Записки по ДИС2 - Лекция 12

11.05.2023

Частни производни.Градиент.Производна по направление.

Производната е локална линейна апроксимация на функцията.
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x;\ x_0)$
$\dfrac{R(x;\ x_0)}{|x - x_0|} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$

Геометрична представа

...

Диференцируемост

Def. 1 *U - отворено множество в $\mathbb{R}^n, x_0 \in U \quad f : U \to \mathbb{R}$*
Казваме, че f е диференцируема в x_0, ако съществува линеен оператор $\partial f(x_0)$ (нарича се диференциал на f в т. x_0) такъв, че
$f(x) = f(x_0) + \partial f(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$ или
$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0) - \partial f(x_0)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$

$f(x_0 + h) = f(x_0) + df(x_0)h + o(\|h\|) \quad$ или $\lim\limits_{h \to \mathcal{O}} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0) - df(x_0)(h)}{\|h\|} = 0$

$$
\begin{aligned}
&df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\
&e_1 = (1, 0, ..., 0) \\
&e_2 = (0, 1, ..., 0) \\
&..... \\
&e_i = (0, .., 0, \underset{i\text{-та позиция}}{1}, 0, .., 0) \\
&h = (h_1, h_2, ..., h_n)
\end{aligned}
$$

$$df(x_0)(h) = df(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i . df(x_i)(e_i) = \Big\langle\ (\ df(x_0)(e_1),\ df(x_0)(e_2),\ ...,\ df(x_0)(e_n)\ ),\quad h\ \Big\rangle$$

Частни производни

Def. 2 *Частна производна*

Нека $\{x_0 + \lambda e_i : \lambda \in \mathbb{R}\}$ - права през x_0, успоредна на e_i. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x_0 + \lambda e_i)}{\lambda}$ ще наричаме частна производна на f в т. x_0 по x_i.

Пример: : Частна производна на f в т. x_0 по x_1:
$\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \lim\limits_{\lambda to 0} \dfrac{f(x_1^0 + \lambda, x_2^0, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_n^0)}{\lambda}$, където точката $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$.

Твърдение 1 *Ако f е диференцируема в x_0, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ съществува за всяко $i \in \{1, ..., n\}$. При това $df(x_0)(e_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.*

Доказателство:
$\lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0)}{\lambda} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0) - \partial f(x_0)(\lambda e_i) + \partial f(x_0)(\lambda e_i)}{\lambda} =$
$\lim\limits_{\lambda \to 0} \left[\dfrac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0 - df(x_0)(\lambda e_i))}{\|\lambda e_i\|} .sgn(\lambda) + df(x_0)(e_i) \right] = 0 + df(x_0)(e_i)$

□

Градиент

...

Твърдение 2 ***Диференцируемите функции са непрекъснати***
$U \subset \mathbb{R}^n$ - отворено множество; нека $f : U \to \mathbb{R}$ и f е диференцируема в $x_0 \in U$. Тогава f е непрекъсната в x_0.

Доказателство:
...

Производна по направление

Твърдение 3 *Ако f е диференцируема в x_0, то f има производна в x_0 по всяко направление. При това*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = df(x_0)(l) =< \nabla f(x_0),\ l >$$

Забележка: със символа ∇ ще се отбелязва градиент на функция.

Следствие:
...

Th. 1 *U - отворено множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in U$, $\quad i \in \{1, ..., n\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ съществуват в U и са непрекъснати в x_0. Тогава f е диференцируема в x_0.*

Следствие: ***Гладките функции са диференцируеми***
...