Записки по ДИС2 - Лекция 10

27.04.2023

Функции на няколко променливи.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n = &\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{1, ..., n\}\}\\ &x \in \mathbb{R}\\ \\ &x = (x_1, x_2, ..., x_n)\\ &y = (y_1, y_2, ..., y_n)\\ &x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)\\ &x \in \mathbb{R}\\ &\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)\\ &\mathcal{O} = (0, 0, ..., 0)\end{aligned}$$

Def. 1 *Норма*
$\|.\| : \mathbb{R}^n \to [a, +\infty)$ е норма в $\mathbb{R}^n$, ако са изпълнени следните условия:
1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \mathcal{O}$
2) $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n\ \forall x \in \mathbb{R}^n$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (неравенство на триъгълника)

$\|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$

Def. 2 *Евклидова норма*
$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ *- евклидова норма в* $\mathbb{R}^\ltimes$
$d(x, y) = \|y - x\|$

Def. 3 *Скаларно произведение*
$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \to \|x\| = \sqrt{\langle x, y\rangle}$

Свойство на скаларното произведение: ***Неравенство на Коши-Буняковски-Шварц***

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Алтернативен запис на неравеството е:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

$\lambda \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \|x+\lambda y\|^2 = \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle =$
$\|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2.\|y\|^2$
$(2\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x|^2.\|y\|^2 \leq 0$
$(\langle x, y\rangle)^2 \leq \|x\|^2.\|y\|^2$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle\rangle nnmk$

Функция на n променливи

$f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R} \quad f(x) \equiv f(x_1, x_2, ..., x_n)$

$$f : D \to \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n \ (n, k \in \mathbb{R}) \quad f(x) = f(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ f_2(x_1, ..., x_n) \\ ... \ ... \ ... \ ... \\ f_k(x_1, ..., x_k) \end{pmatrix} \quad x \in D$$

$f_1, f_2, ..., f_k$ - координатни функции на изображението f Точка на сгъстяване на f:

$$\forall\ U \text{ - околност на } x_0 : (U \cap D)\{x_0\} \neq \emptyset \text{ или } \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D\ \{x_0\}, x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}^k$$

$$\begin{aligned} &\text{Коши} \ \ \forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D,\ x \neq x_0, \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - l\| < \epsilon \\ &\text{Хайне} \ \ \forall\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D\backslash\{x_0\},\ x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_0 : f(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} l \end{aligned}$$

$f : D \to \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n \qquad f$ е непрекъсната в x_0, ако:

$$\begin{aligned} &\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D,\ \|x - x_0\| < \delta : \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon \Leftrightarrow \\ &\forall\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset D,\ x_m \underset{m\to\infty}{\to} x_0 : f(x_m) \underset{m\to\infty}{\to} f(x_0) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x = (x_1, x_2) \neq \vec{\mathcal{O}} = (0, 0) \\ 0, & \text{ако } x = (0, 0) \end{cases}$

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$x_2 = kx_1,\ k \in \mathbb{R}$
$f(t, kt) = \dfrac{t.kt}{t^2 + (kt)^2} = \dfrac{k}{1 + k_2} \quad t \neq 0$

Основни теореми за непрекъснати функции (и изображения)

Th. 1 *Вайерщрас: Непрекъснат образ на компакт е компакт.*

$$\begin{cases} f : K \to \mathbb{R}^k,\ K \subset \mathbb{R}^n, K - \textit{компакт} \\ f \textit{ е непрекъснато} \end{cases} \Rightarrow f(K) = \{f(x) : x \in K\} \textit{ е компактно подмножество на } \mathbb{R}^k$$

Коментар: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - *непрекъсната* $\Rightarrow f([a,b])$ - *компакт в* $\mathbb{R}^1 \to f([a,b])$ - *ограничено в* $\mathbb{R}$, *т.е.* f *е ограничена*
$f([a,b])$ - *затворено в* $\mathbb{R}^1$*(значи* $\sup f([a,b])$ *и* $\inf f([a,b])$ *са от* $f([a,b])$*)*

Доказателство: