Записки по ДИС2 - Лекция 9

26.04.2023

Степенни редове.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \ \leftarrow \text{степенен ред}$$

$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ е сходящ} \right\} \text{ - област на сходимост}$$

Канонични примери за степенни редове

1) Геометрична прогресия

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1,1) \leftarrow \text{област на сходимост}$$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$ - област на сходимост в $\mathbb{R}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ - x е параметър. Прилагаме критерия на Даламбер: $\displaystyle\frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \longrightarrow \quad x \in [-1, 1)$ $\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = |x|.\frac{n}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |x|$

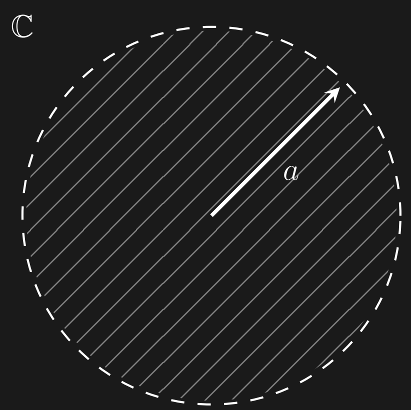
Критерия на Даламбер ни дава: $|x| < 1$ - абсолютно сходящ
$|x| > 1$ - разходящ

Сега разглеждаме в краищата на интервала: при $\boxed{x=1}$ имаме хармоничния ред, който е разходящ; при $\boxed{x=-1}$ редът е сходящ.

N.B. Областта на сходимост е винаги с център точката a. (степенни редове)

Def. 1 *$R \in [0, +\infty]$ се нарича радиус на сходимост на реда $sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$ с $|x-a| > R$. Ако , то областта на сходимост има един от следните видове:*

$$\begin{gathered}(a-R, a+R)\\ [a-R, a+R)\\ (a-R, a+R]\\ [a-R, a+R]\end{gathered}$$



В комплексната равнина в областта на сходимост са точките във вътрешността на окръжност с радиус a. Във всички точки извън окръжността степенният ред е разходящ. В граничните точки не се знае дали е сходящ или разходящ.

Lemma 1 *Нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-a)^n$ е сходящ. Тогава $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е абсолютно сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$, за което $|x-a| < |\xi-a|$.*

<u>**Доказателство:**</u> $|x-a| < |\xi-a|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n(\xi-a)^n|}_{\leq M} \left|\frac{x-a}{\xi-a}\right|^n \tag{1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-a)^n$ - сходящ $\Rightarrow a_n(\xi-a)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : |a_n(\xi-a)^n| \leq M$

$(1) \ \leq \sum_{n=0}^{\infty} M.q^n, \quad q = \left|\frac{x-a}{\xi-a}\right| \in [0,1) \Rightarrow$ редът е сходящ от пр. за сравнение. $\square$

Th. 1 *Всеки степенен ред има радиус на сходимост. При това $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е абсолютно сходящ.*

$$R := sup\underbrace{\left\{|x-a| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{е сходящ}\right\}}_{\neq\emptyset} \quad R \in [0, +\infty]$$

$x \in \mathbb{R}, |x-a| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ - разходящ.

$x \in \mathbb{R}, |x-a| < R \Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R} : |x-a| < |\xi - a|$ и $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ - е сходящ.

Като приложим лемата, получаваме, че: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е абсолютно сходящ. $\square$

Th. 2 ***Формула на Коши-Адамар***

Радиусът на сходимост на $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *е* $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

(със съглашението $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$)
Припомняме дефиницията на $\limsup$: $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \to l = \limsup b_n$, ако l е точка на сгъстяване на $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : b_n < l + \varepsilon$

Доказателство: $l = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $R = \dfrac{1}{l}$

(a) $|x-a| < \dfrac{1}{l} \quad l|x-a| < 1 \to \exists q : l|x-a| < q < 1$