

## Записки по ДИС2 - Лекция 5

23.03.2023

### Несобствени интеграли. Елементарни свойства.

#### Несобствени интеграли с неотрицателни подинтегрални функции.

Нека разгледаме определения интеграл  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ . Подинтегралната функция не е дефинирана в ограничения интервал  $[a, b]$  и затова не можем да определим стойността на интеграла с досегашните ни знания. Но имаме добре дефиниран интеграла  $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin|_0^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon)$ . След граничен преход получаваме:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (\arcsin(1-\varepsilon)) = \frac{\pi}{2}$$

**Def. 1 Несобствен интеграл от I-ви род:** Нека  $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема (аналогично за  $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ) във всеки интервал от вида  $[a, p]$ , където  $p \geq a$ .

Ако съществува границата  $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p f(t) dt$  казваме, че  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  е сходящ и пишем  $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p f(t) dt$ . Ако границата не съществува, интегралът се нарича разсходящ.

**Def. 2 Несобствен интеграл от II-ри род:** Нека  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  е интегрируема във всеки интервал от  $[a, p]$ ,  $p \in [a, b)$ . Ако съществува границата  $\lim_{\substack{p \rightarrow b \\ p < b}} \int_a^p f(t) dt$ ,

интегралът  $\int_a^b f(t) dt$  се нарича сходящ и  $\int_a^b f(t) dt := \lim_{\substack{p \rightarrow b \\ p < b}} \int_a^p f(t) dt$ , наричаме го интеграл от II-ри с особеност в  $b$ .

Аналогично на **Def. 1** можем да дефинираме несобствен интеграл от I-ви род с особеност в  $-\infty$ :

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt := \lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^a f(t) dt$$

С особеност в долния край на интервала:

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{\substack{p \rightarrow a \\ p > a}} \int_p^b f(t) dt$$

## Елементарни свойства на несобствените интеграли

### (I) Линеинност

$$\begin{aligned} \text{Нека } \int_a^{+\infty} f(t) dt, \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ са сходящи } \Rightarrow \\ \int_a^{+\infty} f(t) + g(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt + \int_a^{+\infty} g(t) dt; \\ \lambda \in \mathbb{R} : \int_a^{+\infty} \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ са също сходящи.} \end{aligned}$$

### (II) Смяна на променливите

При смяна на променливите можем да минем от собствен в несобствен интеграл и обратно. Тогава ако собственият е сходящ, то несобствения ще е сходящ. Теоремата за смяна на променливите си остава.

### (III)

$$c > a : \int_a^{+\infty} f(t) dt - \text{сходящ} \Rightarrow \int_c^{+\infty} f(t) dt - \text{сходящ}$$

### (IV)

Повече от една особености. Нека  $f$  е непрекъсната, тогава интегралът

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

е сходящ, ако и двата отдясно са сходящи.

Пример:  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln t} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\ln t} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln t} + \int_1^2 \frac{dt}{\ln t} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$

## Несобствени интеграли с неотрицателни подинтегрални функции

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \int_a^b f(x) dx, f \geq 0$$

$$\left. \begin{aligned} F(p) &= \int_a^p f(x) dx \\ f &\geq 0 \text{ в } [a, +\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F - \text{растяща в } [a, +\infty)$$

$$F(p_2) - F(p_1) = \int_a^{p_2} f(x) dx - \int_a^{p_1} f(x) dx$$

**Lemma 1** Нека  $F : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  - растяща. Тогава:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) \text{ съществува} \Leftrightarrow F \text{ е ограничена отгоре в } [a, +\infty)$$

Доказательство:

$$\begin{array}{ll} (\Rightarrow) l = \lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) \Rightarrow \exists p_0 \geq a \forall p \geq p_0 : (\Leftarrow) l = \lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) \Rightarrow \exists p_0 \geq a \forall p \geq p_0 : \\ \text{sd} \quad \Rightarrow F(p) < l + 1 \forall p \in [a, +\infty) & \Rightarrow F(p) < l + 1 \forall p \in [a, +\infty) \\ a \leq p \leq p_0 \rightarrow F(p) \leq F(p_0) < l + 1 & a \leq p \leq p_0 \rightarrow F(p) \leq F(p_0) < l + 1 \\ p \geq p_0 \rightarrow F(p) < l + 1 & p \geq p_0 \rightarrow F(p) < l + 1 \end{array}$$