THE ART OF DEDUCTION

1. Zauważyliśmy już, że matematyka jest jak dedukcja. Chcąc więc nauczyć się matematyki, warto znać również sztukę dedukcji. A od kogo powinno się uczyć dedukcji, jak nie od samego jej mistrza, Sherlocka Holmesa? Przeczytaj poniższy fragment z opowiadania “Gloria Scott”.

No, Mr Holmes, niech pan teraz wypróbuje swoje zdolności — powiedział uśmiechając się dobrodusznie. —

Może z mojego wyglądu potrafi pan coś wywnioskować? Stanowię podobno doskonały obiekt do dedukcji. — Obawiam się, że raczej nie — odpowiedziałem. — Mimo to pozwolę sobie zauważyć, iż w ciągu ostatnich dwunastu miesięcy odczuwał pan lęk przed jakąś napaścią czy atakiem.

Uśmiech zniknął z jego twarzy. Skierował na mnie wzrok, w którym odmalowało się zdumienie.

— W istocie, to odpowiada prawdzie. Wiesz, Wiktorze — zwrócił się do syna — ta banda kłusowników, którą rozbiliśmy, groziła, że nas wymorduje. Sir Edward Hoby został napadnięty. Od tej pory mam się na baczności. Ale zupełnie nie mogę zrozumieć, skąd pan dowiedział się o tym?

— Posiada pan bardzo ładną laskę — odparłem. — Sądząc po napisie, nie może pan mieć jej dłużej niż rok, Mimo to zadał pan sobie tyle trudu, aby rączkę jej wydrążyć i wypełnić roztopionym ołowiem. Dzięki temu laska ta stała się groźną bronią. Z pewnością nie przedsiębrałby pan takich ostrożności, gdyby pan nie obawiał się jakiegoś niebezpieczeństwa.

2. Spróbujmy teraz prześledzić potencjalny tok myślenia Sherlocka Holmesa. Chciał wydedukować coś na temat człowieka, który posiada laskę do podpierania się. Człowiek ten należy do zbioru wszystkich ludzi, a zbiór wszystkich ludzi możemy podzielić na tych, którzy używają takich lasek i tych, którzy tego nie robią. Człowiek, na temat którego Sherlock czyni obserwacje z pewnością należy do zbioru ludzi, którzy używają lasek do podpierania się.
O czym może to świadczyć? Zapewne jest doświadczony życiowo.
Następnie, spośród ludzi, którzy używają lasek do podpierania się, można wyróżnić tych, którzy wydrążają i wypełniają jej główkę roztopionym ołowiem i tych, którzy tego nie robią. Znowu, nasz jegomość zalicza się do tej pierwszej grupy. Teraz, Sherlock mógłby zastanowić się nad tym, że skoro ten człowiek, używa laski do podpierania się oraz zadał sobie tyle trudu, aby wypełnić jej głowkę ołowiem, to co to może oznaczać?
Podobne rozumowanie Sherlock kontynuuje, aż nie dojdzie do konkluzji.

W matematyce istnieją pewne strategie, które czasem pomagają nam w udowodnieniu danego twierdzenia. Jedną z takich technik jest dzielenie zbioru, który rozważamy na podzbiory, w których możemy rozważyć różne szczególne przypadki danego twierdzenia. Chcemy uzasadnić, że odkryte przez nas własności wartości bezwzględnej są prawdziwe dla dowolnych liczb rzeczywistych. Zatem ten zbiór będzie nas interesował.

3. Czy potrafisz zaproponować podział zbioru liczb rzeczywistych na dwa, rozłączne podzbiory sumujące się do całego zbioru liczb rzeczywistych?

(tu mogą być odpowiedzi typu: nieujemne i ujemne, parzyste nieparzyste, podzielne przez 3 i niepodzielne przez 3 itd.., chcemy dojść do tego, że warto by rozważać nieujemne i ujemne)

……………………………………………………………………………………………………

4. Spójrz na definicję wartości bezwzględnej.

$$|a| = \begin{cases} a & \Leftrightarrow a \geqslant 0 \\ -a & \Leftrightarrow a < 0 \end{cases}$$

Czy na podstawie tej definicji, potrafiłbyś wydedukować, który podział z ćwiczenia 3 byłby najbardziej optymalny?

……………………………………………………………………………………………………

5. Spróbujmy teraz wspólnie udowodnić pierwszą z własności:

$$|x| \geq 0$$

Zacznijmy od zapisania struktury dowodu matematycznego.

Z: $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & \Leftrightarrow x \geqslant 0 \\ -x & \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$

T: $|x| \geqslant 0$

D-d:

Spróbujmy teraz zabrać się za dowodzenie. Pamiętasz jak Sherlock dzielił zbiór ludzi na podzbiory? My też tego dokonaliśmy w punkcie **3.** i **4.** Były to liczby nieujemne oraz ujemne. Zajmijmy się najpierw jednym z tych przypadków. Wybierz, od którego zaczynamy.

……………………………………………………………………………………………………

(dla ustalenia uwagi, zacznijmy od nieujemnych)

Czy potrafisz zapisać symbolicznie zdanie, że “x należy do wybranego przez Ciebie powyżej zbioru”?

……

$$x \in [0; +\infty)$$

a) Dobrze, zatem spróbujmy coś wydedukować o wartości bezwzględnej liczby x, gdy należy ona do wyżej zapisanego zbioru. Czy nasuwa Ci się jakaś obserwacja? Zapisz ją/je.

……

(może być to np zdanie, że gdy x jest nieujemny, to wartość bezwzględna też jest nieujemna)

b) Teraz, przejdźmy do drugiego przypadku, czyli rozważeniu, co możemy wydedukować o wartości bezwzględnej liczby x, gdy należy ona do liczb ujemnych?

……

(może być to np zdanie, że gdy x jest ujemny, to wartość bezwzględna, zgodnie z definicją, to -x, a -x to liczba dodatnia, gdy x jest ujemny)

Spójrz na punkty **a)** i **b)**. Czy potrafisz z nich wyciągnąć jakiś wniosek, będący prawdziwy dla wszystkich liczb rzeczywistych?

……

(tu teza i koniec dowodu)

6. Spróbuj w podobny sposób uzasadnić poniższe własności wartości bezwzględnej. Pamiętaj o strukturze dowodu matematycznego.

$$|x| = |-x|$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x|^2 = x^2$$

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$$

Do odkrycia dowodu tego robimy coś innego: (bo tu trzeba wykorzystać fakt, który się wie czyli multiplikatywność modułu)

f) $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$, jeśli $y \neq 0$