

# Esquisse d’une preuve complète de la théorie de Yang–Mills 4D et de son “mass gap” (problème du Millénaire)

*Projet “Unification de l’Alpha à l’Oméga”*

## Abstract

Nous proposons ici une *esquisse* de ce que pourrait être un *chemin mathématiquement rigoureux* pour établir l’existence d’une **théorie quantique de Yang–Mills en dimension 4** (groupe de jauge compact) et la propriété de “*mass gap*” strictement positif. Bien que le problème reste *ouvert* (Millennium Problem du Clay Institute), nous décrivons les grandes *stratégies*, les *méthodes* (constructive QFT, lattice, PDE, géométrie non commutative, etc.) et les *preuves partielles* déjà existantes. L’objectif est d’illustrer, plutôt que de prouver, la faisabilité d’une démonstration complète.

---

## 1 Le problème et sa formulation

**Enoncé simplifié.** Soit un groupe de jauge compact  $G$  (ex.  $SU(3)$  pour la QCD). Nous voulons établir que, en dimension 4,

1. **La théorie quantique de Yang–Mills** est *bien définie* (existence mathématique formelle de la mesure de chemin, renormalisation rigoureuse).
2. **Elle admet un “mass gap”** : l’excitation la plus légère du spectre a une masse  $m > 0$ , de sorte qu’il n’existe pas de particule de spin 1 de masse nulle (hors sous-groupes abéliens).

### 1.1 Difficultés majeures

- **Non abélien** : à basse énergie, l’interaction est *forte* ( $QCD \implies$  confinement).
- **Non perturbatif** : les méthodes perturbatives usuelles ne suffisent pas pour conclure sur l’existence complète et la génération de masse.
- **Mesure de chemin** : en 4D, la construction d’une QFT (chemin fonctionnel) est hautement délicate (divergences, renormalisation multi-échelles).

## 2 Principales approches vers une preuve mathématique complète

Plusieurs *chantiers* pourraient (ou devraient) converger un jour :

### 2.1 Méthodes “constructives” en théorie quantique des champs

1. **Constructive QFT** (Glimm–Jaffe, Balaban, Magnen–Rivasseau, etc.).  
On cherche à *construire explicitement* la mesure euclidienne  $\mu(dA_\mu^a)$  (champs de jauge) via des procédures de régularisation et un passage à la limite inductive. Il faut valider la stabilité, la rotation de Wick, etc.  
*Défi* : en 4D non abélienne, personne n’a finalisé la construction complète.

2. **Programme de Balaban**

Approche multi-échelle (type “block-spin”) pour contrôler la renormalisation en 4D. Des résultats partiels existent (contrôle du couplage), mais la conclusion (mass gap) n’est pas aboutie.

**Atout.** Si cette construction aboutit, on *montre* l'*existence* de la QFT + la *finitude* des observables. Pour le *mass gap*, on prouverait l'*exponential decay* des fonctions de corrélation.

## 2.2 Méthodes “lattice” (discrètes)

### 1. Lattice gauge theory (Wilson).

On définit la théorie Yang–Mills sur un réseau (maillage). Le modèle existe *discrètement*; on étudie ensuite la limite (pas de maille  $\rightarrow 0$ ). Numériquement, on observe la *confinement* et un *mass gap*.

### 2. Rigueur :

Il faut prouver que la *limite continue* du modèle lattice est bien *définie* et qu’il existe *une* énergie de masse strictement positive (exponential decay  $\Rightarrow$  gap).

**Problème.** Le contrôle *uniforme* des fluctuations à toutes les échelles rend la démonstration difficile. Les simulations (ex. Sommer, Necco) confirment la présence du mass gap, mais la preuve analytique est incomplète.

## 2.3 Méthodes PDE / EDP non linéaires

- **Cadre classique :** étude de l’énergie  $\int F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}$  en régime euclidien. On veut montrer qu’une solution stable (“confinée”) implique un *mass gap*.
- **Problème :** la *quantification* (chemins fonctionnels, fluctuations) va au-delà du PDE classique.

## 2.4 Géométrie non commutative (Connes, etc.)

- Interpréter l’espace des connexions (non abélien) comme un spectre non commutatif.
- Si un “*trou spectral*” (dans l’opérateur de Dirac associé) existe, cela se traduirait par un *mass gap*.

Cette voie est *très explorée* en 2D ou 3D (ex. Chern–Simons), moins aboutie en 4D.

## 2.5 Correspondance AdS/CFT (superYang–Mills)

- Maldacena :  $\mathcal{N} = 4$  superYang–Mills est *conforme*, donc pas de gap.
- Des versions “AdS/QCD” phénoménologiques suggèrent *confinement* et *mass gap*, mais ce n’est pas rigoureux au sens mathématique.

## 3 Stratégie de preuve complète : perspective

Une **démonstration** pourrait suivre un *mélange* d’idées :

1. **Définir la théorie** en 4D (constructive ou lattice). Obtenir une mesure  $\mu$  non triviale, invariante de jauge.
2. **Montrer la décroissance exponentielle** des corrélations  $\Rightarrow$  mass gap  $> 0$ .
3. **Vérifier qu’aucun mode sans masse** (type Goldstone) n’existe, hormis éventuellement pour un  $U(1)$  résiduel.
4. **Passage Minkowski :** assurer la rotation de Wick, la stabilité de l’hamiltonien, confirmant  $m > 0$ .

Chaque étape *existe* à l’état esquissé (Balaban, Freedman, Rivasseau, etc.), mais pas de preuve *unifiée* et *finale*.

## 4 Preuves partielles et validations : état actuel

### 4.1 Lattice QCD (Wilson, etc.)

- Numériquement, confinement, gap non nul *observé*.
- Analytique : arguments d'équidistribution partielle, mais la *preuve* d'un *gap strictement positif* manque.

### 4.2 Renormalisation (asymptotic freedom)

- On sait que la  $\beta$ -fonction est négative : la théorie se *tient*.
- À basse énergie, le couplage devient fort, créant la “mass gap” de manière *non perturbative*.

### 4.3 Physique expérimentale

- QCD réelle : pas de gluons libres, *toutes* les particules hadroniques sont massives, validant *empiriquement* le confinement et le gap.

## 5 Conclusion

**Situation mathématique.** La *preuve rigoureuse* du “mass gap” pour la **Yang–Mills 4D** attend :

1. **Construction** d'une QFT *euclidienne* (mesure, renormalisation).
2. **Démonstration** d'une *décroissance exponentielle* dans les fonctions de corrélation  $\implies$  gap.
3. **Passage Minkowski** : hamiltonien stable, particule la plus légère  $> 0$ .

C'est un **problème ouvert**, malgré des avancées (Balaban, Rivasseau, Freedman) et des confirmations par *lattice QCD*, *expérience* et *simulations*.

**Dans la “Théorie du Tout Alpha–Oméga”.** Si on évoque la *vision unificatrice*, la mass gap ressort de la dynamique *non abélienne* du bloc *Yang–Mills*. La *stationnarité* de l'action impose la *confinement* et donc un *gap positif* (pas de boson de jauge sans masse hormis un  $U(1)$ ). Mais *formaliser* la construction QFT en 4D demeure un *chantier* difficile.

**Perspectives.** Une fusion des **méthodes “constructives”**, de la **“théorie du réseau”** et d'idées **non perturbatives** (multi-échelles) *pourrait* un jour *achever* la preuve. Du point de vue **physique**, la mass gap est *quasi-certaine*. Du point de vue **mathématique**, on espère une démonstration *complète* à l'avenir : ce sera l'un des *joyaux* unissant la physique quantique non abélienne et l'analyse *fine* en dimension 4. *Entre-temps*, toutes les validations partielles confirment la *plausibilité* absolue de cette conclusion.