Université de Franche-Comté
UFR SJEPG

Économétrie des séries temporelles

Documents et calculatrice interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Durée 2h.

Exercice 1

Soit le processus $y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$

1. (2 points) Calculez l'espérance et la variance non-conditionnelle de y_t.
2. (1 point) Calculez l'espérance et la variance conditionnelle de y_t.
3. (3 points) Désormais, $\varepsilon_t = h_t^{1/2}\eta_t$ avec $h_t = \alpha_0 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 h_{t-1}$ et $\eta_t \sim N(0, 1)$. Répondez de nouveau aux questions précédentes. Proposez des conditions de stationnarité.

Exercice 2

Soit le processus $Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_t,\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$

1. (2 points) Calculez l'espérance et la variance non-conditionnelle de Y_t. Est-ce un processus stationnaire ?
2. (2 points) Quelle procédure de test permet de vérifier ceci empiriquement ? Présentez la brièvement.
3. (1 point) Quelle transformation appliquer à ce processus pour le stationnariser, comment vérifier les propriétés des résidus ?
4. (1 point) Soit $X_t = X_{t-1} + e_t$, $e_t \sim N(0, \sigma_e)$, que donne le résultat du modèle linéaire suivant : $Y_t = \beta X_t + u_t,\ u_t \sim N(0, \sigma_u)$

Exercice 3

Vrai ou Faux ? N'oubliez pas de vous justifier ! Dans toutes les affirmations suivantes (ε_t) est un bruit blanc.

1. (1 point) Le processus $(1 - 0.8L + 0.4L^2)y_t = (1 - 0.2L)\varepsilon_t$ possède une représentation MA d'ordre infinie.
2. (1 point) Si y_t est stationnaire alors la statistique de Ljung-Box calculée sur y doit nous amener à accepter l'hypothèse nulle qui lui est associée.
3. (1 point) Si $y_t = 0.2y_{t-1} + \varepsilon_t$, alors y possède une représentation de Wold.

Exercice 4

Les Tables 1 et 2 présentent des résultats afin de modéliser le PIB Français

1. (2 points) Est-ce que la série est stationnaire ? Si non, quelle transformation faut-il opérer afin de la rendre stationnaire ? Justifier votre réponse.

2. (2 points) D'après les résultats de la Table 2. Complétez votre réponse : quel modèle utiliser ? Est-il cohérent d'après les résultats observés ? Que peut rajouter l'économètre à son analyse ?

	$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1} + \beta t + \beta_0 + \varepsilon_t$	$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1} + \beta_0 + \varepsilon_t$	$\Delta y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$
ϕ_1	-0.07 (0.127)	-0.01 (0.337)	$0,003$ (0.00)
β	70.95 (0,199)	-	-
β_0	$3.38e+04$ (0.109)	$8.59e+04$ (0.25)	-
$H_0:\ \phi_1 = \beta = 0$	1,318	-	-
$H_0:\ \phi_1 = \beta_0 = 0$	-	9,973	-

TAB. 1 : Résultats pour la procédure de test de Dickey-Fuller. p-value entre parenthèses.

	ARMA(1,0)	ARMA(0,1)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(1,2)	ARMA(2,2)
cste	7,35	7,35	7,37	7,37	7,37	7,37
ϕ_1	$-0,068$ (0,028)	-	$-0,693$ (0,039)	$0,232$ (0,118)	$-0,473$ (0,032)	$-0,588$ (0,049)
ϕ_2	-	-	-	$0,434$ (0,017)	-	$-0,197$ (0,067)
θ_1	-	$0,387$ (0,01)	$0,511$ (0,046)	$-0,315$ (0,153)	$0,506$ (0,028)	$0,613$ (0,036)
θ_2	-	-	-	-	$0,637$ (0,043)	$0,812$ (0,105)
AIC	145,70	145,79	145,46	139,63	137,47	136,84
BIC	139,70	139,79	137,46	129,63	127,47	126,84
Ljung-Box(ε_t)	0,81	0,82	0,80	0,86	0,88	0,89
Ljung-Box(ε_t^2)		0,16	0,18	0,11	0,21	0,24
Jarque-Bera	0,06	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02

TAB. 2 : Résultats d'estimation pour différent ARMA(p,q) : $y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j}$ $+ \varepsilon_t$. Erreurs standards entre parenthèse pour les paramètres, p-values pour les tests d'hypothèses.

STATISTICAL TABLES FOR UNIT ROOT TESTS

True Model Used to Generate the Data: $y_t = y_{t-1} + \epsilon_t$

1. Model Estimated: Dickey-Fuller $\Delta y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 t + \epsilon_t$
Phillips-Perron $y_t = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 y_{t-1} + \tilde{a}_2 (t - n/2) + \tilde{\epsilon}_t$

Hypothesis	Test Statistic	Critical Values 10%	5%	1%
$a_1 = 0$, $\tilde{a}_1 = 1$	t-based	-3.15	-3.45	-4.04
$a_0 = 0$, $\tilde{a}_0 = 0$	t-based	2.73	3.11	3.78
$a_2 = 0$, $\tilde{a}_2 = 0$	t-based	2.38	2.79	3.53
$a_1 = a_2 = 0$, $\tilde{a}_1 = 1$ & $\tilde{a}_2 = 0$	F-based	5.47	6.49	8.73
$a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $\tilde{a}_0 = \tilde{a}_2 = 0$ & $\tilde{a}_1 = 1$	F-based	4.16	4.88	6.50

2. Model Estimated: Dickey-Fuller $\Delta y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + \epsilon_t$
Phillips-Perron $y_t = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 y_{t-1} + \tilde{\epsilon}_t$

Hypothesis	Test Statistic	Critical Values 10%	5%	1%
$a_1 = 0$, $\tilde{a}_1 = 1$	t-based	-2.58	-2.89	-3.51
$a_0 = 0$, $\tilde{a}_0 = 0$	t-based	2.17	2.54	3.22
$a_0 = a_1 = 0$, $\tilde{a}_0 = 0$ & $\tilde{a}_1 = 1$	F-based	3.86	4.71	6.70

3. Model Estimated: Dickey-Fuller $\Delta y_t = a_1 y_{t-1} + \epsilon_t$
Phillips-Perron $y_t = \tilde{a}_1 y_{t-1} + \tilde{\epsilon}_t$

Hypothesis	Test Statistic	Critical Values 10%	5%	1%
$a_1 = 0$, $\tilde{a}_1 = 1$	t-based	-1.61	-1.95	-2.60