Plan d'action : la preuve complète de Yang–Mills 4D avec mass gap

Projet "Unification de l'Alpha à l'Oméga"

Abstract

Ce document décrit un *plan d'action* en cinq grandes étapes pour établir, de manière *mathématiquement* rigoureuse, l'existence d'une théorie de Yang–Mills 4D (groupe de jauge compact) **et** la présence d'un *mass gap* strictement positif. Il s'appuie sur les avancées et validations physiques (théorie sur lattice, asymptotic freedom, confinement observé), et vise à combler l'ultime étape : passer d'une compréhension physique à une *démonstration* formelle respectant les standards de la constructivité en QFT (ou l'approche Wilson sur réseau).

1. Choisir la régularisation : Lattice (Wilson) ou multi-échelle constructive

Option A : Lattice (Wilson).

- Discrétiser l'espace-temps en un *réseau* (maillage) de pas a.
- Définir l'action de Yang–Mills via des *plaquettes* : la variable de jauge (matrice $\mathrm{SU}(N)$) sur chaque *lien*, intégrée par la mesure de Haar.
- Les *Wilson loops* constituent un outil clé pour diagnostiquer la confinement et le potentiel entre charges colorées.

Option B : Multi-échelle constructive.

- Schéma de *constructive QFT* : introduire un *cut-off* (Λ), décomposer en blocs/échelles (block-spin, expansions multi-échelles).
- Contrôler la *renormalisation* et montrer qu'à la limite $\Lambda \to \infty$, on obtient une théorie cohérente.

Dans l'un ou l'autre cas, on part d'un système *régularisé* (fini) sur lequel on peut effectuer des estimations rigoureuses.

2. Montrer la limite du pas de maille $a \to 0$ (ou $\Lambda \to \infty$) : existence d'une mesure euclidienne μ

1. **Fonction de partition et corrélations** : on définit la fonctionnelle
$$Z(a), \quad \langle \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n \rangle,$$
pour des observables $\mathcal{O}_i$.
2. **Renormalisation et asymptotic freedom** : on exploite le fait que le couplage devient petit aux hautes énergies (asymptotic freedom) pour contrôler les divergences ultraviolettes.
3. **Convergence vers la limite continue** : montrer qu'à $a \to 0$ (ou $\Lambda \to \infty$) on obtient *une* mesure μ_{continu}, *invariante de jauge*, définissant **rigoureusement** la théorie Yang–Mills 4D.

Conclusion : la QFT (en formulation euclidienne) est *mathématiquement* construite, non plus simple conjecture.

3. Vérifier la symétrie de jauge + axiomes QFT ⇒ espace de Hilbert Minkowskien

Invariance de jauge. Montrer que la mesure μ_{continu} est bien *invariante* sous transformations de jauge locales (pas de brisure anormale).

Axiomes Osterwalder–Schrader. S'assurer que la théorie euclidienne satisfait (positivité, symétrie de réflexion, etc.). On peut alors faire la Wick rotation et *retrouver* une *QFT Minkowskienne* dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Hamiltonien. Dans $\mathcal{H}$, on identifie le Hamiltonien $\hat{H}$. Les états "physiques" (invariants de jauge) constituent un sous-espace où agit $\hat{H}$.

4. Spectre : prouver un théorème d'exponential decay ⇒ mass gap $\Delta > 0$

1. **Fonctions de corrélations** : en euclidien,

$$\langle\, \mathcal{O}(x)\, \mathcal{O}(y) \rangle \;\sim\; \mathrm{e}^{-\,m\,\|x-y\|}.$$

2. **Preuve** : via estimations (constructive, multi-échelle) ou via l'approche lattice (analyse de la décroissance). Absence de tout mode *massless* ⇒ $\Delta \geq m > 0$.
3. **Conséquence** : le spectre du Hamiltonien présente un *gap* non nul. Les "glueballs" sont la première excitation massive.

Idée : Dans $\mathrm{SU}(N)$ pur, pas de boson de Goldstone vecteur (pas de brisure de jauge). *Confinement* renforce la conclusion qu'il n'existe pas de particule vecteur libre de masse nulle.

5. (Optionnel) Confinement : prouver la "aire law" pour les Wilson loops

- **Wilson loops** $\langle W(\Gamma) \rangle$: démontrer qu'ils décroissent selon l'aire de la boucle, $\exp(-\sigma\, \mathrm{Area}(\Gamma))$, pour $\sigma > 0$.
- **Interprétation** : $\sigma > 0$ indique un flux tube entre charges colorées : confinement (pas de quark/gluon isolé).

En pratique, cette étape (confinement) est souvent traitée parallèlement au *mass gap*, car les deux aspects sont étroitement liés.

Conclusion : "Créons la preuve, pas à pas"

- **Étape 1** : Régulariser (lattice ou multi-échelle).
- **Étape 2** : Prouver la *limite continuum* ⇒ existence d'une *mesure Yang–Mills* 4D.
- **Étape 3** : Vérifier *gauge invariance*, axiomes OS, ⇒ construction Minkowski.
- **Étape 4** : *Exponential decay* (fonctions de corrélations) ⇒ *mass gap* > 0.
- **Étape 5** : (Suppl.) *Confinement* : démontrer la "aire law".

Aboutissement : L'on établit **formellement** que la théorie de Yang–Mills en 4D (compacte, ex. SU(3)) *existe* et possède un spectre *strictement* massif : le fameux *mass gap*. C'est exactement le *cœur* du **Millennium Problem** correspondant. La *physique* (lattice QCD, asymptotic freedom, confinement empirique) soutient depuis longtemps cette conclusion ; la tâche mathématique consiste à *rassembler toutes les briques* et *fermer la démonstration* dans un formalisme complet.