Записки по ДИС2 - Лекция 9

26.04.2023

Степенни редове.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \leftarrow \text{степенен ред}$$

$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ...$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ е сходящ} \right\} \text{ - област на сходимост}$$

Канонични примери за степенни редове

1) Геометрична прогресия

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1, 1) \leftarrow \text{област на сходимост}$$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \to x \in (-\infty, +\infty)$ - област на сходимост в $\mathbb{R}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ - x е параметър. Прилагаме критерия на Даламбер: $\dfrac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \dfrac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \longrightarrow \quad x \in [-1, 1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = |x|.\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|$

Критерия на Даламбер ни дава: $|x| < 1$ - абсолютно сходящ
$|x| > 1$ - разходящ

Сега разглеждаме в краищата на интервала: при $\boxed{x = 1}$ имаме хармоничния ред, който е разходящ; при $\boxed{x = -1}$ редът е сходящ.

N.B. Областта на сходимост е винаги с център точката a. (степенни редове)

Def. 1 $R \in [0, +\infty]$ *се нарича радиус на сходимост на реда* $sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, *ако* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *е сходящ за всяко* $x \in \mathbb{R}$ *с* $|x-a| > R$. *Ако , то областта на сходимост има един от следните видове:*

$$(a-R, a+R)$$
$$[a-R, a+R)$$
$$(a-R, a+R]$$
$$[a-R, a+R]$$