

Записки по ДИС2 - Лекция 13

07.06.2023

Теорема за неявната функция. Условни екстремуми. Множители на Лагранж.

Теорема за неявната функция

$$F(x, y) = 0$$

Def. 1 Ако $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ такава, че $F(x, f(x)) = 0 \forall x \in D$, казваме, че f е **неявна функция**, определена от $F(x, y) = 0$.

Пример : $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2, \quad R > 0, \quad F(x, y) = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2} \rightarrow y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R]$$
$$f(x) = \varepsilon(x) \sqrt{R^2 - x^2}, \quad \varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$$

Нека F е гладка функция, $F(x_0, y_0) = 0$.

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + dF(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

$$F(x, y) = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|x - x_0, y - y_0\|)$$

$$\boxed{z = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$$

$$\{(x, y, R(x, y))\} \cap \{z = 0\} \quad F(x, y) = 0$$

$0 = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad \leftarrow$ уравнение на допирателна към $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ в т. (x_0, y_0)

Th. 1 Теорема за неявните функции

Нека U е отворено подмножество на \mathbb{R}^2 . $F : U \rightarrow \mathbb{R}$, F е непрекъсната. F'_y съществува и е непрекъсната в U , $(x_0, y_0) \in U$, $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогава съществуват $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такива, че:

(а) **Съществува единствена** функция $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \rightarrow (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ неявно зададена от уравнението $F(x, y) = 0$ (т.е. $F(x, f(x)) = 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$).

(б) Така определена f е непрекъсната. при това, ако F'_x съществува и е непрекъсната в U , то f е диференцируема в x_0 и $f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.

Доказателство:

(Б.о.о.) $F'_y(x_0, y_0) > 0$ F'_y - непрекъсната \Rightarrow съществува V - околност на (x_0, y_0) , $V \subset$

$$(B) \quad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Същата конструкция около (x_1, y_1) ще даде непрекъснатост на f в x_1 (Общ случай)

g има локален условен екстремум върху $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F_1(x) = \dots = F_k(x) = 0\}$ в т. x_0 . Тогава съществуват $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ такива, че $\nabla g(x_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i(x_0)$.

$\Phi(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = g(x_1, \dots, x_n)$ - функция на Лагранж

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i F_i(x_1, \dots, x_n)$$

Стационарни точки на Φ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = 0, j \in \{1, \dots, n\} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) = -F_i(x) = 0, i \in \{1, \dots, k\} \end{cases}$$

Имаме $n+k$ уравнение и $n+k$ неизвестни, следователно имаме пълен шанс да решим системата. Надяваме се да имаме краен брой решения, но това не винаги е възможно. Неизвестните съответно са $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Доказателство: на Теоремата на Лагранж

Упътване: свеждаме към Теоремата на Ферма чрез Теоремата за неявните функции.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} (x_0) = k \quad (\text{Б.о.о.}) \quad \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} (x_0) \neq 0$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \text{Според Теоремата за неявните функции имаме, че:} \\ F_k(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Съществуват $\delta > 0, \varepsilon > 0$ такива, че съществува единствено (при това гладко) изоб-

ражение $f : \underbrace{B_\delta(x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)}_{n-k \text{-мерно}} \longrightarrow \underbrace{B_\varepsilon(x_1^0, \dots, x_k^0)}_{k \text{-мерно}}; \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$ такова, че:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{k+1}, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ F_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{за } \begin{cases} (x_1, \dots, x_k) \in B_\varepsilon(x_1^0, \dots, x_k^0); \\ (x_{k+1}, \dots, x_n) \in B_\delta(x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) \end{cases} \\ x_k = f_k(x_{k+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

Нека $V = B_\varepsilon(x_1^0, \dots, x_k^0) \times B_\delta(x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)$ - околност на x_0 , $V \subset U$.

$\varphi(x_{k+1}, \dots, x_n) = g(f_1(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, f_k(x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n)$

$\varphi : B_\delta(x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f_1(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, f_k(x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n) \in M$; g има условен екстремум в x_0 върху $M \Rightarrow \varphi$ има (безусловен) локален екстремум в $(x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)$.

Th. Ферма $\Rightarrow \nabla \varphi(x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) = \mathcal{O}$, т.е. $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+p}}(x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) = 0 \quad \forall p \in \{1, \dots, n-k\}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+p}}(x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_{k+p}}(x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) + \frac{\partial g}{\partial x_{k+p}}(x_0)$$