

Записки по ДИС2 - Лекция 11

27.04.2023

Функции (и изображения) на повече от една променливи.

Функция на n променливи: $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad f(x) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad (n, k \in \mathbb{N}) \quad f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \dots \\ f_k(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad x \in D$$

f_1, f_2, \dots, f_k - координатни функции на изображението f Точка на съгъстяване на f :

$\forall U$ - околност на $x_0 : (U \cap D) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$ или $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset D \setminus \{x_0\}, x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}^k$$

Коши $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D, \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - l\| < \epsilon$

Хайне $\forall \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset D \setminus \{x_0\}, x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0 : f(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} l$

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n \quad f$ е непрекъсната в x_0 , ако:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D, \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon \Leftrightarrow \forall \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset D, x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0 : f(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x_0)$$

Пример

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \neq \vec{0} = (0, 0) \\ 0, & \text{ако } x = (0, 0) \end{cases}$$

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_2 = kx_1, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$f(t, kt) = \frac{t \cdot kt}{t^2 + (kt)^2} = \frac{k}{1 + k^2} \quad t \neq 0$$

Основни теореми за непрекъснати функции (и изображения)

Th. 1 Вайерштрас: Непрекъснат образ на компактен е компактен.

$$\begin{cases} f : K \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad K \subset \mathbb{R}^n, K - \text{компакт} \\ f \text{ е непрекъсната} \Rightarrow f(K) = \{f(x) : x \in K\} \text{ е компактно подмножество на } \mathbb{R}^k \end{cases}$$

Коментар: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ - непрекъсната $\Rightarrow f([a, b])$ - компактен в $\mathbb{R}^1 \rightarrow f([a, b])$ - ограничено в \mathbb{R} , т.е. f е ограничена
 $f([a, b])$ - затворено в \mathbb{R}^1 (значи $\sup f([a, b])$ и $\inf f([a, b])$ са от $f([a, b])$)

Доказателство: