

# Записки по ДИС2 КН2 - Лекция 1

23.02.2023

## Малки и големи суми на Дарбу. Сума на Риман. Определен Интеграл на Риман. Критерий за интегруемост по Риман.

Средно аритметично  $A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$

$$A(f) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \text{ Средно аритметично на функция в интервал}$$

Нека функцията  $f$  е дефинирана в интервала  $[a, b]$ .

$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b : \{x_i\}$  - разбиване на  $[a, b]$ ;

$d(\tau) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$  - диаметър на разбиването;

$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n\}$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in [1, n]$  - дялящи/представителни/контролни точки.

**Сума на Риман**

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$$

**Суми на Дарбу**

$$m_i := \inf \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i := \sup \{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$\text{Малка сума на Дарбу } s_f(\tau) := \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\text{Голяма сума на Дарбу } S_f(\tau) := \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

**Лема 1** Нека  $\tau^*$ ,  $\tau$  са подразбивания на интервала  $[a, b]$ , т. че  $\tau^* \geq \tau$ . (тогава ще казваме, че  $\tau^*$  е по-фино от  $\tau$ ). Ако  $\tau^* \geq \tau$ , то  $S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau)$  и  $s_f(\tau^*) \geq s_f(\tau)$ .

**Доказателство:** (Б.о.о.)  $\tau^*$  се получава от  $\tau$  с прибавянето на една точка. Нека  $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  и  $\tau^* : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x^* < x_i < \dots < x_n = b$

$$\begin{aligned}
S_f(\tau) - S_f(\tau^*) &= \\
&\sum_{j=1}^n \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x_j - x_{j-1}) - \\
&\left( \sum_{j=1}^{i-1} \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x_j - x_{j-1}) + \sup_{[x_{i-1}, x^*]} f(x^* - x_{i-1}) + \right. \\
&\left. \sup_{[x^*, x_i]} f(x_i - x^*) + \sum_{j=i+1}^n \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f(x_j - x_{j-1}) \right) = \\
&\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x_i - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1}, x^*]} f(x^* - x_{i-1}) - \sup_{[x^*, x_{i-1}]} f(x_i - x^*) \geq \\
&\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x_i - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x^* - x_{i-1}) - \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x_i - x^*) = 0
\end{aligned}$$

■

Аналогично се пресмята за малките суми на Дарбу .....

**Лемма 2** Нека  $\tau_1, \tau_2$  са произволни подразбивания на  $[a, b]$ .

Тогава  $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2)$ .

**Доказателство:** Нека  $\tau^*$  е по-fino от  $\tau_1$  и от  $\tau_2$ . Очевидно  $\tau^*$  съществува и може да се получи като обединение на точките от  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . От Лемма 1 имаме:

$$\begin{aligned}
s_f(\tau_1) &\leq s_f(\tau^*); \\
S_f(\tau^*) &\leq S_f(\tau_2).
\end{aligned}$$

$$[s_f(\tau_1), S_f(\tau_1)] \cap [s_f(\tau_2), S_f(\tau_2)] \neq \emptyset \quad \forall \tau_1, \tau_2 - \text{подразбивания}$$

■

Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена.

$$\int_a^b f(x) dx := \inf \{ S_f(\tau) : \tau \text{ подразбиване на } [a, b] \} \quad \leftarrow \text{добре дефинирано}$$

$\nwarrow$  Горен интеграл

$$\int_a^b f(x) dx := \sup \{ s_f(\tau) : \tau \text{ подразбиване на } [a, b] \} \quad \leftarrow \text{добре дефинирано}$$

$\nwarrow$  Долен интеграл

От **Лемма 2** имаме:  $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2) \quad \forall \tau_1, \tau_2$  - подразбивания на  $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq S_f(\tau_2) \quad \forall \tau_2 \text{ - подразбиване на } [a, b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$$

*Интегрируемост по Риман:*

**Def. 1** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена. Казваме, че  $f$  е интегрируема по Риман,

ако  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ , което се нарича **риманов интеграл** на  $f$  в  $[a, b]$  и

се означава с  $\int_a^b f$  или  $\int_a^b f(x) dx$ ,  $\int_a^b f(w) dw$  etc.

Пример: | Функция на Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in \mathbb{J} \cap [0, 1] \\ 1, & \text{ако } x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad s_f(\tau) = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0 \quad S_f(\tau) = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1$$

Интегрируемост чрез подхода на Дарбу:

**Th. 1 (Критерий за интегрируемост по Риман)** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена. Твърдим, че  $f$  е интегрируема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко епсилон по-голямо от нула съществуват подразбивания  $\tau_1, \tau_2$  на  $[a, b]$ , за които  $S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \varepsilon$ . Еквивалентно, за всяко епсилон по-голямо от нула съществува подразбиване на  $[a, b]$ , за което  $S_f(\tau) - s_f(\tau) < \varepsilon$ .

**Доказателство:**

( $\Rightarrow$ ) Нека  $\varepsilon > 0$  е произволно. Имаме:

$$\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} > \int_a^{\bar{b}} f \Rightarrow \exists \tau_1 - \text{подразбиване на } [a, b], S_f(\tau_1) < \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^{\underline{b}} f - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^{\underline{b}} f \Rightarrow \exists \tau_2 - \text{подразбиване на } [a, b], s_f(\tau_2) > \int_a^{\underline{b}} f - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \left( \int_a^{\bar{b}} f + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left( \int_a^{\underline{b}} f - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

( $\Leftarrow$ ) Доказваме контрапозицията:

Имаме, че функцията не е интегрируема, т.е.  $\int_a^{\bar{b}} f \geq \int_a^{\underline{b}} f$ .

$\Rightarrow \forall \tau_1, \tau_2 : S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) \geq \int_a^{\bar{b}} f - \int_a^{\underline{b}} f > 0$  - готово.

( $\Uparrow$ ) Достатъчно е да положим  $\tau_1 := \tau$  и  $\tau_2 := \tau$

( $\Downarrow$ ) Нека  $\varepsilon > 0$ . Имаме разбиванията  $\tau_1, \tau_2$ , за които  $S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \varepsilon$ . Нека  $\tau$  е разбиване по-фино от  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , т.е.  $\tau \geq \tau_1, \tau \geq \tau_2$

$\Rightarrow S_f(\tau) - s_f(\tau) \leq S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \varepsilon$  ■

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - ограничена;  $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$\omega(f; [a, b]) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b] \}$  - осцилация

$$S_f(\tau) - s_f(\tau) = \sum_{i=1}^n \underbrace{[\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f]}_{\text{осцилация на } f} (x_i - x_{i-1})$$

**Lemma:** |  $\omega(f; [a, b]) = \sup_{[a, b]} f - \inf_{[a, b]} f$

Доказателство:  $x, y \in [a, b] \rightarrow f(x) \leq \sup_{[a, b]} f, \quad f(y) \geq \inf_{[a, b]} f$

$$|f(x) - f(y)| \longrightarrow \begin{cases} f(x) - f(y) \leq \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f \\ f(y) - f(x) \leq \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f \end{cases} \Rightarrow \omega(f; [a, b]) \leq \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$$

$$\varepsilon > 0 \quad \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f - \varepsilon$$

$$x_0 \in [a, b], \quad f(x_0) > \sup_{[a,b]} f - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$y_0 \in [a, b], \quad f(y_0) < \inf_{[a,b]} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow f(x_0) - f(y_0) > \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \tau \text{ - подразбиване на } [a, b] : \sum_{i=1}^n \omega(f; [a, b])(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon \quad \blacksquare$$

**Def. 2 Осцилация на функция:** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена. Осцилация на  $f$  в  $[a, b]$  дефинираме като:

$$\omega(f; [a, b]) := \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b]\}.$$

**Lemma 3** Осцилацията на функцията  $f$  в даден интервал е равна на разликата между супремума и инфимума на функцията в дадения интервал.

$$\omega(f; [a, b]) = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$$

**Твърдение 1** Непрекъснатите функции са интегрируеми.

**Доказателство:** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  - непрекъсната. От Теорема на Вайерщрас следва, че  $f$  е ограничена.

Теорема на Кантор  $\Rightarrow \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$  Взимаме  $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , за което

$$d(\tau) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, \dots, n\}\} < \delta,$$

Тогава имаме:

$$0 \leq S_f(\tau) - s_f(\tau) = \sum_{i=1}^n \omega(f; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$$

След граничен преход получаваме:

$$\lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n w_i(f) \Delta x_i = 0 \text{ и следователно } f \text{ е интегрируема в } [a, b]. \quad \blacksquare$$

**Твърдение 2** Нека  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  е ограничена и има краен брой точки на прекъсване. Тогава  $f$  е интегрируема.

Нека  $y_1, y_2, \dots, y_k$  са точките на прекъсване на  $f$ .  $\boxed{\eta > 0}$

$C = [a, b] \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k (y_i - \eta, y_i + \eta) \right) \leftarrow$  обединение на краен брой интервали и  $f$  е непрекъснато върху  $C$

$$\text{Кантор} \Rightarrow \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in C, |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

$$\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \text{ такава, че } [x_{i-1}, x_i] \subset C \rightarrow x_i - x_{i-1} < \delta$$

$$[a, b] \cap [x_{i-1}, x_i] = [y_j - \eta, y_j + \eta] \geq 0 \text{ за някое } j \in \{1, \dots, k\}$$

$$M = \sup_{[a,b]} f, \quad m = \inf_{[a,b]} f$$

$$S_f(\tau) - s_f(\tau) = \sum_{i=1}^n \omega(f; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) = \sum_{[x_{i-1}, x_i] \subset C} \omega(f; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) +$$

$$\sum_{j=1}^k \omega(f; \underbrace{[y_j - \eta, y_j + \eta]}_{\leq M-m}) (\cap [a, b]) \cdot 2\eta \leq \frac{\eta}{4(b-a)} \sum_{\substack{[x_{i-1}, x_i] \subset C \\ \leq (b-a)}} (x_i - x_{i-1}) + (M - m) \cdot 2\eta \cdot k$$

$$S_f(\tau) - s_f(\tau) \leq \frac{\varepsilon}{4(b-a)} (b-a) + (M - m) 2k \cdot \eta < \varepsilon$$

$$0 < \eta < \frac{\varepsilon}{4k(M - m)} \quad \blacksquare$$

**Твърдение 3** *Монотонните функции са интегрируеми.*

$$\text{Нека } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ (б.о.о.) растяща} \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow f - \text{ограничена}$$

$$\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$$

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1}), \quad \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i)$$

$$S - f(\tau) - s_f(\tau) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{d(\tau)}$$

$$\leq d(\tau) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))}_{(f(b) - f(a))} = d(\tau) \cdot (f(b) - f(a))$$

$$\boxed{\varepsilon > 0} \rightarrow \text{Избираме } \tau \text{ с } d(\tau) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} (f(b) - f(a)) < \varepsilon \quad \blacksquare$$