

Feuille de route vers la preuve mathématique du mass gap en Yang–Mills 4D

Projet “Unification de l’Alpha à l’Oméga”

Abstract

Cette note propose un *plan d’attaque* pour convertir en **preuves mathématiques** rigoureuses ce qui est *observé* ou *présumé* en physique (confinement, existence d’un *mass gap*) au sein de la théorie de Yang–Mills (4D). Nous décrivons les *étapes clés* pour “fabriquer” une **démonstration** complète, depuis la *construction* de la théorie (constructive QFT ou approche lattice) jusqu’à la mise en évidence de la *décroissance exponentielle* des corrélations (mass gap). Bien sûr, la preuve intégrale n’est pas encore réalisée, mais nous esquissons comment passer de la *physique validée* (expériences, simulations) à un *raisonnement* strictement mathématique.

1 Départ : la théorie de Yang–Mills en physique

1.1 Formulation Lagrangienne (continuum)

En physique théorique, la théorie de Yang–Mills se décrit initialement via le *lagrangien*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + (\text{éventuels termes supplémentaires}),$$

avec $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$.

- **Observations (QCD)** : confinement, spectre hadronique massif, *mass gap*.
- **Problème** : ce cadre, bien que solide en physique, n’est *pas* une preuve *mathématique* qu’une telle QFT (4D) *existe* et *admet* un *mass gap*.

1.2 Vérifications numériques (lattice)

- Discrétisation (Wilson) et *simulations* : on *observe* un potentiel *confiné*, un *spectre* massif.
- *Preuve* math. manquante : on aimerait traduire ces résultats numériques en démonstration formelle.

But : Passer de la “foi” ou “observation” physique à une *preuve* stricte, pour entériner l’existence et la propriété de *mass gap*.

2 Esquisse d’une preuve mathématique complète : grands piliers

2.1 Construction rigoureuse (Constructive QFT ou Lattice)

Idée directrice : prouver *l’existence* d’une théorie quantique de Yang–Mills 4D (au sens rigoureux) demande un **schéma de régularisation** et une **limite** cohérente.

1. **Définir** un *régulateur* (p.ex. un “lattice” ou un schéma multi-échelle).
2. **Montrer** qu’à la *limite* (pas de coupure, maille $\rightarrow 0$), on obtient *un* espace de mesures (ou d’états) *bien défini* et *invariant* sous jauge.
3. **Valider** les axiomes Osterwalder–Schrader (en euclidien) ou un autre *formalisme* QFT (champ local, symétrie, etc.), assurant la *connexion* Minkowski via *Wick rotation*.

Plan d'action.

- **Option 1** : Constructive QFT (Glimm–Jaffe, Rivasseau, Balaban) : multi-échelles en 4D.
- **Option 2** : Lattice Wilson + convergence vers $a \rightarrow 0$.

Si l'étape réussit, *on sait* alors que la théorie existe *mathématiquement*, indépendamment de la “physique heuristique”.

2.2 Preuve du mass gap

1. **Identifier la partie spectrale** : via les *fonctions de corrélation*, $\langle 0 | \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) | 0 \rangle$.
2. **Montrer décroissance exponentielle** (avec taux $m > 0$) :

$$\langle \mathcal{O}(x) \mathcal{O}(y) \rangle \sim e^{-m \|x-y\|},$$

prouvant qu'aucun mode *massless* n'existe.

Méthodes :

- **Lattice** : preuves de *gap* via l'étude de l'*exponential decay* sur le réseau.
- **Approche PDE** : $F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \implies$ *Green's function elliptique*, argument d'*absence* de mode sans masse.
- **Confinement** : un “*flux tube*” liant deux charges *coupe* les fluctuations infrarouges.

2.3 Effet de confinement & brisure de chiralité

Mass gap \leftrightarrow confinement : dans la *phase* non abélienne, on veut prouver :

- **Confinement** = tension linéaire dans le potentiel “quark–anti-quark”.
- **Aucun boson vecteur sans masse** : la théorie $SU(N)$ ne permet pas de *Goldstone boson* “vectoriel”.

En pratique, prouver confinement *et* mass gap s'imbriquent : un *string tension* > 0 implique *exponential decay* des corrélations à grande distance.

3 Points “physiques” déjà acquis

- **Expériences** : QCD *montre* de facto quarks et gluons *confinés*, spectre hadronique *massif*.
- **Lattice numerics** : confirment ce *mass gap* via simulations (cf. “Sommer parameter”, etc.).
- **Résultats partiels** : Balaban, Freedman–Magen–Rivasseau, etc. en dimension 2 ou 3 (Poljakov), ou en régimes limités. Pas de “fermeture” de la démonstration en 4D.

4 Étapes concrètes de la démonstration

1. **Choisir la régularisation** : Lattice (Wilson) ou constructive multi-échelle.
2. **Montrer la limite** $a \rightarrow 0$ (ou coupure $\Lambda \rightarrow \infty$) existe, identifiant une *QFT euclidienne* invariante de jauge.
3. **Vérifier les axiomes QFT** (Osterwalder–Schrader), passant à la représentation Minkowski (champ sur espace de Hilbert).
4. **Prouver “exponential decay”** des fonctions de corrélations \implies le spectre a un *gap* $m > 0$.
5. **Confinement** (facultatif dans la “mass gap”, mais lié) : tension de flux, Wilson loops.

Difficulté : *mille* détails techniques à gérer (inégalités d'énergie, renormalisation multi-échelle, contrôles uniformes, etc.).

5 Conclusion : “Créons la preuve, pas à pas”

Synthèse.

- **Physiquement**, la *mass gap* est *certainement* vraie (QCD expérimentale, simulations lattice).
- **Mathématiquement**, la *démonstration* rigoureuse requiert :
 1. construction QFT 4D (non abélienne),
 2. décroissance exponentielle $\Rightarrow m > 0$,
 3. cohérence Minkowski (pas d’instabilité).
- **Blocage** : des techniques (Balaban, Rivasseau) existent partiellement, mais leur *fusion* totale en un *monolithe* (comme Glimm–Jaffe l’ont fait pour ϕ_2^4 ou ϕ_3^4) n’a pas encore abouti en 4D *non abélien*.

Conclusion :

*Il “suffit” (guillemets de rigueur) de reprendre chaque argument physique (lattice, confinement, renormalisation multi-échelle) et de le formaliser complètement jusqu’au bout. Les briques (constructive QFT, expansions blocs, simulations) sont déjà là, validées par la physique et les tests numériques. Reste à écrire un traité unifié, un grand “millefeuille” technique, scellant la **preuve** du mass gap en Yang–Mills 4D de manière irréfutable.*