МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Дніпровський державний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до лабораторних робіт

з дисципліни «Математичне моделювання складних об’єктів та систем»

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня

зі спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення»

за освітньо-професійною програмою «Інженерія програмного забезпечення»

Затверджено

редакційно-видавничою секцією

науково-методичної ради ДДТУ

____________, протокол №____

Кам’янське

2018

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Математичне моделювання складних об’єктів та систем» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення». Укл. Бабенко М.В., Кам’янське, ДДТУ, 2018. – 44 с.

Укладач:
доцент каф. ПЗС, к.т.н.
Бабенко М.В.

Відповідальний за випуск:
зав. кафедрою ПЗС, д.т.н., професор
Шумейко О.О.

Рецензент:
зав. кафедрою ПМКМ, д.т.н., професор
Самохвалов С.Є.

Затверджено на засіданні кафедри ПЗС
(протокол №___ від ______________20__р.

У методичних вказівках представлені теоретичні відомості, завдання, питання для самоперевірки засвоєних знань, список основної та додаткової літератури з виконання лабораторних робіт з дисципліни «Математичне моделювання складних об’єктів та систем» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення».

Зміст

ВСТУП

Форма звіту:

1) Постановка задач. Коротка теорія (метод рішення). Геометрична інтерпретація.
2) Алгоритм рішення поставленої задачі. (Блок-схема).
3) Текст програми.
4) Тестовий приклад.
5) Чисельний розрахунок за даними вихідної задачі з оцінкою погрішності результату. Протокол роботи програми.
6) Аналіз отриманого результату.

***Пояснення до окремих пунктів звіту*.**

Постановка задачі включає коротке математичне формулювання задачі з поясненням окремих моментів, а також необхідні графіки й/або рисунки. Повинні бути наведені основні моменти застосовуваних методів.

Алгоритм рішення задачі може бути оформлений або у вигляді блок-схеми, або в словесній формі. Допускається опис алгоритму осмисленими частинами (блоками).

Текст програми чисельного рішення задачі повинен бути написаний пропонованою мовою програмування, що може бути змінений за узгодженням з викладачем даного курсу.

Під тестовим прикладом або тестом розуміється задача (аналогічна по постановці шуканій задачі) у якої відомо точне рішення, що дозволяє зрівняти чисельні результати (наближене й точне рішення) і оцінити погрішність. За результатами тестування повинен бути зроблений висновок.

Протокол роботи програми повинен включати результати як по тестовому прикладу, так і чисельного розрахунку шуканої задачі. Результати чисельних розрахунків повинні бути оформлені за всіма правилами запису наближених чисел, тобто запис наближеного рішення тільки з вірними значущими цифрами й допустимою погрішністю.

Аналіз чисельних результатів повинен дати відповідь на питання, чи відповідають отримані результати шуканому рішенню поставленої задачі й чому.

Лабораторна робота № 1.
Рішення системи лінійних рівнянь прямими методами

Мета: Набуття навичок розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методами Гауса та Жордана-Гауса.
Завдання: Вирішити систему лінійних рівнянь методом Гауса й методом Жордана-Гауса з точністю $\varepsilon = 0,5 \cdot 10^{-3}$. Зрівняти отримані наближені рішення і їхні погрішності.

Короткі теоретичні відомості

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називають систему виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3m}x_m = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \tag{1.1}$$

де x_i, $(i = \overline{1,n})$ – невідомі; b_i, $(i = \overline{1,n})$ – вільні члени системи; a_{ij}, $(i, j = \overline{1,n})$ – коефіцієнти системи.

В матричному вигляді рівняння (1.1) прийме вигляд $\vec{A} \times \vec{X} = \vec{B}$, де $\vec{X} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – вектор невідомих; $\vec{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ – вектор вільних членів; $\vec{A} = \{a_{11}, a_{21}, \ldots, x_{mn}\}$ – матриця коефіцієнтів СЛАР.

Розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.1) називають вектор $\vec{X}$, координати якого $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ при підстановці у систему, що розв'язують, перетворюють кожне рівняння системи в тотожність.

Кількість невідомих *m* в системі називають *порядком* СЛАР. Систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один ненульовий розв'язок. В протилежному випадку СЛАР називають *несумісною.* СЛАР називається *визначеною,* якщо вона має тільки один розв'язок (випадок, коли $m=n$). Систему називають *невизначеною,* якщо вона має безліч розв'язків ($m \neq n$). Система називається *виродженою,* якщо головний визначник системи дорівнює нулю. Система називається *невиродженою*, якщо головний визначник системи не дорівнює нулю.

Дві системи називаються *еквівалентними,* якщо ці системи сумісні, визначені і мають однаковий розв'язок.

СЛАР можна розв'язати на ЕОМ чисельними методами, якщо вона сумісна, визначена, невироджена.

Найбільш відомим з точних методів розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (1.1) є методи Гауса, суть яких полягає в тому, що система рівнянь, яка розв'язується, зводиться до еквівалентної системи з верхньою трикутною матрицею. Невідомі знаходяться послідовними підстановками, починаючи з останнього рівняння перетвореної системи. Алгоритми Гауса складаються із виконання однотипних операцій, які легко формалізуються. Однак, точність результату й витрачений на його отримання час у більшості випадків залежить від алгоритму формування трикутної матриці системи. У загальному випадку алгоритми Гауса складаються з двох етапів:

Прямий хід, в результаті якого СЛАР (1.1), що розв'язується, перетворюється в еквівалентну систему з верхньою трикутною матрицею коефіцієнтів виду:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + a_{12} \cdot x_2 & + \ldots + & a_{1n} \cdot x_n & = b_1 \\ 0 \cdot x_1 & + a_{22} \cdot x_2 & + \ldots + & a_{2n} \cdot x_n & = b_2 \\ \ldots & & & & \\ 0 \cdot x_1 & + 0 \cdot x_2 & + \ldots + & a_{nn} \cdot x_n & = b_n \end{cases} \tag{1.2}$$

Зворотній хід дозволяє визначити вектор розв‘язку починаючи з останнього рівняння системи (1.2) шляхом підстановки координат вектора невідомих, отриманих на попередньому кроці.

Метод Гауса з послідовним виключенням невідомих

Метод Гауса з послідовним виключенням невідомих (базовий метод)засновано на алгоритмі, в основі якого лежить послідовне виключення невідомих вектора $\overline{x}$ з усіх рівнянь, починаючи з $(i+1)$–го, шляхом елементарних перетворень: перемноження обох частин рівняння на будь-яке число, крім нуля; додавання (віднімання) до обох частин одного рівняння відповідних частин другого рівняння, помножених на будь-яке число, крім нуля.

Суть алгоритму розглянемо на прикладі системи, яка складається з трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

1) Перевіримо, щоб принаймні один із коефіцієнтів a_{11}, a_{21}, a_{31} не дорівнював нулю. Якщо, наприклад, $a_{11} = 0$, тоді необхідно переставити рівняння так, щоб коефіцієнт при x_1 у першому рівнянні не дорівнював нулю.

2) Обчислюється множник:

$$M_2 = \frac{a_{21}}{a_{11}}. \tag{1.4}$$

3) Перше рівняння системи (1.3) множиться на M_2 і віднімається від другого рівняння системи, отриманої після перестановки рівнянь, якщо вона була необхідною. Результат обчислення має вигляд:

$$(a_{21} - M_2 a_{11})x_1 + (a_{22} - M_2 a_{12})x_2 + (a_{23} - M_2 a_{13})x_3 = b_2 - M_2 b_1, \tag{1.5}$$

$$a_{21} - M_2 a_{11} = a_{21} - \left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) a_{11} = 0. \tag{1.6}$$

Тоді x_1 виключається із другого рівняння.

Позначимо нові коефіцієнти:

$$a'_{22} = a_{22} - M_2 a_{12};\ a'_{23} = a_{23} - M_2 a_{13}; \\ b'_2 = b_2 - M_2 b_1 \tag{1.7}$$

Тоді друге рівняння системи (1.3) набуває вигляду:

$$a'_{22}\,x_2 + a'_{23}\,x_3 = b_2. \tag{1.8}$$

Далі необхідно звільнитися від коефіцієнта a_{31} при x_1 в третьому рівнянні системи (1.3) за аналогічним алгоритмом.

4) Обчислюється множник для третього рівняння:

$$M_3 = \frac{a_{31}}{a_{11}}. \tag{1.9}$$

5) Перше рівняння системи (1.3) множиться на M_3 і віднімається від третього рівняння. Коефіцієнт при x_1 стає нулем, і третє рівняння набуває вигляду:

$$a'_{32}\,x_2 + a'_{33}\,x_3 = b_3, \tag{1.10}$$

де

$$a'_{32} = a_{32} - M_3 a_{12}, \tag{1.11}$$

$$a'_{33} = a_{33} - M_3 a_{13}, \tag{1.12}$$

$$b'_3 = b_3 - M_3 b_1. \tag{1.13}$$

Перетворена таким чином система рівнянь (1.3) набуває вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ 0 * x_1 \ + a'_{22}\, x_2 + a'_{23}\, x_3 = b'_2 \\ 0 * x_1 \ + a''_{32}\, x_2 + a''_{33}\, x_3 = b''_3 \end{cases} \qquad (1.14)$$

Ця система рівнянь еквівалентна початковій і має певні переваги, оскільки x_1 входить тільки до першого рівняння. Спробуємо тепер виключити x_2 з останнього рівняння. Якщо $a_{22} = 0$, а $a_{32} \neq 0$, тоді переставимо друге й третє рівняння так, щоб $a_{22} \neq 0$. Інакше система вироджена і має безліч розв'язків.

7) Обчислюємо множник

$$M''_3 = \frac{a_{32}}{a_{22}}. \qquad (1.15)$$

8) Друге рівняння системи (1.11) помножується на M_3'' і віднімається від 3-го рівняння:

$$(a_{32} - M_3 a_{22})x_2 + (a_{33} - M_3 a_{23})x_3 = b_3 - b_2 M_2. \qquad (1.16)$$

При цьому коефіцієнт біля x_2 дорівнює нулю:

$$a'_{32} - M_3 a'_{22} = 0, \qquad (1.17)$$

$$a''_{33} = a'_{33} - M_3 a'_{23}, \qquad (1.18)$$

$$b''_3 = b'_3 - M_3 b'_2, \qquad (1.19)$$

Отримаємо

$$a''_{33}\, x_3 = b''_3. \qquad (1.20)$$

Замінивши в системі (1.14) третє рівняння на (1.20), отримаємо систему рівнянь виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ 0 * x_1 \ + a'_{22}\, x_2 + a'_{23}\, x_3 = b'_2 \\ 0 * x_1 \ + 0 * x_2 \ + a''_{33}\, x_3 = b''_3 \end{cases} \qquad (1.21)$$

Таку систему називають ***системою з трикутною матрицею коефіцієнтів,*** що еквівалентна СЛАР (1.3). Процес знаходження такої системи називається ***прямим ходом Гауса.*** Знайти розв'язок такої системи просто: із 3-го рівняння знайти x_3, підставити результат у друге і знайти x_2, підставити x_2 і x_3 в 1-е рівняння системи (1.21) і знайти x_1 за формулами:

$$x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}, \qquad (1.22)$$

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}\, x_3}{a'_{22}}, \qquad (1.23)$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}. \qquad (1.24)$$

Процес знаходження вектора розв'язку системи (1.3) називають ***зворотнім ходом метода Гауса***.

Метод Гауса-Жордана

Особливістю метода Гауса-Жордана є перетворення системи (1.1) (прямий хід) до еквівалентної з одиничною матрицею коефіцієнтів виду:

$$\begin{cases} 1 * x_1 + 0 * x_2 + \ldots + 0 * x_n = b_1 \\ 0 * x_1 + 1 * x_2 + \ldots + 0 * x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 * x_1 + 0 * x_2 + \ldots + 1 * x_n = b_n \end{cases}, \qquad (1.25)$$

тобто системи, яка містить тільки одиничну діагональ.

Для отримання такої системи в прямий хід алгоритму базового методу Гауса (з послідовним виключенням невідомих) додатково вводяться такі дії:

Організація циклу по k по всім рівнянням від 1 до N-1 ($k = 1, 2, \ldots, N-1$).

Процедура вибору головного елементу в кожному k-му стовпці при x_k;

Процедура нормування k-го рівняння системи, тобто в k–му рівнянні кожен коефіцієнт a_{kj} розділити на a_{kk}, включаючи b_k, так, щоб коефіцієнт a_{kk} =1.

Перетворення всіх рівнянь системи, починаючи з 1–го до N у відповідності з базовим алгоритмом Гауса з метою отримати еквівалентну систему з одиничною діагоналлю. В даному випадку для розрахунку коефіцієнтів a_{ij} використовуються ті самі формули, що і в базовому алгоритмі Гауса:

$$M = a_{ik}; \qquad a_{ij} = a_{ij} - M \cdot a_{kj}; \qquad b_i = b_i - M \cdot b_k,$$

але використовуються вони для всіх рівнянь з 1–го до N крім k–го, в якому остається коефіцієнт a_{kk} рівний одиниці.

Кінець циклу по k.

Обернений хід методу Гауса-Жордана дуже простий і використовує наступні формули:

$$x_k = b_k, \text{ при } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Зразок виконання

1. Вирішити систему рівнянь методом Гауса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Рішення. Розглянемо розширену матрицю й приведемо її до трикутного виду, виконуючи операції над рядками:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)\{2стр_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & -6 & -4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{Bmatrix} стр_3 - стр_2 \\ стр_2 - стр_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 2 & 7 & 5 \end{array}\right)\{3стр_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 6 & 21 & 15 \end{array}\right)\{стр_3 - 2стр_2\} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 43 & 43 \end{array}\right)\{стр_3/43\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -11 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Отримана матриця описує систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ 3x_2 - 11x_3 = -14, \\ x_3 = 1, \end{cases}$$

еквівалентну вихідній системі. Рішення знаходимо елементарно:

$$3x_2 = -14 + 11x_3 = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1$$

$$2x_1 = 10 + x_2 - 5x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$$

Варіанти

Варіант	Система рівнянь	Варіант	Система рівнянь
1	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -2; \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

2	$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=4; \\ x_1+x_2-4x_3=-1; \\ -2x_1+4x_2-x_3=5. \end{cases}$	17	$\begin{cases} x_1-5x_2-2x_3=0; \\ x_1+x_2+3x_3=-2; \\ -4x_1+x_2-2x_3=0,5. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=2; \\ x_1+x_2-4x_3=-6; \\ -2x_1+4x_2-x_3=0. \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3=-3; \\ -x_1-x_2+2,3x_3=3,9; \\ 3x_1+2x_2-x_3=4. \end{cases}$
4	$\begin{cases} x_1+5x_2-2x_3=5; \\ x_1+x_2-3,5x_3=-0,5; \\ -3,2x_1+2x_2-x_3=-5,4. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3=2; \\ 1,1x_1+0,3x_2-2x_3=-3,5; \\ -1,75x_1+0,5x_2+x_3=0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} -x_1+5x_2+3x_3=5; \\ x_1+x_2-2,5x_3=-1,5; \\ 4x_1-2x_2-x_3=9. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1-5x_2-x_3=1; \\ -1,5x_1+0,1x_2+2x_3=3; \\ 1,25x_1+0,3x_2-0,5x_3=1. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3=-1; \\ x_1+x_2-4x_3=-10; \\ -2x_1+6x_2-x_3=1. \end{cases}$	21	$\begin{cases} 2x_1-5x_2+2x_3=-1; \\ x_1-x_2-4x_3=1; \\ 1,5x_1-x_2+0,2x_3=2. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2x_1-5x_2+2x_3=-2; \\ x_1+x_2-4x_3=0; \\ -7x_1+3x_2+2x_3=-3. \end{cases}$	22	$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3=0; \\ x_1+x_2-3x_3=1; \\ 3,1x_1-x_2-2x_3=6,3. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1-5x_2+2x_3=-2; \\ x_1+x_2-4x_3=-4; \\ -7x_1+3x_2+2x_3=-4. \end{cases}$	23	$\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3=-3; \\ 2x_1+1,2x_2-4,3x_3=-2,1; \\ -6x_1+3,3x_2+2x_3=2,3. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 1,5x_1-5x_2+2x_3=2; \\ x_1+x_2-4x_3=-5; \\ 5x_1-3x_2-2x_3=3. \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x_1-5x_2-x_3=1; \\ -1,5x_1+0,1x_2+2x_3=3; \\ 1,25x_1+0,3x_2-0,5x_3=1. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 2x_1-4x_2+1,4x_3=0,7; \\ x_1+x_2-3x_3=1,5; \\ 3,5x_1-x_2-2x_3=5. \end{cases}$	25	$\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3=2; \\ 1,1x_1+0,3x_2-2x_3=-3,5; \\ -1,75x_1+0,5x_2+x_3=0. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 2x_1-5x_2+x_3=-3; \\ 2x_1+1,2x_2-4,3x_3=-2,1; \\ -6x_1+3,3x_2+2x_3=2,3. \end{cases}$	26	$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3=-3; \\ -x_1-x_2+2,3x_3=3,9; \\ 3x_1+2x_2-x_3=4. \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3=0; \\ x_1+x_2-3x_3=1; \\ 3,1x_1-x_2-2x_3=6,3. \end{cases}$	27	$\begin{cases} x_1-5x_2-2x_3=0; \\ x_1+x_2+3x_3=-2; \\ -4x_1+x_2-2x_3=0,5. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 6x_1-3x_2+2x_3=1; \\ x_1+x_2-3x_3=0; \\ -7x_1+3x_2+2x_3=0,5. \end{cases}$	28	$\begin{cases} x_1-7x_2+4x_3=-5; \\ x_1+2x_2-4x_3=0; \\ -7x_1+3x_2+2x_3=4. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 5x_1-x_2-3x_3=1; \\ x_1+x_2+3x_3=2; \\ 2x_1-5x_2+2x_3=2. \end{cases}$	29	$\begin{cases} 5x_1-x_2-3x_3=1; \\ x_1+x_2+3x_3=2; \\ 2x_1-5x_2+2x_3=2. \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1-7x_2+4x_3=-5; \\ x_1+2x_2-4x_3=0; \\ -7x_1+3x_2+2x_3=4. \end{cases}$	30	$\begin{cases} 6x_1-3x_2+2x_3=1; \\ x_1+x_2-3x_3=0; \\ -7x_1+3x_2+2x_3=0,5. \end{cases}$

Питання самоконтролю.

1. Дати визначення слідуючих термінів: розв’язання СЛАР, визначена і невизначена, вироджена і невироджена, сумісна і несумісна СЛАР.
2. Класифікація методів розв’язання СЛАР.
3. Суть точних методів розв’язання СЛАР.
4. У яких випадках краще використовувати точні методи?
5. Суть алгоритму методу Гауса розв’язання СЛАР.
6. Яку систему отримано в результаті прямого ходу методу Гауса-Жордана?
7. Дати визначення слідуючих термінів: норма матриці, норма вектора, достатня умова сходження.

Лабораторна робота № 2.
Рішення системи лінійних рівнянь ітераційними методами

Мета: Набуття навичок розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методами простих ітерацій та Гаусса-Зейделя.

Завдання: Вирішити систему лінійних рівнянь методом ітерації й методом Зейделя з точністю $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ та порівняти отримані наближені рішення і їхні погрішності.

Короткі теоретичні відомості

Постановка задачі. Знайти наближене рішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax = b$, де $A = \{a_{i,j}\}$, $i, j = \overline{1,n}$, $x = (x_i)^T$, $b = (b_i)^T$, $i = \overline{1,n}$.

Якщо $|A| \neq 0$, то система має єдине рішення.

Явний метод ітерації. Представимо дану систему у вигляді

$$x = \beta + \alpha \cdot x,$$

де $\alpha = \{\alpha_{i,j}\}$, $\alpha_{i,i} = -\dfrac{\tilde{a}_{i,i}}{\overline{a}_{i,i}}$, $\alpha_{i,j} = -\dfrac{a_{i,j}}{\overline{a}_{i,i}}$, $i \neq j$, $a_{i,i} = \tilde{a}_{i,i} + \overline{a}_{i,i}$, $\overline{a}_{i,i} \neq 0$, $i, j = \overline{1,n}$; $\beta_i = \dfrac{b_i}{\overline{a}_{i,i}}$.

Наближене рішення шукаємо по наступній ітераційній схемі

$$x^{(s+1)} = \beta + \alpha \cdot x^{(s)} \ (*),\ x^{(0)} = \beta \text{ або } x_i^{(0)} = \beta_i,\ i = \overline{1,n},\ s = 0,1,2,\ldots.$$

Для збіжності ітераційної послідовності $(*)$ необхідне виконання наступної умови: $\|\alpha\|_p < 1$. Де $p = \{m, l, k\}$ канонічні норми:

$$\|\alpha\|_m = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}| \right\},\ i = \overline{1,n};\ \|\alpha\|_l = \max_j \left\{ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{i,j}| \right\},\ j = \overline{1,n};\ \|\alpha\|_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|^2}.$$

Ітераційна послідовність триває до виконання умови

$$\left\| x^{(s)} - x^{(s-1)} \right\|_p \leq \frac{1 - \|\alpha\|_p}{\|\alpha\|_p} \varepsilon,\ x^{(0)} = \beta,\ s = 1,2,\ldots.$$

Тоді за наближене рішення можна взяти

$$\xi = x^{(s)},\ \Delta_\xi = \left\| x^{(s)} - x^{(s-1)} \right\|_p \cdot \frac{\|\alpha\|_p}{1 - \|\alpha\|_p}.$$

Явний метод Зейделя. За даним методом наближене рішення шукається за наступною схемою

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)},\ i = \overline{1,n}.$$

Визначення збіжності й оцінка погрішності здійснюється так само, як і для методу ітерації.

Зразок виконання

Дано систему лінійних рівнянь $Ax = b$, де $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$, $A = \{a_{i,j}\}$, $i, j = \overline{1,n}$. Знайти наближене рішення даної системи $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Розглянемо приклад рішення наступної системи рівнянь методами ітерацій і Зейделя

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

точне рішення якої $x = (1, 2, 3)^T$.

Тому що визначник системи $\Delta = |A| = 46 \neq 0$, система має єдине рішення.

Приведемо дану систему до виду $x = \beta + \alpha \cdot x$, де $\beta = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/4 \\ 8/3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$;

рішення будемо шукати у вигляді ітераційної послідовності $x^{(k+1)} = \beta + \alpha \cdot x^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $x^{(0)} = \beta$. Знайдемо канонічні норми матриці α.

$$\|\alpha\|_L = 0{,}75, \ \|\alpha\|_m = 0{,}8333, \ \|\alpha\|_k = 0{,}87.$$

Мінімальною нормою є норма $\|\alpha\|_L = 0{,}75 < 1$. Тому всі дії будемо робити по цій нормі. Ітераційний процес будемо продовжувати доти, поки не буде виконуватися умова $\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|_L \le \dfrac{1 - \|\alpha\|_L}{\|\alpha\|_L} \cdot \varepsilon$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

За методом ітерації одержимо $\tilde{\xi} = x^{(k)} = \begin{pmatrix} 0{,}9999783 \\ 2{,}0000017 \\ 2{,}9998545 \end{pmatrix}$, $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0{,}000333$, $k = 23$.

За методом Зейделя одержимо $\tilde{\xi} = x^{(k)} = \begin{pmatrix} 1{,}0000704 \\ 1{,}9999846 \\ 2{,}9999614 \end{pmatrix}$, $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0{,}000333$, $k = 21$.

Варіанти взяти з лабораторної роботи 1.

Питання самоконтролю.

1) Постановка задачі.
2) Основна ідея методу ітерації.
3) Яка умова повинна виконуватися для збіжності ітераційної процесу?
4) Сформулювати канонічні норми, що використовуються у методі ітерації.
5) Як знаходиться рівносильна система рівнянь, застосовувана для ітераційного процесу? Критерій вибору рівносильної системи рівнянь.
6) Як визначається погрішність методу ітерації при заданій точності?
7) У чому відмінність методу Зейделя від методу ітерації?

Лабораторна робота № 3.
Рішення нелінійних рівнянь методом половинного ділення.

Мета: Набуття навичок відокремлення коренів нелінійних рівнянь та уточнення їх методом половинного ділення.

Завдання:

1) Відокремити корінь рівняння графічно й програмно.

2) Уточнити корінь (всі!) рівняння методом половинного ділення з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$, вказати число розбивок відрізка.

Короткі теоретичні відомості

Метод половинного ділення.

Постановка задачі. Дано нелінійне рівняння $F(x) = 0$, де функція $y = F(x)$ визначена й безперервна для всіх $x \in [a,b]$, причому функція міняє знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Знайти наближене рішення даного рівняння $F(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$ та необхідне для цього число розбивок відрізка $[a, b]$.

Наближене рішення $\tilde{\xi}$ і погрішність наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$ знаходять за наступною схемою:

$$\tilde{\xi} = \frac{a_n + b_n}{2},\ \Delta\tilde{\xi} = \frac{b_n - a_n}{2},\ n = 0,1,2,\ldots;\ a_0 = a,\ b_0 = b;$$

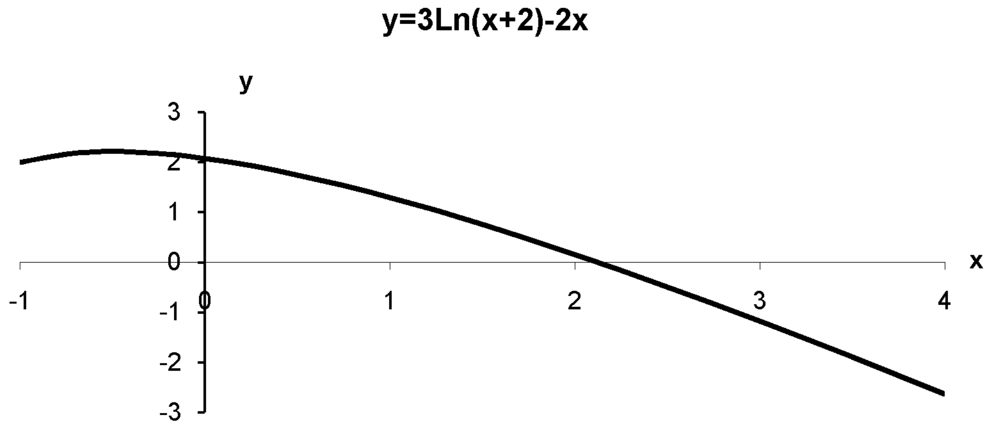
де $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dfrac{b-a}{2^n}$, задовольняє умовам условиям $F(a_n) \cdot F(b_n) < 0$, $(b_n - a_n) \le \varepsilon$; з останнього визначається число розбивок відрізка $n \ge \log_2\left(\dfrac{b-a}{\varepsilon}\right)$.

Зразок виконання

Постановка задачі. Знайти корінь нелінійного рівняння $F(x) \equiv 3 \cdot \ln(x+2) - 2 \cdot x = 0$ методом половинного ділення з точністю $\varepsilon = 0{,}0001$.

Рішення задачі. Відокремимо корінь рівняння на відрізку $[-1;\ 4]$ графічним методом. Для цього табулюємо функцію $y(x) = 3 \cdot \ln(x+2) - 2x$ на даному відрізку.

Маємо $\varepsilon = 0{,}0001$, $a = -1$, $b = 4$, $n = 20$, $h = 0{,}25$.



Виділимо відрізок [1,3], що містить ізольований корінь, для уточнення якого застосуємо метод половинного ділення за схемою $\tilde{\xi} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $\Delta_{\tilde{\xi}} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$, $n = 0,1,2,\ldots$, де

$b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dfrac{b-a}{2^n}$, $F(a_n) \cdot F(b_n) < 0$. Вважаючи $a_0 = 1$, $b_0 = 3$, а також умову зупинки ділення відрізка навпіл $\Delta_{\xi} = \dfrac{b_n - a_n}{2} \le \varepsilon$, складемо таблицю

a_i	b_i	$\frac{b_i + a_i}{2}$	$F(a_i)$	$F(b_i)$	$F\left(\frac{b_i + a_i}{2}\right)$	корінь	похибка	Умова зуп.
1,00000000	3,00000000	2,00000000	1,29583687	-1,17168626	0,15888308		1,00000000	немає
2,00000000	3,00000000	2,50000000	0,15888308	-1,17168626	-0,48776781		0,50000000	немає
2,00000000	2,50000000	2,25000000	0,15888308	-0,48776781	-0,15924305		0,25000000	немає
2,00000000	2,25000000	2,12500000	0,15888308	-0,15924305	0,00119806		0,12500000	немає
2,12500000	2,25000000	2,18750000	0,00119806	-0,15924305	-0,07868831		0,06250000	немає
2,12500000	2,18750000	2,15625000	0,00119806	-0,07868831	-0,03866032		0,03125000	немає
2,12500000	2,15625000	2,14062500	0,00119806	-0,03866032	-0,01870977		0,01562500	немає
2,12500000	2,14062500	2,13281250	0,00119806	-0,01870977	-0,00875050		0,00781250	немає
2,12500000	2,13281250	2,12890625	0,00119806	-0,00875050	-0,00377488		0,00390625	немає
2,12500000	2,12890625	2,12695313	0,00119806	-0,00377488	-0,00128807		0,00195313	немає
2,12500000	2,12695313	2,12597656	0,00119806	-0,00128807	-0,00004492		0,00097656	немає
2,12500000	2,12597656	2,12548828	0,00119806	-0,00004492	0,00057659		0,00048828	немає
2,12548828	2,12597656	2,12573242	0,00057659	-0,00004492	0,00026584		0,00024414	немає
2,12573242	2,12597656	2,12585449	0,00026584	-0,00004492	0,00011046		0,00012207	немає
2,12585449	2,12597656	2,12591553	0,00011046	-0,00004492	0,00003277	2,12591553	0,00006104	так
2,12591553	2,12597656	2,12594604	0,00003277	-0,00004492	-0,00000608	2,12594604	0,00003052	так
2,12591553	2,12594604	2,12593079	0,00003277	-0,00000608	0,00001335	2,12593079	0,00001526	так

Наближене рішення $\tilde{\xi} = x_{14} = 2{,}12591553$, погрішність $\Delta_{\xi} = 0{,}00006104$, число ітерацій $k = 14$.

Отже, наближене значення кореня дорівнює $\tilde{\xi} = 2{,}12591553 \pm 0{,}00006104$.

Варіанти

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
1	$2e^x - 5x^2 - 1{,}1 = 0$	16	$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$
2	$e^{x^2} + 2x - 7 = 0$	17	$\ln(x) - \dfrac{1}{5x+2} = 0$
3	$x^3 - x - 0.2 = 0$	18	$2\sin(x-1) = x - 1{,}2$
4	$x^3 - 4x^2 + x + 2.5 = 0$	19	$\cos(3x - 0{,}25) = \dfrac{x^2}{2} - 1$
5	$x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$	20	$x^4 - 2x^2 + 0{,}07 = 0$
6	$x^2 - 2\sin(x-1) - 2 = 0$	21	$0{,}5x + \sin(x) = 1{,}5$
7	$x^3 - 1.2x + 1 = 0$	22	$5\cos(x) = 3 - x^2$

8	$x^2 - 2\sin(2x) - 0.5 = 0$	23	$2\cos(2x + 0,5) = \exp(x^2)$
9	$x^2 + \lg(x) = 1,25$	24	$x^4 - 8x^2 + 2 = 0$
10	$ctg(0,5x - 0,2) = x^2 - 5$	25	$x^2 - 3\sin(x^2 - 1) = 0$
11	$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$	26	$2 \cdot \ln(x+1) - \dfrac{x^2}{2} + 1 = 0$
12	$2(x-1) - \exp(x^2 - 2) = 1$	27	$2x^4 - 0,5^x - 1 = 0$
13	$\lg(x-2) + \dfrac{3}{2x+7} = 0$	28	$2^x + x^2 - 2 = 0$
14	$5x^2 - 2 \cdot \lg(\lvert x \rvert + 0.5) = 2$	29	$3\cos(x^{0,5} - 0,3) - \dfrac{3}{2x} = 0$
15	$x^3 - 3x^2 + 4 \cdot \sin(x) = -1$	30	$x^3 - 2\cos(3x+1) + 2 = 0$

Питання самоконтролю.

1) Як відділяються коріння рівняння?
2) Якою повинна бути величина кроку при відділенні кореня рівняння?
3) Які умови повинні бути виконані для застосування методу половинного ділення відрізка?
4) Яка ідея методу половинного ділення відрізка? Геометрична ілюстрація.
5) Як обчислюється наближений корінь рівняння і яка його погрішність?
6) Як залежить погрішність результату від вибору наближеного рішення?

Лабораторна робота № 4.
Рішення нелінійних рівнянь ітераційними методами

Мета: Набуття навичок рішення нелінійних рівнянь ітераційними методами.

I. Метод ітерації.

Завдання:

1) Відокремити корінь рівняння графічно й програмно.

2) Уточнити один з коренів рівняння методом ітерації з точністю $\varepsilon = 0,001$, указати число ітерацій.

3) Намалювати схему застосування методу ітерації до даного кореня рівняння.

Короткі теоретичні відомості

Метод ітерації.

Постановка задачі. Дано нелінійне рівняння $F(x) = 0$, де функція $y = F(x)$ визначена й неперервно-диференційована для всіх $x \in [a,b]$, причому функція міняє знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Знайти наближене рішення даного рівняння $F(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Наближене рішення / і погрішність наближення / перебувають за наступною схемою:

- рівняння $F(x) = 0$ приводиться до виду $x = \varphi(x)$, де функція $y = \varphi(x)$ задовольняє умовам: $\varphi(x) \in [a,b]$, диференційована на даному відрізку і $0 < \lvert \varphi'(x) \rvert \le q < 1$;

- будується ітераційна послідовність виду $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, де x_0 вибирається довільно з даного відрізка, наприклад, $x_0 = \dfrac{b+a}{2}$;

- вважаючи $\tilde{\xi} = x_n$ наближеним значенням кореня ξ, для погрішності одержимо $\Delta_{\tilde{\xi}} = \left|\xi - \tilde{\xi}\right| \le \dfrac{q}{1-q}\left|x_n - x_{n-1}\right|$, а так як за умовою $\Delta_{\tilde{\xi}} \le \varepsilon$, то ітераційний процес продовжимо до виконання умови $\left|x_n - x_{n-1}\right| \le \dfrac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$, при цьому наближене значення кореня визначається як $\tilde{\xi} = x_n$.

Наближене рішення $\tilde{\xi}$ і погрішність наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

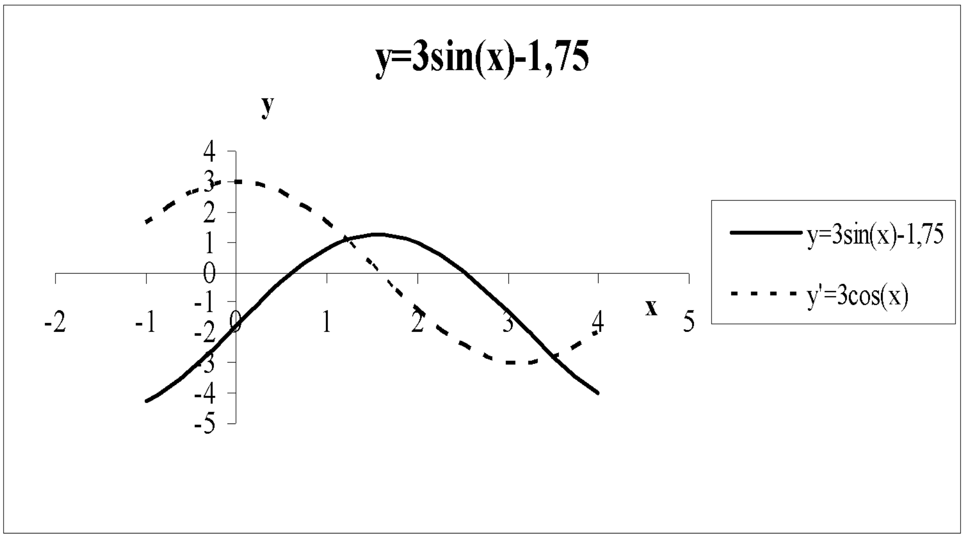
$$\tilde{\xi} = x_n, \ \Delta\tilde{\xi} = \left|x_n - x_{n-1}\right| \frac{q}{1-q} \le \varepsilon .$$

Зразок виконання

Постановка задачі. Знайти корінь нелінійного рівняння $3 \cdot \sin(x) - 1,75 = 0$ методом ітерації з точністю $\varepsilon = 0,001$.

Рішення задачі. Відокремимо корінь рівняння на відрізку $[-1; 4]$ графічним методом. Для цього табулюємо функцію $y(x) = 3 \cdot \sin(x) - 1,75$ на даному відрізку.

$\varepsilon =$	0,0001,		
$a=$	-1,	$n=$	20,
$b=$	4,	$h=$	0,25.



$x =$	$y(x) = 3 \cdot \sin(x) - 1,75$	$y'(x) = 3 \cdot cos(x)$
-1	-4,274412954	1,620906918
-0,75	-3,79491628	2,195066607
-0,5	-3,188276616	2,632747686
-0,25	-2,492211878	2,906737265
0	-1,75	3
0,25	-1,007788122	2,906737265
0,5	-0,311723384	2,632747686
0,75	0,29491628	2,195066607
1	0,774412954	1,620906918

1,25	1,096953858	0,945967087
1,5	1,24248496	0,212211605
1,75	1,201957841	-0,534738167
2	0,97789228	-1,24844051
2,25	0,584219591	-1,884520868
2,5	0,045416432	-2,403430847
2,75	-0,605017024	-2,772907136
3	-1,326639976	-2,96997749
3,25	-2,074585404	-2,982389028
3,5	-2,802349683	-2,809370062
3,75	-3,464683956	-2,461678072
4	-4,020407486	-1,960930863

Виділимо відрізок $[0;1]$, де перебуває корінь, і уточнимо його методом ітерації.

Одержимо рівносильне рівнянню $F(x) \equiv 3\cdot\sin(x) - 1,75 = 0$ рівняння $x = \varphi(x)$. Функцію $\varphi(x)$ будемо шукати у вигляді $\varphi(x) = x - \dfrac{F(x)}{M}$, де $0 < m < F'(x) \le M$.

$$a_1 = 0, \qquad 0 < 1,620906918 < F'(x) \le \ 3,$$
$$b_1 = 1, \qquad 0 < \quad m \quad < F'(x) \le \quad M,$$
$$m = 1,620906918, \qquad M = 3.$$

При такому виборі функція $\varphi(x)$ задовольняє умові збіжності ітераційної послідовності $x_i = \varphi(x_{i-1}),\ i = 1,2,3,\dots,\ |\varphi'(x)| \le q < 1$, де $q = 1 - \dfrac{m}{M}$.

Тоді одержимо наступне значення $q = 0,459697694$, умова зупинки ітераційної послідовності $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \dfrac{1-q}{q} = 0,000118$, при виборі наближеного рішення $\tilde{\xi} = x_i$ з погрішністю наближеного рішення $\Delta\tilde{\xi} = |\xi - x_i| \le |x_i - x_{i-1}| \dfrac{q}{1-q} = \Delta_{\tilde{\xi}}$.

Якщо звести результати в таблицю одержимо

	x_i	$\varphi(x_{i-1})$	$\lvert x_i - x_{i-1}\rvert$	$\Delta_{\tilde{\xi}}$	Умова зупинки ітерації
x_0	0,5				
x_1	0,603908	0,603908	0,10390779	0,08840638	немає
x_2	0,619378	0,619378	0,01546994	0,01316207	немає
x_3	0,622182	0,622182	0,00280474	0,00238631	немає
x_4	0,622706	0,622706	0,00052329	0,00044523	немає
x_5	0,622804	0,622804	0,00009814	0,00008350	так
x_6	0,622822	0,622822	0,00001842	0,00001568	так
x_7	0,622826	0,622826	0,00000346	0,00000294	так
		0,622826	0,00000065	0,00000055	так

Наближене рішення $\tilde{\xi} = x_5 = 0,622804$, погрішність $\Delta_{\tilde{\xi}} = 0,0000835$, число ітерацій $k = 5$.

Отже, наближене значення кореня дорівнює $\tilde{\xi} = 0,622804 \pm 0,00008350$.

II. Методи хорд, дотичних (Ньютона) і комбінований метод хорд і дотичних.

Завдання: 1) Відокремити корінь рівняння графічно й програмно.

2) Уточнити корінь рівняння з точністю $\varepsilon = 0,0001$.

3) Намалювати схему застосування методу до кожного кореня рівняння.

Короткі теоретичні відомості

Метод хорд.

<u>*Постановка задачі*</u>. Дано нелінійне рівняння $F(x) = 0$, де функція $y = F(x)$ визначена й неперервно-диференційована для всіх $x \in [a,b]$, причому функція міняє знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Знайти наближене рішення даного рівняння $F(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 0.001$.

Наближене рішення $\tilde{\xi}$ і погрішність наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$ знаходять за наступною схемою:

якщо $F(b)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, тоді $x_{n+1} = b - \dfrac{F(b)}{F(b)-F(x_n)}(b-x_n)$, $x_0 = a$, $n = 0,1,2,\ldots$;

якщо $F(a)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, тоді $x_{n+1} = a - \dfrac{F(a)}{F(x_n)-F(a)}(x_n-a)$, $x_0 = b$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Наближене рішення $\tilde{\xi}$ і погрішність наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$\tilde{\xi} = x_{n+1}$, $\Delta\tilde{\xi} = |x_{n+1} - \xi| \le \varepsilon$.

Метод Ньютона (метод дотичних).

<u>*Постановка задачі*</u>. Дано нелінійне рівняння $F(x) = 0$, де функція $y = F(x)$ визначена й неперервно-диференційована для всіх $x \in [a,b]$, причому функція міняє знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Знайти наближене рішення даного рівняння $F(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 0.001$.

Наближене рішення $\tilde{\xi}$ і погрішність наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$ знаходять за наступною схемою:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)},\ n = 0,1,2,\ldots;$$

якщо $F(b)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_0 = b$;

якщо $F(a)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то $x_0 = a$;

Наближене рішення $\tilde{\xi}$ і погрішність наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$\tilde{\xi} = x_{n+1}$, $\Delta\tilde{\xi} = |x_{n+1} - \xi| \le \varepsilon$.

Комбінований метод (хорд і дотичних).

неперервно-диференційована для всіх $x \in [a,b]$, причому функція міняє знак на кінцях цього відрізка, тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$.

Знайти наближене рішення даного рівняння $F(x) = 0$ з точністю $\varepsilon = 0.001$.

Наближене рішення $\tilde{\xi}$ і погрішність наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$ знаходять за наступною схемою:

якщо $F(b)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{F(\overline{x}_n)}{F(\overline{x}_n)-F(x_n)}(\overline{x}_n - x_n),$$

$$\overline{x}_0 = b,\ \overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{F(\overline{x}_n)}{F'(\overline{x}_n)},\ n = 0,1,2,\ldots;$$

якщо $F(a)\cdot F''(x)>0$ на $[a,b]$, то

$$x_0 = b,\ x_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{F(\overline{x}_n)}{F(x_n)-F(\overline{x}_n)}(x_n - \overline{x}_n),$$

$\bar{x}_0 = a$, $\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \dfrac{F(\bar{x}_n)}{F'(\bar{x}_n)}$, $n = 0,1,2,\dots$.

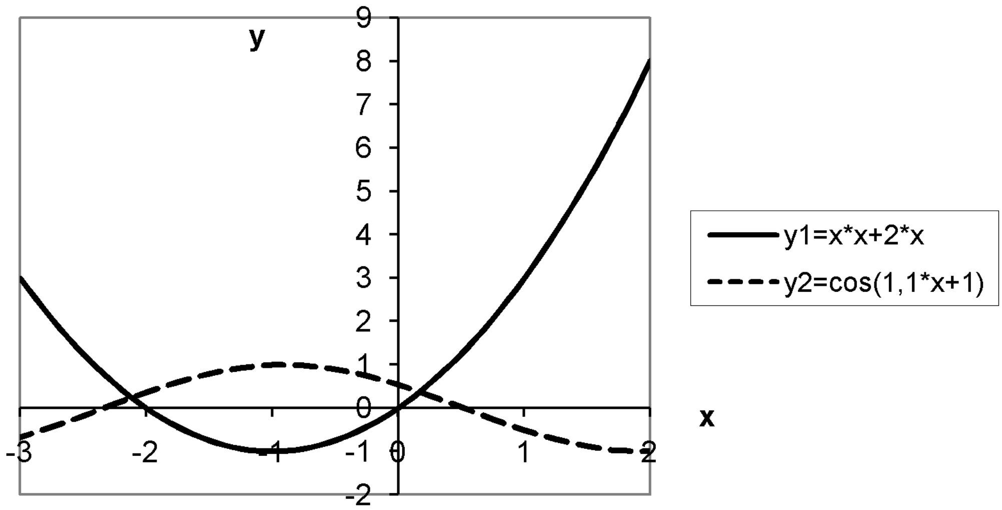
Наближене рішення $\tilde{\xi}$ і погрішність наближення $\Delta_{\tilde{\xi}}$:

$\xi = \dfrac{x_{n+1} + \bar{x}_{n+1}}{2}$, $\Delta\tilde{\xi} = \dfrac{1}{2}\left|x_{n+1} - \bar{x}_{n+1}\right| \le \varepsilon$.

Зразок виконання

А). Знайти наближені рішення рівняння $x^2 + 2x - \cos(1,1x+1) = 0$ методом хорд із точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Відокремимо корінь цього рівняння графічно (можна й програмно). Для цього побудуємо графіки функцій $y_1(x) = x^2 + 2x$, $y_2(x) = \cos(1,1x+1)$ і знайдемо абсциси точок перетинання графіків цих функцій: $\xi_1 \in [-2,5; -2]$, $\xi_2 \in [0; 0,5]$.



Розглянемо як приклад перший корінь. Уточнимо його методом хорд. Для цього визначимо знаки функції $y = F(x)$ і другої її похідної $y'' = F''(x)$ на цьому відрізку $[-2,5; -2]$.

$F(x) = x^2 + 2x - \cos(1,1x+1)$,

$F''(x) = 2 + 1,21\cos(1,1x+1)$;

$F(-2,5) = 1,42825 > 0$, $F(-2) = -0,36236 < 0$.

Враховуючи, що $|\cos(1,1 * x + 1)| \le 1$, тоді $F''(x) > 0$, $\forall x \in [-2,5; -2]$.

Оскільки $F(-2,5)\cdot F''(x) > 0$, то застосовуємо формулу

$$x_{n+1} = (-2,5) - \frac{F(-2,5)}{F(x_n) - F(-2,5)}\left(x_n - (-2,5)\right)$$

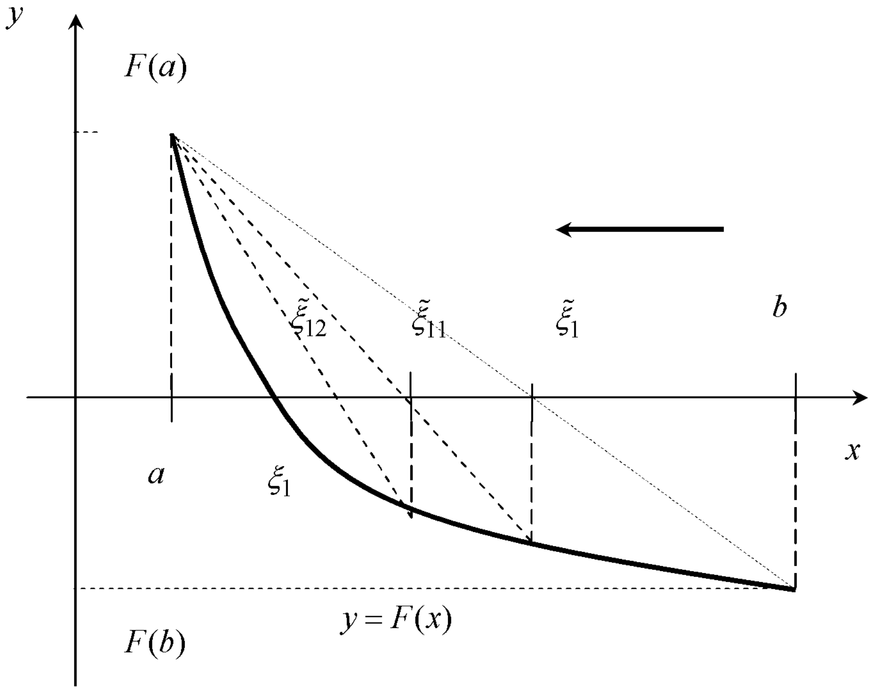
де нерухома точка $x = a = -2,5$, а початкова точка $x_0 = b = -2$. Одержимо наступну таблицю

x	y	$\Delta x = x_n - a$	h_n	Δh	Δx
-2	-0,362357754	0,5	-0,398816882		
-2,101183118	-0,043988132	0,398816882	-0,386900836	0,011916	0,101183
-2,113099164	-0,004912162	0,386900836	-0,38557473	0,001326	0,011916
-2,11442527	-0,000543307	0,38557473	-0,385428113	0,000147	0,001326
-2,114571887	-0,000060028	0,385428113	-0,385411914	1,62E-05	0,000147
-2,114588086	-0,000006632	0,385411914	-0,385410125	1,79E-06	1,62E-05

a	b	$F(a)$
-2,5	-2	1,428246056

Де $h_n = \dfrac{F(a)}{F(x_n) - F(a)}(x_n - a)$, $\Delta h = h_{n+1} - h_n$, $\Delta x = x_{n+1} - x_n$.

Схема застосування методу хорд.



Б) Знайти наближені рішення рівняння $x^2 + 2x - \cos(1,1x+1) = 0$ методом дотичних (методом Ньютона) з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Відокремимо корінь цього рівняння графічно (можна й програмно). Для цього побудуємо графіки функцій $y_1(x) = x^2 + 2x$, $y_2(x) = \cos(1,1x+1)$ і знайдемо абсциси точок перетинання графіків цих функцій: $\xi_1 \in [-2,5; -2]$, $\xi_2 \in [0;\ 0,5]$.

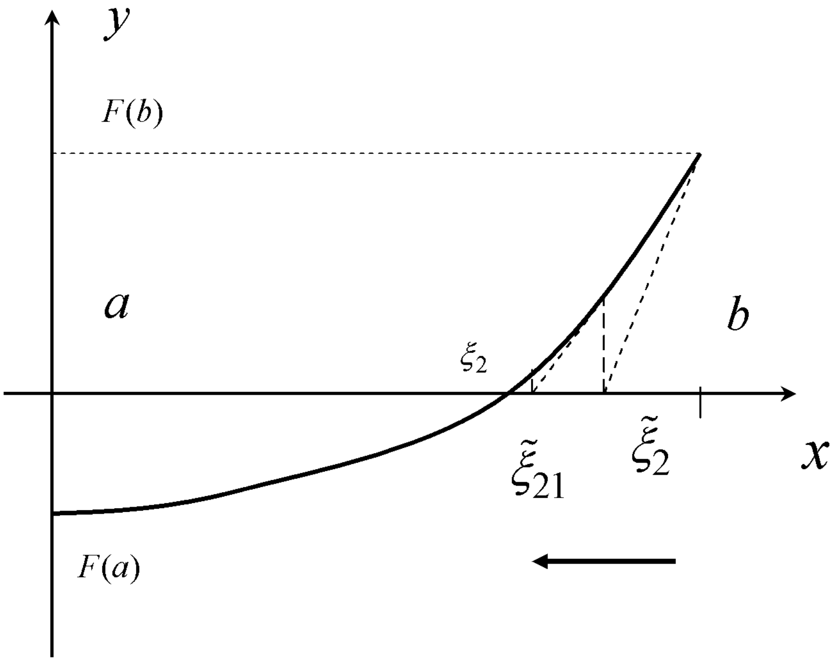
Як приклад розглянемо другий корінь. Уточнимо його методом дотичних. Для цього визначимо знаки функції $y = F(x)$ і другої її похідної $y'' = F''(x)$ на цьому відрізку $[0; 0,5]$: $F(x) = x^2 + 2x - \cos(1,1x+1)$, $F''(x) = 2 + 1,21\cos(1,1x+1)$; $F(0) = -0,54031<0$, $F(0,5) = 1,22921>0$; Так як $|\cos(1,1*x+1)| \le 1$, то $F''(x)>0, \forall x \in [0;\ 0,5]$.

Оскільки $F(0,5)\cdot F''(x) > 0$, то застосовуємо формулу $x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$, $n = 0,1,2,\ldots,$ $x_0 = 0,5$.

x	y	$F'(x_0)$	$h = \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$	$\Delta x = x_{n+1} - x_n$
0,5	1,229205172	4,099762141	0,29982354	
0,200176466	0,096960102	3,433435582	0,028239965	0,299823534
0,171936501	0,000967890	3,364722863	0,000287658	0,028239965
0,171648863	0,000000101	3,364017852	0,000000030	0,000287658
0,171648813	0,000000000	3,364017778	0,000000000	0,000000030

a	b	$F(a)$	$F(b)$	$F''(a)$	$F''(b)$
0	0,5	-0,54030231	1,229205172	2,65376579	2,02516174

Схема застосування методу дотичних.



C) Знайти наближені рішення рівняння $x^2+2x-\cos(1,1x+1)=0$ комбінованим методом з точністю $\varepsilon=10^{-4}$.

Відокремимо корінь цього рівняння графічно (можна й програмно). Для цього побудуємо графіки функцій $y_1(x)=x^2+2x$, $y_2(x)=\cos(1,1x+1)$ і знайдемо абсциси точок перетинання графіків цих функцій: $\xi_1\in[-2,5;-2]$, $\xi_2\in[0;\ 0,5]$.

Розглянемо другий корінь як приклад. Уточнимо його комбінованим методом. Для цього визначимо знаки функції $y=F(x)$ і другої її похідної $y''=F''(x)$ на цьому відрізку $[0;\ 0,5]$: $F(x)=x^2+2x-\cos(1,1x+1)$, $F''(x)=2+1,21\cos(1,1x+1)$; $F(0)=\text{-}0{,}54031<0$, $F(0,5)=1{,}22921>0$; Так як $|\cos(1,1*x+1)|\le 1$, то $F''(x)>0,\ \forall x\in[0;\ 0,5]$.

Тоді застосовуємо формули

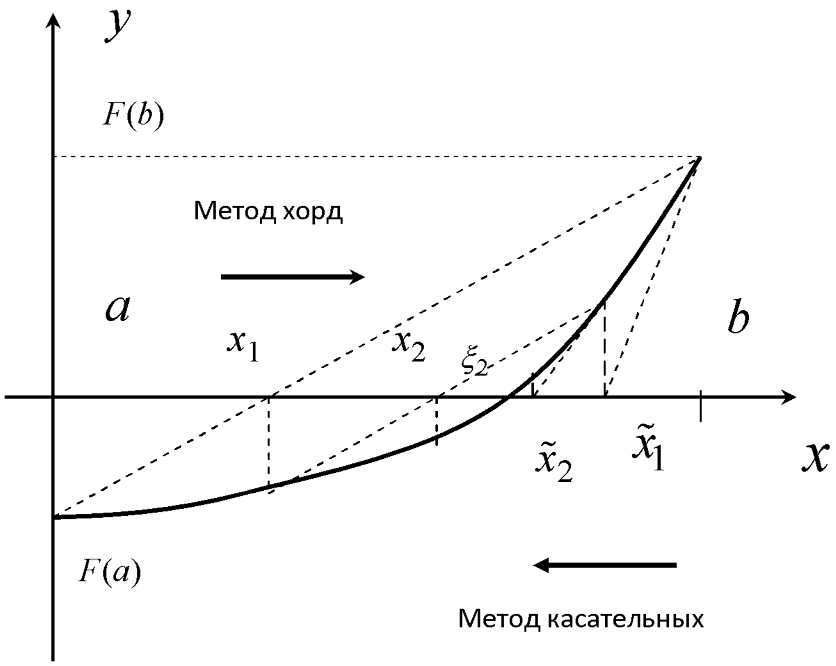
$$x_{n+1}=x_n-h_1,\quad h_1=\frac{F(x_n)}{F(\bar{x}_n)-F(x_n)}(\bar{x}_n-x_n),\ \bar{x}_{n+1}=\bar{x}_n-h_2,\quad h_2=\frac{F(\bar{x}_n)}{F'(\bar{x}_n)},\ x_0=a,\bar{x}_0=b,\ m=0,1,2,\dots.$$

Процес продовжуємо до виконання умови $|\bar{x}_n-x_n|<\varepsilon$, тоді за наближене значення кореня можна взяти значення $\tilde{\xi}=\dfrac{x_n+\bar{x}_n}{2},\ \Delta_{\tilde{\xi}}=\dfrac{|x_n-\bar{x}_n|}{2}$.

x_n	$\bar{x}_n$	$F(x_n)$	h_1	$F(\bar{x}_n)$	h_2
0,00000000	0,50000000	-0,54030231	-0,15267025	1,22920517	0,29982353
0,15267025	0,20017647	-0,06340140	-0,01878232	0,09696010	0,02823997
0,17145257	0,17193650	-0,00066012	-0,00019622	0,00096789	0,00028766
0,17164879	0,17164884	-0,00000007	-0,00000002	0,00000010	0,00000003

$F'(\bar{x}_n)$	$\bar{x}_n-x_n$	$\tilde{\xi}$	$\Delta_{\tilde{\xi}}$
4,09976214	0,50000000	0,25000000	0,25000000
3,43343558	0,04750621	0,17642336	0,02375311
3,36472286	0,00048393	0,17169453	0,00024197
3,36401785	0,00000005	0,17164882	0,00000003

Схема застосування комбінованого методу.



Варіанти взяти з лабораторної роботи 3.

Питання самоконтролю.

1) Які умови повинні бути виконані для застосування методу ітерації?
2) Яка ідея методу ітерації? Геометрична ілюстрація.
3) Яка умова повинна виконуватися для збіжності ітераційної послідовності?
4) Як знаходиться рівносильне рівняння, застосовуване для ітераційного процесу? Критерій вибору рівносильного рівняння.
5) Як визначається погрішність методу ітерації при заданій точності?
6) Які позитивні й негативні сторони методу ітерації (зрівняти з методом ділення відрізка навпіл)?
7) Які особливості застосування методу хорд, дотичних (Ньютона), комбінованого методу?

Лабораторна робота № 5.
Інтерполяція функції. Поліном Лагранжа

Мета: Набуття навичок побудови інтерполяційного полінома Лагранжа.
Завдання:
1) Знайти наближене значення функції при заданому значенні аргументу ξ за допомогою інтерполяційного полінома Лагранжа, якщо функція задана в не рівновіддалених вузлах; $y_i = f\left(x_i\right)$, $i = \overline{0,6}$; $y_\xi = f\left(\xi\right)$; y_ξ –?

Короткі теоретичні відомості

Інтерполяційна формула Лагранжа. Якщо функція $y = f\left(x\right)$ визначена на відрізку $\left[a;b\right]$ й дана своїми значеннями y_i в не рівновіддалених вузлах $x_i \in \left[a;b\right]$, $x_{i+1} \neq x_i + h$, $h = const > 0$, то задача інтерполяції вирішується за допомогою полінома Лагранжа.

$$L_n\left(\xi\right) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{k \neq i,0}^{n} \left(\frac{\xi - x_k}{x_i - x_k}\right),\ y_\xi = f\left(\xi\right) \approx L_n\left(\xi\right),\ \Delta_{y(\xi)} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n}\left(\xi - x_k\right)}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}\left(\bar{\xi}\right)\right|,\ \bar{\xi} \in \left[a;b\right].$$

Варіанти:

	Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1,0000	6,0100	0,2955	0,8253	0,9553	0,1011	3,6788	0,9689	0,9044	0,1011	3,6788
	1,1000	6,9066	0,4259	0,8162	0,9460	0,1076	3,6616	1,0587	0,9513	0,1183	4,0277
	1,2320	8,3884	0,6095	0,8110	0,9325	0,1154	3,5938	1,1740	0,9900	0,1421	4,4276
x_i	1,4796	12,1761	0,9142	0,8231	0,9031	0,1279	3,3694	1,3796	0,9813	0,1893	4,9855
	1,9383	23,2239	0,6753	0,9067	0,8356	0,1453	2,7901	1,7152	0,6555	0,2816	5,4082
	1,9577	23,8200	0,6283	0,9112	0,8324	0,1459	2,7639	1,7279	0,6332	0,2856	5,4110
	2,0380	26,4092	0,4031	0,9299	0,8189	0,1483	2,6553	1,7791	0,5343	0,3021	5,4115
ξ	1,3										

	Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1,8545	20,7751	0,7277	0,8875	0,8492	0,1426	2,9028	1,6588	0,9243	0,2644	3,2300
	1,5022	12,5914	0,9769	0,8256	0,9002	0,1289	3,3445	1,3975	0,7538	0,1937	3,0144
	1,1732	7,6850	0,6229	0,8123	0,9387	0,1120	3,6296	1,1231	0,7000	0,1314	2,5550
x_i	0,8330	4,9104	0,1928	0,8497	0,9689	0,0891	3,6214	0,8150	0,7411	0,0742	1,8099
	0,5589	4,0517	-0,0230	0,9073	0,9860	0,0656	3,1961	0,5535	0,8178	0,0367	1,0718
	0,3354	4,0715	-0,0886	0,9581	0,9949	0,0426	2,3981	0,3342	0,8918	0,0143	0,4825
	0,1948	4,3493	-0,0789	0,9839	0,9983	0,0260	1,6035	0,1946	0,9386	0,0051	0,1875
ξ	0,3										

	Варіант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	0,2143	4,3002	-0,0826	0,9809	0,9979	0,0284	1,7298	0,2140	0,9548	0,0061	1,8888
	0,2572	4,2037	-0,0881	0,9735	0,9970	0,0335	1,9887	0,2567	0,9453	0,0086	1,8466
	0,3269	4,0830	-0,0892	0,9599	0,9952	0,0416	2,3574	0,3258	0,9297	0,0136	1,7688
x_i	0,4282	3,9946	-0,0735	0,9377	0,9918	0,0526	2,7906	0,4258	0,9071	0,0225	1,6415
	0,5657	4,0603	-0,0194	0,9057	0,9856	0,0663	3,2129	0,5600	0,8771	0,0375	1,4547
	0,7756	4,6388	0,1357	0,8603	0,9731	0,0845	3,5710	0,7610	0,8366	0,0656	1,1691
	1,0935	6,8430	0,5139	0,8167	0,9467	0,1072	3,6637	1,0529	0,8014	0,1172	0,7981
ξ	0,25										

Зразок виконання

Постановка задачі. Дано функцію $y = f(x)$ своїми значеннями $y_i = f(x_i)$, де $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$. Знайти функцію, що інтерполює, $F(x)$, таку що $F(x_i) = y_i$, для $\forall x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$.

Задача інтерполяції полягає в знаходженні значення функції $y = f(x)$ при $x = \xi$, для чого вважають, що $f(\xi) \approx F(\xi)$.

А) Розглянемо рішення задачі інтерполяції для функції заданої таблично, використовуючи метод Лагранжа для не рівновіддалених вузлів.

x_i	0,200000	0,306000	0,468180	0,716315	1,095963	1,676823	2,565539
y_i	1,020067	1,047184	1,111613	1,267713	1,663140	2,767751	6,542271

Знайти $y_\xi = f(\xi)$, при $\xi = 2{,}1$.

Зауваження. Надалі проміжні значення будуть представлені в тексті із чотирма знаками після коми, хоча всі обчислення будуть проводитися із шістьма знаками після коми.

$\xi - x_i =$	1,9000	1,7940	1,6318	1,3837	1,0040	0,4232	-0,4655

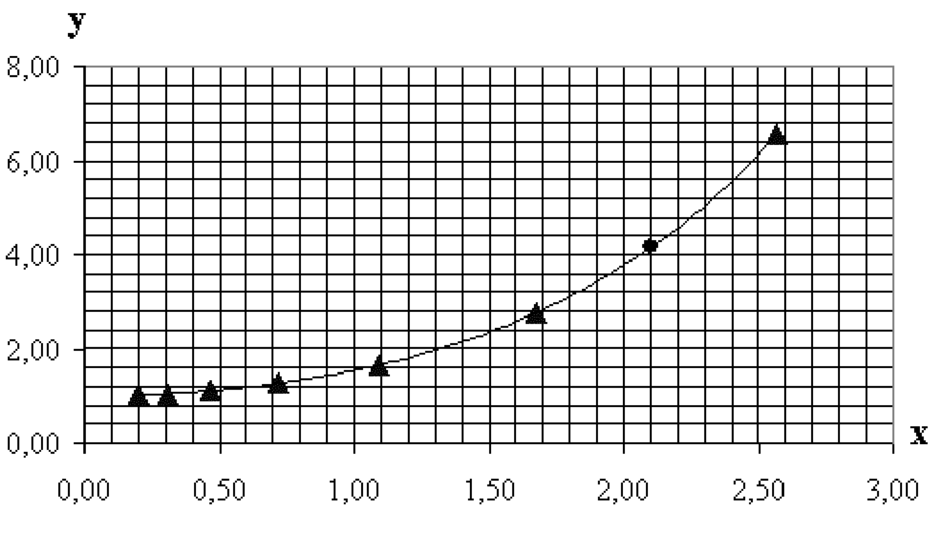
Таблиця різниць /

	0,2000	0,3060	0,4682	0,7163	1,0960	1,6768	2,5655
0,2000	1	0,1060	0,2682	0,5163	0,8960	1,4768	2,3655
0,3060	-0,1060	1	0,1622	0,4103	0,7900	1,3708	2,2595
0,4682	-0,2682	-0,1622	1	0,2481	0,6278	1,2086	2,0974
0,7163	-0,5163	-0,4103	-0,2481	1	0,3796	0,9605	1,8492
1,0960	-0,8960	-0,7900	-0,6278	-0,3796	1	0,5809	1,4696
1,6768	-1,4768	-1,3708	-1,2086	-0,9605	-0,5809	1	0,8887
2,5655	-2,3655	-2,2595	-2,0974	-1,8492	-1,4696	-0,8887	1

Таблиця значень

$P_{i,k}(\xi) = {(\xi - x_k)}/{(x_i - x_k)}$							$\prod\limits_{k\neq i} P_{i,k}(\xi)$	$y_i \prod\limits_{k\neq i} P_{i,k}(\xi)$
1	-16,9245	-6,0848	-2,6799	-1,1206	-0,2865	0,1968	-17,4407090	-17,7906917
-17,9245	1	-10,0618	-3,3723	-1,2710	-0,3087	0,2060	49,1657194	51,4855547
-7,0848	11,0618	1	-5,5763	-1,5993	-0,3501	0,2220	-54,3186589	-60,3813274
-3,6799	4,3723	6,5763	1	-2,6447	-0,4406	0,2517	31,0373295	39,3464261
-2,1206	2,2710	2,5993	3,6447	1	-0,7285	0,3168	-10,5296185	-17,5122296
-1,2865	1,3087	1,3501	1,4406	1,7285	1	0,5238	2,9651590	8,2068217
-0,8032	0,7940	0,7780	0,7483	0,6832	0,4762	1	0,1207786	0,7901663
						$\sum\limits_{i=0}^{n} y_i \prod\limits_{k\neq i} P_{i,k}(\xi) = F(\xi) =$		4,1447200

Графічна інтерпретація вихідних значень і результату дають наступну картину, де точкою показаний одержуваний результат $F(2{,}1) = 4{,}14472$. З даного рисунка можна сказати, що отримане наближене рішення задачі інтерполяції цілком відповідає вихідним даним.



Питання самоконтролю.

1) Постановка задачі інтерполяції. Геометрична ілюстрація.
2) У чому розходження між задачами інтерполяції й задачами екстраполяції?
3) Привести формулу Лагранжа. Дати оцінку погрішності.
4) Як виглядає формула Лагранжа для рівновіддалених вузлів?
5) Від чого залежить точність одержуваного формулою Лагранжа результату?

6) Коли поліном m порядку буде апроксимований формулою Лагранжа з найменшою погрішністю?

Лабораторна робота № 6.
Інтерполяція функції. Поліноми Ньютона

<u>Мета:</u> Набуття навичок побудови інтерполяційних поліномів Ньютона.
<u>Завдання</u>:
1) Знайти наближене значення функції при заданому значенні аргументу ξ за допомогою відповідного інтерполяційного полінома Ньютона, якщо функція задана в рівновіддалених вузлах;

$y_i = f(x_i);\ x_i = x_0 + i \cdot h;\ h = const;\ i = \overline{0,6};$

$y_\xi = f(\xi);\ y_\xi - ?;$

Короткі теоретичні відомості

<u>Постановка задачі.</u> Функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, задана своїми значеннями y_i в рівновіддалених вузлах $x_i \in [a;b]$, тобто $y_i = f(x_i)$. Визначити значення функції $y_\xi = y(\xi)$ в точці $\xi \in [a;b]$.

Поліном Ньютона. Якщо функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ й задана своїми значеннями y_i в рівновіддалених вузлах $x_i \in [a;b]$, $x_{i+1} = x_i + h$, $h = const > 0$, то задача інтерполяції вирішується у двох випадках.

a) Коли точка $\xi \in [a;b]$ знаходиться на початку таблиці значень $x_i \in [a;b]$ використовується перша інтерполяційна формула Ньютона

$$P_n(\xi) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{\xi - x_0}{h},\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i,\ \Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i,\ \Delta^0 y_i = y_i.$$

$$\text{Тоді } y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi),\ \Delta_{y(\xi)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\bar{\xi})\right| \cdot \prod_{k=0}^{n}(q-k),\ \bar{\xi} \in [a;b].$$

b) Коли точка $\xi \in [a;b]$ знаходиться наприкінці таблиці значень $x_i \in [a;b]$ використовується друга інтерполяційна формула Ньютона

$$P_n(\xi) = y_n + q\Delta y_n + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{x_n - \xi}{h}.$$

$$\text{Тоді } y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi),\ \Delta_{y(\xi)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\bar{\xi})\right| \cdot \prod_{k=0}^{n}(q+k),\ \bar{\xi} \in [a;b].$$

Варіанти:

	Варі-ант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	0,9950	0,9988	0,9512	0,3679	0,3679	0,4311	0,6664	1,7151	1,0806	6,8621
	1,15	1,1424	1,1481	1,0857	0,3064	0,2317	0,3044	0,4329	1,7834	1,0805	7,4816
	1,3	1,2890	1,2973	1,2182	0,2399	0,1419	0,2198	0,2406	1,8803	0,9042	8,0055

	1,45	1,4348	1,4462	1,3486	0,1771	0,0842	0,1635	0,0903	1,9696	0,5067	8,4128
x_i	1,6	1,5796	1,5949	1,4770	0,1237	0,0483	0,1263	-0,0178	1,9978	-0,1495	8,6805
	1,75	1,7233	1,7433	1,6034	0,0819	0,0267	0,1021	-0,0861	1,9035	-1,0918	8,7858
	1,9	1,8658	1,8914	1,7278	0,0514	0,0142	0,0872	-0,1185	1,6344	-2,3342	8,7075
ξ	=	1,23	1,47	1,52	1,16	1,23	1,47	1,52	1,48	1,18	1,25

	Варі-ант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	0,2955	0,8408	0,6694	0,7358	1,0000	1,1651	0,6670	1,7552	1,6829	2,9736
	1,13	0,3758	0,9499	0,5508	0,4936	1,0250	1,0929	0,4623	1,9088	2,3097	3,2084
	1,26	0,4650	1,0589	0,4532	0,3245	1,1013	1,0797	0,2885	2,0362	3,0231	3,4131
x_i	1,39	0,5630	1,1678	0,3729	0,2084	1,2371	1,1206	0,1459	2,1352	3,8012	3,5816
	1,52	0,6694	1,2767	0,3069	0,1306	1,4502	1,2181	0,0352	2,2035	4,6148	3,7078
	1,65	0,7838	1,3854	0,2525	0,0797	1,7713	1,3812	-0,0443	2,2392	5,4279	3,7850
	1,78	0,9060	1,4940	0,2078	0,0473	2,2520	1,6261	-0,0948	2,2407	6,1986	3,8070
ξ	=	1,23	1,47	1,35	1,16	1,20	1,47	1,60	1,48	1,18	1,25

	Варі-ант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
	1	0,8896	0,5414	0,7955	1,5576	1,1884	1,2693	0,1034	0,9483	1,6829	1,9093
	1,08	1,0936	0,5849	0,6732	1,3835	1,2362	1,2220	0,6080	0,8732	2,2220	1,6681
	1,16	1,3230	0,6284	0,5743	1,2316	1,3132	1,1956	1,0359	0,7750	2,8621	1,4193
x_i	1,24	1,5786	0,6720	0,4938	1,0982	1,4238	1,1863	1,3901	0,6556	3,6065	1,1620
	1,32	1,8609	0,7156	0,4276	0,9801	1,5749	1,1914	1,6745	0,5176	4,4560	0,8956
	1,4	2,1705	0,7593	0,3728	0,8752	1,7765	1,2083	1,8936	0,3640	5,4082	0,6197
	1,48	2,5077	0,8031	0,3272	0,7815	2,0432	1,2347	2,0529	0,1982	6,4569	0,3345
ξ	=	1,23	1,47	1,15	1,16	1,25	1,47	1,10	1,14	1,05	1,25

Зразок виконання

Постановка задачі. Дано функцію $y = f(x)$ своїми значеннями $y_i = f(x_i)$, де $x_i \in [a,b]$, $x_i = x_0 + i \cdot h$, $h = const = \dfrac{b-a}{n}$, $x_0 = a$, $i = \overline{0,n}$. Знайти функцію, що інтерполює, певного класу $F(x)$, таку що $F(x_i) = y_i$, для $\forall x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$.

Задача інтерполяції полягає в знаходженні значення функції $y = f(x)$ при $x = \xi$, для чого вважають, що $f(\xi) \approx F(\xi)$.

Розглянемо рішення задачі інтерполяції для функції, заданої таблично, використовуючи метод Ньютона для рівновіддалених вузлів.

x_i	2,00000000	2,14000000	2,28000000	2,42000000	2,56000000	2,70000000	2,84000000
y_i	7,274400	7,715100	7,889900	7,737300	7,200500	6,231200	4,791600

Знайти $y_\xi = f(\xi)$, при $\xi = 2,6$.

Так як $\xi = 2,6$ знаходиться наприкінці таблиці, то застосовуємо для рішення задачі наближення другу інтерполяційну формулу Ньютона

$$P_n(\xi) = y_n + q\Delta y_n + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

$$q = \frac{x_n - \xi}{h}.$$

Тоді $y_\xi = f(\xi) \approx P_n(\xi)$, $R_n(\xi) = \Delta_{y(\xi)} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left|f^{(n+1)}(\bar{\xi})\right| \cdot \prod_{k=0}^{n}(q+k)$, $\bar{\xi} \in [a;b]$

Складемо скінчені різниці

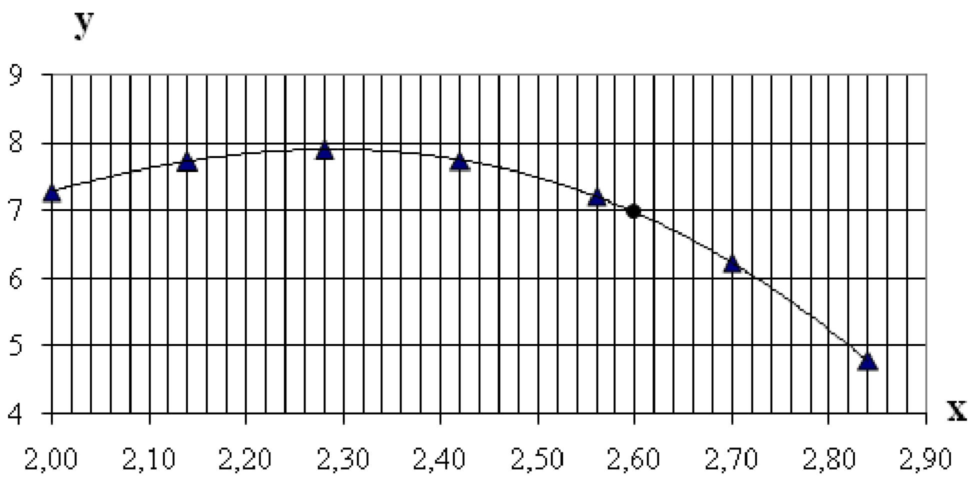
y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^6 y_i$
7,7373000	-0,2355480	-0,0657040	-0,0610118	0,0743632	-0,0920959	0,1105114
7,5017520	-0,3012520	-0,1267158	0,0133514	-0,0177327	0,0184155	
7,2005000	-0,4279678	-0,1133644	-0,0043813	0,0006828		
6,7725322	-0,5413322	-0,1177457	-0,0036985			
6,2312000	-0,6590779	-0,1214442				
5,5721221	-0,7805221					
4,7916000						

q	$q+1$	$q+2$	$q+3$	$q+4$	$q+5$
-1,7143	-0,7143	0,2857	1,2857	2,2857	3,2857

Складемо таблицю для обчислення доданків у другій інтерполяційній формулі Ньютона:

k	$S_k = \prod_{i=1}^{k}(q+i-1)$	$k!$	$S_k/k!$	$\Delta^k y_{n-k}$	$\frac{S_k}{k!}\cdot\Delta^k y_{n-k}$
6	3,3782	720,0000	0,004691923	-0,0018000	-8,44546E-06
5	1,028143036	120,0000	0,008567859	0,0020000	1,71357E-05
4	0,449812578	24,0000	0,018742191	0,0105000	0,000196793
3	0,349854227	6,0000	0,058309038	-0,0378000	-0,002204082
2	1,224489796	2,0000	0,612244898	-0,4703000	-0,287938776
1	-1,7143	1,0000	-1,714285714	-1,4396000	2,467885714
0		1	1	4,7916000	4,7916
				$P_n(2,6)=$	6,96954834

Графічна інтерпретація вихідних значень і результату дають наступну картину, де точкою показаний отриманий результат: $f(2,6) \approx P_n(2,6) = 6,96954834$. З даного рисунка можна сказати, що знайдене наближене рішення задачі інтерполяції цілком відповідає вихідним даним.



Питання самоконтролю.

1) Привести першу формулу Ньютона. Дати оцінку погрішності.
2) Привести другу формулу Ньютона. Дати оцінку погрішності.
3) У чому полягають особливості побудови інтерполяційного полінома Ньютона для рівновіддалених точок?
4) Від чого залежить точність одержуваного формулами Ньютона результату?
5) Геометрична ілюстрація побудови інтерполяційного полінома Ньютона.

Лабораторна робота № 7.
Зворотна інтерполяція

Мета: Набуття навичок рішення зворотної задачі інтерполяції.

Завдання:

1) Знайти наближене значення аргументу ξ функції при заданому значенні функції за допомогою відповідних інтерполяційних поліномів Ньютона й Лагранжа, якщо функція задана в рівновіддалених вузлах (значення y_i, x_i дані в таблицях лабораторної роботи № 6);

$y_i = f(x_i);\ x_i = x_0 + i \cdot h;\ h = const;\ i = \overline{0,6};$

$y_\xi = f(\xi);\quad \xi - ?;$

Короткі теоретичні відомості

Постановка задачі. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ й задана своїми значеннями y_i в точках $x_i \in [a;b]$. Необхідно знайти значення аргументу $\xi \in [a;b]$ за відомим значенням функції в цій точці $y_\xi = f(\xi)$.

Припустимо, що $y = f(x)$ монотонна на відрізку $[a;b]$ й $y_\xi \in [y_0; y_1]$, де $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$.

Задача зворотної інтерполяції вирішується для двох випадків: для рівновіддалених і не рівновіддалених вузлів.

а) Випадок рівновіддалених вузлів, тобто $x_i \in [a;b]$, $x_{i+1} = x_i + h$, $h = const > 0$; припустимо так само, що $f(x) \in C^{(n+1)}[a;b]$ й h досить мало.

Тоді задача вирішується за допомогою першого інтерполяційного полінома Ньютона

$$y_\xi \approx y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

де необхідно визначити $q = \dfrac{\xi - x_0}{h}$, щоб знайти $\xi = x_0 + h \cdot q$. Виділивши з полінома q одержимо рівняння $q = \varphi(q)$, де

$$\varphi(q) = \frac{1}{\Delta y_0}\left(\frac{y_\xi - y_0}{1!} - \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1) - \frac{\Delta^3 y_0}{3!}q(q-1)(q-2) - \frac{\Delta^n y_0}{n!}q(q-1)\cdots(q-n+1)\right).$$

Рішення даного рівняння можна шукати наприклад методом половинного ділення або методом ітерації за схемою $q_m = \varphi(q_{m-1})$, вважаючи $q_0 = 0$, $q_1 = \dfrac{y_\xi - y_0}{\Delta y_0}$, і так далі. Тоді межа $\lim\limits_{m \to \infty} q_m = q_\xi$ буде рішенням рівняння.

Тоді $\xi = x_0 + h \cdot q_\xi$ буде рішенням зворотної задачі інтерполяції. Погрішність отриманого рішення буде складатися з погрішностей інтерполяційної формули й методу ітерації.

b) Випадок не рівновіддалених вузлів, тобто $x_i \in [a;b]$, $x_{i+1} \neq x_i + h$, $h = const > 0$.

У цьому випадку використовується формула Лагранжа, вважаючи y незалежною змінною, виражаючи x через y:

$$\xi \approx L_n\left(y_\xi\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i \prod_{k \neq i,0}^{n} \left(\frac{y - y_k}{y_i - y_k}\right), \ \Delta_\xi = \frac{\prod_{k=0}^{n}\left(y_\xi - y_k\right)}{(n+1)!}\left|f^{-(n+1)}\left(\overline{y}\right)\right|,$$

$$\overline{y} \in \left[\min\left(y_k\right); \max\left(y_k\right)\right], \ k = \overline{0,n}.$$

Варіанти:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_ξ	1,675	1,198	1,392	0,328	0,022	0,180	0,364	1,952	-1,472	7,668

№	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y_ξ	0,356	1,344	0,316	0,542	1,136	1,126	0,050	2,229	3,257	3,593

№	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
y_ξ	1,448	0,759	0,586	1,067	1,215	1,189	0,986	0,262	3,707	0,793

Зразок виконання

Постановка задачі. Дано функцію $y = f(x)$, що визначена на відрізку $[a,b]$ своїми значеннями y_i, у вузлах x_i, де $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0,n}$. Знайти значення аргументу $\overline{x}$, що відповідає відомому значенню $\overline{y}$, тобто знайти $\overline{x}$ таке, що $f(\overline{x}) = \overline{y}$.

Початкові дані.

x_i	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26
y_i	0,778801	1,906914977	3,198030272	4,479744	5,645985339	6,63762664	7,42804

$h=$	0,71
$\overline{y}=$	2,517282

Для цього тестового приклада відомо, що $\overline{y} = f\left(\overline{x}\right) = 2,517282$ при $\overline{x} = x_{точн} = 2,05$.

З розташування заданих точок на графіку можна зробити висновок, що шукана функція швидше за все монотонна на розглянутому відрізку, тому зворотна задача має єдине рішення.

Вирішимо дану задачу, використовуючи першу інтерполяційну формулу Ньютона:

$$\overline{y} = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}q + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q\left(q-1\right) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(q-k\right), \text{ де } q = \frac{\overline{x} - x_0}{h}.$$

Для рішення задачі необхідно знайти $q = q\left(\overline{x}\right)$, для цього одержимо рівняння відносно q:

$$q = \varphi\left(q\right), \text{ де } \varphi(q) = \frac{1}{\Delta y_0}\left[\overline{y} - y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2!}q\left(q-1\right) - \ldots - \frac{\Delta^n y_0}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(q-k\right)\right].$$

Вирішимо отримане рівняння методом ітерації за наступною схемою:

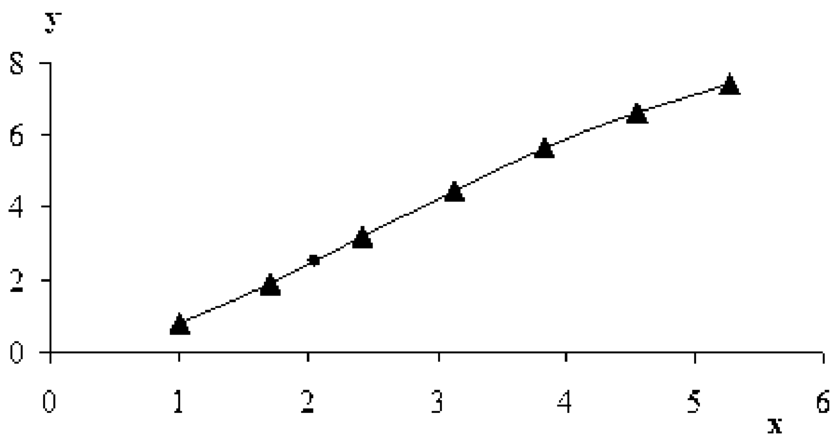
$$q_{k+1} = \varphi\left(q_k\right), \ k = 0,1,2,\ldots; \text{ де } q_0 = 0, \ q_1 = \frac{\overline{y} - y_0}{\Delta y_0}.$$

y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	$\Delta^6 y_0$
0,778801	1,128114194	0,163001101	-0,172402	0,066329927	-0,01938387	0,004936
1,906915	1,291115295	-0,009401087	-0,106072	0,046946052	-0,01444804	
3,19803	1,281714208	-0,115473349	-0,059126	0,032498012		
4,479744	1,166240859	-0,174599558	-0,026628			
5,645985	0,991641301	-0,201227756				
6,637627	0,790413545					
7,42804						

q_k	$\varphi(q_k)$	$\lvert q_k - \varphi(q_k)\rvert$	$\varphi'(q_k)$	$R_k(q_k)$	$\bar{x} = x_0 + q_k \cdot h$
0	1,541050382	1,54105038	0,141322	0,2780904843	1,00000000
1,54105	1,469473685	0,07157670	0,152869	0,0129163839	2,09414577
1,469474	1,480282154	0,01080847	0,149057	0,0019504441	2,04332632
1,480282	1,478667833	0,00161432	0,149682	0,0002913127	2,05100033
1,478668	1,478909369	0,00024154	0,14959	0,0000435865	2,04985416
1,478909	1,478873239	0,00003613	0,149604	0,0000065197	2,05002565
1,478873	1,478878644	0,00000540	0,149602	0,0000009753	2,05000000
1,478879	1,478877835	0,00000081	0,149602	0,0000001459	2,05000384
1,478878	1,478877956	0,00000012	0,149602	0,0000000218	2,05000326

Де $R_k(q_k) = \dfrac{\lvert q_k - \varphi(q_k)\rvert}{\lvert 1 - \max(\varphi'(q))\rvert}\lvert\max(\varphi'(q))\rvert \le \varepsilon$, при ε = 0,0001. На розглянутому відрізку маємо оцінку $\left|\max\limits_{q}(\varphi'(q))\right| = 0{,}1528691$.

Тоді одержимо $\bar{x} = 2{,}049854 \pm 0{,}0000436$. Отримане значення може бути зображене на графіку. Звідки бачимо, що отримане рішення зворотної задачі цілком відповідає початковим даним.



Питання самоконтролю.

1. Загальна постановка задачі зворотної інтерполяції.
2. Як вирішується задача зворотної інтерполяції для рівновіддалених вузлів ?
3. Як вирішується задача зворотної інтерполяції для не рівновіддалених вузлів ?

Лабораторна робота № 8.
Чисельне диференціювання

Мета: Набуття навичок чисельного розрахунку похідних та частинних похідних функцій за допомогою інтерполяційних поліномів.

Завдання:
Знайти наближене значення першої й другої похідної функції при заданому значенні аргументу ξ за допомогою відповідного інтерполяційного полінома Ньютона, якщо функція задана в рівновіддалених вузлах (*значення* y_i, x_i *дані в таблицях лабораторної роботи № 6*);

$y_i = f(x_i);\ x_i = x_0 + i \cdot h;\ h = const;\ i = \overline{0,6};$

$y'_\xi = f'(\xi);\ y'_\xi - ?;\quad y''_\xi = f''(\xi);\ y''_\xi - ?;$

Короткі теоретичні відомості

Постановка задачі. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$ й задана своїми значеннями y_i в точках $x_i \in [a;b]$. Для наближеного диференціювання функцію $y = f(x)$ заміняють функцією, що $F(x)$ інтерполює, і вважають

$$f(x) \approx F(x),\ f^{(k)}(x) \approx F^{(k)}(x),\ k = 1,2,3,\dots,n;$$

с погрішністю $R(x) = f(x) - F(x)$, $R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - F^{(k)}(x) = r_k(x)$, $k = 1,2,3,\dots,n$.

Тоді при $k = 1$ одержимо

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \dots\right],$$

при $k = 2$

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 + \frac{q-1}{1}\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \dots\right].$$

Якщо $x = x_0$, то $q = \frac{x-x_0}{h} = |x = x_0| = 0$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \dots\right],\ f''(x_0) \approx \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \dots\right],$$

$$R'(x_0) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(\overline{x}),\ \overline{x} \in [a;b].$$

Варіанти:

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ξ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,15	1,1	1,2	1,3	1,4	1,25

Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
ξ	1,2	1,3	1,14	1,25	1,16	1,24	1,12	1,2	1,3	1,26

Варіант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
ξ	1,2	1,23	1,25	1,24	1,15	1,16	1,2	1,1	1,17	1,3

Зразок виконання

Постановка задачі. Функція задана в рівновіддалених вузлах своїми значеннями y_i у вузлах x_i. Знайти наближене значення першої й другої похідних функції при заданому значенні аргументу $\xi = 1,6$, де $h = 0,71$.

x_i	1	1,71	2,42	3,13	3,84	4,55	5,26
y_i	0,778801	1,906915	3,19803	4,479744	5,645985	6,637627	7,42804

Тому що функція дана в рівновіддалених вузлах і $\xi = 1,6$ знаходиться на початку таблиці, то використовуємо першу інтерполяційну формулу Ньютона. Для цього знайдемо скінченні різниці $\Delta^k y_i,\ k = \overline{1, n-1}$.

y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0,778801	1,128114	0,163001	-0,1724	0,06633	-0,01938	0,004936
1,906915	1,291115	-0,0094	-0,10607	0,046946	-0,01445	
3,19803	1,281714	-0,11547	-0,05913	0,032498		
4,479744	1,166241	-0,1746	-0,02663			
5,645985	0,991641	-0,20123				
6,637627	0,790414					
7,42804						

Використовуючи отримані скінченні різниці випишемо інтерполяційний поліном Ньютона $P_n(x)$. Вважаючи $y \approx P_n(x)$, $y' \approx P_n'(x)$, $y'' \approx P_n''(x)$, вводячи позначення $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ одержимо $q = 0,8451$

$y' \approx P_n'(\xi) = \tilde{y}'$	1,714043
$y'' \approx P_n''(\xi) = \tilde{y}''$	0,377144

$R'(h)$	0,005325
$R''(h)$	0,007478

Зауваження. Очевидно, що у випадку, коли значення ξ знаходиться ближче до кінця таблиці значень функції, необхідно застосувати другу інтерполяційну формулу Ньютона, у протилежному випадку погрішність отриманого наближеного значення похідної буде великою.

Питання самоконтролю.

1. Наведіть загальну постановку задачі чисельного диференціювання функцій.
2. Які функції використовують для розрахунків похідних ?
3. Опишіть одержання похідних за допомогою інтерполяційних формул Ньютона.
4. Як оцінюють погрішності похідної за інтерполяційними поліномами Ньютона ?
5. Який вплив величини кроку диференціювання на погрішність ?

Лабораторна робота № 9.
Чисельне інтегрування

Мета: Набуття навичок чисельного інтегрування функцій методами прямокутників (лівих, правих, середніх), трапецій, Сімпсона.

Завдання:

1) Знайти наближене значення інтеграла по формулах лівих і правих прямокутників з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

2) Знайти наближене значення інтеграла по формулі середніх прямокутників з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

3) Знайти наближене значення інтеграла по формулі трапеції з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

4) Знайти наближене значення інтеграла по формулі Сімпсона з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

5) Порівняти отримані результати.

Короткі теоретичні відомості

Постановка задачі. Нехай функція $y = f(x)$ визначена й інтегрувальна на відрізку $[a;b]$. Необхідно знайти значення визначеного інтеграла $I = \int_a^b f(x)dx$, коли первісна $F(x)$,

$F'(x)=f(x)$ невідома або її важко знайти, або $y=f(x)$ задана своїми значеннями $y_i=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$, $x_i\in[a;b]$.

Загальний підхід у чисельному інтегруванні полягає в наступному:

a) Для функції $y=f(x)$ будується апроксимуюча функція $F(x)$, так щоб $f(x)\approx F(x)$ на відрізку $[a;b]$, при цьому клас апроксимуючої функції $F(x)$ може залежати від властивостей функції $y=f(x)$, від необхідної точності обчислення інтеграла, від числа арифметичних дій, від часу роботи алгоритму й т.д.;

b) Функція $F(x)$ вибирається так, щоб інтеграл $\int\limits_a^b F(x)dx$ легко рахувався;

c) Функція $F(x)$ вибирається так, щоб $I=\int\limits_a^b f(x)dx\approx\int\limits_a^b F(x)dx$ або $\left|I-\int\limits_a^b F(x)dx\right|\le\varepsilon$, де ε – точність обчислення інтеграла.

Для застосування методів чисельного інтегрування ділять відрізок $[a;b]$ системою рівновіддалених точок $x_i=x_0+i\cdot h$, $h=\dfrac{b-a}{n}$, $i=\overline{0,n}$, $x_0=a$, $x_n=b$ на відрізки $[x_k,x_{k+1}]$, $k=\overline{0,n-1}$ і розглядають суму інтегралів $I=\sum\limits_{k=0}^{n-1}I_k=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx$.

Виходячи із цих міркувань і допущень звичайно використовують наступні формули чисельного інтегрування.

1. Формула лівих прямокутників. У цьому випадку $f(x)$ на відрізку $[x_k,x_{k+1}]$ заміняється функцією $F(x)=f(x_k)$, тоді

$$I_k\approx\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}f(x_k)dx=f(x_k)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}dx=f(x_k)[x_{k+1}-x_k]=h\cdot f(x_k),$$

$$I=\sum_{k=0}^{n-1}h\cdot f(x_k)=h\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k),\ \Delta_I\le\frac{n\cdot h^2}{2}\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

2. Формула правих прямокутників. У цьому випадку $f(x)$ на відрізку $[x_k,x_{k+1}]$ заміняється функцією $F(x)=f(x_{k+1})$, тоді

$$I_k\approx\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}f(x_{k+1})dx=f(x_{k+1})\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}dx=f(x_k)[x_{k+1}-x_k]=h\cdot f(x_{k+1}),$$

$$I=\sum_{k=0}^{n-1}h\cdot f(x_{k+1})=h\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1}),\ \Delta_I\le\frac{n\cdot h^2}{2}\max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|.$$

3. Формула середніх прямокутників. У цьому випадку $f(x)$ на відрізку $[x_k,x_{k+1}]$ заміняється функцією $F(x)=f\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$, тоді

$$I_k\approx\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)dx=f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}dx=f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)[x_{k+1}-x_k]=h\cdot f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right),$$

$$I=\sum_{k=0}^{n-1} h\cdot f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)=h\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right),\ \Delta_I\le\frac{n\cdot h^3}{24}\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

4. Формула трапецій. У цьому випадку $f(x)$ на відрізку $[x_k,x_{k+1}]$ заміняється функцією $F(x)=\frac{1}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]$, тоді

$$I_k\approx\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{1}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]dx=\frac{1}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]\int_{x_k}^{x_{k+1}}dx=\frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right],$$

$$I=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{h}{2}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right]=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k)+f(x_{k+1})\right],\ \Delta_I\le\frac{n\cdot h^3}{12}\max_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right|.$$

5. Формули Ньютона-Котеса. Якщо $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ замінити поліномом, що інтерполює, $F(x)=L_n(x)$ Лагранжа , то одержимо формули Ньютона-Котеса

$$I=(b-a)\sum_{k=0}^{n}y_kH_k\ ,\ H_k=\frac{(-1)^k}{(n-k)!n}\cdot\int_0^n\frac{q^{[n+1]}}{(q-k)}dq,\ q^{[n+1]}=q(q-1)(q-2)\cdots(q-n).$$

При $n=1$ одержимо із цих співвідношень формулу трапеції.

6. Формула Сімпсона. Виходить із формул Ньютона-Котеса при парному числі розбивок $n=2m$ відрізка $[a;b]$ й розгляді інтерполяції функції $f(x)$ на трьох точках, тобто $f(x)$ наближається квадратичним тричленом виду $F(x)=cx^2+dx+e$:

$$I=\frac{h}{3}\sum_{k=0}^{m-1}\left[f(x_{2k})+4f(x_{2k+1})+f(x_{2k+2})\right],\ \Delta_I\le\frac{n\cdot h^5}{180}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Варіанти: (N – номер варіанта).

Варіанти	a)	b)
№1 - №10	$I=\int_{0,4}^{1,2}\frac{\cos(0,07\cdot N+0,5\cdot x)}{0,4+\sqrt{x^2+N}}dx$	$I=\int_{1,2}^{2,1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+N}}$
№11 - №20	$I=\int_{0,1}^{1,7}\frac{\sin(0,02\cdot N+1,5\cdot x)}{1,4+\cos(1,2\cdot N-0,3\cdot x)}dx$	$I=\int_{0,1}^{1,8}\frac{dx}{\sqrt{2\cdot x^2+0,4\cdot N}}$
№21 - №30	$I=\int_{0,15}^{1,3}\frac{(0,06\cdot N+2,5\cdot x)^2}{1,1+\sin(1,2\cdot N-0,3\cdot x)}dx$	$I=\int_{1}^{3,5}\frac{\ln(0,6\cdot N)}{\sqrt{x^2+0,3\cdot N}}dx$

Зразок виконання

Завдання: Дано інтеграл $I=\int_{0,1}^{0,485}f(x)dx$, де $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$.

1) Знайти наближене значення інтеграла I по формулах лівих і правих прямокутників з точністю $\varepsilon=10^{-3}$.
2) Знайти наближене значення інтеграла I по формулі середніх прямокутників з точністю $\varepsilon=10^{-3}$.
3) Знайти наближене значення інтеграла I по формулі трапеції з точністю $\varepsilon=10^{-3}$.
4) Знайти наближене значення інтеграла I по формулі Сімпсона з точністю $\varepsilon=10^{-3}$.
5) Порівняти отримані результати.

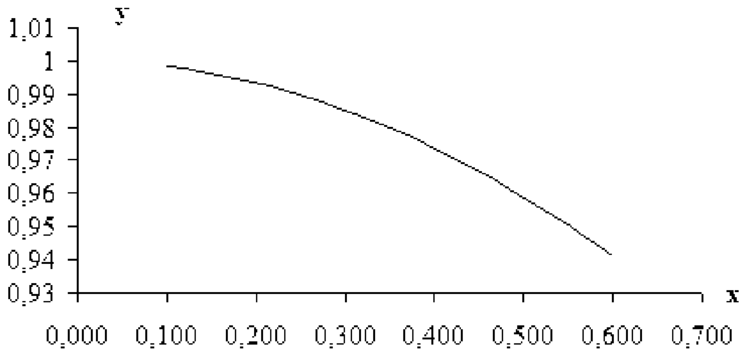
Відрізок $[a,b]$ розіб'ємо на n частин і знайдемо значення $y_i = f(x_i)$,

$$y_i' = f'(x_i)\,,\ y_i'' = f''(x_i)\,,\ y_i^{(4)} = f^{(4)}(x_i)\,,\ x_i = a + i\cdot h\,,\ h = \frac{(a-b)}{n}\,.$$

$a =$	0,1
$b =$	0,485

$n =$	20
$h =$	0,01925

x_i	y_i	$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$	y_i'	y_i''	$y_i^{(4)}$
0,100	0,998334166	0,997998614	0,033300012	0,332333928	0,199286177
0,119	0,997632354	0,997235407	0,039687119	0,331912938	0,198985508
0,138	0,996807795	0,996349542	0,046065422	0,33141836	0,198632301
0,158	0,995860673	0,995341215	0,052433508	0,330850325	0,198226656
0,177	0,994791196	0,994210649	0,058789965	0,330208983	0,197768691
0,196	0,993599604	0,992958095	0,065133385	0,329494503	0,197258537
0,215	0,992286159	0,991583832	0,071462363	0,328707075	0,196696341
0,235	0,990851153	0,990088163	0,077775498	0,327846905	0,196082265
0,254	0,989294904	0,98847142	0,084071394	0,326914221	0,195416485
0,273	0,987617757	0,986733962	0,090348659	0,325909269	0,194699192
0,292	0,985820084	0,984876173	0,096605905	0,324832315	0,193930593
0,312	0,983902283	0,982898466	0,10284175	0,323683642	0,193110909
0,331	0,981864778	0,980801277	0,109054818	0,322463554	0,192240375
0,350	0,979708021	0,978585072	0,115243738	0,321172373	0,191319242
0,369	0,97743249	0,97625034	0,121407148	0,319810439	0,190347774
0,388	0,975038688	0,9737976	0,127543689	0,318378112	0,18932625
0,408	0,972527144	0,971227392	0,133652011	0,31687577	0,188254965
0,427	0,969898415	0,968540287	0,139730772	0,315303808	0,187134225
0,446	0,967153082	0,965736877	0,145778637	0,313662641	0,185964354
0,465	0,964291751	0,962817784	0,151794279	0,311952701	0,184745686
0,485	0,961315056	0,95978365	0,15777638	0,310174441	0,183478572



$$\max\_лев(y') = 0{,}187138267\,,\ \max\_прав(y') = 0{,}192891957\,,\ \max(y'') = 0{,}332333928\,,$$

$$\max(y^{(4)}) = 0{,}199286177\,.$$

1) Обчислимо значення інтеграла і його погрішність **методом лівих прямокутників** використовуючи формули

$$S_{лев\_прям} = h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),\ x_i = a + i\cdot h\,,\ R_{лев\_прям} \le \frac{n\cdot h^2}{2}\max_{x\in[a,b]}|y'(x)|\,.$$

Одержимо $S_{лев\_прям} = 0{,}488730039$; $R_{лев\_прям} = 0{,}000899703$.

Обчислимо значення інтеграла і його погрішність **методом правих прямокутників**

$$S_{прав\_прям} = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i),\ x_i = a + i \cdot h,\ R_{прав\_прям} \le \frac{n \cdot h^2}{2} \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|.$$

Одержимо $S_{прав\_прям} = 0{,}487628821$; $R_{прав\_прям} = 0{,}00092737$.

2) **Методом середніх прямокутників** обчислимо значення інтеграла і його погрішність

$$S_{сред\_прям} = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i),\ \xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2},\ x_i = a + i \cdot h,\ R_{сред\_прям} \le \frac{n \cdot h^3}{24} \max_{x \in [a,b]} \left| f''(x) \right|.$$

Одержимо $S_{сред\_прям} = 0{,}488186808$; $R_{сред\_прям} = 0{,}00000256$.

3) Використовуючи **формулу трапеції** й відповідну їй оцінку погрішності

$$S_{трап} = h \cdot \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right],\ x_i = a + i \cdot h,\ R_{трап} \le \frac{n \cdot h^3}{12} \max_{x \in [a,b]} |y''(x)|$$

Одержимо $S_{трап} = 0{,}48817943$; $R_{трап} = 0{,}00000512$.

4) Використовуючи **формулу Сімпсона** й відповідну їй оцінку погрішності

$$S_{симп} = \frac{h}{3} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \left[f(x_{2i}) + 4 f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right],\ n = 2m,\ R_{симп} \le \frac{n \cdot h^5}{180} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

одержимо $S_{симп} = 0{,}4881843486$; $R_{симп} = 0{,}000000000076$.

Питання самоконтролю.

1) Постановка задачі. Геометрична ілюстрація.
2) Основна ідея наближеного чисельного інтегрування.
3) Формули Ньютона - Котеса.
4) Чисельне інтегрування методами прямокутників (лівого, правого, середнього), погрішність методу.
5) Чисельне інтегрування методом трапеції, погрішність методу.
6) Чисельне інтегрування методом Сімпсона, погрішність методу.
7) Порівняння методів.

Лабораторна робота № 10.
Чисельне рішення звичайних диференціальних рівнянь

Мета: Набуття навичок чисельного розв’язання звичайних диференціальних рівнянь методами Ейлера, Ейлера-Коші та Рунге-Кутти.

Завдання:

Знайти наближені значення рішення $y = y(x)$ звичайного диференціального рівняння (ЗДР) $y'(x) = f(x)$ на відрізку $x \in [a,b]$ із кроком h при початковій умові $y(x_0) = y_0$ використовуючи

1) метод Ейлера;
2) удосконалений метод ламаних;
3) метод Ейлера-Коші;
4) метод Ейлера з уточненням;
5) метод Рунге-Кутта четвертого порядку.

Для тестових прикладів знайти відносні погрішності й зрівняти отримані результати. Побудувати графіки точного й чисельного рішень.

Короткі теоретичні відомості

Постановка задачі. Знайти наближені значення рішення $y = y(x)$ звичайного диференціального рівняння $y'(x) = f(x, y)$ на відрізку $x \in [a,b]$ із кроком h при початковій умові $y(x_0) = y_0$

1. **Метод Ейлера**:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^2), \; i = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

2. **Удосконалений метод ламаних**:

$$\begin{cases} x_{i+1/2} = x_i + \dfrac{h}{2}, \quad y_{i+1/2} = y_i + \dfrac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2} f\left(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}\right), \; i = 0,1,2,\ldots, \\ \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^2). \end{cases}$$

3. **Метод Ейлера-Коші**:

$$\begin{cases} \overline{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overline{y}_{i+1})\right], \\ \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^3), \; i = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

4. **Метод Ейлера з уточненням**:

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1}^{(k)} = y_i + \dfrac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}\right)\right], \qquad i = 0,1,2,\ldots. \\ k = \overline{1,n}, \quad \left|y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)}\right| < \varepsilon, \quad \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^3), \end{cases}$$

5. **Метод Рунге-Кутта четвертого порядку**

$$\begin{cases} k_{1,i} = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_{2,i} = h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{1}{2}k_{1,i}\right), \\ k_{3,i} = h \cdot f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{1}{2}k_{2,i}\right), \\ k_{4,i} = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_{3,i}), \end{cases}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right),$$

$$\Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O(h^5), \; i = 0,1,2,\ldots.$$

Варіант	$y'(x) = f(x)$	$[a,b]$	h	$y(x_0) = y_0$
1	$y' = \dfrac{x+y}{x}$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = 0$
2	$y' = \dfrac{1 + x \cdot y}{x^2}$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = 0$
3	$x \cdot y' - y = x^2 \cdot \sin(x)$	$\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} + 1\right]$	$0,05$	$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$
4	$x \cdot y' - y = \dfrac{x}{\ln(x)}$	$[e; e + 1,5]$	$0,075$	$y(e) = 0$
5	$x \cdot y' = y \cdot \ln(y)$	$[1;3]$	$0,1$	$y(1) = e$
6	$x \cdot y' - y = x \cdot \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$[1;2]$	$0,1$	$y(1) = \pi/2$

7	$x^2 \cdot y' = (x-1)y$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = e$
8	$y' = \frac{1+\ln(x)}{x} - \frac{y}{x}$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = 0$
9	$y' = \frac{x+y}{x}$	$[e;2e]$	$e/20$	$y(e) = e$
10	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$	$[0;1]$	$0,05$	$y(0) = 0$
11	$y' + y \cdot tg(x) = \sin(2x)$	$[0;1]$	$0,05$	$y(0) = -1$
12	$x \cdot y' - y^2 \ln(x) + y = 0$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = 1$
13	$y' \sin(x) = y \ln(y)$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\frac{\pi}{30}$	$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$
14	$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$	$[0;2]$	$0,1$	$y(0) = 1$
15	$y' - y \cdot tg(x) = \sec(x)$	$[0;1,5]$	$0,1$	$y(0) = 0$
16	$x \cdot y' - \frac{y}{x+1} = x$	$[1;2]$	$0,05$	$y(1) = 0$
17	$y' - \frac{y}{1-x^2} = x+1$	$[0;1,5]$	$0,1$	$y(0) = 1$
18	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$	$[0,6;2]$	$0,07$	$y(0,6) = 0,8$
19	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$	$[0,5;2]$	$0,1$	$y(0,5) = 0,6$
20	$y' = x + \cos\frac{y}{\pi}$	$[1,7;2,7]$	$0,05$	$y(1,7) = 5,3$
21	$y' = x + \cos\frac{y}{2,25}$	$[1,4;3]$	$0,1$	$y(1,4) = 2,2$
22	$y' = x + \cos\frac{y}{e}$	$[1,4;3]$	$0,1$	$y(1,4) = 2,5$
23	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$	$[0,8;1,6]$	$0,05$	$y(0,8) = 1,4$
24	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$	$[1,2;2,2]$	$0,05$	$y(0,6) = 0,8$
25	$y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	$[2,1;3,5]$	$0,075$	$y(2,1) = 2,5$
26	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$	$[1,8;2,8]$	$0,05$	$y(1,8) = 2,6$
27	$y' = x + \sin\frac{y}{3}$	$[1,6;3]$	$0,07$	$y(1,6) = 4,6$
28	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	$[0,6;1,7]$	$0,05$	$y(0,6) = 0,8$
29	$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$	$[0,5;1,2]$	$0,05$	$y(0,5) = 0,6$
30	$y' = x + \sin\frac{y}{\pi}$	$[1,7;3,2]$	$0,1$	$y(1,7) = 5,3$

Зразок виконання

Знайти наближене рішення задачі Коші для звичайного рівняння першого порядку методом Ейлера й методом Ейлера з уточненням із кроком $h = 0,05$:

$$y' = \frac{y}{x} + x \cdot \cos(x) \equiv f(x, y),\ x \in [0,5;\ 2,5],\ y(0,5) = 0,239713\ .$$

1) За методом **Ейлера** наближене рішення знаходимо за схемою

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + O(h^2),\ y_0 = y(x_0)\ .\ (\Sigma_1)$$

i	x_i	$f(x_i, y_i)$	y_i	$y_{точн}$	y''
0	0,5	0,918217	0,239713	0,239713	1,515452
1	0,55	0,988204	0,285624	0,287478	1,417571
2	0,6	1,053591	0,335034	0,338785	1,311886
3	0,65	1,113937	0,387713	0,393371	1,198796
4	0,7	1,168833	0,44341	0,450952	1,078732
5	0,75	1,217902	0,501852	0,511229	0,952149
6	0,8	1,260799	0,562747	0,573885	0,819529
7	0,85	1,297206	0,625787	0,638588	0,681378
8	0,9	1,326835	0,690647	0,704994	0,538226
9	0,95	1,349429	0,756989	0,772745	0,390621
10	1	1,364763	0,82446	0,841471	0,239134
11	1,05	1,372639	0,892699	0,910794	0,084348
12	1,1	1,372893	0,96133	0,980328	0,073136
13	1,15	1,365391	1,029975	1,049679	0,232704
14	1,2	1,350033	1,098245	1,118447	0,393731
15	1,25	1,32675	1,165746	1,186231	0,555586
16	1,3	1,295505	1,232084	1,252626	0,717628
17	1,35	1,256295	1,296859	1,317227	0,879213
18	1,4	1,20915	1,359674	1,37963	1,039695
19	1,45	1,15413	1,420131	1,439434	1,198428
20	1,5	1,091331	1,477838	1,496242	1,354768
21	1,55	1,02088	1,532404	1,549665	1,508075
22	1,6	0,942936	1,583448	1,599318	1,657717
23	1,65	0,85769	1,630595	1,644827	1,803069
24	1,7	0,765364	1,67348	1,68583	1,943519
25	1,75	0,666211	1,711748	1,721975	2,078468
26	1,8	0,560513	1,745058	1,752926	2,207330
27	1,85	0,448582	1,773084	1,778359	2,329540
28	1,9	0,330757	1,795513	1,79797	2,444549
29	1,95	0,207404	1,812051	1,811471	2,551833
30	2	0,078917	1,822421	1,818595	2,650889
31	2,05	-0,05429	1,826367	1,819093	2,741238
32	2,1	-0,19177	1,823653	1,81274	2,822432
33	2,15	-0,33307	1,814064	1,799332	2,894048
34	2,2	-0,4777	1,797411	1,778692	2,955694
35	2,25	-0,62516	1,773526	1,750665	3,007012
36	2,3	-0,77493	1,742268	1,715122	3,047674
37	2,35	-0,92647	1,703522	1,671962	3,077389
38	2,4	-1,07925	1,657198	1,621112	3,095899
39	2,45	-1,23268	1,603236	1,562524	3,102986
40	2,5	-1,38622	1,541601	1,49618	3,098468

i	x_i	Δy_i	δy_i	$\Delta y_{i,точн}$	$\delta y_{точн}$
0	0,5				
1	0,55	0,001894	0,66%	0,00185	0,65%
2	0,6	0,003666	1,08%	0,00375	1,11%
3	0,65	0,005306	1,35%	0,00566	1,44%
4	0,7	0,006805	1,51%	0,00754	1,67%
5	0,75	0,008153	1,59%	0,00938	1,83%
6	0,8	0,009343	1,63%	0,01114	1,94%
7	0,85	0,010368	1,62%	0,01280	2,00%
8	0,9	0,011219	1,59%	0,01435	2,04%
9	0,95	0,011892	1,54%	0,01576	2,04%
10	1	0,012380	1,47%	0,01701	2,02%
11	1,05	0,012679	1,39%	0,01810	1,99%
12	1,1	0,012785	1,30%	0,01900	1,94%
13	1,15	0,013076	1,25%	0,01970	1,88%
14	1,2	0,013568	1,21%	0,02020	1,81%
15	1,25	0,014262	1,20%	0,02048	1,73%
16	1,3	0,015159	1,21%	0,02054	1,64%
17	1,35	0,016258	1,23%	0,02037	1,55%
18	1,4	0,017558	1,27%	0,01996	1,45%
19	1,45	0,019056	1,32%	0,01930	1,34%
20	1,5	0,020749	1,39%	0,01840	1,23%
21	1,55	0,022635	1,46%	0,01726	1,11%
22	1,6	0,024707	1,54%	0,01587	0,99%
23	1,65	0,026961	1,64%	0,01423	0,87%
24	1,7	0,029390	1,74%	0,01235	0,73%
25	1,75	0,031988	1,86%	0,01023	0,59%
26	1,8	0,034747	1,98%	0,00787	0,45%
27	1,85	0,037659	2,12%	0,00528	0,30%
28	1,9	0,040715	2,26%	0,00246	0,14%
29	1,95	0,043905	2,42%	0,00058	0,03%
30	2	0,047218	2,60%	0,00383	0,21%
31	2,05	0,050645	2,78%	0,00727	0,40%
32	2,1	0,054173	2,99%	0,01091	0,60%
33	2,15	0,057790	3,21%	0,01473	0,82%
34	2,2	0,061485	3,46%	0,01872	1,05%
35	2,25	0,065244	3,73%	0,02286	1,31%
36	2,3	0,069053	4,03%	0,02715	1,58%
37	2,35	0,072900	4,36%	0,03156	1,89%
38	2,4	0,076770	4,74%	0,03609	2,23%
39	2,45	0,080649	5,16%	0,04071	2,61%
40	2,5	0,084527	5,65%	0,04542	3,04%

Де Δy_i - абсолютна погрішність знаходження y_i, що визначається в такий спосіб:

$$\Delta y = \frac{h^2}{2}\left|y''(\xi)\right| \le \frac{h^2}{2}\max\left|y''(x)\right|,\ x \in \left[x_{i-1};\ x_i\right].$$

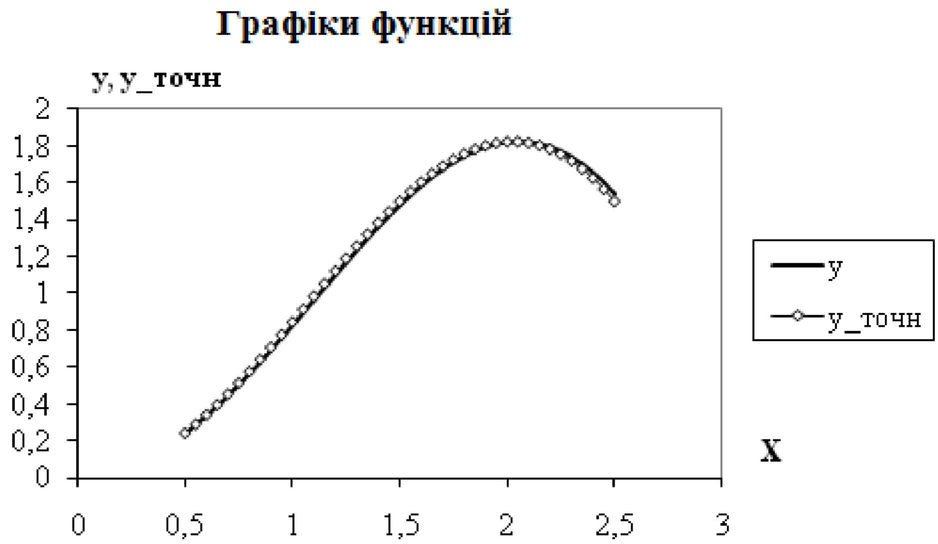
Використовуючи вихідне рівняння, одержимо

$$y''(x) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + f\left(x,y\right)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}.$$

У таблиці $\Delta y_i = \Delta y_{i-1} + \frac{h^2}{2}\max\left|y''(x)\right|$, $\delta y_i \approx \frac{\Delta y_i}{y_i}$ $x \in \left[x_{i-1};\ x_i\right]$ абсолютна й відносна погрішності наближеного значення $y = y\left(x\right)$.

Для порівняння погрішностей знайдемо погрішність стосовно точного значення шуканої функції: $\Delta y_{i,точн} = abs\left(y_i - y_{i,точн}\right)$, $\delta y_{i,точн} \approx \frac{\Delta y_{i,точн}}{y_{i,точн}}$,

Побудуємо графіки точних і наближених значень функції $y = y\left(x\right)$, а так само графіки абсолютних погрішностей (де $d(y\_t)$ відповідає погрішності $\Delta y_{i,точн}$, а $d(y'')$ - погрішності Δy_i).



Висновок. З отриманих наближених значень і графіків бачимо, що метод Ейлера дозволяє добре описати шукану функцію на якісному рівні, але дає досить велику погрішність чисельних значень. Тому метод Ейлера може бути використаний при якісній оцінці рішення шуканої функції, а для знаходження чисельних значень краще використовувати більш точні методи.

2) Вихідну задачу розглянемо в наступній постановці

$$y' = \frac{y}{x} + x \cdot \cos(x) \equiv f\left(x, y\right),\ x \in \left[1;\, 1{,}25\right],\ y\left(1\right) = 0{,}841471,\ \varepsilon = 0{,}0001.$$

За методом **Ейлера з уточненням** наближене рішення шукається за схемою

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f\left(x_i, y_i\right), \\ y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)\right], \qquad i = 0,1,2,\ldots\ \left(\Sigma_2\right) \\ k = \overline{1,n}, \quad \left|y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)}\right| < \varepsilon, \quad \Delta y_{i+1} = \Delta y_i + O\left(h^3\right), \end{cases}$$

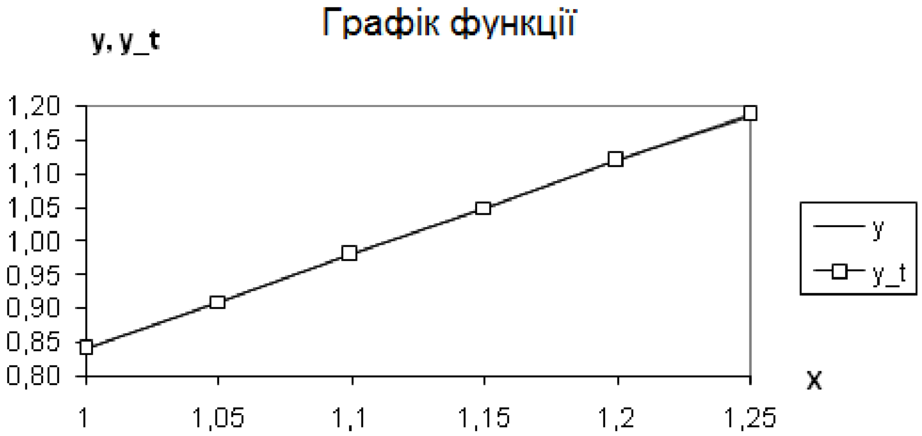
За даною схемою складемо таблицю значень

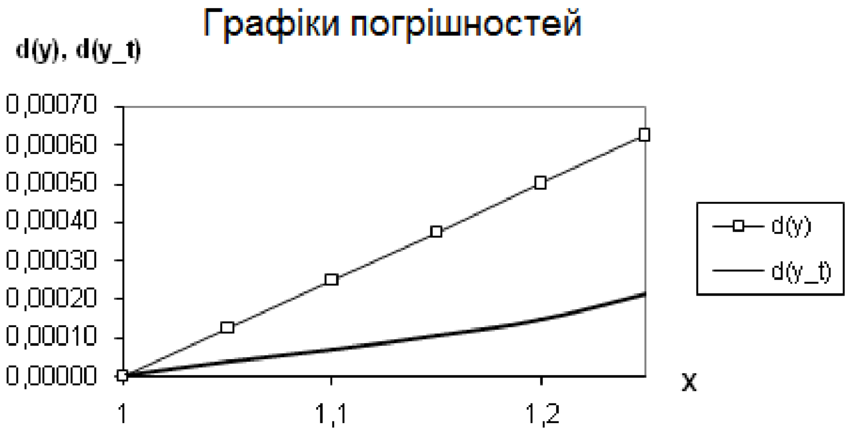
x	$f\left(x\right)$	$y_{i+1}^{(k-1)}$	$f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)$	$\frac{\left[f_i + f_{i+1}\right]}{2}$	$y_{i+1}^{(k)}$	$\left(\Sigma_3\right)$
1	1,38177	0,84147			**0,84147**	
1,05	1,38177	0,91056	1,38965	1,38571	0,91076	Ще
			1,38984	1,38581	**0,91076**	Все
1,1	1,38984	0,98025	0,49896	0,94440	0,95798	Ще
			1,36985	1,37984	0,97975	Ще
			1,38964	1,38974	0,98025	Ще
			1,39009	1,38997	**0,98026**	Все
1,15	1,39010	1,04976	1,38260	1,38635	1,04958	Ще
			1,38244	1,38627	**1,04957**	Все
1,2	1,38243	1,11869	1,36707	1,37475	1,11831	Ще
			1,30947	1,34595	1,11687	Ще
			1,36555	1,37399	1,11827	Ще
			1,36672	1,37458	**1,11830**	Все
1,25	1,36675	1,18661	1,34344	1,35509	1,18603	Ще
			1,34297	1,35486	**1,18602**	Все

x	$y_{i+1}^{(k)}$	$\left(\Sigma_3\right)$	$y_{i,точн}$	Δy_i	$\Delta y_{i,точн}$
1	**0,84147**		0,84147	0,00000	0,00000
1,05	0,91076	Ще			
	0,91076	Все	0,91079	0,00013	0,00004
1,1	0,95798	Ще			
	0,97975	Ще			
	0,98025	Ще			
	0,98026	Все	0,98033	0,00025	0,00007
1,15	1,04958	Ще			
	1,04957	Все	1,04968	0,00038	0,00011
1,2	1,11831	Ще			
	1,11687	Ще			
	1,11827	Ще			
	1,11830	Все	1,11845	0,00050	0,00015
1,25	1,18603	Ще			
	1,18602	Все	1,18623	0,00063	0,00022

Де ознака закінчення ітерації $\left|y_{i+1}^{(n)} - y_{i+1}^{(n-1)}\right| < \varepsilon$ позначена символом $\left(\Sigma_3\right)$.

Побудуємо графіки точних і наближених значень функції $y = y\left(x\right)$, а так само графіки абсолютних погрішностей (де $d(y\_t)$ відповідає погрішності $\Delta y_{i,точн}$, а $d(y)$ - погрішності Δy_i).





Висновок. З отриманих наближених значень і графіків бачимо, що метод Ейлера з уточненням дозволяє добре описати шукану функцію як на якісному, так і кількісному рівні, хоча й дає завищену погрішність у порівнянні з точним рішенням (графіки $d(y\_t)$ й $d(y)$). Тому метод Ейлера з уточненням може бути використаний для практичного застосування знаходження наближеного рішення шуканої функції.

Зауваження. Інші методи розглядаються аналогічним чином.

Питання самоконтролю.

1) Постановка задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Геометрична ілюстрація.
2) Основні положення методу Ейлера. Геометрична інтерпретація.
3) Основні положення методу Ейлера-Коші. Геометрична інтерпретація.
4) Основні положення методу Ейлера з уточненням. Геометрична інтерпретація.
5) Метод Рунге-Кутта. Оцінка погрішності методу на кроці.
6) Який метод є більше точним, який менш точним? Чому?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна література

1. Васильков Ю. В., Василькова Н. Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие. - М.: Финансы и статистика, 2002. - 256 с.
2. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.
3. Математические методы и модели в расчетах на ЭВМ /А.П. Огурцов, Л.М. Мамаев,И.К. Каримов. -К. : ИСМО, 1997.-192 с.
4. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей. - М.: Ком-Книга, 2007. –192 с.
5. Квєтний Р.М. Методи комп'ютерних обчислень. -Вінниця: ВДТУ, 2001. – 148 с.
6. Щуп Т. Решение инженерних задач на ЭВМ. - М.: Мир, 1982. - 238 с.
7. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. - М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
8. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы : Учеб. пособ. для студ. Вузов. – М. : Наука, 1987 . – 598 с.
9. Волков Е.А. Численные методы. (Навч. пос.). – М. : Наука, 1987 . – 248 с.
10. Турчак Л.И. Основы численных методов. (Підр.) – М.: Наука, 1987. – 320 с.

Додаткова література

1. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480с.
2. Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.. Вычислительные методы для инженеров: Учебное пособие. - М.: Высшая школа, 1994.
3. Калиткин Н.Н.Численные методы. -М.,Наука,1978. – 512 с.
4. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.
5. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. - М.: Наука, 1989.

Перелік навчальних та інших посібників, методичних вказівок

1. Конспект лекцій з дисципліни «Математичне моделювання складних об'єктів та систем». Укл. Бабенко М.В., Камянське, ДДТУ, 2018.
2. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Математичне моделювання складних об'єктів та систем». Укл. Бабенко М.В., Камянське, ДДТУ, 2018.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни «Математичне моделювання складних об’єктів та систем» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» за освітньо-професійною програмою «Інженерія програмного забезпечення»

Укладач:
доцент каф. ПЗС, к.т.н.
Бабенко М.В.

Підписано до друку______________20___р.
Формат_____________Обсяг_____________
Тираж______прим. Замовл.______________
51918, Кам'янське,
вул.Дніпробудівська, 2