Записки по ДИС2 - Лекция 13

07.06.2023

Теорема за неявната функия. Условни екстремуми. Множители на Лагранж.

Теорема за неявната функция

$$F(x,y) = 0$$

Def. 1 Ако $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ такава, че $F(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in D$, казваме, че f е **неявна функция**, определена от F(x, y) = 0.

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{\Pi}\mathbf{pимеp:} & F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2, \quad R > 0, \quad F(x,y) = 0 \\ \hline & x^2 + y^2 = R^2 \\ \to y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R,R] \\ f(x) = \varepsilon(x) \sqrt{R^2 - x^2}, \quad \varepsilon(x) \in \{-1,1\} \end{array}$$

Нека F е гладка функция, $F(x_0, y_0) = 0$.

$$F(x,y) = F(x_0, y_0) + dF(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$$

$$F(x,y) = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|x - x_0, y - y_0\|)$$

$$z = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$$

$$\{(x, y, R(x, y))\} \cap \{z = 0\} \quad F(x, y) = 0$$

 $0 = F_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y'(x_0, y_0)(y - y_0) \leftarrow$ уравнение на допирателна към $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ в т. (x_0, y_0)

Тh. 1 Теорема за неявните функции

Нека U е отворено подмножество на \mathbb{R}^2 . $F:U\to\mathbb{R},\ F$ е непрекъсната. F_y' съществува u е непрекъсната в $U,\ (x_0,y_0)\in U,\ F(x_0,y_0)=0,\ F_y'(x_0,y_0)\neq 0$. Тогава съществуват $\varepsilon>0$ u $\delta>0$ такива, че:

- (a) Съществува единствена функция $f:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to (y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon)$ неявно зададена от уравнението F(x,y)=0 (т.е. F(x,f(x))=0 $\forall x\in (x_0-\delta,x_0+\delta)$).
- (б) Така определена f е непрекъсната. при това, ако F_x' съществува и е непрекъсната в U, то f е диференцируема в x_0 и $f'(x_0) = -\frac{F_x'(x_0,y_0)}{F_y'(x_0,y_0)}$.

Доказателство:

 $\overline{(\mathrm{B.o.o.})} \ F_y'(x_0,y_0) > 0$ F_y' - непрекъсната \Rightarrow съществува V - околност на $(x_0,y_0),\ V \subset V$

U такава, че $F'_{y}(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \in V$

- $\Rightarrow F(x_0, .)$ е строго растяща в околност $(y_0 \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ на y_0
- $\Rightarrow F(x_0, y_0 \varepsilon) < 0, \ F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \ (F(x_0, y_0) = 0)$
- \Rightarrow съществува $\delta > 0$ такова, че:
- (a) $[x_0 \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset V \subset U$
- (6) $F(x, y_0 \varepsilon) < 0 \ \forall x \in (x_0 \delta, x_0 + \delta)$
- (B) $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \ \forall x \in (x_0 \delta, x_0 + \delta)$

 $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to F(x_1, .)$ - строго растяща в $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$

 $F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x_1, y_0 + \varepsilon) > 0$ - непрекъсната; ползваме Теорема на Болцано Съществува единствено $y_1 \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ с $F(x_1, y_1) = 0$. Полагаме $f(x_1) = y_1$

 $\forall \varepsilon > 0$ (достатъчно малко)

 $\exists \delta>0$ такова, че за всяко $x\in (x_0-\delta,x_0+\delta)$ е в сила $f(x)\in (f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$ т.е. f е непрекъсната в x_0 .

$$x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ y_1 = f(x_1)$$

Същата конструкция около (x_1, y_1) ще даде непрекъснатост на f в x_1 (Общ случай)

Условни екстремуми

 $M \subset \mathbb{R}^n \ f : M \to \mathbb{R}^n$

Def. 2 Казваме, че $x_0 \in M$ е точка на **локален** условен минимум за f, ако съществува околност U на x_0 такава, че за всяка точка $x\in U\cap M$ да е в сила $f(x) \geq f(x_0)$.

Def. 3 Казваме, че $x_0 \in M$ е точка на **локален условен максимум** за f, ако съществува околност U на x_0 такава, че за всяка точка $x \in U \cap M$ да е в сила $f(x) \leq f(x_0)$.

Множители на Лагранж

Нека U - отворено подмножество на \mathbb{R}^n , $F:U\to\mathbb{R}^k$, F - гладка, $M=\{x\in\mathbb{R}^n:$ $F(x) = \mathcal{O}$.

Казваме, че
$$F_1, ..., F_k$$
 са независими в x_0 , ако матрицата:
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_0) & & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ & & & \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial F_k}{\partial x_2}(x_0) & & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$
 има пълен ранг (т.е. рангът ѝ е k).

Th. 2 Множители на Лагранж Нека $U \subset R^n,\ U$ - отворено, $k \leq n,\ g, F_1, F_2, ..., F_{:U \to \mathbb{R}}$ са гладки. Нека $x_0 \in U, \ F_1(x_0) = ... = F_k(x_0) = 0$ и $F_1, ..., F_k$ са независими в x_0 . Нека

g има локален условен екстремум върху $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F_1(x) = ... = F_k(x) = 0\}$ в т. x_0 . Тогава съществуват $\lambda_1,...,\lambda_n\in\mathbb{R}$ такива, че $\nabla g(x_0)=\sum \lambda_i \nabla f_i(x_0)$.

 $\Phi(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k)=g(x_1,...,x_n)$ - функция на Лагранж

$$\sum_{i=1} \lambda_i F_i(x_1, ..., x_n)$$

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \lambda_i F_i(x_1, ..., x_n)$$
 Стационарни точки на Φ :
$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial g}{\partial x_j}(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = 0, j \in \{1, ..., j\} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) = -F_i(x) = 0, \ i \in \{1, ..., k\} \end{cases}$$

наме $n\!+\!k$ уравнение и $n\!+\!k$ неизвестни, следователно имаме пълен шанс да решим системата. Надяваме се да имаме краен брой решения, но това не винаги е възможно. Неизвестните съответно са $x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_k$.

Доказателство: на Теоремата на Лагранж

Упътване: свеждаме към Tеоремата на Φ ерма чрез Tеоремата за неявните

$$rg\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}(x_0) = k \quad \text{(B.o.o.)} \ det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}(x_0) \neq 0$$

Съществуват $\delta > 0, \ \varepsilon > 0$ такива, че съществува единствено(при това гладко) изоб-

ражение
$$f: B_{\delta}(x_{k+1}^0,...,x_n^0) \longrightarrow B_{\varepsilon}(x_1^0,...,x_k^0); \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$$
 такова, че:
$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{k+1},...,x_n) \\ \dots & \Leftrightarrow \end{cases} \begin{cases} F_1(x_1,...,x_n) = 0 \\ \dots & \Leftrightarrow \end{cases} \qquad \leftarrow \text{ за } \begin{pmatrix} x_1,...,x_k \end{pmatrix} \in B_{\varepsilon}(x_1^0,...,x_k^0); \\ x_k = f_k(x_{k+1},...,x_n) & F_k(x_1,...,x_n) = 0 \end{cases} \qquad \leftarrow \text{ за } \begin{pmatrix} x_1,...,x_k \end{pmatrix} \in B_{\varepsilon}(x_1^0,...,x_k^0); \\ (x_{k+1},...,x_n) \in B_{\delta}(x_{k+1}^0,...,x_n^0) & \text{ околност на } x_0, V \subset U. \end{cases}$$
 Нека $V = B_{\varepsilon}(x_1^0,...,x_k^0) \times B_{\delta}(x_{k+1}^0,...,x_n^0) - \text{ околност на } x_0, V \subset U.$ $\varphi(x_{k+1},...,x_n) = g(f_1(x_{k+1},...,x_n),...,f_k(x_{k+1},...,x_n),x_{k+1},...,x_n)$ $\varphi: B_{\delta}(x_{k+1}^0,...,x_n^0) \longrightarrow \mathbb{R}$ $(f_1(x_{k+1},...,x_n),...,f_k(x_{k+1},...,x_n),x_{k+1},...,x_n) \in M; g$ има условен екстремум в x_0 върху $M \Rightarrow \varphi$ има (безусловен) локален екстремум в $(x_{k+1}^0,...,x_n^0)$.

Th. Φ epma $\Rightarrow \nabla \varphi(x_{k+1}^0, ..., x_n^0) = \mathcal{O}$, t.e. $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+p}}(x_{k+p}^0, ..., x_n^0) = 0 \ \forall p \in \{1, ..., n-k\}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+p}}(x_{k+1}^0,...,x_n^0) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0).\frac{\partial f_j}{\partial x_{k+p}}(x_{k+1}^0,...,x_n^0) + \frac{\partial g}{\partial x_{k+p}}(x_0)$$