Записки по ДИС2 - Лекция 11

27.04.2023

Функции (и изображения) на повече от една променливи.

Функция на n променливи: $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R} \quad f(x) \equiv f(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$f : D \to \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n \ (n, k \in \mathbb{R}) \quad f(x) = f(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ f_2(x_1, ..., x_n) \\ ... \ ... \ ... \ ... \\ f_k(x_1, ..., x_k) \end{pmatrix} \quad x \in D$$

$f_1, f_2, ..., f_k$ - координатни функции на изображението f Точка на сгъстяване на f:

$$\forall\ U \text{ - околност на } x_0 : (U \cap D)\{x_0\} \neq \emptyset \text{ или } \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D\ \{x_0\}, x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}^k$$

$$\begin{aligned} &\text{Коши} \ \ \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D,\ x \neq x_0, \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - l\| < \epsilon \\ &\text{Хайне} \ \ \forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D \backslash \{x_0\},\ x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_0 : f(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} l \end{aligned}$$

$f : D \to \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad f$ е непрекъсната в x_0, ако:

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D,\ \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon \Leftrightarrow \\ &\forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D,\ x_m \underset{m\to\infty}{\to} x_0 : f(x_m) \underset{m\to\infty}{\to} f(x_0) \end{aligned}$$

Пример $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \neq \vec{\mathcal{O}} = (0, 0) \\ 0, & \text{ако } x = (0, 0) \end{cases}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$x_2 = kx_1,\ k \in \mathbb{R}$
$f(t, kt) = \dfrac{t.kt}{t^2 + (kt)^2} = \dfrac{k}{1 + k_2} \quad t \neq 0$

Основни теореми за непрекъснати функции (и изображения)

Th. 1 *Вайерщрас: Непрекъснат образ на компакт е компакт.*

$$\begin{cases} f : K \to \mathbb{R}^k, \ \ K \subset \mathbb{R}^n, K - \textit{компакт} \\ f \textit{ е непрекъснато } \Rightarrow f(K) = \{f(x) : x \in K\} \textit{ е компактно подмножество на } \mathbb{R}^k \end{cases}$$

Коментар: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *- непрекъсната* $\Rightarrow f([a,b])$ *- компакт в* $\mathbb{R}^1 \to f([a,b])$ *- ограничено в* $\mathbb{R}$*, т.е.* f *е ограничена*
$f([a,b])$ *- затворено в* $\mathbb{R}^1$*(значи* $\sup f([a,b])$ *и* $\inf f([a,b])$ *са от* $f([a,b])$*)*

Доказателство: