
) методом моментов. Постройте график ошибки оценки от реального значения ($|\hat{\theta} - \theta|_{l_1}$
) относительно размера выборки.

In [15]:

```
# YOUR_CODE_GOES_HERE
N = 1000
theta = 3

def plotErr(estimation, sample, label):
    estimates = estimation(sample)

    plt.figure(figsize=(12, 6))
    plt.plot(np.arange(1, N+1), np.abs(estimates-theta), label=label)

    plt.xlabel("sample size")
    plt.ylabel("Absolute error")
    plt.legend()
```

```
    plt.show()
```

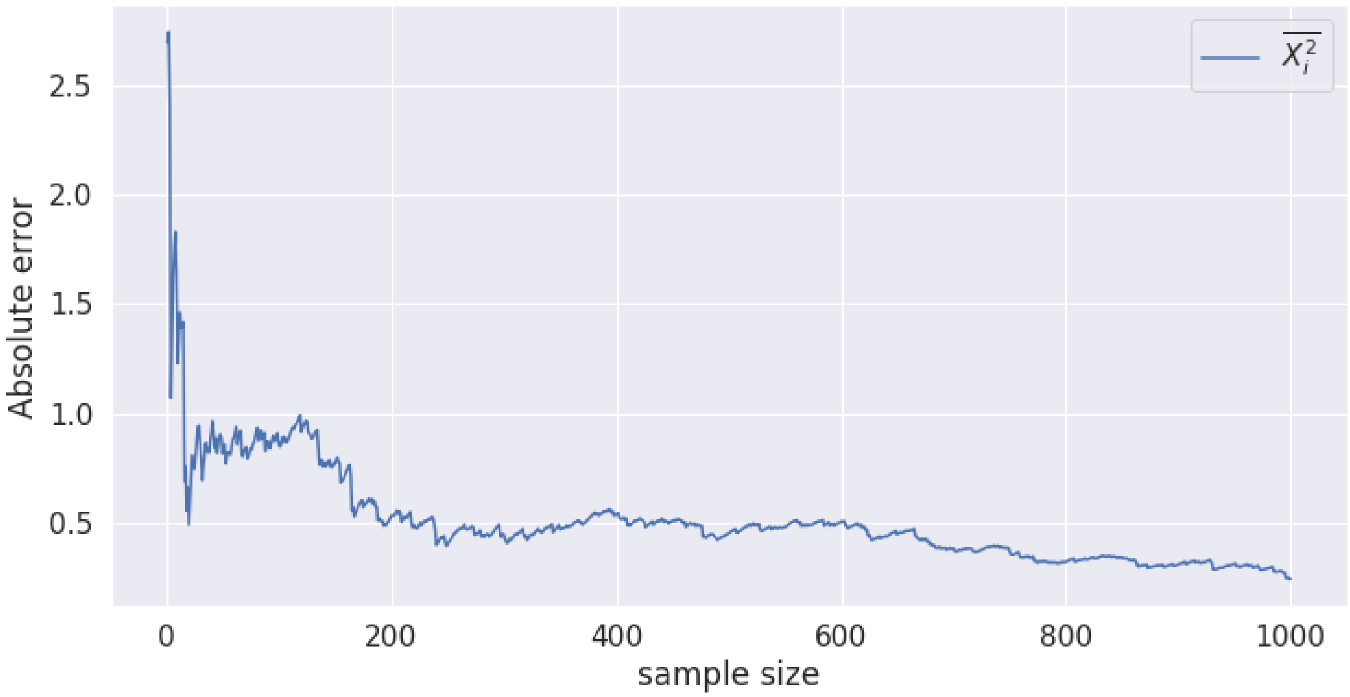
Нормальное распределение

$$N(0, \theta)$$

$$\theta = E(x_i^2) = \overline{X_i^2}$$

In [16]:

```
def NormEstimation(sample):
    return (sample ** 2).cumsum() / np.arange(1, len(sample)+1)

sample_norm = sps.norm.rvs(loc=0, scale=np.sqrt(theta), size=N)
plotErr(NormEstimation, sample_norm, "$\overline{X_i^2}$")
```



Равномерное распределение

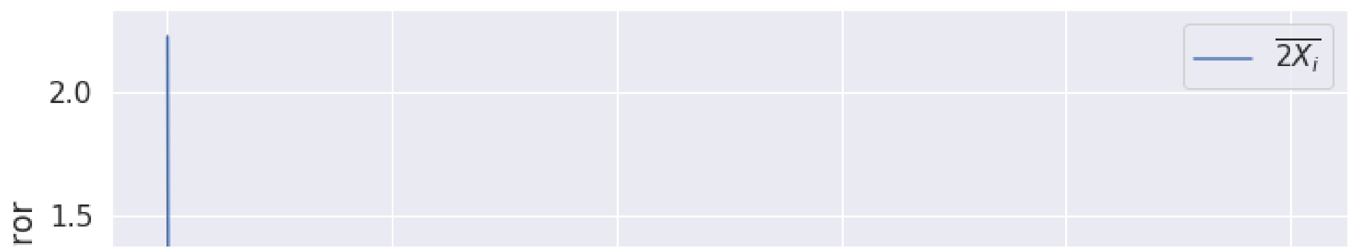
$$U(0, \theta)$$

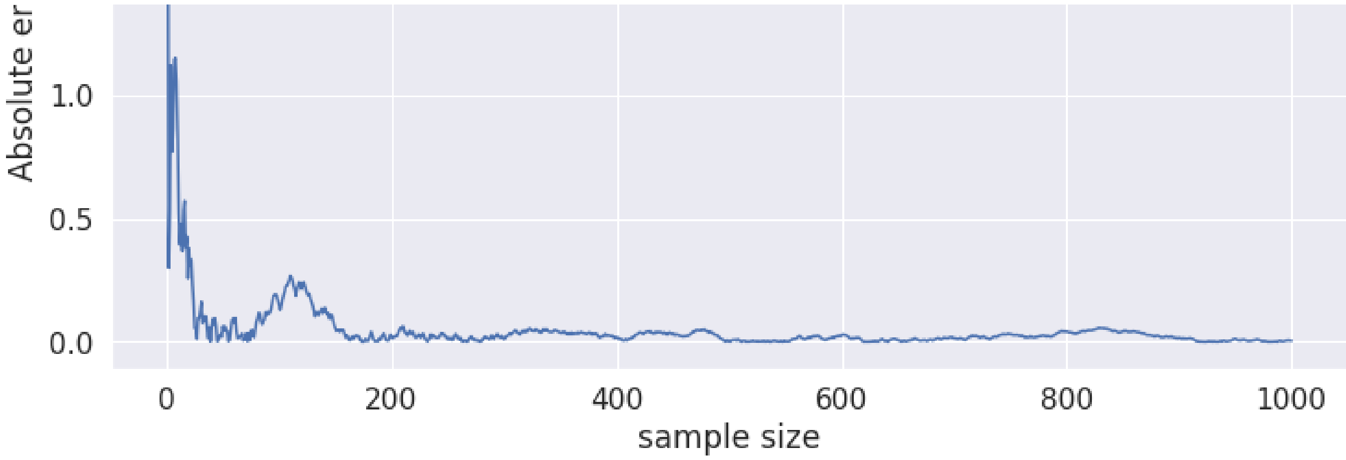
$$\frac{\theta}{2} = E(x_i) = \overline{X_i}$$

$$\theta = 2\overline{X_i}$$

In [17]:

```
def UniformEstimation(sample):
    return 2 * sample.cumsum() / np.arange(1, len(sample)+1)

sample_uniform = sps.uniform.rvs(loc=0, scale=theta, size=N)
plotErr(UniformEstimation, sample_uniform, "$\overline{2X_i}$")
```





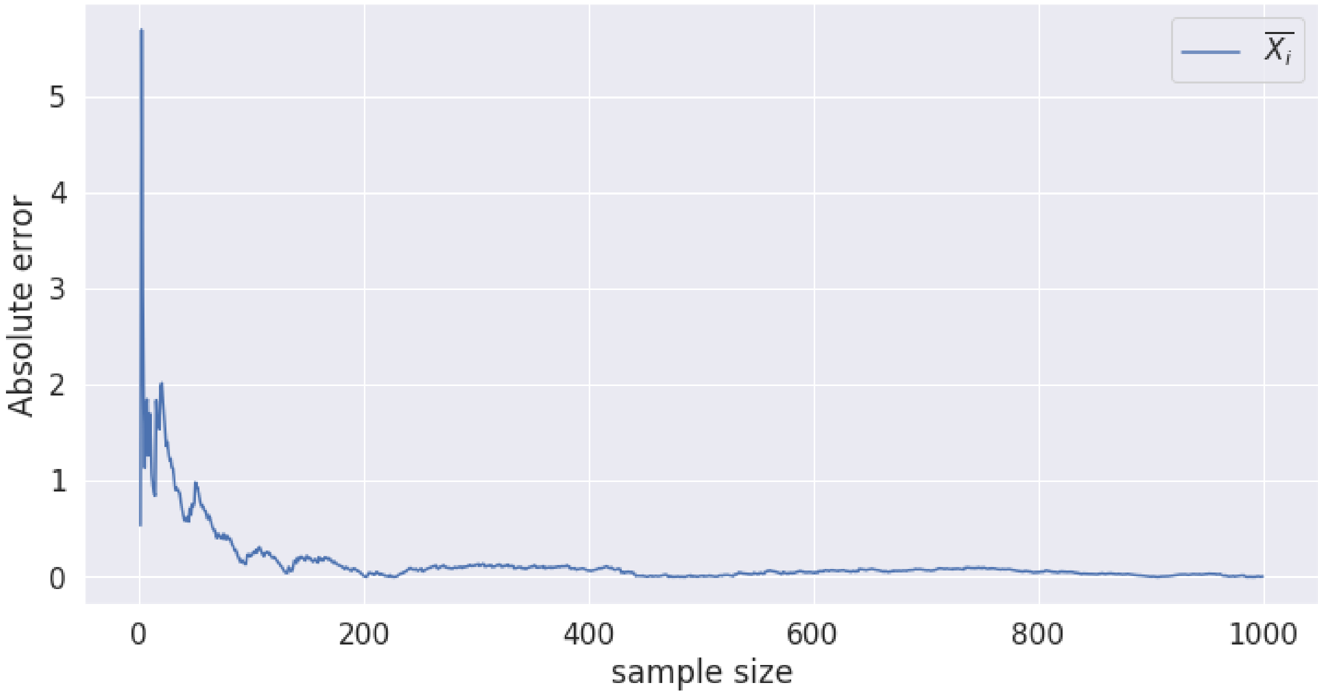
Гамма распределение

$$\Gamma(1, \theta)$$

$$\theta = \mathrm{E}(x_i) = \overline{X_i}$$

In [18]:

```
def GammaEstimation(sample):
    return sample.cumsum() / np.arange(1, len(sample)+1)

sample_gamma = sps.gamma.rvs(a=1, loc=0, scale=theta, size=N)
plotErr(GammaEstimation, sample_gamma, "$\overline{X_i}$")
```



Вывод:

- Видим , что все оценки состоятельны. Оценка для нормального распределения $N(0, \theta)$ полученная методом моментов оказалась смещенной

Бутстреп

Для реальных данных часто сложно подобрать распределение и нужную параметризацию относительно θ. Кроме того на практике сложно посчитать дисперсию оценки (для этого хотя бы нужно знать распределение, из которого пришла выборка). На помощь в таких случаях приходит **бутстреп.**

Идея очень простая. Давайте возьмем нашу выборку размера N
и сгенерируем из нее еще K
выборок. Более формально для каждой бутстрепной выборки **N** раз будем выбирать элементы из исходной выборки с возвращением. Полученная таким образом выборка будет содержать ≈ 63
% уникальных элементов, но это не страшно. Для всех K
выборок посчитаем оценку $\hat{\theta}$
. Таким образом мы получим K
оценок параметра. Можно показать, что если размер бутстрепных выборок и исходной совпадают, то оценка дисперсии $s^2(\hat{\theta})$
, полученная из K
оценок, будет *хорошей*.

Для каждого распределения из предыдущего пункта (Пожалуйста, не пишите цикл по распределениям. Сделайте три отдельные ячейки) для каждого K
из `[10] + [50] + list(range(100, 1001, 100))` сгенерируйте **K** бутстрепных выборок и посчитайте дисперсию бутстрепных оценок и посчитайте среднее по **K** выборкам. Размер бутстрепной выборки сделайте равным K
, незабудьте уменьшить размер исходной выборки до K
. Постройте график следующим образом: по оси x
отложите значения K
, красной линией обозначьте среднее значение $\hat{\theta}$
бутстрепных выборок для каждого K
. Посчитайте стандартное отклонение оценки для каждого K
и закрасьте интервал $\mu(k) \pm \sigma(\hat{\theta})$
(`plt.fillbetween`).

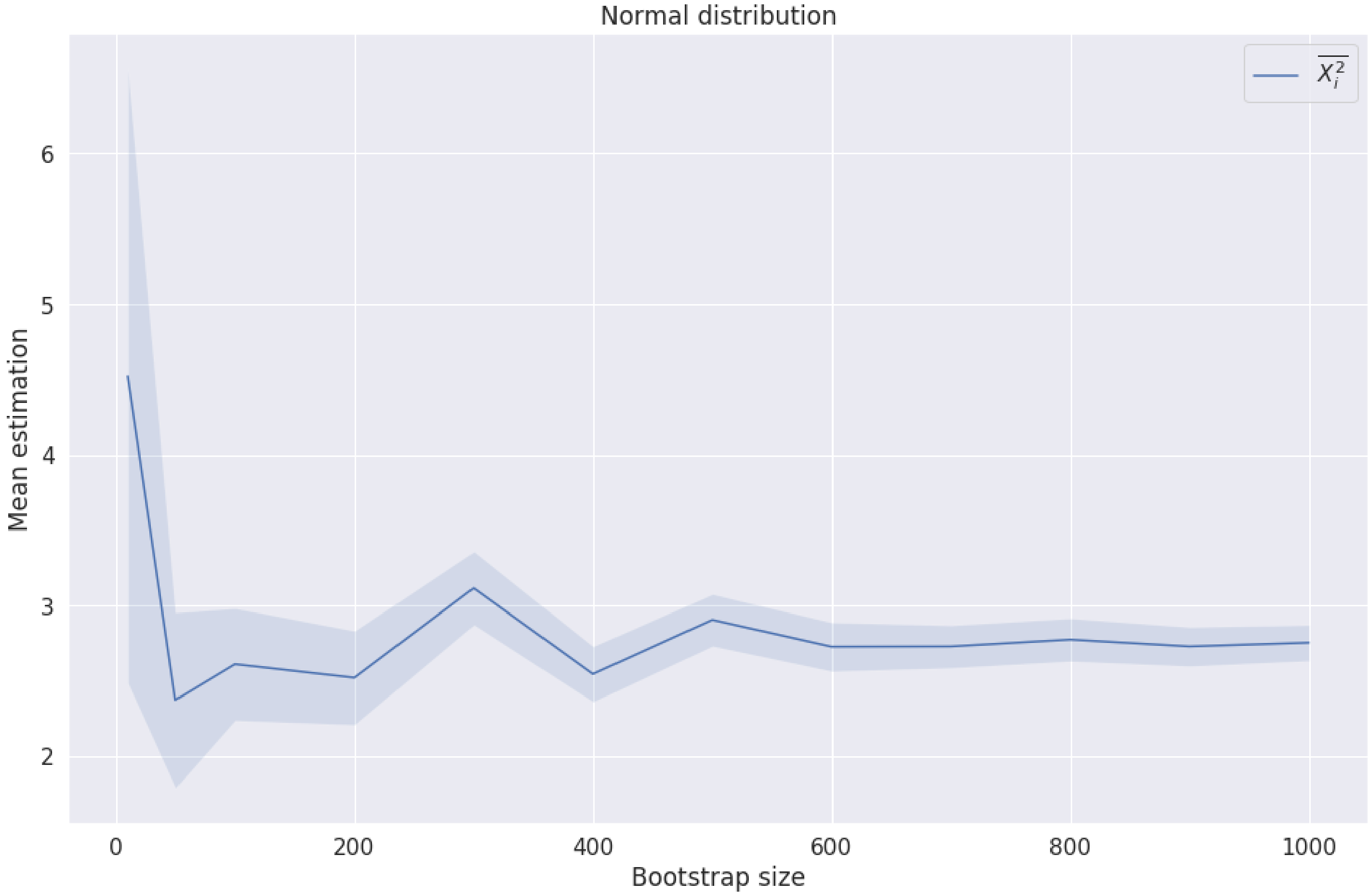
In [19]:

```
# YOUR_CODE_GOES_HERE
K = [10] + [50] + list(range(100, 1001, 100))
print(K)

def RunBootstrap(sample, estimation, title, label):
    mean_estimates = np.zeros(len(K))
    mean_estimates_std = np.zeros(len(K))

    for i in range(len(K)):
        # random subarray of size K, to generate bootstrap
        Init = np.random.choice(sample, size=K[i], replace=False)
        # estimates on bootstraped samples
        estimates = np.array([estimation(np.random.choice(Init, size=K[i]))[-1] for _ in 
range(K[i])])

        mean_estimates[i] = np.mean(estimates)
        mean_estimates_std[i] = np.std(estimates)

    plt.figure(figsize=(16, 10))
    plt.plot(K, mean_estimates, label=label)
    plt.fill_between(
        x=K,
        y1=mean_estimates + mean_estimates_std,
        y2=mean_estimates - mean_estimates_std,
        alpha=0.15
    )

    plt.xlabel("Bootstrap size")
    plt.ylabel("Mean estimation")
    plt.title(title)
    plt.legend()

    plt.show()
```

```
[10, 50, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000]
```

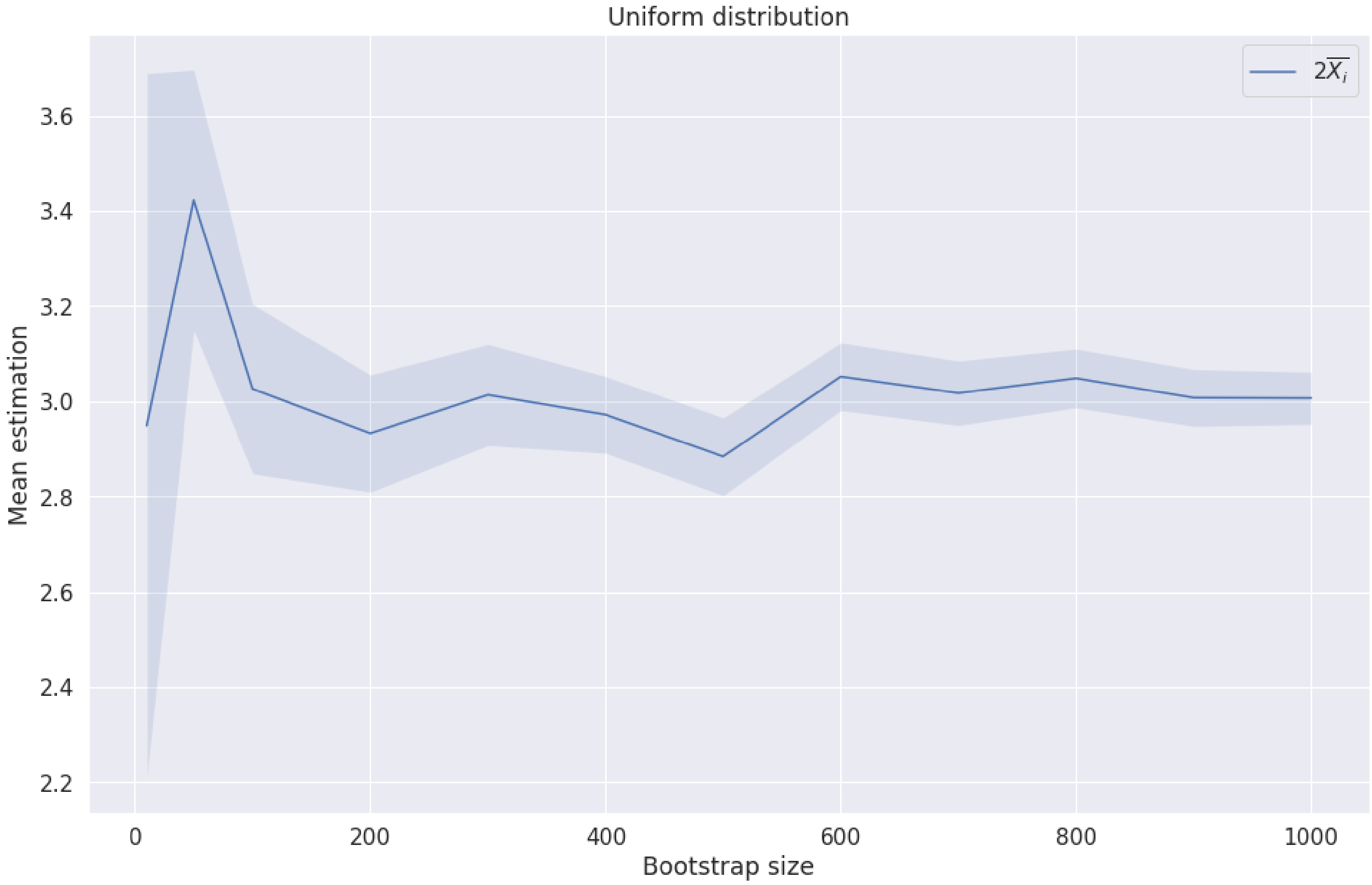
In [20]:

```
RunBootstrap(sample=sample_norm, estimation=NormEstimation, title="Normal distribution",
label="$\overline{X_i^2}$")
```



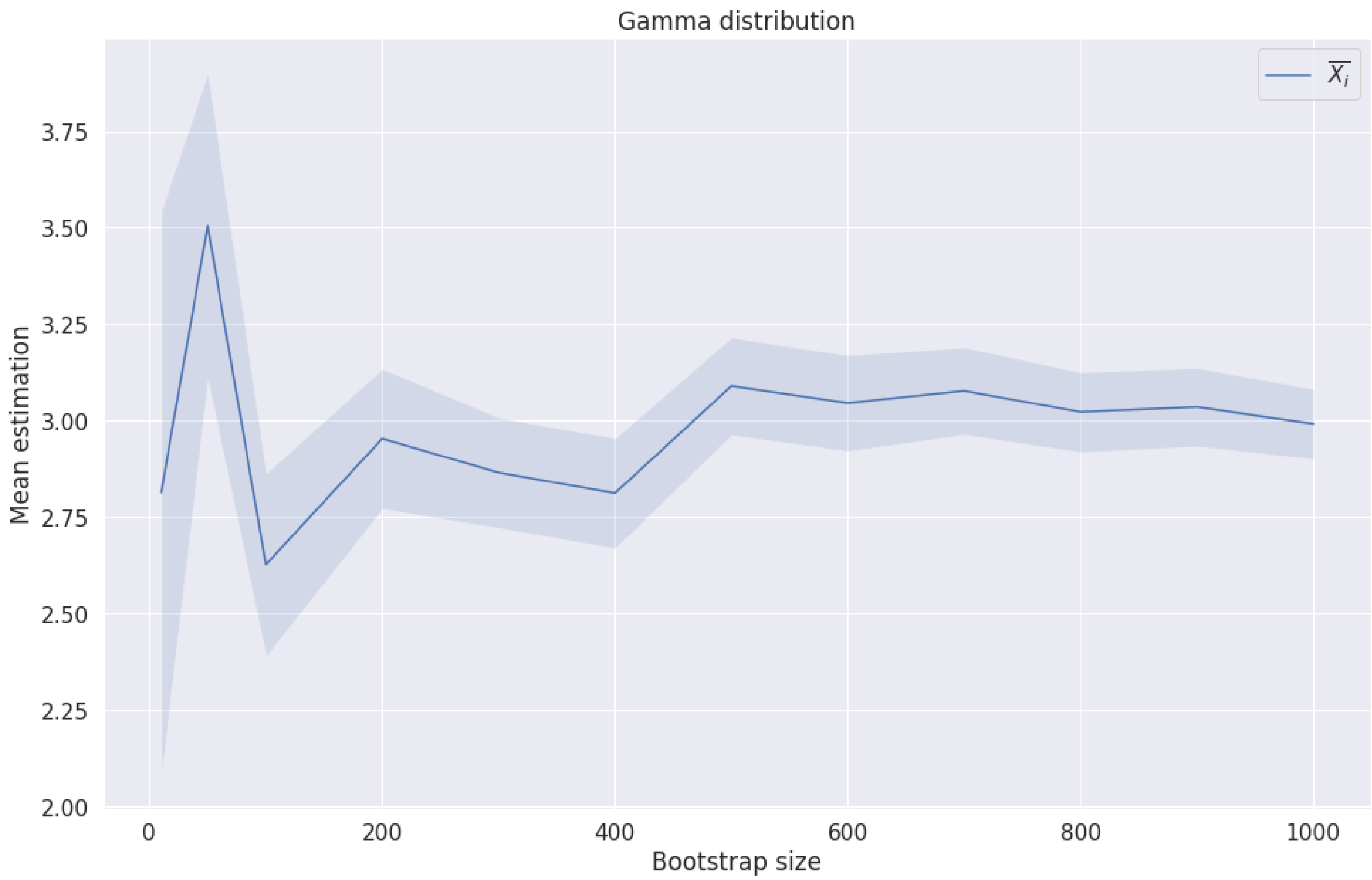
In [21]:

```
RunBootstrap(sample=sample_uniform, estimation=UniformEstimation, title="Uniform distribu
tion", label="$2 \overline{X_i}$")
```



In [22]:

```
RunBootstrap(sample=sample_gamma, estimation=GammaEstimation, title="Gamma distribution"
, label="$\overline{X_i}$")
```



Вывод:

Пусть наша оценка θ
- случайная величина

Тогда**,** $\hat{\theta} = \frac{\sum_i^K \theta_i}{K}$

будет иметь дисперсию в **K** раз меньше $\sigma(\hat{\theta}) = \frac{\sigma(\theta)}{K}$
в предположении о том**,** что θ_i
независимые случайные величины **(**такое предположение нам позволяет сделать сам механизм бутстрепа**)**

Как раз на графиках видно что дисперсия уменьшается с ростом K