Записки по ДИС2 - Лекция 13

07.06.2023

Теорема за неявната функция. Условни екстремуми. Множители на Лагранж.

Теорема за неявната функция

$F(x, y) = 0$

Def. 1 *Ако $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ такава, че $F(x, f(x)) = 0\ \forall x \in D$, казваме, че f е* ***неявна функция****, определена от $F(x, y) = 0$.*

Пример : $F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2, \quad R > 0, \quad F(x,y) = 0$

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2} \to y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R]$$

$$f(x) = \varepsilon(x)\sqrt{R^2 - x^2}, \quad \varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$$

Нека F е гладка функция, $F(x_0, y_0) = 0$.
$F(x,y) = F(x_0,y_0) + dF(x_0,y_0)(x - x_0, y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$
$F(x,y) = F'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y - y_0) + o(\|x - x_0, y - y_0\|)$
$\boxed{z = F'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y - y_0)}$
$F(x,y) = x^2 + y^2 - R^2$
$\{(x, y, R(x,y))\} \cap \{z = 0\} \quad F(x,y) = 0$

$0 = F'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0,y_0)(y - y_0) \quad \leftarrow$ уравнение на допирателна към $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$ в т. (x_0, y_0)

Th. 1 ***Теорема за неявните функции***
Нека U е отворено подмножество на $\mathbb{R}^2$. $F : U \to \mathbb{R}$, F е непрекъсната. F'_y съществува и е непрекъсната в U, $(x_0, y_0) \in U$, $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогава съществуват $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такива, че:
(а) ***Съществува единствена*** *функция $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ неявно зададена от уравнението $F(x,y) = 0$ (т.е. $F(x, f(x)) = 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$).*
(б) Така определена f е непрекъсната. при това, ако F'_x съществува и е непрекъсната в U, то f е диференцируема в x_0 и $f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$.

Доказателство:
(Б.о.о.) $F'_y(x_0,y_0) > 0 \quad F'_y$ - непрекъснатa $\Rightarrow$ съществува V - околност на (x_0, y_0), $V \subset$

U такава, че $F'_y(x,y) > 0 \ \forall (x,y) \in V$
$\Rightarrow F(x_0, .)$ е строго растяща в околност $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ на y_0
$\Rightarrow F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \ F(x_0, y_0 + \varepsilon) > 0 \ (F(x_0, y_0) = 0)$
$\Rightarrow$ съществува $\delta > 0$ такова, че:
(а) $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \subset V \subset U$
(б) $F(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
(в) $F(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to F(x_1, .)$ - строго растяща в $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$
$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, F(x_1, y_0 + \varepsilon) > 0$ - непрекъсната; ползваме Теорема на Болцано
Съществува единствено $y_1 \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ с $F(x_1, y_1) = 0$. Полагаме $f(x_1) = y_1$
$\forall \varepsilon > 0$ (достатъчно малко)
$\exists \delta > 0$ такова, че за всяко $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ е в сила $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ т.е. f е непрекъсната в x_0.
$x_1 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ y_1 = f(x_1)$
Същата конструкция около (x_1, y_1) ще даде непрекъснатост на f в x_1. .... (Общ случай)

Условни екстремуми

$M \subset \mathbb{R}^n \ f : M \to \mathbb{R}^n$

Def. 2 *Казваме, че $x_0 \in M$ е точка на* ***локален условен минимум*** *за f, ако съществува околност U на x_0 такава, че за всяка точка $x \in U \cap M$ да е в сила $f(x) \geq f(x_0)$.*

Def. 3 *Казваме, че $x_0 \in M$ е точка на* ***локален условен максимум*** *за f, ако съществува околност U на x_0 такава, че за всяка точка $x \in U \cap M$ да е в сила $f(x) \leq f(x_0)$.*

Множители на Лагранж

Нека U - отворено подмножество на $\mathbb{R}^n, \ F : U \to \mathbb{R}^k, \ F$ - гладка, $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = \mathcal{O}\}$.

M се състои от решенията на системата: $\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \text{.........................} \\ F_k(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad x_0 \in U, \ F(x_0) = \mathcal{O}$

Казваме, че $F_1, ..., F_k$ са независими в x_0, ако матрицата:
$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ .... & .... & .... & .... \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_2}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$ има пълен ранг (т.е. рангът ѝ е k).

Th. 2 ***Множители на Лагранж*** *Нека $U \subset R^n, \ U$ - отворено, $k \leq n, \ g, F_1, F_2, ..., F_k : U \to \mathbb{R}$ са гладки. Нека $x_0 \in U, \ F_1(x_0) = ... = F_k(x_0) = 0$ и $F_1, ..., F_k$ са независими в x_0. Нека g има* ***локален условен екстремум*** *върху $M = \{x \in \mathbb{R}^n :$*

$F_1(x) = ... = F_k(x) = 0\}$ *в т.* x_0*. Тогава съществуват* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ *такива, че* $\nabla g(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla f_i(x_0)$.

$\Phi(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_k) = g(x_1, ..., x_n)$ - функция на Лагранж
$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x_1, ..., x_n)$
Стационарни точки на Φ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x, \lambda) = \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x) - \displaystyle\sum_{=1}^{k} \lambda_i \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = 0, j \in \{1, ..., j\} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) = -F_i(x) = 0, \ i \in \{1, ..., k\} \end{cases}$$

Имаме $n+k$ уравнение и $n+k$ неизвестни, следователно имаме пълен шанс да решим системата. Надяваме се да имаме краен брой решения, но това не винаги е възможно. Неизвестните съответно са $x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_k$.

Доказателство: на Теоремата на Лагранж

Упътване: свеждаме към Теоремата на Ферма чрез Теоремата за неявните функции.

$$rg \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ ..... & ..... & ..... \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}(x_0) = k \quad \text{(Б.о.о.)} \ det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ ..... & ..... & ..... \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}(x_0) \neq 0$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ F_k(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$ Според Теоремата за неявните функции имаме, че:

Съществуват $\delta > 0, \ \varepsilon > 0$ такива, че съществува единствено(при това гладко) изображение $f : \underbrace{B_\delta(x^0_{k+1}, ..., x^0_n)}_{n-k\text{-мерно}} \longrightarrow \underbrace{B_\varepsilon(x^0_1, ..., x^0_k)}_{k-\text{мерно}}$; $\quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$ такова, че:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{k+1}, ..., x_n) \\ .... \\ x_k = f_k(x_{k+1}, ..., x_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ F_k(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \leftarrow \text{ за } \begin{matrix} (x_1, ..., x_k) \in B_\varepsilon(x^0_1, ..., x^0_k); \\ (x_{k+1}, ..., x_n) \in B_\delta(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) \end{matrix}$$

Нека $V = B_\varepsilon(x^0_1, ..., x^0_k) \times B_\delta(x^0_{k+1}, ..., x^0_n)$ - околност на x_0, $V \subset U$.
$\varphi(x_{k+1}, ..., x_n) = g(f_1(x_{k+1}, ..., x_n), ..., f_k(x_{k+1}, ..., x_n), x_{k+1}, ..., x_n)$
$\varphi : B_\delta(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) \longrightarrow \mathbb{R}$
$(f_1(x_{k+1}, ..., x_n), ..., f_k(x_{k+1}, ..., x_n), x_{k+1}, ..., x_n) \in M$; g има условен екстремум в x_0 върху $M \Rightarrow \varphi$ има (безусловен) локален екстремум в $(x^0_{k+1}, ..., x^0_n)$.

Th. Ферма $\Rightarrow \nabla\varphi(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) = \mathcal{O}$, т.е. $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{k+p}}(x^0_{k+p}, ..., x^0_n) = 0 \ \forall p \in \{1, ..., n-k\}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+p}}(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0).\frac{\partial f_j}{\partial x_{k+p}}(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) + \frac{\partial g}{\partial x_{k+p}}(x_0)$$