$$\begin{cases} \partial_t u - D\Delta u = 0 \\ u(\overrightarrow{r}, 0) = v(\overrightarrow{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = R(r)T(t) \\ \partial_r u(0,t) = \partial_r u(r_0,t) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$R\partial_t T = T\frac{D}{r}\partial_r r \partial_r R$$

$$\frac{\partial_t T}{T} = \frac{D\partial_r r\partial_r R}{rR} = -\gamma$$

$$T = T_0 e^{-\gamma t}$$

$$r^2\partial_r^2 R + r\partial_r R + \frac{\gamma}{D}r^2 R = 0$$

$$x^2\partial_x^2 R + x\partial_x R + (x^2 - 0^2)R = 0,\ x = \sqrt{\lambda}r,\ \lambda = \frac{\gamma}{D} \tag{2}$$

Любая $J_0(x)$, удовлетворяет однородному уравнению – т. е. имеем однопараметрическое семейство решений. Граничным условиям из (1) удовлетворяют только такие $J_0(x)$, что

$$\partial_x J_0(0) = \partial_x J_0(\sqrt{\lambda}r_0) = 0 \tag{3}$$

$\partial_x J_0(0) = 0$ для любой функции из нашего семейства.

$$\partial_x \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}$$

$$\partial_x J_0(x) = -J_1(x)$$

Из (3) тогда имеем

$$J_1(\sqrt{\lambda}r_0) = 0$$

Обозначим z_m^a – m-ый нуль функции $J_a(x)$, тогда (3) переходит в

$$\sqrt{\lambda_m}r_0 = z_m^1 = z_m$$

$$\lambda_m = \left(\frac{z_m}{r_0}\right)^2$$

$$\gamma_m = D\left(\frac{z_m}{r_0}\right)^2$$

Тогда возьмём $T_0 = 1$, целое $m > 0$, начальные условия $v = J_0\left(\frac{z_m}{r_0}r\right)$ и решением будет

$$u(r,t) = J_0\left(\frac{z_m}{r_0}r\right)e^{-D\left(\frac{z_m}{r_0}\right)^2 t}$$

Его и будем сравнивать с численным.