

Записки по ДИС2 КН2 - Лекция 2

02.03.2023

Класове интегрируеми функции.

Твърдение 1 Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничена и имаме произволно разбиване на интервала, в който е дефинирана. $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Тогава $s_f(\tau) = \inf\{\sigma_f(\tau, \xi) : \xi - \text{представителна точка}\}; S_f(\tau) = \sup\{\sigma_f(\tau, \xi) : \xi - \text{представителна точка}\}.$

Доказателство:

Def. 1 Нека $d(\tau) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, \dots, n\}\}$ и $\tau : a = x_0 < \dots < x_n = b$. Казваме, че сумите на Риман за $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ имат граница $I \in \mathbb{R}$, когато $d(\tau)$ клони към 0, ако за всяко $\varepsilon \geq 0$ съществува $\delta \geq 0$, такова че за всеки избор на подразбиване τ на $[a, b]$ с $d(\tau) \leq \delta$ и за всеки избор на представителна точка е в сила $|\sigma_f(\tau; \xi) - I| \leq \varepsilon$.

Lemma 1 Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ е подразбиване на $[a, b]$. Нека $\tau^* \geq \tau$, τ^* се получава от τ чрез прибавянето на k точки. Тогава $0 \leq S_f(f) - S_f(\tau^*) \leq \dots$. Нека $m := \inf_{[a, b]} f$ и $M := \sup_{[a, b]} f$

Th. 1 Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и нека съществува $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_f(\tau; \xi) = I$. Тогава f е ограничена, f е интегрируема по Риман и $\int_a^b f = I$.

Доказателство: Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ и $\epsilon > 0$ е достатъчно голямо. Нека $\epsilon = 3 > 0$ е фиксирано, откъдето следва:

$\exists \delta > 0 \forall \tau, d(\tau) < \delta \forall \xi - \tau : |\sigma_f(\tau, \xi) - I| < 3$.

Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ е такова, че $d(\tau) < \delta$. Тогава за всеки избор на $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1, \dots, n\}$ е в сила

$$I - 3 < \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + 3$$

Достатъчно е да докажем, че f е ограничена в $[x_{i-1}, x_i]$.

Фиксираме $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j \neq i$.

.....

Th. 2 Ако $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е интегрируема по Риман (следователно и f е ограничена), то съществува $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_f(\tau; \xi) = \int_a^b f$.

Основни свойства на интеграла

(I) Линеиност

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируеми $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, \lambda f$ са интегрируеми и

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$$

$$\sigma_{f+g}(\tau, \xi) = \sigma_f(\tau, \xi) + \sigma_g(\tau, \xi)$$

$$\sigma_{\lambda f}(\tau, \xi) = \lambda \sigma_f(\tau, \xi)$$

$$\boxed{\epsilon > 0}, \lim_{d(\tau) \rightarrow 0} \sigma_f(\tau, \xi) = \int_a^b f \longrightarrow \exists \delta_1 > 0 \forall \tau, d(\tau) < \delta_1 \forall \xi - \text{представителна точка за } \tau :$$

$$|\sigma_f(\tau, \xi) - \int_a^b f| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$S_g \rightarrow \exists \delta_2 > 0 \forall \tau, d(\tau) < \delta_2 \forall \xi - \text{представителна точка за } \tau : |\sigma_g(\tau, \xi) - \int_a^b g| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\delta := \min \delta_1, \delta_2 > 0 \quad \tau - \text{подразбиване}, d(\tau) < \delta \quad \xi \text{ представителна точка за } \tau$$

$$\Rightarrow \left| \sigma_{f+g}(\tau, \xi) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| = \left| \left(\sigma_f(\tau, \xi) - \int_a^b f \right) + \left(\sigma_g(\tau, \xi) - \int_a^b g \right) \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(II) Адитивност $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f - интегрируема, $a < c < b$

Тогава $f|_{[a, c]}, f|_{[c, b]}$ са интегрируеми и $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

f - интегрируема \Rightarrow Съществува τ - подразбиване на $[a, b]$, $S_f(\tau) - s_f(\tau) < \epsilon$

$$\boxed{\epsilon > 0}$$

$\tau^* = \tau \cup \{c\} \Rightarrow S_f(\tau^*) - s_f(\tau^*) < \epsilon$, където $\tau^* = \tau_1 \cup \tau_2$, τ_1 - подразбиване на $[a, c]$, τ_2 - подразбиване на $[c, b]$

$$S_f(\tau^*) = S_f(\tau_1) + S_f(\tau_2), s_f(\tau^*) = s_f(\tau_1) + s_f(\tau_2)$$

$$S - f(\tau^*) - s_f(\tau^*) = [S_f(\tau_1) - s_f(\tau_1)] + [S_f(\tau_2) - s_f(\tau_2)]$$

τ_n - подразбиване на $[a, b]$, съдържащо c като деляща точка, ξ_n - представителна точка за τ_n , $d(\tau_n) \rightarrow 0$

$\tau_n = \tau_n' \cup \tau_n''$, τ_n' - подразбиване на $[a, c]$, τ_n'' - подразбиване на $[c, b]$

$$\sigma_f(\tau_n, \xi_n) = \sigma_f(\tau_n', \xi_n') + \sigma_f(\tau_n'', \xi_n'')$$

$$\downarrow n \rightarrow \infty \quad \downarrow n \rightarrow \infty \quad \downarrow n \rightarrow \infty$$

$$\int_a^b f \quad \int_a^c f \quad \int_c^b f$$

Уговорка: Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ - интервал, $a, b \in \Delta$, $a < b$, тогава:

$$\int_a^a f := 0 \quad \int_a^b := - \int_b^a$$