

Записки по ДИС2 - Лекция 3

04.05.2023

Свойства на определените интеграли. Теорема на Лайбниц-Нютон. Теорема за средните стойности.

Свойства на определените интеграли:

- 1) Линейност
- 2) Адитивност
- 3) Позитивност
- 4) Теорема за средните стойности

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируеми

$g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$

$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$

Тогава $m \int_a^b \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$

Lemma 1 Нека $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ са интегрируеми. Тогава $f \circ g$ е интегрируема в интервала $[a, b]$.

Доказателство: Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ и $\epsilon > 0$. Също така $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$. Разглеждаме разликата между сумите на Дарбу на композицията на f и g :

$$S_{fg}(\tau) - s_{fg}(\tau) = \sum_{i=1}^n \omega(fg; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1})$$

..... ■

Следствие 1 от Теоремата за средните стойности: Нека $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ е непрекъснатата и $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ е интегрируема, като g е неотрицателна в интервала $[a, b]$. Тогава съществува $\xi \in [a, b]$, за което $\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$.

Доказателство: (Исл.) Нека ...

(Исл.)..... ■

.....

Фундаментална теорема на анализа

Твърдение 1 $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната, $x \in \Delta$,

$[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset \Delta \Rightarrow f$ - интегрируема в $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \Rightarrow f$ - ограничена в $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt, \quad y \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$$

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_{\min\{x,y\}}^{\max\{x,y\}} |f(t)|dt \leq M|x - y|$$

$$\Rightarrow \lim_{y \rightarrow x} F(y) = F(x)$$

Ако x е десен край на Δ , то разглеждаме $[x - \varepsilon, x] \subset \Delta \dots$

Ако x е десен край на Δ , то разглеждаме $[x, x + \varepsilon] \subset \Delta \dots$

Забележка $\int_a^b 1 \cdot dt = b - a, \quad a \leq b$

Th. 1 Нютон-Лайбниц

$f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ - интервал, $a \in \Delta$, f е интегрируема в $[a, x]$ за всяко $x \in \Delta$; $F(x)$ ще наричаме примитивна на $f(x)$, където $F(x) := \int_a^x f(t)dt$; Нека допълнително f е непрекъсната в $x \in \Delta$. Тогава F е диференцируема в x и $F'(x) = f(x)$.

Доказателство:

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} - f(x) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dt \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h > 0 &\rightarrow \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} \varepsilon dt = \varepsilon \\ h < 0 &\rightarrow \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x+h}^x |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{|h|} \int_{x+h}^x \varepsilon dt = \varepsilon \frac{|h|}{|h|} = \varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon > 0 &\rightarrow \exists \delta > 0 \forall t \in \Delta, |t - x| < \delta : |f(t) - f(x)| < \varepsilon \\ f \text{ - непр. в } x & \end{aligned}$$

$$|h| < \delta, \quad x+h \in \Delta$$

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

■

Следствие 2 (Непрекъснатите функции имат примитивна)

Нека $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ - интервал, f - непрекъсната, $a \in \Delta$. Тогава $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е диференцируема в Δ и $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in \Delta$.

Следствие 3 (Формула на Лайбниц-Нютон)

Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната. Нека G е произволна примитивна за f в $[a, b]$.

Тогава $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) =: G(x) \Big|_a^b$

Доказателство:

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ примитивна за f в $[a, b]$

$\Rightarrow F = G + C$, C - константа.

$0 = F(a) = G(a) + C \Rightarrow C = -G(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) + C = G(b) - G(a).$

□

Th. 2 *Смяна на променливите в определените интеграли*

...