

PRZYKŁADY

- 1) $|x - y| \leq |x \cdot y|$
- 2) $|x| + |y| > |x|$
- 3) $|x + y| = \left|\frac{x}{y}\right|$
- 4) $|x| + |y| > \frac{|x|}{|y|}$
- 5) $|x + y| = |x| + |y|$
- 6) $|x + y| > |x - y|$
- 7) $|x + y| = \frac{|x|}{|y|}$

- 1) $x^2 = y^2 \Rightarrow |x| = |y|$
- 2) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$
- 3) $|x| = |y| \Rightarrow (x = y \vee x = -y)$
- 4) $(x = y \vee x = -y) \Rightarrow |x| = |y|$
- 5) $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$
- 6) $|x| = |y| \Rightarrow x^2 = y^2$

- 1) $|x| = |x|$
- 2) $0 \leq |x| \cdot |y|$
- 3) $|x| + |y| \geq 0$
- 4) $|x - y| \geq 0$
- 5) $\sqrt{x^2} \geq 0$
- 6) $\sqrt{x^2} = |-x|$
- 7) $|x| = |y| \Leftrightarrow |x| = |y|$

- 1) $|x| = 0 = x = 0$
- 2) $|x \cdot y| \Leftrightarrow |x| \cdot |y|$
- 3) $|x| = |y| \geq |x - y|$
- 4) $x^2 = y^2 = |x| = |y|$
- 5) $(x = y \vee x = -y) = |x - y|$
- 6) $\frac{|x|}{|y|} \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right|$
- 7) $|x| = |y| < x^2 = y^2$

RODZAJ BŁĘDU

FAŁSZYWE (NIE)RÓWNOŚCI

Ten rodzaj błędu pojawiał się najczęściej. Uczniowie otrzymali sporo puzzli (łącznie mieli ich aż 50), zatem próbowali łączyć je w intuicyjny dla nich sposób. Dzięki temu powstały pewne interesujące własności, które wspólnie staraliśmy się weryfikować poprzez podawanie kontrprzykładu. Postanowiłem wypisać tutaj tylko niektóre z nich. Weryfikacja takich pomyłek była bardzo prosta - wspólnie z uczniami zastanawialiśmy się, czy można podać kontrprzykład obalający daną własność.

JEDNOSTRONNE IMPLIKACJE

Tego rodzaju błędów było najmniej. Na ławkach uczniów pojawiły się wyłącznie 1) oraz 2). Możliwe implikacje, które mogłyby się pojawić są oznaczone numerami od 3) do 6). Wspólnie zweryfikowaliśmy, czy implikacja w drugą stronę zachodzi.

PRAWDZIWE ZDANIA

Zależności stworzone przez uczniów są prawdziwe, natomiast w kontekście układania puzzli i wykorzystania wszystkich elementów - nie będziemy w stanie ułożyć z reszty poprawnej własności. Zakładając, że uczeń odkrył 9 spośród 11 własności poprawnie i ułożył własność numer 6), pozostałe puzzle pozwolą mu na ułożenie zdania $|x| = |x|$, co już własnością nie jest.

ZDANIA NIEMAJĄCE SENSU LOGICZNEGO

Częstotliwość pojawiania się tych błędów była druga w kolejności. Z oczywistych względów wypisałem po lewej stronie wyłącznie kilka z nich. Wpadłem na trzy powody, które mogą być przyczyną pojawienia się takich zdań:

- pierwszy powód jest dość oczywisty, mianowicie niezrozumienie znaczenia symboli logicznych i nieznanie budowy zdania logicznego (tak jak w przykładzie 3)),
- drugi powód jest powiązany z pierwszym, ponieważ również wynika z niezrozumienia znaczenia symboli logicznych, ale własność, którą chciał uczeń ułożyć mogłaby być poprawna (tak jak w przykładzie 1) lub 2)),
- trzeci powód jest najbardziej prozaiczny ze wszystkich - ze względu na dużą ilość puzzli, uczniowie mogli najzwyczajniej w świecie czuć się zagubieni i części z puzzli nie zauważyć.

Warto wspomnieć, że powyższe przyczyny nie muszą występować w sposób rozłączny. Uważam, że było wręcz przeciwnie.