

Записки по ДИС2 - Лекция 13

25.05.2023

Диференциране на композиция

Преговор

Функции от вида $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ – отворено, $x_0 \in U$, $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – линеен оператор такъв, че:
 $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \varphi(x, x_0)$ и $\frac{\varphi(x, x_0)}{\|x - x_0\|} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$. От предната лекция имаме следните твърдения:

Твърдение 1 Ако f е диференцируема в x_0 , то частните производни $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0)}{\lambda}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ съществуват и $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$.

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \quad df(x_0)(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle$$

Твърдение 2 Ако частните производни $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ съществуват в U и са непрекъснати в x_0 , то f е диференцируема в x_0 .

Функции от вида $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad U \subset \mathbb{R}^n \text{ – отворено, } x_0 \in U, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

Твърдение 3 f е диференцируема в x_0 , ако $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$, където $df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – линеен оператор $\Leftrightarrow f_i$ е диференцируема в x_0 за всяко $i = \overline{1, m}$. Тоест:

$$df(x_0)(h) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} h = f'(x_0)h, \text{ т.е. } f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}_{(n \times m)}$$

Диференциране на композиция

Нека $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$ – отворено, $y_0 = f(x_0) \in V \subset \mathbb{R}^m$ – отворено.
 $f : U \rightarrow V$ $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$

Твърдение 4 Нека $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$, f, g - диференцируеми в x_0 .
Тогава $g \circ f$ е диференцируема в x_0 и $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

Доказателство: To be added...

Инвариантност на формата на диференциала