Записки по ДИС2 - Лекция 1

23 марта 2023 г.

Малки и големи суми на Дарбу. Сума на Риман. Определен Интеграл на Риман. Критерий за интегруемост по Риман. Класове интегруеми функции.

Средно аритметично $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$

$A(f) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ Средно аритметично на функция в интервал

Нека функцията f е дефинирана в интервала $[a, b]$.
$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b : \{x_i\}$ - разбиване на $[a, b]$;
$d(\tau) = \underset{1 \leq i \leq n}{max}(x_i - x_{i-1})$ - диаметър на разбиването;
$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in [1, n]$ - делящи/представителни/контролни точки.

Сума на Риман
$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\ a_x$

Суми на Дарбу
$m_i := inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
$M_i := sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Малка сума на Дарбу $s_f(\tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$

Голяма сума на Дарбу $S_f(\tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

Lemma 1 *Нека τ^*, τ са подразбивания на интервала $[a, b]$, такива че $\tau^* \geq \tau$. (тогава ще казваме,*
Ако $\tau^* \geq \tau$, то $S_f(\tau^*) \geq S_f(\tau)$ и $s_f(\tau^*) \geq S_f(\tau)$.

Доказателство: (Б.О.О.) τ^* се получава от τ с прибавянето на една точка. Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и $\tau^* : a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x^* < x_i < ... < x_n = b$

$$
\begin{aligned}
&S_f(\tau) - S_f(\tau^*) = \\
&\sum_{i=1}^{n} \underset{[x_{j-1},x_j]}{supf} (x_j - x_{j-1}) - \\
&\left(\sum_{j=1}^{i-1} \underset{[x_{j-1},x_j]}{supf} (x_j - x_{j-1}) + \underset{[x_{i-1},\, x^*]}{supf} (x^* - x_{i-1}) + \right. \\
&\left. \underset{[x^*,\, x_i]}{supf} (x_i - x^*) + \sum_{j=i+1}^{n} \underset{[x_{j-1},x_j]}{supf} (x_j - x_{j-1}) \right) = \\
&\underset{[x_{i-1},\, x_i]}{supf} (x_i - x_{i-1}) - \underset{[x_{i-1},\, x^*]}{supf} (x_* - x_{i-1}) - \underset{[x^*,\, x_{i-1}]}{supf} (x_i - x_*) \geq \\
&\underset{[x_{i-1},\, x_i]}{supf} (x_i - x_{i-1}) - \underset{[x_{i-1},\, x_i]}{supf} (x^* - x_{i-1}) - \underset{[x_{i-1},\, x_i]}{supf} (x_i - x^*) = 0
\end{aligned}
$$

■

Аналогично се пресмята за малките суми на Дарбу ......

Lemma 2 *Нека $\tau_1 \tau_2$ са произволни подразбивания на $[a, b]$.*
Тогава $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2)$.

Доказателство: Нека τ^* е по-фино от τ_1 и от τ_2. Очевидно τ^* съществува и може да се получи като обединение на точките от τ_1 и τ_2. От Lemma 1 имаме:

$$
\begin{gathered}
s_f(\tau_1) \leq s_f(\tau^*); \\
S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau_2).
\end{gathered}
$$

Нека $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ е ограничена. ......

Def. 1 *Нека $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ е ограничена. Казваме, че f е интегруема по Риман, ако $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, което се нарича* ***риманов интеграл*** *на f в $[a,\ b]$ и се означава с $\int_a^b f$ или $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f(w)\,\mathrm{d}w$ etc.*

Th. 1 ***(Критерий за интегруемост по Риман)*** *Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. Твърдим, че f е интегруема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко епсилон по-голямо от нула съществуват подразбивания $\tau_1 \tau_2$ на $[a, b]$, за които $S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \varepsilon$. Еквивалентно, за всяко епсилон по-голямо от нула съществува подразбиване на $[a, b]$, за което $S_f(\tau) - s_f(\tau) < \varepsilon$.*

Доказателство: ($\Rightarrow$) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно. Имаме:

$$
\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \ = \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} \ > \overline{\int_a^b} f \Rightarrow \exists \tau_1 \text{ - подразбиване на } [a, b],\ S_f(\tau_1) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}
$$

$$
\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} \ = \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} \ < \underline{\int_a^b} f \Rightarrow \exists \tau_2 \text{ - подразбиване на } [a, b],\ s_f(\tau_2) > \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}
$$

$$S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \left(\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Leftarrow$) Допускаме противното:
$\Rightarrow \forall \tau_1, \tau_2 : S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) \geq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f > 0$ - противоречие.
($\Uparrow$) Достатъчно е да положим $\tau_1 := \tau$ и $\tau_1 := \tau$
($\Downarrow$) Нека $\varepsilon > 0$. Имаме разбиванията τ_1, τ_2, за които $S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \varepsilon$. Нека τ е разбиване по-фино от τ_1 и τ_2, т.е. $\tau \geq \tau_1, \tau \geq \tau_2$
$\Rightarrow S_f(\tau) - s_f(\tau) \leq S_f(\tau_1) - s_f(\tau_2) < \varepsilon$
$\blacksquare$

Def. 2 ***Осцилация на функция:*** *Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. Осцилация на f в $[a, b]$ дефинираме като:*

$$\omega(f;\ [a, b]) := sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b]\}.$$

Lemma 3 *Осцилацията на функцията f в даден интервал е равна на разликата между супремума и инфимума на функцията в дадения интервал.*

$$\omega(f;\ [a, b]) = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f$$

Твърдение 1 *Непрекъснатите функции са интегруеми.*

Доказателство: Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ - непрекъсната. От Теорема на Вайерщрас следва, че f е ограничена.
Теорема на Кантор $\Rightarrow \exists \delta > 0\ \forall x', x'' \in [a, b],\ |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ Взимаме $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, за което
$d(\tau) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, ..., n\}\} < \delta$,
Тогава имаме:
$0 \leq S_f(\tau) - s_f(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \omega(f; [x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$
След граничен преход получаваме:
$\lim_{d(\tau) \to 0} \sum_{i=1}^{n} w_i(f) \Delta x_i = 0$ и следователно f е интегруема в $[a, b]$. $\blacksquare$

Твърдение 2 *Нека f е ограничена и има краен брой точки на прекъсване. Тогава f е интегруема.*

Твърдение 3 *Монотонните функции са интегруеми.*

Твърдение 4 *Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена и имаме произволно разбиване на интервала, в който е дефинирана. $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Тогава $s_f(\tau) = inf\{\sigma_f(\tau,\ \xi) : \xi$ - представителна точка$\}$; $S_f(\tau) = sup\{\sigma_f(\tau,\ \xi) : \xi$ - представителна точка$\}$.*

Доказателство: ......

Def. 3 *Нека* $d(\tau) := max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, ..., n\}\}$ *и* $\tau : a = x_0 < ... < x_n = b$. *Казваме, че сумите на Риман за* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *имат граница* $I \in \mathbf{R}$, *когато* $d(\tau)$ *клони към 0, ако за всяко* $\varepsilon \geq 0$ *съществува* $\delta \geq 0$, *такова че за всеки избор на подразбиване* τ *на* $[a, b]$ *с* $d(\tau) \leq \delta$ *и за всеки избор на предстввавителна точка е в сила* $|\sigma_f(\tau;\ \xi) - I| \leq \varepsilon$.

Lemma 4 *Нека* $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ *е подразбиване на* $[a, b]$. *Нека* $\tau^* \geq \tau$, τ^* *се получава от* τ *чрез прибавянето на* k *точки. Тогава* $0 \leq S_f(f) - S_f(\tau^*) \leq ....$ *Нека* $m := \underset{[a,b]}{inf} f$ *и* $:= \underset{[a,b]}{sup} f$

Основни свойства на интеграла

(I) Линейност