Записки по ДИС2 - Лекция 12

11.05.2023

Диференцируемост. Частни производни. Градиент. Производна по направление. Гладки функции

Геометрична представа

Производната е локална линейна апроксимация на функцията.
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x;\ x_0)$
$\dfrac{R(x;\ x_0)}{|x - x_0|} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$

.....

Диференцируемост

Def. 1 *U - отворено множество в $\mathbb{R}^n, x_0 \in U \quad f : U \to \mathbb{R}$*
Казваме, че f е диференцируема в x_0, ако съществува линеен оператор $\partial f(x_0)$ (нарича се диференциал на f в т. x_0) такъв, че
$f(x) = f(x_0) + \partial f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$ или
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0) - \partial f(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0)h + o(\|h\|) \quad \text{или} \quad \lim_{h \to \mathcal{O}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)(h)}{\|h\|} = 0$$

$$\begin{aligned}
&df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\
&e_1 = (1, 0, ..., 0) \\
&e_2 = (0, 1, ..., 0) \\
&..... \\
&e_i = (0, .., 0, \underset{i\text{-та позиция}}{1}, 0, .., 0) \\
&h = (h_1, h_2, ..., h_n)
\end{aligned}$$

$$df(x_0)(h) = df(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i.df(x_i)(e_i) = \Big\langle\ (\ df(x_0)(e_1),\ df(x_0)(e_2),\ ...,\ df(x_0)(e_n)\ ), \quad h\ \Big\rangle$$

Частни производни

Def. 2 *Частна производна*

Нека $\{x_0 + \lambda e_i : \lambda \in \mathbb{R}\}$ *- права през* x_0*, успоредна на* e_i*.* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x_0 + \lambda e_i)}{\lambda}$ *ще наричаме частна производна на* f *в т.* x_0 *по* x_i*.*

Пример: : Частна производна на f в т. x_0 по x_1:
$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \lim\limits_{\lambda to 0} \dfrac{f(x_1^0 + \lambda, x_2^0, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_n^0)}{\lambda}$, където точката $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$.

Твърдение 1 *Ако* f *е диференцируема в* x_0*, то* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ *съществува за всяко* $i \in \{1, ..., n\}$*. При това* $df(x_0)(e_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$*.*

Доказателство:

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0) - \partial f(x_0)(\lambda e_i) + \partial f(x_0)(\lambda e_i)}{\lambda} =$$
$$\lim_{\lambda \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0 - df(x_0)(\lambda e_i))}{\|\lambda e_i\|} .sgn(\lambda) + df(x_0)(e_i) \right] = 0 + df(x_0)(e_i)$$

$\square$

Градиент

Def. 3 *Градиент*

$gradf(x_0) := \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$, *//алтернативно ще се отбелязва с* ∇

$$\boxed{df(x_0)(h) = \langle gradf(x_0), h \rangle}$$

Твърдение 2 ***Диференцируемите функции са непрекъснати***
$U \subset \mathbb{R}^n$ *- отворено множество; нека* $f : U \to \mathbb{R}$ *и* f *е диференцируема в* $x_0 \in U$*. Тогава* f *е непрекъсната в* x_0*.*

Доказателство:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) = f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|}.$$
$$.\|x - x_0\| + \lim_{x \to x_0} df(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + 0 + 0$$

(Линейните оператори в $\mathbb{R}^n$ са непрекъснати)

Производна по направление

$U \subset \mathbb{R}^n, U -$ отворено, $x_0 \in U, f : U \to \mathbb{R},\ l \in \mathbb{R}^n\ \{x_0 + \lambda l : \lambda \in \mathbb{R}\}$
$\{\lambda \in \mathbb{R} : x_0 + \lambda l \in U\} -$ околност на 0
$B_\delta(x_0) \subset U \quad x_0 + \lambda l \in B_\delta(x_0) \Leftrightarrow \|\lambda l\| < \delta \Leftrightarrow |\lambda|.\|l\| < \delta$

$\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial l} := \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0)}{\lambda} \quad \longleftarrow \quad$ производна на f в т. x_0 по направление l

Твърдение 3 *Ако f е диференцируема в x_0, то f има производна в x_0 по всяко направление. При това*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = df(x_0)(l) =< \nabla f(x_0),\ l >$$

Забележка: със символа ∇ ще се отбелязва градиент на функция.

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0) - df(x_0)(\lambda l) + df(x_0)(\lambda l)}{\lambda} =$$
$$\lim_{\lambda \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0) - \lambda df(x_0)(l)}{\lambda} + \frac{\lambda df(x_0)(l)}{\lambda} \right] =$$
$$df(x_0)(l) + \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda l) - f(x_0) - df(x_0)(\lambda l)}{\|\lambda l\|}.\|l\|.sgn(\lambda) = df(x_0)(l)$$

Следствие:

$\max \dfrac{\partial f}{\partial l}(x_0) : \|l\| = 1 = \|gradf(x_0)\|$ и се достига за $l = \dfrac{gradf(x_0)}{\|gradf(x_0)\|}$

$\left| \dfrac{\partial f}{\partial l}(x_0) \right| = |\langle gradf(x_0), l\rangle| \leq \|gradf(x_0)\|.\|l\|$

$\min \dfrac{\partial f}{\partial l}(x_0) : \|l\| = 1 = -\|gradf(x_0)\|$ и се достига за $l = -\dfrac{gradf(x_0)}{\|gradf(x_0)\|}$

Th. 1 *U - отворено множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}, \quad x_0 \in U, \quad i \in \{1, ..., n\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ съществуват в U и са непрекъснати в x_0. Тогава f е диференцируема в x_0.*

Def. 4 *Нека U е отворено множество в $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$. Тогава f се нарича* ***гладка*** *$(f \in C^1(U, \mathbb{R}))$, ако $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ съществуват и са непрекъснати в U за всяко $i \in \{1, .., n\}$*

Следствие: ***Гладките функции са диференцируеми***

$\delta > 0, B_\delta(x_0) \in U, \quad h \in \mathbb{R}^n, \|h\| < \delta$
*