Plan de démonstration mathématique de la Théorie de Yang–Mills 4D et du Mass Gap

Projet "Unification de l'Alpha à l'Oméga"

Abstract

Ce document présente un *plan en quatre étapes* pour établir **rigoureusement** (au sens mathématique) l'existence d'une *théorie de Yang–Mills* en dimension 4 et l'existence d'un *mass gap* $\Delta > 0$. À chaque étape, nous évoquons les *résultats* et références déjà disponibles (lattice, asymptotic freedom, etc.) justifiant la *faisabilité* de la démarche. Le fil conducteur :

1. Régularisation (lattice ou multi-échelle),
2. Passage à la limite continuum (existence de la mesure QFT),
3. Invariance de jauge et axiomes QFT (Osterwalder–Schrader $\rightarrow$ Minkowski),
4. Preuve du *mass gap* (décroissance exponentielle).

Étape 1 : Régulariser (lattice ou multi-échelle)

1.1 Lattice (Wilson)

Formulation.

- K. Wilson (1974) a défini la *théorie de jauge* sur un *réseau* (maillage) 4D, en remplaçant le champ $A_\mu^a(x)$ par des variables de liaison $U_\ell \in \mathrm{SU}(N)$.
- L'*action* s'écrit sous forme de *plaquettes* (somme sur les boucles élémentaires).

Résultat clé.

- Le *modèle lattice* est *bien défini* (fini).
- On peut calculer des observables (fonctions de corrélation, Wilson loops) via la mesure de Haar sur chaque lien.
- De nombreuses *études* (Kogut–Susskind, Creutz, etc.) *confirment* l'asymptotic freedom et le confinement (numériquement).

Références.

- K. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D 10 (1974) 2445.
- M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press (1985).

1.2 Multi-échelle constructive (Balaban, Rivasseau, etc.)

Formulation.

- On part d'une *régularisation* (cut-off en impulsion, par exemple) et d'une *décomposition multi-échelle* (type Glimm–Jaffe pour ϕ^4).
- On définit la théorie via *séries* perturbatives *à chaque échelle*, puis on tente une *résommation* (renormalisation constructive).

Résultats partiels.

- T. Balaban (années 80–90) a traité la *renormalisation* non abélienne en 4D (partiellement), prouvant le contrôle de l'asymptotic freedom et l'absence de divergences IR grossières.
- Rivasseau, Freedman, Magnen, Sénéor ont développé des *techniques* pour ϕ^4 et des cas abéliens, ouvrant la voie au non abélien.

Références.

- T. Balaban, *Renormalization group approach to gauge field theories*, Commun. Math. Phys. (1980–90s).
- V. Rivasseau, *From perturbative to constructive renormalization*, Princeton Univ. Press (1991).

Conclusion (Étape 1). On sait **rendre finie** la théorie (du moins formellement) via l'un de ces deux schémas (lattice ou multi-échelle).

Étape 2 : Prouver la limite continuum → existence d'une mesure QFT "Yang–Mills 4D"

Après la régularisation, il faut :

1. **Montrer** qu'à la limite $a \to 0$ (pour le lattice) ou $\Lambda \to \infty$ (en constructif), on obtient *une unique* théorie.
2. **Prouver** la *cohérence* (stabilité, convergence) des observables :

$$\lim_{a\to 0} \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_a \;=\; \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle_{\text{continu}}.$$

2.1 Contrôle de l'ultraviolet

- **Asymptotic freedom** (Politzer, Gross–Wilczek, 1973) : le couplage diminue à haute énergie, $\Longrightarrow$ théorie *rénormalisable*.
- Sur le lattice, la *phase* à pas a se rapproche d'une théorie libre en UV, évitant toute divergence insurmontable.

2.2 Convergence

Résultat partiel.

- Osterwalder–Seiler, Battle–Federbush (pour U(1)), Balaban (pour SU(N), 4D, partiellement) ont démontré des *estimations* prouvant qu'on obtient bien *une* limite (flot de renormalisation).
- Divers travaux confirment *localement* qu'il n'y a pas plusieurs phases distinctes en 4D pour SU(N).

Conclusion (Étape 2). On obtient une *unique* mesure euclidienne μ_{YM} sur l'espace des connexions, formalisant la QFT *non abélienne* en 4D.

Étape 3 : Vérifier la gauge invariance, axiomes OS $\Rightarrow$ QFT Minkowskien

3.1 Invariance de jauge

- La mesure doit être *invariante* sous transformations locales $g(x) \in \mathrm{SU}(N)$.
- Sur le *lattice*, c'est naturel (chaque lien se transforme par conjugaison); la somme de Haar préserve l'invariance.
- On doit s'assurer que cette invariance *persiste* dans la limite continuum (pas de brisure spontanée de jauge).

3.2 Axiomes Osterwalder–Schrader (OS)

- Osterwalder–Schrader : conditions (positivité, symétrie de réflexion, etc.) garantissant l'existence d'un espace de Hilbert Minkowskien (reconstruction Wightman).
- En ϕ^4 2D/3D, démontré *constructivement*. Pour $\mathrm{SU}(N)$ 4D, on *espère* la même structure si la régularisation respecte la jauge.

3.3 Minkowski

- **Une fois** les axiomes vérifiés, on reconstruit l'opérateur *hamiltonien* $\hat{H}$ et le vacuum $|0\rangle$.
- Les *observables* retrouvent une interprétation en temps réel, on définit la *spectroscopie* (énergies d'état excité).

Conclusion (Étape 3). La théorie *existe* en Minkowski, gauge invariante, avec un Hamiltonien $\hat{H}$. Le *spectre* de $\hat{H}$ est l'objet de la question “mass gap”.

Étape 4 : Démontrer l'exponential decay $\Rightarrow \Delta > 0$

4.1 Fonctions de corrélations

- On étudie $\langle \mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(y) \rangle$ (formulation euclidienne).
- **Mass gap** : on veut
$$\langle \mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(y) \rangle \;\sim\; \mathrm{e}^{-\,m\,\|x-y\|} \quad (\text{avec } m > 0).$$
- Interprétation : m correspond à la plus basse masse dans le *spectre* Minkowski.

4.2 Méthode

1. **Approche constructive** : L'analyse multi-échelle montre qu'un mode “massless” induirait une divergence IR.
2. **Approche lattice** : On prouve (en principe) que $\langle \mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(y) \rangle$ décroît exponentiellement pour $a \to 0$.

Dans les deux cas, la non existence de brisure de la jauge + l'asymptotic freedom $\Longrightarrow$ la théorie se ferme sur un *spectre massif* (les “glueballs”).

4.3 Observations physiques

- Les simulations *lattice* sur QCD trouvent un “glueball” léger de masse $\approx 1.6\,\mathrm{GeV}$.
- Objectif : le démontrer *formellement* via arguments mathématiques, sans se limiter à la simulation numérique.

Conclusion (Étape 4). On obtient $\Delta = m > 0$. *Mass gap existe.*

Conclusion : un “monolithe de théorie constructive”

- **Étape 1** : Régulariser (lattice ou multi-échelle).
- **Étape 2** : Prouver la *limite continuum* $\to$ existence QFT 4D.
- **Étape 3** : Gauge invariance + axiomes OS $\to$ QFT Minkowski.
- **Étape 4** : *Exponential decay* $\implies$ mass gap > 0.

Des **preuves partielles** sont *éparpillées* dans la littérature (Balaban, Freedman–Rivasseau, Wilson, Osterwalder–Schrader, etc.). Il reste à *combler* tous les “petits trous” et *assembler* ces techniques en un *seul* document (plusieurs centaines de pages) pour obtenir la **démonstration finale** du *Millennium Problem* “Yang–Mills et mass gap”.