

Записки по ДИС2 - Лекция 9

26.04.2023

Степенни редове.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \leftarrow \text{степенен ред}$$
$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots$$
$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ е сходящ} \right\} - \text{област на сходимост}$$

Канонични примери за степенни редове

1) Геометрична прогресия

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad x \in (-1, 1) \leftarrow \text{област на сходимост}$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow x \in (-\infty, +\infty) - \text{област на сходимост в } \mathbb{R}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| - x \text{ е параметър. Прилагаме критерия на Даламбер: } \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \longrightarrow \quad x \in [-1, 1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$$

Критерия на Даламбер ни дава: $|x| < 1$ - абсолютно сходящ

$|x| > 1$ - разходящ

Сега разглеждаме в краищата на интервала: при $x = 1$ имаме хармоничния ред, който е разходящ; при $x = -1$ редът е сходящ.

N.B. Областта на сходимост е винаги с център точката a . (степенни редове)

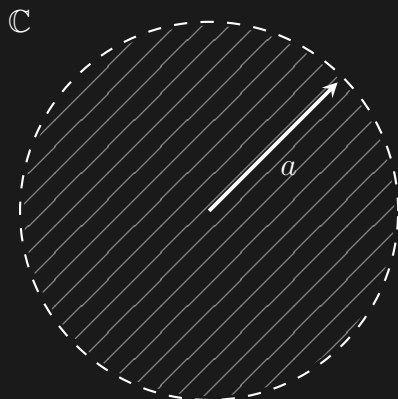
Def. 1 $R \in [0, +\infty]$ се нарича радиус на сходимост на реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, ако $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$ с $|x-a| > R$. Ако, то областта на сходимост има един от следните видове:

$$(a-R, a+R)$$

$$[a-R, a+R)$$

$$(a-R, a+R]$$

$$[a-R, a+R]$$



В комплексната равнина в областта на сходимост са точките във вътрешността на окръжност с радиус a . Във всички точки извън окръжността степенният ред е разходящ. В граничните точки не се знае дали е сходящ или разходящ.

Lemma 1 Нека $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-a)^n$ е сходящ. Тогава $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е абсолютно сходящ за всяко $x \in \mathbb{R}$, за което $|x-a| < |\xi-a|$.

Доказателство: $|x-a| < |\xi-a|$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{|a_n(\xi-a)^n|}_{\leq M} \left| \frac{x-a}{\xi-a} \right|^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-a)^n \text{ - сходящ } \Rightarrow a_n(\xi-a)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : |a_n(\xi-a)^n| \leq M$$

$$(1) \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot q^n, \quad q = \left| \frac{x-a}{\xi-a} \right| \in [0, 1) \Rightarrow \text{редът е сходящ от пр. за сравнение.} \quad \blacksquare$$

Th. 1 Всеки степенен ред има радиус на сходимост. При това $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ е абсолютно сходящ.

$$R := \sup \left\{ |x-a| : \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n}_{\neq \emptyset} \text{ е сходящ} \right\} \quad R \in [0, +\infty]$$

$$x \in \mathbb{R}, |x-a| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \text{ - разходящ.}$$

$x \in \mathbb{R}, |x - a| < R \Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R} : |x - a| < |\xi - a|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ - е сходящ.

Като приложим лемата, получаваме, че: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ е абсолютно сходящ. ■

Th. 2 Формула на Коши-Адамар

Радиусът на сходимост на $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ е $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

(със съглашението $\frac{1}{0} = +\infty, \frac{1}{+\infty} = 0$)

Припомняме дефиницията на \limsup : $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow l = \limsup b_n$, ако l е точка на съгъстяване на $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : b_n < l + \varepsilon$

Доказателство: $l = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}, R = \frac{1}{l}$

(а) $|x - a| < \frac{1}{l} \quad l|x - a| < 1 \rightarrow \exists q : l|x - a| < q < 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - a)^n|$ — Прилагаме Критерия на Коши: $\sqrt[n]{|a_n(x - a)^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - a|$

Дава сходимост за $q < 1$. $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = l < \frac{q}{|x - a|} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \sqrt[n]{|a_n|} <$

$\frac{q}{|x - a|} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \cdot (x - a)^n < q \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - a)^n|$ е сходящ по крит. на Коши.

(б) $|x - a| > \frac{1}{l} \rightarrow l > \frac{1}{|x - a|} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{x - a}$ за безброй много $n \in \mathbb{N}$. $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}(x - a)^{n_k}|} >$

$1 \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}(x - a)^{n_k} \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x - a)^n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$ е разходящ. ■