Tugas Besar I IF2123 Aljabar Linear dan Geometri

Sistem Persamaan Linier, Determinan, dan Aplikasinya

Semester I Tahun 2022/2023

13521010 Muhamad Salman Hakim Alfarisi

13521011 Afnan Edsa Ramadhan

13521013 Eunice Sarah Siregar

Kelompok “43”

Bab I
Deskripsi Masalah

Pada era yang serba digital ini, banyak bidang yang menerapkan penggunaan sistem persamaan linear (SPL) untuk menyelesaikan permasalahan terutama pada komputerisasi. Untuk menyelesaikan SPL, dapat menggunakan metode-metode, seperti metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, kaidah Cramer, dan metode *inverse* atau matriks balikan. Dengan metode tersebut, didapatkan hasil berupa solusi unik (hanya memiliki satu solusi), solusi banyak (memiliki tak berhingga solusi), dan tidak memiliki solusi.

Pada tugas besar Aljabar Linear dan Geometri, diminta untuk membuat library aljabar linear dalam bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Selanjutnya, gunakan library tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi.

Bab II
Teori Singkat

Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan yang terdiri dari beberapa variabel berbeda. Dengan matriks, dapat menyelesaikan SPL dengan beberapa metode, seperti metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, inverse matriks, dan kaidah Cramer. Di bawah ini merupakan tahapan cara penyelesaian SPL dengan persamaan sebagai berikut:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 5$$

$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10$$

$$3x_1 - x_2 + 6x_3 = 15$$

1. Diubah ke dalam bentuk *matrix augmented*

   Matrix augmented adalah perluasan matriks A dengan menyisipkan nilai vektor B pada kolom terakhir dari matriks A. Berikut adalah contoh *matrix augmented* dari SPL diatas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 10 \\ 3 & -1 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

2. Menyelesaikan dengan Operasi Baris Elementer

   Operasi Baris Elementer adalah operasi yang digunakan terhadap baris suatu matriks yang dapat menghitung *inverse* dan menyelesaikan SPL. Sifat-sifat yang dapat digunakan dalam menggunakan operasi baris elementer:

   a) mengalikan sebuah baris dengan konstanta tak nol,
   b) menukarkan dua buah baris, dan
   c) menambahkan sebuah baris dengan kelipatan baris lainnya.

   Berikut adalah hasil penerapan OBE terhadap matrix augmented:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Berdasarkan hasil OBE di atas, didapatkan solusi sebagai berikut, misalkan $x_3 = r$ maka $x_1 = 5 - 2r, x_2 = 0, x_3 = r.$

Penyelesaian dari sistem persamaan linear memiliki sifat repetitif atau berulang, sehingga dapat membuat algoritma komputer untuk menyelesaikan SPL berdasarkan metode-metode yang sudah dipelajari sebelumnya.

1. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gauss adalah sebuah teknik untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear (SPL) dengan menerapkan operasi baris elementer (OBE) pada matriks augmented sampai terbentuk matriks eselon baris dengan memiliki satu utama di setiap baris, kecuali baris yang seluruh elemennya adalah nol. Adapun syarat untuk memenuhi matriks eselon baris menggunakan OBE:

a. Ketika terdapat baris tak nol maka bilangan tak nol pertama pada baris tersebut adalah satu utama,
b. baris nol terletak di bagian bawah matriks, dan
c. pada dua baris yang berurutan tak nol, maka satu utama pada baris yang lebih rendah semakin menjauh ke kanan dibandingkan satu utama pada baris yang lebih tinggi.

Dibawah ini adalah beberapa contoh dari matriks eselon baris dengan * adalah nilai sembarang:

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Untuk menemukan solusi dari SPL, dapat menggunakan eliminasi Gauss-Jordan. Kedua metode ini hampir sama, tetapi hanya berbeda pada hasil akhirnya. Metode eliminasi Gauss menggunakan operasi baris elementer hingga mencapai matriks eselon baris. Sedangkan, metode eliminasi Gauss-Jordan menggunakan operasi baris elementer hingga mencapai matriks eselon baris tereduksi sehingga dapat menggunakan *forward substitution* (menghasilkan nilai nol dibawah satu utama) dan *backward substitution* (menghasilkan nol diatas satu utema).

Matriks eselon baris tereduksi memiliki sifat yang sama dengan matriks eselon baris, tetapi dengan tambahan syarat, yaitu setiap kolom yang memiliki satu utama memiliki nol di atas, bawah, dan kiri dari satu utama.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1: Contoh matriks eselon baris tereduksi

3. Determinan

Determinan adalah nilai yang dihitung dari elemen-elemen suatu matriks dengan memiliki jumlah baris dan kolom sama. Untuk mendapatkan nilai determinan dari suatu matriks dapat menggunakan dua metode, yaitu metode ekspansi kofaktor dan metode reduksi baris. Dengan metode matriks kofaktor, determinan didapatkan dengan menjumlahkan perkalian setiap elemen dengan kofaktornya. Sedangkan metode reduksi baris, determinan didapatkan dengan mereduksi baris hingga didapatkan matriks segitiga bawah lalu mengalikan semua elemen diagonal utamanya.

4. Matriks Balikan

Matriks balikan (*inverse matrix*) adalah matriks baru yang berisi kebalikan dari matriks asal dan jika dikalikan dengan matriks awal akan menghasilkan matriks identitas (matriks I).

$$Ax = B$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}B$$

$$Ix = A^{-1}B$$

$$x = A^{-1}B$$

Untuk menentukan *inverse matrix* dapat menggunakan dua metode, yaitu metode kofaktor dan metode eliminasi Gauss-Jordan. Metode kofaktor dapat menggunakan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

5. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor adalah matriks yang berisi kofaktor dari elemen matriks itu sendiri.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Misalnya matriks A di atas jika dikofaktorkan akan diperoleh matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Adjoin

Matriks adjoin adalah transpose dari matriks kofaktor. Misalnya matriks A memiliki kofaktor:

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Maka adjoin dari A:

$$\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

7. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer ditemukan oleh Gabriel Cramer dengan tujuan menyelesaikan sistem persamaan linear dengan jumlah persamaan sama dengan jumlah banyaknya variabel. Untuk mengaplikasikan kaidah Cramer diperlukan matriks dan determinan. Kaidah Cramer memiliki solusi tunggal atau unik, yaitu

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)}, x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}, \dots , x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

A_j dengan mengganti entri pada kolom ke-j dari A dengan entri dari matriks b.

8. Interpolasi Polinom

Interpolasi polinomial adalah teknik interpolasi dengan membuat permisalan pola data yang dimiliki mengikuti pola polinomial linear maupun berderajat tinggi. Dengan menggunakan interpolasi polinom, dapat membuat fungsi proyeksi yang dapat membantu dalam perubahan data terhadap variabel independennya.

9. Interpolasi Bikubik

Interpolasi bikubik adalah perpanjangan dari interpolasi kubik pada dua dimensi. Interpolasi bikubik dapat diselesaikan dengan polinomial Lagrange, *cubic splines,* atau *cubic convolution algorithm.* Perbedaan interpolasi bikubik dengan interpolasi bilinear adalah` jumlah elemen dalam matriks tersebut.

10. Regresi Linear Berganda

Regresi linear berganda adalah pemodelan regresi yang melibatkan lebih dari satu variabel independen dan berfungsi untuk mengetahui arah dan pengaruh variabel independen terhadap variabel dependen.

Bab III

Implementasi

Class Main

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
main	Public void	String[]	Menampilkan menu utama
inputMat	Public double[][]	double[][] m int a int b	Memasukkan elemen-elemen matriks
displayMat	Public void	double[][] m	Menampilkan matriks
copyMat	Public double[][]	double[][]m double[][]mn	Menyalin matriks
createIdentitas	Public double[][]	int row int col	Membentuk matriks identitas
gabungMat	Public double[][]	double[][] m1 double[][]m2	Menggabungkan matriks
isSquare	Public boolean	double[][] m	Mengecek matriks persegi
getDiagonal	Public double	double[][] m int i	Mencari diagonal utama
tukarBaris	Public void	double[][] m int r1 int r2	Menukarkan baris matriks
isRowZero	Public boolean	double[][] m int r	Mengecek baris yang elemen nol
determinan1	Public double	Double[][] m	Menghitung determinan dengan metode segitiga atas
determinan2	Public double	Double[][] m	Menghitung determinan dengan metode kofaktor
kofaktor	Public double[][]	Double[][] m Int row Int col	Menghitung kofaktor suatu matrix
cramer	Public void	Double[][] m	Menghitung SPL

			dengan kaidah cramer
gauss	Public double[][]	Double[][] m	Menghitung OBE matrix hingga terbentuk matrix eselon baris
jordan	Public double[][]	Double[][] m	menghitung OBE matrix hingga terbentuk matrix eselon baris tereduksi
isAllZero	Public boolean	Double[][] m Int pivotcol	Mengecek apakah semua matrix berisi nol
rowZero	Public boolean	double[][]m	Mengecek apakah semua baris berisi nol
invers	Public double[][]	double[][] m	Membalikkan matriks
readFile	Public double[][]		Membaca matriks dari file
chooseTextFile	Public File		Memilih file yang akan dibaca
solveGaussJordan	Public double[]	double[][] m	Menyelesaikan SPL dengan metode Gauss-Jordan
oneInRow	Public int	double[][] m int i	Mencari letak kolom elemen satu
pol	Public void	double[][] n int x double y	Menyelesaikan SPL dengan metode interpolasi polinom
regresi	Public void	Double[][] m Double[] inputx Int row Int col	Menghitung hasil regresi linear berganda
matrixToFileDet	Public void	double[][] m	Menyimpan hasil determinan ke dalam file
matrixToFileInv	Public void	double[][] m	Menyimpan hasil *inverse* ke dalam file

Bab IV

Eksperimen

3.

a.

$$
\begin{aligned}
8x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \\
2x_1 + 9x_2 - x_3 - 2x_4 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 2 \\
x_1 + 6x_3 + 4x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Gauss

```
[1.0 0.125 0.375 0.25 0.0 ]
[0.0 1.0 -0.2 -0.2857142857142857 0.11428571428571428 ]
[0.0 0.0 1.0 -0.19480519480519481 0.7597402597402597 ]
[0.0 0.0 0.0 1.0 -0.25810810810810797 ]
x1 = -0.2243243243243243
x2 = 0.18243243243243246
x3 = 0.7094594594594594
x4 = -0.25810810810810797
```

Gauss Jordan

```
[1.0 0.0 0.0 0.0 -0.22432432432432436 ]
[0.0 1.0 0.0 0.0 0.18243243243243246 ]
[0.0 0.0 1.0 0.0 0.7094594594594594 ]
[0.0 0.0 0.0 1.0 -0.25810810810810797 ]
x1 = -0.22432432432432436
x2 = 0.18243243243243246
x3 = 0.7094594594594594
x4 = -0.25810810810810797
```

Invers

```
[0.13783783783783782 -0.018918918918918892 0.010810810810810784 -0.07567567567567568 ]
[-0.033783783783783378 0.14189189189189189 -0.08108108108108106 0.06756756756756757 ]
[-0.02027027027027027 -0.11486486486486487 0.3513513513513513 0.04054054054054054 ]
[-0.004054054054054055 0.17702702702702697 -0.5297297297297296 0.20810810810810812 ]
x1 = -0.22432432432432436
x2 = 0.18243243243243248
x3 = 0.7094594594594593
x4 = -0.2581081081081079
```

Cramer

```
8 1 3 2 0
2 9 -1 -2 1
1 3 2 -1 2
1 0 6 4 3
determinan = 740.0

x1= NaN
x2= 0.1824324324324324
x3= 0.7094594594594594
x4= -0.25810810810810797
```

4. Interpolasi Polinomial

a.

x	0.4	0.7	0.11	0.14	0.17	0.2	0.23
$f(x)$	0.043	0.005	0. 058	0.072	0.1	0.13	0.147

```
x1 = -0.1845590192321775
x2 = 10.27638399152867
x3 = -163.91566263544982
x4 = 1220.8548907839868
x5 = -4346.313951319967
x6 = 7102.399163270012
x7 = -4212.434532220774

f(x) = -4212,43453x^6 + 7102,39916x^5 + -4346,31395x^4 + 1220,85489x^3 + -163,91566x^2 + 10,27638x^1 + -0,18456
f(0,20) = 0,13000
```

```
f(x) = -4212,43453x^6 + 7102,39916x^5 + -4346,31395x^4 + 1220,85489x^3 + -163,91566x^2 + 10,27638x^1 + -0,18456
f(0,55) = 2,13757
```

```
f(x) = -4212,43453x^6 + 7102,39916x^5 + -4346,31395x^4 + 1220,85489x^3 + -163,91566x^2 + 10,27638x^1 + -0,18456
f(0,85) = -66,26964
```

```
f(x) = -4212,43453x^6 + 7102,39916x^5 + -4346,31395x^4 + 1220,85489x^3 + -163,91566x^2 + 10,27638x^1 + -0,18456
f(1,28) = -3485,14490
```

b.

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2022	6,567	12.624
30/06/2022	7	21.807
08/07/2022	7,258	38.391
14/07/2022	7,451	54.517
17/07/2022	7,548	51.952
26/07/2022	7,839	28.228
05/08/2022	8,161	35.764
15/08/2022	8,484	20.813
22/08/2022	8,709	12.408
31/08/2022	9	10.534

f(16/7/2022)

```
f(x) = -149,38798x^9 + 9966,81413x^8 + -294131,92507x^7 + 5037273,00766x^6 + -55144674,51126x^5 + 399951402,36756x^4
 + -1920422554,05511x^3 + 5881576346,57943x^2 + -10413929043,65576x^1 + 8110225448,55568
f(7,52) = 53,52203
```

f(10/8/2022)

```
f(x) = -149,38798x^9 + 9966,81413x^8 + -294131,92507x^7 + 5037273,00766x^6 + -55144674,51126x^5 + 399951402,36756x^4
 + -1920422554,05511x^3 + 5881576346,57943x^2 + -10413929043,65576x^1 + 8110225448,55568
f(8,32) = 36,36956
```

f(05/9/2022)

```
f(x) = -149,38798x^9 + 9966,81413x^8 + -294131,92507x^7 + 5037273,00766x^6 + -55144674,51126x^5 + 399951402,36756x^4
 + -1920422554,05511x^3 + 5881576346,57943x^2 + -10413929043,65576x^1 + 8110225448,55568
f(9,16) = -626,98734
```

5. Regresi Linear Berganda

Table 12.1: Data for Example 12.1

Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3	Nitrous Oxide, y	Humidity, x_1	Temp., x_2	Pressure, x_3
0.90	72.4	76.3	29.18	1.07	23.2	76.8	29.38
0.91	41.6	70.3	29.35	0.94	47.4	86.6	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24	1.10	31.5	76.9	29.63
0.89	35.1	68.0	29.27	1.10	10.6	86.3	29.56
1.00	10.7	79.0	29.78	1.10	11.2	86.0	29.48
1.10	12.9	67.4	29.39	0.91	73.3	76.3	29.40
1.15	8.3	66.8	29.69	0.87	75.4	77.9	29.28
1.03	20.1	76.9	29.48	0.78	96.6	78.7	29.29
0.77	72.2	77.7	29.09	0.82	107.4	86.8	29.03
1.07	24.0	67.7	29.60	0.95	54.9	70.9	29.37

Source: Charles T. Hare, "Light-Duty Diesel Emission Correction Factors for Ambient Conditions," EPA-600/2-77-116. U.S. Environmental Protection Agency.

```
-3.5062037317257406
-0.13125840332180436
0.06035442264399003
4.515543018141501
Hasil regresi
0.9384353057379458
```

Bab V

Kesimpulan

Dapat disimpulkan bahwa sistem persamaan linear memiliki sifat berulang sehingga dapat diselesaikan menggunakan beberapa metode seperti metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, kaidah Cramer, interpolasi polinom, interpolasi bikubik, dan regresi linear berganda. Untuk menyelesaikan menggunakan metode eliminasi Gauss diperlukan operasi baris elementer sampai mendapatkan matriks eselon baris. Sedangkan metode eliminasi Gauss-Jordan diperlukan operasi baris elementer sampai mendapatkan matriks eselon baris tereduksi.

Referensi

R. Munir. (2022). Determinan bagian 2. Available:
https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-09-Determinan-bagian2.pdf

R. Munir. (2022). Matriks eselon. Available:
https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-02-Matriks-Eselon.pdf

R. Munir. (2022). Sistem Persamaan Linear. Available:
https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf

Lampiran

Pranala Github: https://github.com/archmans/Algeo01-21010