Записки по ДИС2 - Лекция 10

27.04.2023

Функции на няколко променливи.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n = &\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, ..., n\}\} \\ & x \in \mathbb{R} \\ \\ & x = (x_1, x_2, ..., x_n) \\ & y = (y_1, y_2, ..., y_n) \\ & x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \\ & x \in \mathbb{R} \\ & \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) \\ & \mathcal{O} = (0, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

Def. 1 *Норма*
$\|.\| : \mathbb{R}^n \to [a, +\infty)$ е норма в $\mathbb{R}^n$, ако са изпълнени следните условия:
1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathcal{O}$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (неравенство на триъгълника)

$\|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$

Def. 2 *Евклидова норма*
$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *- евклидова норма в $\mathbb{R}^\ltimes$*
$d(x, y) = \|y - x\|$

Def. 3 *Скаларно произведение*
$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \to \|x\| = \sqrt{\langle x, y \rangle}$

Свойство на скаларното произведение: ***Неравенство на Коши-Буняковски-Шварц***

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|.\|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Алтернативен запис на неравеството е:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle =$
$\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2.\|y\|^2$
$(2\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x|^2.\|y\|^2 \leq 0$
$(\langle x, y\rangle)^2 \leq \|x\|^2.\|y\|^2$

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle\rangle nnmk$