# Записки по ДИС2 КН2 - Лекция 1

23.02.2023

## Малки и големи суми на Дарбу. Сума на Риман. Определен Интеграл на Риман. Критерий за интегруемост по Риман.

**Средно аритметично** $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$

$A(f) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ Средно аритметично на функция в интервал

Нека функцията f е дефинирана в интервала $[a, b]$.
$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b : \{x_i\}$ - разбиване на $[a, b]$;
$d(\tau) = \max\limits_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$ - диаметър на разбиването;
$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n\}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in [1, n]$ - делящи/представителни/контролни точки.

**Сума на Риман**
$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\ a_x$

**Суми на Дарбу**
$m_i := inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
$M_i := sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

Малка сума на Дарбу $s_f(\tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$

Голяма сума на Дарбу $S_f(\tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$

$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

**Lemma 1** *Нека $\tau^*$, $\tau$ са подразбивания на интервала $[a, b]$, такива че $\tau^* \geq \tau$. (тогава ще казваме, Ако $\tau^* \geq \tau$, то $S_f(\tau^*) \geq S_f(\tau)$ и $s_f(\tau^*) \geq S_f(\tau)$.*

**Доказателство**: (Б.О.О.) $\tau^*$ се получава от $\tau$ с прибавянето на една точка. Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и $\tau^* : a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x^* < x_i < ... < x_n = b$

$$
\begin{aligned}
&S_f(\tau) - S_f(\tau^*) = \\
&\sum_{i=1}^{n} \underset{[x_{j-1},x_j]}{sup f}\,(x_j - x_{j-1}) - \\
&\left(\sum_{j=1}^{i-1} \underset{[x_{j-1},x_j]}{sup f}\,(x_j - x_{j-1}) + \underset{[x_{i-1},\,x^*]}{sup f}\,(x^* - x_{i-1}) + \right.\\
&\left.\underset{[x^*,\,x_i]}{sup f}\,(x_i - x^*) + \sum_{j=i+1}^{n} \underset{[x_{j-1},x_j]}{sup f}\,(x_j - x_{j-1})\right) = \\
&\underset{[x_{i-1},\,x_i]}{sup f}\,(x_i - x_{i-1}) - \underset{[x_{i-1},\,x^*]}{sup f}\,(x_* - x_{i-1}) - \underset{[x^*,\,x_{i-1}]}{sup f}\,(x_i - x_*) \geq \\
&\underset{[x_{i-1},\,x_i]}{sup f}\,(x_i - x_{i-1}) - \underset{[x_{i-1},\,x_i]}{sup f}\,(x^* - x_{i-1}) - \underset{[x_{i-1},\,x_i]}{sup f}\,(x_i - x^*) = 0
\end{aligned}
$$

■

Аналогично се пресмята за малките суми на Дарбу ......

**Lemma 2** *Нека $\tau_1\tau_2$ са произволни подразбивания на $[a,b]$.*
*Тогава $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2)$.*

**Доказателство**: Нека $\tau^*$ е по-фино от $\tau_1$ и от $\tau_2$. Очевидно $\tau^*$ съществува и може да се получи като обединение на точките от $\tau_1$ и $\tau_2$. От <u>Lemma 1</u> имаме:

$$
s_f(\tau_1) \leq s_f(\tau^*);\\
S_f(\tau^*) \leq S_f(\tau_2).
$$

$$
[s_f(\tau_1), S_f(\tau_1)] \cap [s_f(\tau_2), S_f(\tau_2)] \neq \varnothing \quad \forall \tau_1, \tau_2 - \text{ подразбивания}
$$

Нека $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ е ограничена.

$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\{S_f(\tau) : \tau \quad \text{подразбиване на } [a,b]\} \quad \leftarrow$добре дефинирано

$\nwarrow$ *Горен интеграл*

$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\{s_f(\tau) : \tau \quad \text{подразбиване на } [a,b]\} \quad \leftarrow$добре дефинирано

$\nwarrow$ *Долен интеграл*

<u>**Lemma**</u>:| $s_f(\tau_1) \leq S_f(\tau_2) \quad \forall \tau_1, \tau_2$ - подразбивания на $[a,b]$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_f(\tau_2) \quad \forall \tau_2$ - подразбиване на $[a,b]$

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ ■

**Def. 1** *Нека $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ е ограничена. Казваме, че $f$ е интегруема по Риман, ако $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, което се нарича **риманов интеграл** на $f$ в $[a,\ b]$ и се означава с $\int_a^b f$ или $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_a^b f(w)\,\mathrm{d}w$ etc.*

**Пример**: Функция на Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ако } x\in\mathbb{J}\cap[0,1]\\ 1, & \text{ако } x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\end{cases}$$

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}\qquad s_f(\tau)=\sum_{i=1}^{n}0.(x_i-x_{i-1})=0\qquad S_f(\tau)=\sum_{i=1}^{n}1.(x_i-x_{i-1})=1$$

**Th. 1** ***(Критерий за интегруемост по Риман)*** *Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е ограничена. Твърдим, че $f$ е интегруема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко епсилон по-голямо от нула съществуват подразбивания $\tau_1\tau_2$ на $[a,b]$, за които $S_f(\tau_1)-s_f(\tau_2)<\varepsilon$. Еквивалентно, за всяко епсилон по-голямо от нула съществува подразбиване на $[a,b]$, за което $S_f(\tau)-s_f(\tau)<\varepsilon$.*

**Доказателство**:
($\Rightarrow$) Нека $\varepsilon>0$ е произволно. Имаме:

$$\int_a^b f+\frac{\varepsilon}{2}\;=\;\overline{\int_a^b} f+\frac{\varepsilon}{2}\;>\;\overline{\int_a^b} f\Rightarrow\exists\tau_1\text{ - подразбиване на }[a,b],\;S_f(\tau_1)<\int_a^b f+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\int_a^b f-\frac{\varepsilon}{2}\;=\;\underline{\int_a^b} f-\frac{\varepsilon}{2}\;<\;\underline{\int_a^b} f\Rightarrow\exists\tau_2\text{ - подразбиване на }[a,b],\;s_f(\tau_2)>\int_a^b f-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$S_f(\tau_1)-s_f(\tau_2)<\left(\int_a^b f+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(\int_a^b f-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

($\Leftarrow$) Допускаме противното:
$\Rightarrow\forall\tau_1,\tau_2:S_f(\tau_1)-s_f(\tau_2)\geq\overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f>0$ - противоречие.
($\Uparrow$) Достатъчно е да положим $\tau_1:=\tau$ и $\tau_1:=\tau$
($\Downarrow$) Нека $\varepsilon>0$. Имаме разбиванията $\tau_1,\tau_2$, за които $S_f(\tau_1)-s_f(\tau_2)<\varepsilon$. Нека $\tau$ е разбиване по-фино от $\tau_1$ и $\tau_2$, т.е. $\tau\geq\tau_1,\tau\geq\tau_2$
$\Rightarrow S_f(\tau)-s_f(\tau)\leq S_f(\tau_1)-s_f(\tau_2)<\varepsilon$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - ограничена $\qquad\tau:a=x_0<x_1<...<x_n=b$
$\omega(f;[a,b])=\sup\{|f(x)-f(y)|:x,y\in[a,b]\}$ - осцилация

$$S_f(\tau)-s_f(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\underbrace{[\sup_{[x_{i-1},x_i]}f-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f]}_{\text{осцилация на }f}(x_i-x_{i-1})$$

**Lemma**: $\omega(f;[a,b])=\sup\limits_{[a,b]}f-\inf\limits_{[a,b]}f$

Доказателство: $x,y\in[a,b]\to f(x)\leq\sup\limits_{[a,b]}f,\quad f(y)\geq\inf\limits_{[a,b]}f$

$$|f(x)-f(y)|\longrightarrow\begin{cases}f(x)-f(y)\leq\sup\limits_{[a,b]}f-\inf\limits_{[a,b]}f\\ f(y)-f(x)\leq\sup\limits_{[a,b]}f-\inf\limits_{[a,b]}f\end{cases}\Rightarrow\omega(f;[a,b])\leq\sup_{[a,b]}f-\inf_{[a,b]}f$$

$\varepsilon > 0 \quad \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f - \varepsilon$

$x_0 \in [a,b], \;\; f(x_0) > \sup\limits_{[a,b]} f - \dfrac{\varepsilon}{2}$

$y_0 \in [a,b], \;\; f(y_0) < \inf\limits_{[a,b]} f + \dfrac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow f(x_0) - f(y_0) > \sup\limits_{[a,b]} f - \inf\limits_{[a,b]} f - \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \tau$ - подразбиване на $[a,b] : \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f;[a,b])(x_i - x - i - 1) < \varepsilon$ ■

**Def. 2** ***Осцилация на функция:*** *Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е ограничена. Осцилация на $f$ в $[a,b]$ дефинираме като:*

$$\omega(f;\; [a,b]) := sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a,b]\}.$$

**Lemma 3** *Осцилацията на функцията $f$ в даден интервал е равна на разликата между супремума и инфимума на функцията в дадения интервал.*

$$\omega(f;\; [a,b]) = \underset{[a,b]}{supf} - \underset{[a,b]}{inf f}$$

**Твърдение 1** *Непрекъснатите функции са интегруеми.*

**Доказателство**: Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - непрекъсната. От Теорема на Вайерщрас следва, че $f$ е ограничена.
Теорема на Кантор $\Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x', x'' \in [a,b], \;\; |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ Взимаме
$\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, за което
$d(\tau) := \max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, ..., n\}\} < \delta$,
Тогава имаме:

$0 \leq S_f(\tau) - s_f(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega(f;[x_{i-1}, x_i])(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a)$

След граничен преход получаваме:

$\lim\limits_{d(\tau)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} w_i(f)\Delta x_i = 0$ и следователно $f$ е интегруема в $[a,b]$. ■

**Твърдение 2** *Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е ограничена и има краен брой точки на прекъсване. Тогава $f$ е интегруема.*

Нека $y_1, y_2, ..., y_k$ са точките на прекъсване на $f$. $\boxed{\eta > 0}$

$C = [a,b] \backslash \left( \bigcup\limits_{i=1}^{k} (y_i - \eta, y_i + \eta) \right) \quad \leftarrow$ обединение на краен брой интервали и $f$ е непрекъснато върху C

Кантор $\Rightarrow \quad \exists \delta > 0 \; \forall x', x'' \in C, |x' - x''| < \delta : |f(x') - f(x'')| < \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$

$\tau : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ такава, че $[x_{i-1}, x_i] \subset C \to x_i - x_{i-1} < \delta$

$[a,b] \cap [x_{i-1}, x_i] = [y_j - \eta, y_j + \eta] \geq 0$ за някое $j \in \{1, ..., k\}$

$M = \sup\limits_{[a,b]} f, \quad m = \inf\limits_{[a,b]} f$

$$S_f(\tau)-s_f(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\omega(f;[x_{i-1},x_i])(x_i-x_{i-1})=\sum_{[x_{i-1},x_i]\subset C}\omega(f;[x_{i-1},x_i])(x_i-x_{i-1})+$$

$$\sum_{j=1}^{k}\omega\underbrace{(f;[y_j-\eta,y_j+\eta])}_{\leq M-m}(\cap[a,b]).2\eta\leq\frac{\eta}{4(b-a)}\sum(x_i-x_{i-1})+(M-m).2\eta.k$$
$$\underbrace{[x_{i-1},x_i]\subset C}_{\leq(b-a)}$$

$$S_f(\tau)-s_f(\tau)\leq\frac{\epsilon}{4\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)}+(M-m)2k.\eta<\varepsilon$$

$$0<\eta<\frac{\varepsilon}{4k(M-m)}$$ ■

**Твърдение 3** *Монотонните функции са интегруеми.*

Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (б.о.о.) растяща $\quad f(a)\leq f(x)\leq f(b)\ \forall x\in[a,b]\Rightarrow f$ - ограничена

$\tau: a=x_0<x_1<...<x_n=b \qquad x\in[x_{i-1},x_i]\Rightarrow f(x_{i-1})\leq f(x)\leq f(x_i)$

$\inf\limits_{[x_{i-1},x_i]}f=f(x_{i-1}),\quad \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]}f=f(x_i)$

$$S-f(\tau)-s_f(\tau)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1})\underbrace{(x_i-x_{i-1})}_{d(\tau)}$$

$$\leq d(\tau).\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))}=d(\tau).(f(b)-f(a))$$

$\boxed{\varepsilon>0}\to$Избираме $\tau$ с $d(\tau)<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}<\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)+1}(f(b)-f(a))<\varepsilon$ ■