Записки по ДИС2 - Лекция 8

20.04.2023

Редици и редове от функции.

$f_n : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
$D' := \{x \in D : \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\}$ - област на (поточкова) сходимост на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$
$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in D'$
$f : D' \to \mathbb{R}$

Def. 1 ***Поточкова граница на*** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$
$f, f_n : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
Казваме, че $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно клони към* f *в* D *(и пишем* $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}$ *), ако*

$$\exists \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

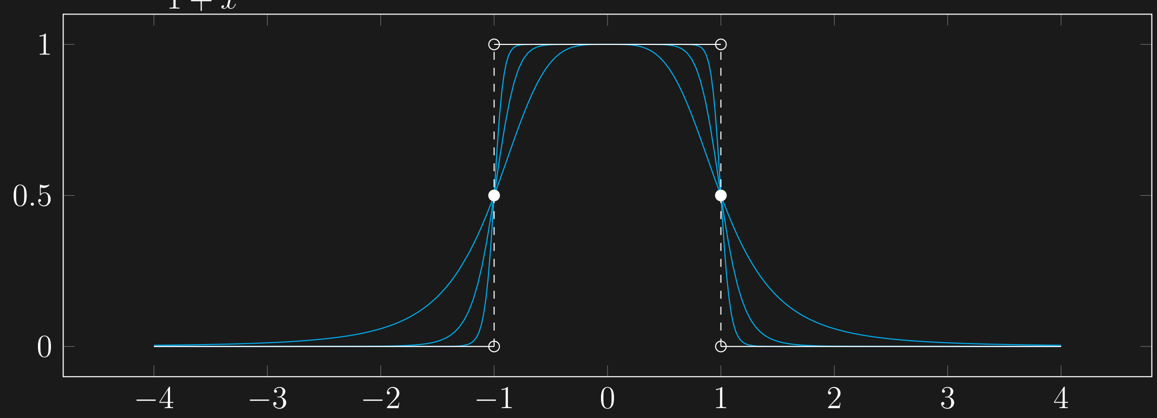
$\boxed{n_0(\varepsilon)}$ n_0 *зависи само от* ε

f *е поточкова граница на* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *в* D*:*

$$\forall x \in D \, \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\text{дефиниция за граница на числови редове}}$$

$\boxed{n_0(\varepsilon, x)}$ n_0 *зависи от* ε *и от* x

$f_n(x) = \dfrac{1}{1 + x^{2n}}$



$\boxed{\text{Наблюдение}}$ $\quad \|f-f_n\|_\infty := \sup_{x\in D} |f_n(x)-f(x)|$

Твърдим, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D точно тогава, когато $\|f-f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0 : \sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$\boxed{\varepsilon>0}$

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon>2\\ f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ в } D\end{array}\right\}\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0\ \underbrace{\forall x\in D : |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}}_{\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad f_n(x)=\dfrac{sin(x)}{nx}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f_n(x)\equiv 0$

$\quad \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\frac{sin\ nx}{n}|\leq\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad 1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\quad x\neq 1$

$s_n(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n=\boxed{\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{1-x}$

Тук ползвахме формулата за геометрична прогресия: $\boxed{s_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$

$|x|<1\Rightarrow D'=(-1,1)$

$\boxed{\text{Фиксираме } n}$ $\quad \sup\limits_{x\in(-1,1)}|s_n(x)-\frac{1}{1-x}|=\sup\limits_{x\in(-1,1)}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}-\frac{1}{1-x}=\sup\limits_{x\in(-1,1)}\frac{|x|^{n+1}}{1-x}=+\infty$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad f_n(x)=x^n(1-x),\quad x\in[0,1]$

$\boxed{\text{Фиксираме } x}$ $\quad x^n(1-x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$

$\boxed{\text{Фиксираме } n}$ $\quad \sup\limits_{x\in[0,1]}|x^n(1-x)-0|=\sup\limits_{x\in[0,1]}(x^n(1-x))$

$(x^n-x^{n+1})'=nx^{n-1}-(n+1)x^n=x^n(\frac{n}{x}-n-1)=x^n(\frac{n-xn-x}{x})$

$n-xn-x=0\Rightarrow x=\boxed{\dfrac{n}{n+1}}$ критична точка

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)^n\left(\frac{1}{n+1}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

$\boxed{\text{Задача}}$ $\quad$ Да се намери областтна на сходимост на $nx^n(1-x)$ в $[0,1]$

Th. 1 *Равномерната граница на редица от непрекъснати функции е непрекъсната функция.*

$f,f_n : D\to\mathbb{R},\quad D\subset\mathbb{R},\quad n\in\mathbb{N},\quad f_n\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D, $x_0\in D$

f_n - непрекъсната в $x_0\quad \forall n\in\mathbb{N}$. $\;$ Тогава f е непрекъсната в x_0.

Доказателство: $|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f_n(x_0)|$
Нека ε - произволно. $f_n \rightrightarrows f$ в $D \Rightarrow \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}}\ \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x)-f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
f_{n_0} е непрекъсната в $x_0 \Rightarrow \boxed{\exists \delta > 0}\ \forall x \in D, |x-x_0| < \delta : |f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
Значи за всяко $x \in D,\ |x-x_0| < \delta$ е в сила $|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_{n_0}(x)|+|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3}+\dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\ \square$

Th. 2 ***Необходимо и достатъчно условие на Коши за равномерна сходимост***

Нека $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Твърдим, че $\exists f : D \to \mathbb{R}$ такава, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D точно тогава, когато $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : |f_n(x)-f_{n+p}(x)| < \varepsilon$. ($n_0$ зависи само от ε)

Доказателство: ($\Rightarrow$)

$$\left.\begin{array}{l} f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ в } D \\ \varepsilon > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \geq n_0,\ p \in \mathbb{N}(n+p \geq n_0),\ x \in D$
$|f_n(x)-f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
($\Leftarrow$) $\boxed{x \in D}$ - фиксираме, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е фундаментална $\to \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - сходяща за всяко $x \in D$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $f : D \to \mathbb{R}$
Да проверим, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D
$\boxed{\varepsilon > 0} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : |f_n(x)-f_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (След граничен преход $p \to +\infty$) $\underline{\forall n \geq n_0\ \forall x \in D} : |f_n(x)-f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\ \square$

За следната теорема ***няма да даваме доказателство:***

Th. 3 ***НДУ за равномерна сходимонст на ред на Коши***
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ f_n : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ *Тогава редът* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *е равномерно сходящ в* $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| = \left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right| < \varepsilon.$

Th. 4 ***Критерий на Вайерщрас***
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ f_n : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ $\quad |f_n(x)| \leq a_n\ \forall x \in D,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *е сходящ.*

Тогава $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *е равномерно (и абсолютно) сходящ в* D.

Доказателство: $\boxed{\varepsilon > 0}$
$\sum n = 1\infty a_n$ е сходящ $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$

Тогава за $n \geq n_0$ - произволно, $p \in \mathbb{N}$, $x \in D$ - произволно, имаме:
$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \left|f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon$. $\square$

Пример $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad x \in [-1,1] \longrightarrow \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходящ.

Th. 5 $\Delta -$ *ограничен интервал,* $f_n : \Delta \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ *- диференцируеми.* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *е равномерно сходящ в* Δ*. Съществува* $x_0 \in \Delta, \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *е сходяща.*
Тогава редицата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *е равномерно сходяща в* Δ*,* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *е диференцируема в* Δ *и* $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in \Delta$.