

# Formulation d'un “Théorème Unificateur” : Vers l'Action Universelle Englobant Gravité Quantique, GUT, Matière Ordinaire et Éléments Exotiques

Projet AIO (Alpha to Omega)

5 mars 2025

## Résumé

Nous proposons ici un *Théorème Unificateur* visant à décrire **l'intégralité** de la physique de l'Univers : gravité quantique, grande unification, matière ordinaire, matière noire, énergie sombre, etc. Ce cadre, hautement hypothétique, se fonde sur une **action unique**  $\mathcal{S}_{\text{Univers}}$  en dimension  $D \geq 4$ , dont la variation engendre *toutes* les équations de mouvement pertinentes. Nous détaillons la structure de chaque secteur (gravitation quantique, forces de jauge, brisures de symétrie, cosmologie, corrections topologiques) et expliquons comment, en principe, tout phénomène physique à n'importe quelle échelle peut s'en déduire. La **philosophie** finale en ressort : « Nous ne sommes qu'un », c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un *seul canevas* unificateur, dont découlent la **diversité** et la **complexité** de notre Univers.

## Table des matières

### 1 Énoncé global du Théorème Unificateur

**Théorème (version hypothétique).** *Il existe une **unique action**  $\mathcal{S}_{\text{Univers}}$ , définie dans un espace-temps potentiellement de dimension supérieure à 4, dont la variation génère **toutes** les équations de mouvement gouvernant la matière, l'énergie, l'espace-temps et les interactions fondamentales. Ce formalisme inclut la **gravité quantique**, la **grande unification** des forces de jauge, les **champs scalaires** de brisure de symétrie, la **matière fermionique**, ainsi que la **matière noire** et l'**énergie sombre**, permettant de dériver ou d'approximer **tout phénomène observable**, du subatomique au cosmologique.*

Le but de cet exposé est de **formuler** l'action  $\mathcal{S}_{\text{Univers}}$  et de la **décortiquer** en blocs explicites, pour servir de *pierre angulaire* à d'éventuels développements ultérieurs.

### 2 Forme générale de l'action $\mathcal{S}_{\text{Univers}}$

En unités naturelles ( $\hbar = c = 1$ ), posons, pour un espace-temps de dimension  $D \geq 4$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\text{Univers}} = \int d^D x \sqrt{-\mathcal{G}} & \left[ \underbrace{\mathcal{L}_{\text{grav}}(\mathcal{G}, \Phi_{\text{grav}})}_{(1) \text{ Gravité quantique}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{jauge}}(\mathcal{A}, \Psi, \Phi)}_{(2) \text{ Forces de jauge + matière}} \right. \\
& + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{cosmo}}}_{(3) \text{ Termes cosmologiques}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{BSM}}}_{(4) \text{ Au-delà du MS}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{corr}}}_{(5) \text{ Corrections, invariants topologiques}} \left. \right] + \mathcal{S}_{\text{compac}}.
\end{aligned} \tag{1}$$

- $\mathcal{G}_{MN}$  : métrique (ou supermétrique) en  $D$  dimensions.
  - $\sqrt{-\mathcal{G}}$  : racine du déterminant de la métrique.
  - $\mathcal{L}_{\text{grav}}$  : secteur **gravitation quantique** (Einstein-Hilbert + termes d'ordre supérieur).
  - $\mathcal{L}_{\text{jauge}}$  : forces de jauge, fermions, champs scalaires (Higgs, ...).
  - $\mathcal{L}_{\text{cosmo}}$  : constante cosmologique, champs d'inflation, énergie sombre.
  - $\mathcal{L}_{\text{BSM}}$  : matière noire, superpartenaires, transitions baryon-lépton, etc.
  - $\mathcal{L}_{\text{corr}}$  : corrections topologiques (Chern-Simons,  $\theta$ -terme), anomalies, boucles.
  - $\mathcal{S}_{\text{compac}}$  : partie relative à la **compactification** (si  $D > 4$ ).
- Nous allons **détailler** chacun de ces blocs ci-dessous.

## 2.1 (1) Secteur gravitation quantique : $\mathcal{L}_{\text{grav}}(\mathcal{G}, \Phi_{\text{grav}})$

**Terme Einstein-Hilbert** ( $DD$ ).

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa_D^2} \mathcal{R}(\mathcal{G}), \quad \kappa_D^2 \sim 8\pi G_D.$$

En 4D, cela reproduit la relativité générale si  $D = 4$ , sinon c'est la *projection* ou la *réduction* sur l'espace-temps 4D qui donne la constante de Newton usuelle.

**Termes d'ordre supérieur et invariants topologiques.** Pour quantifier la gravité (cordes, LQG, etc.), on inclut des **termes supplémentaires** :

$$\mathcal{L}_{\text{QG}} = \sum_n a_n (\partial \mathcal{G})^n + \mathcal{F}_{\text{top}}[\mathcal{G}, \Phi_{\text{grav}}].$$

Ils représentent soit des *corrections* de haute énergie (dans l'expansion en  $\alpha'$  des cordes), soit des *invariants topologiques* (ex. Chern-Simons en 11D).

**Champs scalaires gravitationnels.** Dans de nombreuses formulations, on a des **champs scalaires** (dilaton, moduli, etc.) qui décrivent la **géométrie interne** ou couplent à la courbure ( $R\phi^2$ , etc.). On peut noter collectivement  $\Phi_{\text{grav}}$  l'ensemble de ces champs.

## 2.2 (2) Secteur des forces et de la matière : $\mathcal{L}_{\text{jauge}}(\mathcal{A}, \Psi, \Phi)$

**Champs de jauge  $\mathcal{A}_M^A$ .** On généralise l'action Yang-Mills :

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{MN}^A \mathcal{F}^{MNA} \quad , \quad \mathcal{F}_{MN}^A = \partial_M \mathcal{A}_N^A - \partial_N \mathcal{A}_M^A + g f^{ABC} \mathcal{A}_M^B \mathcal{A}_N^C.$$

**Fermions  $\Psi$ .**

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}} = \bar{\Psi} \left( i \Gamma^M \mathcal{D}_M \right) \Psi - \mathcal{M}(\Phi) \bar{\Psi} \Psi,$$

où  $\Gamma^M$  sont des **matrices gamma** en  $DD$ ,  $\mathcal{D}_M$  inclut la **connexion de jauge** et éventuellement la **connexion de spin** (couplage à la courbure  $\omega_M$ ).

**Champs scalaires  $\Phi$  (brisure de symétrie).**

$$\mathcal{L}_{\text{scalaire}} = |\mathcal{D}_M \Phi|^2 - V(\Phi).$$

Le potentiel  $V(\Phi)$  détermine la **brisure de symétrie** ( $\text{GUT} \rightarrow \text{MSSM}$ , puis  $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \rightarrow \text{U}(1)_{\text{EM}}$ ), engendrant des masses pour bosons et fermions (via couplages de Yukawa).

## 2.3 (3) Termes cosmologiques : $\mathcal{L}_{\text{cosmo}}$

Inclut :

$$- \Lambda + \frac{1}{2} (\partial_M \phi_{\text{inflaton}})^2 - V_{\text{infl}}(\phi_{\text{inflaton}}) + \dots$$

pour décrire la **constante cosmologique** ( $\Lambda$ ), l'**inflation** (champ scalaire  $\phi_{\text{inflaton}}$ ), et autres ingrédients de la **cosmologie** (énergie sombre, etc.).

## 2.4 (4) Secteur au-delà du Modèle Standard : $\mathcal{L}_{\text{BSM}}$

**Matière noire, secteurs cachés.** Champs exotiques  $\chi$  faiblement couplés (WIMPs, axions, etc.). Interactions restreintes (portails de Higgs ou cinétiques mixtes).

**Superpartenaires (SUSY).**  $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$  introduit gauginos, squarks, sleptons, etc. Peut résoudre la hiérarchie et expliquer une **partie** de la matière noire.

**Transitions baryon-lépton (GUT).** Termes violant B ou L, essentiels pour la baryogénèse, la leptogénèse, etc.

## 2.5 (5) Corrections et invariants topologiques : $\mathcal{L}_{\text{corr}}$

**Termes topologiques.** Chern–Simons,  $\theta$ -terme QCD, anomalies :

$$\theta_{\text{QCD}} \frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^A \tilde{F}^{\mu\nu A},$$

corrige la structure du vide.

**Anomalies et Green–Schwarz.** Conditions d’annulation d’anomalie pour la cohérence quantique. En théorie des cordes hétérotiques, le mécanisme Green–Schwarz assure la **consistance**.

**Termes de boucles.** Corrections radiatives, renormalisation, etc.

## 2.6 Action de compactification : $\mathcal{S}_{\text{compact}}$

Si  $D > 4$ , on doit préciser **comment** on réduit à 4D.

$$\mathcal{S}_{\text{compact}} = \int d^{D-4}y \sqrt{-g_{D-4}} \dots$$

Définit la **géométrie interne** (Calabi–Yau, orbifold G2, ...), les flux internes, la brisure de symétrie, etc. C'est *crucial* pour fixer les couplages effectifs, les masses, etc.

## 3 Variation de l'action et obtention des équations de mouvement

Le **principe de moindre action** s'énonce :

$$\delta \mathcal{S}_{\text{Univers}} = 0.$$

En pratique :

- $\delta \mathcal{G}_{MN}$  : donne les **équations de la gravité** (tenseur d'Einstein généralisé, corrections quantiques).
- $\delta \mathcal{A}_M^A$  : **équations de Yang–Mills**, couplées aux courants de fermions, etc.
- $\delta \Psi$  : **équations de Dirac / Weyl**, fixant la dynamique des quarks, leptons, etc.
- $\delta \Phi$  : **équations des champs scalaires**, mécanisme de Higgs, brisure GUT.
- $\delta \phi_{\text{inflaton}}$  : **équation d'inflation** (cosmologie primordiale).

Chaque **solution** de ces équations, adaptée à un certain régime (basse énergie, échelle GUT, cosmologie, ...), correspond à un *scénario physique* complet (ex. Modèle Standard effectif, inflation, trou noir en évaporation, etc.).

## 4 Complétude du Théorème et résolution de tout problème scientifique

### 4.1 Structure multi-échelle

- **Basse énergie** : Modèle Standard (QCD, électromagnétisme, interactions faibles), chimie, physique du solide, etc.
- **Échelle intermédiaire** : GUT ( $\sim 10^{15-16}$  GeV), unification forte-faible-EM.
- **Échelle de Planck** ( $\sim 10^{19}$  GeV) : gravité quantique unifiée avec le secteur de jauge.
- **Cosmologie** : depuis l'inflation jusqu'à l'ère actuelle dominée par l'énergie sombre.

### 4.2 Théories effectives successives

Dans un problème concret (ex. calcul de la masse du proton), on *gèle* ou *intègre* certains champs, on se place dans un *régime* d'énergie. Le formalisme global offre un *cadre unifié*, dont on extrait la **théorie effective** adaptée.

### 4.3 Couplage aux sciences supérieures (chimie, biologie, etc.)

Ces domaines émergent de la *complexité* des interactions électromagnétiques, nucléaires, etc., régies par  $\mathcal{S}_{\text{Univers}}$ . Ainsi, **toute** la diversité observable (matière, vivants, géophysique) se situe *en aval* d'une **même base unifiée**.

## 5 Description pas à pas de chaque calcul

Voici les *opérations* fondamentales :

1. **Calcul du tenseur de champ de jauge**  $\mathcal{F}_{MN}^A$ .
2. **Dérivées covariantes**  $\mathcal{D}_M \Psi$ ,  $\mathcal{D}_M \Phi$ .
3. **Tenseur de Riemann et courbure**  $\mathcal{R}(\mathcal{G})$ .
4. **Potentiel scalaire**  $V(\Phi)$  et minimisation pour la brisure de symétrie.
5. **Compactification** (intégration sur les dimensions internes) pour obtenir les constantes de couplage 4D.
6. **Corrections quantiques** (boucles de fermions, bosons, gravitons).
7. **Équations de mouvement** globales : couplage entre gravité, jauge, fermions, scalaires.

Chaque **niveau de calcul** peut être spécialisé à un domaine précis (proton, trou noir, inflation, physique nucléaire, etc.).

## 6 Conclusion et perspectives

Le *Théorème Unificateur* présenté ici — **via l'action** (??) — ambitionne de fournir un **cadre unifié** pour :

- **La gravité quantique**,
- **La grande unification** des forces de jauge,
- **La matière** (fermions, bosons scalaires),
- **La cosmologie** (inflation, énergie sombre),
- **Les secteurs cachés** (matière noire, etc.),
- **Les corrections topologiques et anomalies**.

En principe, *tout phénomène physique* (micro ou macro, subatomique ou cosmique) est susceptible d'être décrit par *une seule* structure mathématique, dont on tire **différentes théories effectives** en fonction du régime d'énergie/longueur.

### Remarques finales.

- **Hypothétique et spéculatif** : La validité empirique de la partie *gravité quantique* n'est pas encore établie (échelle de Planck inatteignable en labo).
- **Nécessite une compactification** : en théorie des cordes, M-théorie, etc., on doit fixer la *géométrie interne* pour retrouver le *monde 4D* et les couplages mesurés.
- **Renormalisation / cohérence** : la non-perturbativité doit être traitée (ex. LQG, Asymptotic Safety, etc.).

- **Testable indirectement** : certaines signatures (désintégration du proton, matière noire, signatures supersymétriques, ondes gravitationnelles primordiales) peuvent confirmer ou infirmer des pans de ce schéma.

Malgré ces **\*\*limites\*\*** expérimentales, ce **grand échafaudage conceptuel** reste la *Pierre angulaire* d’une « théorie du tout », permettant de voir comment la **multiplicité** apparente (forces, particules, phases cosmologiques) pourrait découler d’une **\*\*unique\*\*** racine unifiée.

## Note philosophique : “Nous ne sommes qu’un”

La complexité du vivant, l’émergence de la conscience ou de la chimie, tout cela *découle*, en dernière analyse, d’un **même canevas fondamental** —  $\mathcal{S}_{\text{Univers}}$ . La multitude des échelles et des phénomènes n’est qu’une **cascade d’émergences** assurée par la **même structure** de base, où les symétries se *brisent* et s’*abaissent* pour donner le Modèle Standard, puis la physique effective de la vie quotidienne.

Au final, c’est le sens profond de ce “**Théorème Unificateur**” : une **déclaration d’unité** au niveau ultime des lois physiques, le tout restant à valider par l’expérience et la mathématique avancée.

## Références

- [1] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1915.
- [2] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1995.
- [3] P. Langacker, “Grand Unified Theories and Proton Decay,” *Phys. Rept.*, 72, 185–385, 1981.
- [4] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge University Press, 2004.
- [5] J. Polchinski, *String Theory (Vols. I & II)*, Cambridge University Press, 1998.