

Записки по ДИС2 - Лекция 5

23.03.2023

Несобствени интеграли. Елементарни свойства.

Несобствени интеграли с неотрицателни подинтегрални функции.

Нека разгледаме определения интеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. Подинтегралната функция не е дефинирана в ограничения интервал $[a, b]$ и затова не можем да определим стойността на интеграла с досегашните ни знания. Но имаме добре дефиниран интеграла $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin|_0^{1-\varepsilon} = \arcsin(1-\varepsilon)$. След граничен преход получаваме:

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (\arcsin(1-\varepsilon)) = \frac{\pi}{2}$$

Def. 1 Несобствен интеграл от I-ви род: Нека $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ е интегрируема (аналогично за $f : (-\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$) във всеки интервал от вида $[a, p]$, където $p \geq a$.

Ако съществува границата $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p f(t) dt$ казваме, че $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ е сходящ и пишем $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p f(t) dt$. Ако границата не съществува, интегралът се нарича разсходящ.

Def. 2 Несобствен интеграл от II-ри род: Нека $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ е интегрируема във всеки интервал от $[a, p]$, $p \in [a, b)$. Ако съществува границата $\lim_{\substack{p \rightarrow b \\ p < b}} \int_a^p f(t) dt$,

интегралът $\int_a^b f(t) dt$ се нарича сходящ и $\int_a^b f(t) dt := \lim_{\substack{p \rightarrow b \\ p < b}} \int_a^p f(t) dt$, наричаме го интеграл от II-ри с особеност в b .

Аналогично на **Def. 1** можем да дефинираме несобствен интеграл от I-ви род с особеност в $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt := \lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^a f(t) dt$$

С особеност в долния край на интервала:

$$\int_a^b f(t) dt := \lim_{\substack{p \rightarrow a \\ p > a}} \int_p^b f(t) dt$$

Елементарни свойства на несобствените интеграли

(I) Линеинност

$$\begin{aligned} \text{Нека } \int_a^{+\infty} f(t) dt, \int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ са сходящи} \Rightarrow \\ \int_a^{+\infty} f(t) + g(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt + \int_a^{+\infty} g(t) dt; \\ \lambda \in \mathbb{R} : \int_a^{+\infty} \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ са също сходящи.} \end{aligned}$$

(II) Смяна на променливите

При смяна на променливите можем да минем от собствен в несобствен интеграл и обратно. Тогава ако собственият е сходящ, то несобствения ще е сходящ. Теоремата за смяна на променливите си остава.

(III)

$$c > a : \int_a^{+\infty} f(t) dt - \text{сходящ} \Rightarrow \int_c^{+\infty} f(t) dt - \text{сходящ}$$

(IV) Повече от една особености

Нека f е непрекъснатата, тогава интегралът отляво е сходящ, ако и двата отдясно са сходящи:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt$$

$$\underline{\text{Пример:}} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln t} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\ln t} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln t} + \int_1^2 \frac{dt}{\ln t} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$$

Несобствени интеграли с неотрицателни подинтегрални функции

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx, \quad f \geq 0 \\ \left. \begin{aligned} F(p) &= \int_a^p f(x) dx \\ f \geq 0 &\text{ в } [a, +\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow F - \text{растяща в } [a, +\infty) \\ F(p_2) - F(p_1) = \int_a^{p_2} f(x) dx - \int_a^{p_1} f(x) dx \end{aligned}$$

Lemma 1 Нека $F : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ - растяща. Тогава:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) \text{ съществува} \Leftrightarrow F \text{ е ограничена отгоре в } [a, +\infty)$$

Доказательство:

$$(\Rightarrow) l = \lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) \Rightarrow \exists p_0 \geq a \forall p \geq p_0 : F(p) \in (l-1, l+1) \Rightarrow F(p) < l+1 \forall p \in [a, +\infty)$$

$$a \leq p \leq p_0 \rightarrow F(p) \leq F(p_0) < l+1$$

$$p \geq p_0 \rightarrow F(p) < l+1$$

$$(\Leftarrow) \mathbb{R} \ni l = \sup\{F(p) : p \geq a\}$$

$$\boxed{\varepsilon > 0} \quad l + \varepsilon > \underbrace{l > l - \varepsilon} \Rightarrow \exists p_0 \geq a, F(p_0) > l - \varepsilon \quad (\text{от дефиниция на супремум})$$