Записки по ДИС2 - Лекция 3

04.05.2023

Свойства на определените интеграли. Теорема на Лайбниц-Нютон. Теорема за средните стойности.

1) Линейност
2) Адитивност
3) Позитивност
4) Теорема за средните стойности
$f, g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ интегруеми
$g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$
$m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$
Тогава $\quad m \int_a^b \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$

Lemma 1 *Нека $f, g : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ са интегруеми. Тогава $f \circ g$ е интегруема в интервала $[a,\ b]$.*

Доказателство: Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ и $\epsilon > 0$. Също така $x,\ y \in [x_{i-1},\ x_i]$. Разглеждаме разликата между сумите на Дарбу на композицията на f и g:

$$S_{fg}(\tau) - s_{fg}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \omega(fg; [x_{i-1},\ x_i])(x_i - x_{i-1})$$

. ... ■

Следствие 1 ***от Теоремата за средните стойности:*** *Нека $f : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ е непрекъсната и $g : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ е интегруема, като g е неотрицателна в интервала $[a,\ b]$. Тогава съществува $\xi \in [a,\ b]$, за което $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x$.*

Доказателство: (Ісл.) Нека ...
(Ісл.)........ ■

....

Фундаментална теорема на анализа

Твърдение 1 *$F : \Delta \to \mathbb{R}$ е непрекъсната, $\quad x \in \Delta$,*
$[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset \Delta \Rightarrow f$ - интегруема в $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \Rightarrow f$ - ограничена в $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$

$$F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^y f(t)dt, \quad y \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$$

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \int_{\min\{x,y\}}^{\max\{x,y\}} |f(t)|dt \leq M|x-y|$$

$$\Rightarrow \lim_{y \to x} F(y) = F(x)$$

Ако x е десен кран на Δ, то разглеждаме $[x-\varepsilon, x] \subset \Delta$ ...
Ако x е десен кран на Δ, то разглеждаме $[x, x+\varepsilon] \subset \Delta$ ...

Забележка $\quad \int_a^b 1.dt = b - a, \quad a \leq b$

Th. 1 ***Нютон-Лайбниц***
$f : \Delta \to \mathbb{R}$, Δ - интервал, $a \in \Delta, f$ е интегруема в $[a, x]$ за всяко $x \in \Delta; F(x)$ ще нарираме примитивна на $f(x)$, където $F(x) := \int_a^x f(t)dt$; Нека допълнително f е непрекъсната в $x \in \Delta$. Тогава F е диференцируема в x и $F'(x) = f(x)$.

Доказателство:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} - f(x) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)dt \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right|$$

$$h > 0 \to \left| \frac{1}{h} \int_x^{h+x} (f(t) - f(x))dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} \varepsilon \; dt = \varepsilon$$

$$h < 0 \to \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_{x+h}^{x} |f(t) - f(x)|dt \leq \frac{1}{|h|} \int_{x+h}^{x} \varepsilon \; dt = \varepsilon \frac{|h|}{|h|} = \varepsilon$$