

Записки по ДИС2 - Лекция 8

20.04.2023

Редици и редове от функции.

$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
 $D' := \{x \in D : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$ - област на (поточкова) сходимост на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$
 $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), x \in D'$
 $f : D' \rightarrow \mathbb{R}$

Def. 1 Поточкова граница на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

$f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Казваме, че $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно клони към f в D (и пишем $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$), ако

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

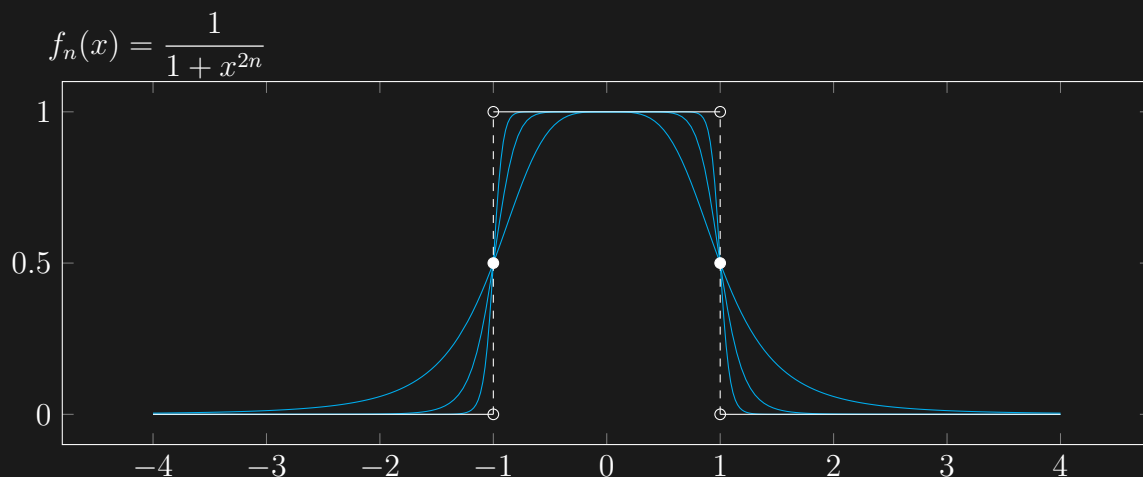
$n_0(\varepsilon)$ n_0 зависи само от ε

f е поточкова граница на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в D :

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

дефиниция за граница на числови редове

$n_0(\varepsilon, x)$ n_0 зависи от ε и от x



Наблюдение $\|f - f_n\|_\infty := \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$
 Твърдим, че $f_n \rightrightarrows f$ в D точно тогава, когато $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\boxed{\varepsilon > 0}$$

$$f_n \rightrightarrows f \text{ в } D \left\{ \varepsilon > 0 \right\} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \underbrace{\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}}_{\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon}$$

Пример $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{nx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \equiv 0$
 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Пример $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \neq 1$
 $s_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x}$

Тук ползвахме формулата за геометрична прогресия: $s_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$

$$|x| < 1 \Rightarrow D' = (-1, 1)$$

Фиксираме n $\sup_{x \in (-1, 1)} |s_n(x) - \frac{1}{1-x}| = \sup_{x \in (-1, 1)} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \sup_{x \in (-1, 1)} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty$

Пример $f_n(x) = x^n(1 - x), \quad x \in [0, 1]$

Фиксираме x $x^n(1 - x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Фиксираме n $\sup_{x \in [0, 1]} |x^n(1 - x) - 0| = \sup_{x \in [0, 1]} (x^n(1 - x))$
 $(x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^n(\frac{n}{x} - n - 1) = x^n(\frac{n - xn - x}{x})$

$n - xn - x = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$ критична точка

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n} + 1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Задача Да се намери областна на сходимост на $nx^n(1 - x)$ в $[0, 1]$

Th. 1 *Равномерната граница на редица от непрекъснати функции е непрекъсната функция.*

$f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f_n \rightrightarrows f \text{ в } D, \quad x_0 \in D$
 f_n - непрекъсната в $x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Тогава f е непрекъсната в x_0 .

Доказателство: $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$
 Нека ε - произволно. $f_n \Rightarrow f$ в $D \Rightarrow \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
 f_{n_0} е непрекъсната в $x_0 \Rightarrow \boxed{\exists \delta > 0} \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
 Значи за всяко $x \in D$, $|x - x_0| < \delta$ е в сила $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$. ■

Th. 2 *Необходимо и достатъчно условие на Коши за равномерна сходимост*

Нека $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Твърдим, че $\exists f : D \rightarrow \mathbb{R}$ такава, че $f_n \Rightarrow f$ в D точно тогава, когато $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$. (n_0 зависи само от ε)

Доказателство: (\Rightarrow)

$$\left. \begin{array}{l} f_n \Rightarrow f \text{ в } D \\ n \rightarrow \infty \\ \varepsilon > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N} (n + p \geq n_0)$, $x \in D$
 $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
 (\Leftarrow) $\boxed{x \in D}$ - фиксираме, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е фундаментална $\rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - сходяща за всяко $x \in D$, $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$
 Да проверим, че $f_n \Rightarrow f$ в D
 $\boxed{\varepsilon > 0} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (След граничен преход $p \rightarrow +\infty$) $\forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. ■

За следната теорема няма да даваме доказателство:

Th. 3 *НДУ за равномерна сходимост на ред на Коши*

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ е равномерно сходящ в $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D : \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x) \right| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Th. 4 *Критерий на Вайерщрас*

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \leq a_n \forall x \in D$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.
 Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е равномерно (и абсолютно) сходящ в D .

Доказателство: $\boxed{\varepsilon > 0}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$

Тогава за $n \geq n_0$ - произволно, $p \in \mathbb{N}$, $x \in D$ - произволно, имаме:

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon.$$

■

Пример $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad x \in [-1, 1] \longrightarrow \left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ - сходящ.} \right.$

Th. 5 Δ – ограничен интервал, $f_n : \Delta \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ - диференцируеми. $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходящ в Δ . Съществува $x_0 \in \Delta, \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща.

Тогава редицата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е равномерно сходяща в Δ , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ е диференцируема в

$$\Delta \text{ и } \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) \quad \forall x \in \Delta.$$