Записки по ДИС2 КН2 - Лекция 1

23.02.2023

Малки и големи суми на Дарбу. Сума на Риман. Определен Интеграл на Риман. Критерий за интегруемост по Риман.

Средно аритметично $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$

$A(f) = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ Средно аритметично на функция в интервал

Нека функцията f е дефинирана в интервала $[a, b]$.
$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b : \{x_i\}$ - разбиване на $[a, b]$;
$d(\tau) = \underset{1\leq i\leq n}{max}(x_i - x_{i-1})$ - диаметър на разбиването;
$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in [1, n]$ - делящи/представителни/контролни точки.

Сума на Риман

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Суми на Дарбу

$m_i := inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
$M_i := sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Малка сума на Дарбу $s_f(\tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$

Голяма сума на Дарбу $S_f(\tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Lemma 1 *Нека τ^*, τ са подразбивания на интервала $[a, b]$, т. че $\tau^* \geq \tau$. (тогава ще казваме, че τ^* е по-фино от τ). Ако $\tau^* \geq \tau$, то $S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau)$ и $s_f(\tau^*) \geq s_f(\tau)$.*

Доказателство: (Б.о.о.) τ^* се получава от τ с прибавянето на една точка. Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и $\tau^* : a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x^* < x_i < ... < x_n = b$

$$
\begin{aligned}
&S_f(\tau) - S_f(\tau^*) = \\
&\sum_{j=1}^{n} \underset{[x_{j-1},x_j]}{supf}\,(x_j - x_{j-1}) - \\
&\left(\sum_{j=1}^{i-1} \underset{[x_{j-1},x_j]}{supf}\,(x_j - x_{j-1}) + \underset{[x_{i-1},\,x^*]}{supf}\,(x^* - x_{i-1}) + \right. \\
&\left. \underset{[x^*,\,x_i]}{supf}\,(x_i - x^*) + \sum_{j=i+1}^{n} \underset{[x_{j-1},x_j]}{supf}\,(x_j - x_{j-1})\right) = \\
&\underset{[x_{i-1},\,x_i]}{supf}\,(x_i - x_{i-1}) - \underset{[x_{i-1},\,x^*]}{supf}\,(x_* - x_{i-1}) - \underset{[x^*,\,x_{i-1}]}{supf}\,(x_i - x_*) \geq \\
&\underset{[x_{i-1},\,x_i]}{supf}\,(x_i - x_{i-1}) - \underset{[x_{i-1},\,x_i]}{supf}\,(x^* - x_{i-1}) - \underset{[x_{i-1},\,x_i]}{supf}\,(x_i - x^*) = 0
\end{aligned}
$$

■

Аналогично се пресмята за малките суми на Дарбу ......

Lemma 2 *Нека $\tau_1 \tau_2$ са произволни подразбивания на $[a, b]$.*
Тогава $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2)$.

Доказателство: Нека τ^* е по-фино от τ_1 и от τ_2. Очевидно τ^* съществува и може да се получи като обединение на точките от τ_1 и τ_2. От Lemma 1 имаме:

$$
\begin{gathered}
s_f(\tau_1) \leq s_f(\tau^*); \\
S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau_2).
\end{gathered}
$$

$$
[s_f(\tau_1), S_f(\tau_1)] \cap [s_f(\tau_2), S_f(\tau_2)] \neq \varnothing \quad \forall \tau_1, \tau_2 - \text{ подразбивания}
$$

■

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена.

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S_f(\tau) : \tau \quad \text{подразбиване на } [a, b]\} \quad \leftarrow \text{добре дефинирано}$$

$\nwarrow$ *Горен интеграл*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s_f(\tau) : \tau \quad \text{подразбиване на } [a, b]\} \quad \leftarrow \text{добре дефинирано}$$

$\nwarrow$ *Долен интеграл*

От **Lemma 2** имаме: $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2) \quad \forall \tau_1, \tau_2$ - подразбивания на $[a, b]$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_f(\tau_2) \quad \forall \tau_2$ - подразбиване на $[a, b]$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$

Интегруемост по Риман:

Def. 1 *Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. Казваме, че f е интегруема по Риман, ако $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, което се нарича **риманов интеграл** на f в $[a,\ b]$ и се означава с $\int_a^b f$ или $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f(w)\,\mathrm{d}w$ etc.*

Пример: Функция на Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in \mathbb{J} \cap [0,1] \\ 1, & \text{ако } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \qquad s_f(\tau) = \sum_{i=1}^{n} 0.(x_i - x_{i-1}) = 0 \qquad S_f(\tau) = \sum_{i=1}^{n} 1.(x_i - x_{i-1}) = 1$$

Интегруемост чрез подхода на Дарбу:

Th. 1 ***(Критерий за интегруемост по Риман)*** *Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. Твърдим, че f е интегруема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко епсилон по-голямо от нула съществуват подразбивания $\tau_1 \tau_2$ на $[a,b]$, за които $S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \varepsilon$. Еквивалентно, за всяко епсилон по-голямо от нула съществува подразбиване на $[a,b]$, за което $S_f(\tau) - s_f(\tau) < \varepsilon$.*

Доказателство:
($\Rightarrow$) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Имаме:

$$\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} = \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} > \overline{\int_a^b} f \Rightarrow \exists \tau_1 \text{ - подразбиване на } [a,b],\ S_f(\tau_1) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f \Rightarrow \exists \tau_2 \text{ - подразбиване на } [a,b],\ s_f(\tau_2) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \left(\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Доказваме контрапозицията:

Имаме, че функцията не интегруема, т.е. $\overline{\int_a^b} f \geq \underline{\int_a^b} f$.

$\Rightarrow \forall \tau_1, \tau_2 : S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) \geq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f > 0$ - готово.

($\Uparrow$) Достатъчно е да положим $\tau_1 := \tau$ и $\tau_1 := \tau$

($\Downarrow$) Нека $\varepsilon > 0$. Имаме разбиванията τ_1, τ_2, за които $S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \varepsilon$. Нека τ е разбиване по-фино от τ_1 и τ_2, т.е. $\tau \geq \tau_1, \tau \geq \tau_2$

$\Rightarrow S_f(\tau) - s_f(\tau) \leq S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \varepsilon$ ■

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - ограничена; $\tau : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$

$\omega(f; [a,b]) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a,b]\}$ - осцилация

$$S_f(\tau) - s_f(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{[\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f\,]}_{\text{осцилация на } f}(x_i - x_{i-1})$$

Lemma: $\omega(f; [a,b]) = \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f$

Доказателство: $x, y \in [a,b] \to f(x) \leq \sup\limits_{[a,b]} f, \quad f(y) \geq \inf\limits_{[a,b]} f$

$$|f(x)-f(y)| \longrightarrow \begin{cases} f(x)-f(y) \le \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f \\ f(y)-f(x) \le \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f \end{cases} \Rightarrow \omega(f;[a,b]) \le \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f$$

$\varepsilon > 0 \quad \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f - \varepsilon$

$x_0 \in [a,b],\ f(x_0) > \sup\limits_{[a,b]} f - \dfrac{\varepsilon}{2}$

$y_0 \in [a,b],\ f(y_0) < \inf\limits_{[a,b]} f + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow f(x_0) - f(y_0) > \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f - \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau$ - подразбиване на $[a,b] : \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f;[a,b])(x_i - x - i - 1) < \varepsilon$ ■

Def. 2 ***Осцилация на функция:*** *Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. Осцилация на f в $[a,b]$ дефинираме като:*

$$\omega(f;\ [a,b]) := sup\{|f(x)-f(y)| : x, y \in [a,b]\}.$$

Lemma 3 *Осцилацията на функцията f в даден интервал е равна на разликата между супремума и инфимума на функцията в дадения интервал.*

$$\omega(f;\ [a,b]) = \underset{[a,b]}{sup} f - \underset{[a,b]}{inf} f$$

Твърдение 1 *Непрекъснатите функции са интегруеми.*

Доказателство: Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - непрекъсната. От Теорема на Вайерщрас следва, че f е ограничена.
Теорема на Кантор $\Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in [a,b],\ |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ Взимаме $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, за което
$d(\tau) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, ..., n\}\} < \delta$,
Тогава имаме:

$$0 \le S_f(\tau) - s_f(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f;[x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \le \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a)$$

След граничен преход получаваме:

$\lim\limits_{d(\tau)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} w_i(f)\Delta x_i = 0$ и следователно f е интегруема в $[a,b]$. ■

Твърдение 2 *Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е ограничена и има краен брой точки на прекъсване. Тогава f е интегруема.*

Нека $y_1, y_2, ..., y_k$ са точките на прекъсване на f. $\boxed{\eta > 0}$

$C = [a,b] \backslash \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} (y_i - \eta, y_i + \eta) \right) \quad \leftarrow$ обединение на краен брой интервали и f е непрекъснато върху C

Кантор $\Rightarrow \quad \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in C, |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$\tau : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ такава, че $[x_{i-1}, x_i] \subset C \to x_i - x_{i-1} < \delta$

$[a, b] \cap [x_{i-1}, x_i] = [y_j - \eta, y_j + \eta] \geq 0$ за някое $j \in \{1, ..., k\}$

$M = \sup\limits_{[a,b]} f, \quad m = \inf\limits_{[a,b]} f$

$$S_f(\tau) - s_f(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) = \sum_{[x_{i-1},x_i] \subset C} \omega(f; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) +$$

$$\sum_{j=1}^{k} \omega \underbrace{(f; [y_j - \eta, y_j + \eta])}_{\leq M-m} (\cap [a, b]).2\eta \leq \frac{\eta}{4(b-a)} \sum_{\underbrace{[x_{i-1}, x_i] \subset C}_{\leq (b-a)}} (x_i - x_{i-1}) + (M - m).2\eta.k$$

$$S_f(\tau) - s_f(\tau) \leq \frac{\epsilon}{\cancel{4(b-a)}} \cancel{(b-a)} + (M - m)2k.\eta < \varepsilon$$

$$0 < \eta < \frac{\varepsilon}{4k(M-m)}$$ ■

Твърдение 3 *Монотонните функции са интегруеми.*

Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (б.о.о.) растяща $\quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)\ \forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ - ограничена

$\tau : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b \qquad x \in [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$

$\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_{i-1}), \quad \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_i)$

$$S - f(\tau) - s_f(\tau) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}) \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{d(\tau)}$$

$$\leq d(\tau). \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))} = d(\tau).(f(b) - f(a))$$

$\boxed{\varepsilon > 0} \to$Избираме τ с $d(\tau) < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}(f(b) - f(a)) < \varepsilon$ ■