

Записки по ДИС2 - Лекция 12

11.05.2023

Диференцируемост. Частни производни. Градиент. Производна по направление. Гладки функции.

Геометрична представа

Производната е локална линейна апроксимация на функцията.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x; x_0)$$

$$\frac{R(x; x_0)}{\|x - x_0\|} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

.....

Диференцируемост

Def. 1 U - отворено множество в \mathbb{R}^n , $x_0 \in U$ $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

Казваме, че f е диференцируема в x_0 , ако съществува линейен оператор $\partial f(x_0)$ (нарича се диференциал на f в т. x_0) такъв, че

$$f(x) = f(x_0) + \partial f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \text{ или}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \partial f(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0)h + o(\|h\|) \quad \text{или} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)(h)}{\|h\|} = 0$$

$$df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_2 = (0, 1, \dots, 0)$$

.....

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-та позиция}}{1}, 0, \dots, 0)$$

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

$$df(x_0)(h) = df(x_0) \left(\sum_{i=1}^n h_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n h_i \cdot df(x_0)(e_i) = \langle (df(x_0)(e_1), df(x_0)(e_2), \dots, df(x_0)(e_n)), h \rangle$$

Частни производни

Def. 2 Частна производна

Нека $\{x_0 + \lambda e_i : \lambda \in \mathbb{R}\}$ - права през x_0 , успоредна на e_i . $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0)}{\lambda}$
ще наричаме частна производна на f в т. x_0 по x_i .

Пример: | : Частна производна на f в т. x_0 по x_1 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0 + \lambda, x_2^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\lambda}, \text{ където точката } x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0).$$

Твърдение 1 Ако f е диференцируема в x_0 , то $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ съществува за всяко $i \in \{1, \dots, n\}$. При това $df(x_0)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

Доказателство:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0) - df(x_0)(\lambda e_i) + df(x_0)(\lambda e_i)}{\lambda} =$$
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0) - df(x_0)(\lambda e_i)}{\|\lambda e_i\|} \cdot \text{sgn}(\lambda) + df(x_0)(e_i) \right] = 0 + df(x_0)(e_i)$$

□

Градиент

Def. 3 Градиент

$$\text{grad}f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right), // \text{алтернативно ще се отбелязва с } \nabla$$

$$df(x_0)(h) = \langle \text{grad}f(x_0), h \rangle$$

Твърдение 2 Диференцируемите функции са непрекъснати

$U \subset \mathbb{R}^n$ - отворено множество; нека $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ и f е диференцируема в $x_0 \in U$.
Тогава f е непрекъсната в x_0 .

Доказателство:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \cdot \|x - x_0\| + f(x_0)$$
$$= f(x_0) + 0 + 0$$

(Линейните оператори в \mathbb{R}^n са непрекъснати)

Производна по направление

$U \subset \mathbb{R}^n, U$ – отворено, $x_0 \in U, f : U \rightarrow \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0 + \lambda l : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$\{\lambda \in \mathbb{R} : x_0 + \lambda l \in U\}$ – околност на 0

$B_\delta(x_0) \subset U \quad x_0 + \lambda l \in B_\delta(x_0) \Leftrightarrow \|\lambda l\| < \delta \Leftrightarrow |\lambda| \cdot \|l\| < \delta$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l} := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0)}{\lambda} \quad \longleftarrow \quad \text{производна на } f \text{ в т. } x_0 \text{ по направление } l$$

Твърдение 3 Ако f е диференцируема в x_0 , то f има производна в x_0 по всяко направление. При това

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = df(x_0)(l) = \langle \nabla f(x_0), l \rangle$$

Забележка: със символа ∇ ще се отбелязва градиент на функция.

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0)}{\lambda} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0) - df(x_0)(\lambda l) + df(x_0)(\lambda l)}{\lambda} = \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0) - \lambda df(x_0)(l)}{\lambda} + \frac{\lambda df(x_0)(l)}{\lambda} \right] &= \\ df(x_0)(l) + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0) - df(x_0)(\lambda l)}{\|\lambda l\|} \cdot \|l\| \cdot \text{sgn}(\lambda) &= df(x_0)(l) \end{aligned}$$

Следствие:

$$\max \frac{\partial f}{\partial l}(x_0) : \|l\| = 1 = \|\text{grad} f(x_0)\| \text{ и се достига за } l = \frac{\text{grad} f(x_0)}{\|\text{grad} f(x_0)\|}$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial l}(x_0) \right| = |\langle \text{grad} f(x_0), l \rangle| \leq \|\text{grad} f(x_0)\| \cdot \|l\|$$

$$\min \frac{\partial f}{\partial l}(x_0) : \|l\| = 1 = -\|\text{grad} f(x_0)\| \text{ и се достига за } l = -\frac{\text{grad} f(x_0)}{\|\text{grad} f(x_0)\|}$$

Th. 1 U – отворено множество в \mathbb{R}^n и $f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in U, \quad i \in \{1, \dots, n\},$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ съществуват в U и са непрекъснати в x_0 . Тогава f е диференцируема в x_0 .

Def. 4 Нека U е отворено множество в $\mathbb{R}^n, f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Тогава f се нарича **гладка**

($f \in C^1(U, \mathbb{R})$), ако $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ съществуват и са непрекъснати в U за всяко $i \in \{1, \dots, n\}$

Следствие: Гладките функции са диференцируеми

$\delta > 0, B_\delta(x_0) \in U, \quad h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (f(x_0 + h_1 e_1) - f(x_0)) + f(x_0 + h_1) \cdot$$