Записки по ДИС2 - Лекция 3

04.05.2023

Свойства на определените интеграли. Теорема на Лайбниц-Нютон. Теорема за средните стойности.

Свойства на определените интеграли:
1) Линейност
2) Адитивност
3) Позитивност
4) Теорема за средните стойности

$f, g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ интегруеми
$g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$
$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$
Тогава $\quad m \int_a^b \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$

Lemma 1 *Нека $f, g : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ са интегруеми. Тогава $f \circ g$ е интегруема в интервала $[a,\ b]$.*

Доказателство: Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ и $\epsilon > 0$. Също така $x,\ y \in [x_{i-1},\ x_i]$. Разглеждаме разликата между сумите на Дарбу на композицията на f и g:

$$S_{fg}(\tau) - s_{fg}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \omega(fg; [x_{i-1},\ x_i])(x_i - x_{i-1})$$

. ... ■

Следствие 1 ***от Теоремата за средните стойности***: *Нека $f : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ е непрекъсната и $g : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ е интегруема, като g е неотрицателна в интервала $[a,\ b]$. Тогава съществува $\xi \in [a,\ b]$, за което $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.*

Доказателство: (Iсл.) Нека ...
(Iсл.)........ ■

....

Фундаментална теорема на анализа

Твърдение 1 *$F : \Delta \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, $\quad x \in \Delta$,*
$[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset \Delta \Rightarrow f$ - интегруема в $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \Rightarrow f$ - ограничена в $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^y f(t)dt, \quad y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$$

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_{\min\{x,y\}}^{\max\{x,y\}} |f(t)|dt \leq M|x-y|$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to x} F(y) = F(x)$$

Ако x е десен кран на Δ, то разглеждаме $[x-\varepsilon, x] \subset \Delta$ ...
Ако x е десен кран на Δ, то разглеждаме $[x, x+\varepsilon] \subset \Delta$ ...

Забележка $\quad \int_a^b 1.dt = b - a, \quad a \leq b$

Th. 1 ***Нютон-Лайбниц***
$f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ - интервал, $a \in \Delta, f$ е интегруема в $[a, x]$ за всяко $x \in \Delta; F(x)$ ще нарираме примитивна на $f(x)$, където $F(x) := \int_a^x f(t)dt$; Нека допълнително f е непрекъсната в $x \in \Delta$. Тогава F е диференцируема в x и $F'(x) = f(x)$.

Доказателство:

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} - f(x)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt\right| = \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt\right|$$

$$h > 0 \to \left|\frac{1}{h}\int_x^{h+x} (f(t) - f(x))dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} \varepsilon\ dt = \varepsilon$$

$$h < 0 \to \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} \varepsilon\ dt = \varepsilon\frac{|h|}{|h|} = \varepsilon$$

$$\underset{f\text{ - непр. в } x}{\varepsilon > 0} \quad \to \quad \exists \delta > 0 \forall t \in \Delta, |t - x| < \delta : |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

$$|h| < \delta, \quad x + h \in \Delta$$

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

■

Следствие 2 *(Непрекъснатите функции имат примитивна)*
Нека $f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ - интервал, f - непрекъсната, $a \in \Delta$. Тогава $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е диференцируема в Δ и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in \Delta$.

Следствие 3 *(Формула на Лайбниц-Нютон)*
Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *е непрекъсната. Нека* G *е произволна примитивна за* f *в* $[a, b]$.
Тогава $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) =: G(x)\Big|_a^b$

<ins>Доказателство:</ins>
$F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ примитивна за f в $[a, b]$
$\Rightarrow F = G + C$, C - константа.
$0 = F(a) = G(a) + C \Rightarrow C = -G(a) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) + C = G(b) - G(a).$

$\square$

Th. 2 ***Смяна на променливите в определените интеграли***
$\dots$