Записки по ДИС2 - Лекция 13

07.06.2023

Теорема за неявната функция. Условни екстремуми. Множители на Лагранж.

Теорема за неявната функция

$F(x, y) = 0$

Def. 1 *Ако $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ такава, че $f(x, f(x)) = 0\ \forall x \in D$, казваме, че f е* ***неявна функция****, определена от $F(x, y) = 0$.*

Пример : $F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2, \quad R > 0, \quad F(x, y) = 0$

$\boxed{x^2 + y^2 = R^2} \to y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R, R]$

$f(x) = \varepsilon(x)\sqrt{R^2 - x^2}, \quad \varepsilon(x) \in \{-1, 1\}$

Нека F е гладка функция, $F(x_0, y_0) = 0$.

$F(x, y) = F(x_0, y_0) + dF(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)$

$F(x, y) = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\|x - x_0, y - y_0\|)$

$\boxed{z = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$

$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2$

$\{(x, y, R(x, y))\} \cap \{z = 0\} \quad F(x, y) = 0$

$0 = F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad \leftarrow$ уравнение на допирателна към $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$ в т. (x_0, y_0)

Th. 1 ***Теорема за неявните функции***

Нека U е отворено подмножество на $\mathbb{R}^2$. $F : U \to \mathbb{R},\ F$ е непрекъсната. F'_y съществува и е непрекъсната в U, $(x_0, y_0) \in U,\ F(x_0, y_0) = 0,\ F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогава съществуват $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такива, че:

(а) ***Съществува единствена*** *функция $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ неявно зададена от уравнението $F(x, y) = 0$ (т.е. $F(x, f(x)) = 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$).*

(б) Така определена f е непрекъсната. при това, ако F'_x съществува и е непрекъсната в U, то f е диференцируема в x_0 и $f'(x_0) = -\dfrac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.

Доказателство:

(Б.о.о.) $F'_y(x_0, y_0) > 0 \quad F'_y$ - непрекъсната $\Rightarrow$ съществува V - околност на $(x_0, y_0),\ V \subset$

U такава, че $F'_y(x,y) > 0\ \forall (x,y) \in V$
$\Rightarrow F(x_0, \textbf{.})$ е строго растяща в околност $(y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ на y_0
$\Rightarrow F(x_0, y_0-\varepsilon) < 0,\ F(x_0, y_0+\varepsilon) > 0\ (F(x_0,y_0)=0)$
$\Rightarrow$ съществува $\delta > 0$ такова, че:
(а) $[x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon] \subset V \subset U$
(б) $F(x, y_0-\varepsilon) < 0\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$
(в) $F(x, y_0+\varepsilon) > 0\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$

$x_1 \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \to F(x_1, \textbf{.})$ - строго растяща в $[y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$
$F(x_0, y_0-\varepsilon) < 0, F(x_1, y_0+\varepsilon) > 0$ - непрекъсната; ползваме Теорема на Болцано
Съществува единствено $y_1 \in (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$ с $F(x_1,y_1)=0$. Полагаме $f(x_1)=y_1$
$\forall \varepsilon > 0$ (достатъчно малко)
$\exists \delta > 0$ такова, че за всяко $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ е в сила $f(x) \in (f(x_0)-\varepsilon, f(x_0)+\varepsilon)$ т.е. f е непрекъсната в x_0.
$x_1 \in (x_0-\delta, x_0+\delta),\ y_1 = f(x_1)$
Същата конструкция около (x_1, y_1) ще даде непрекъснатост на f в x_1. .... (Общ случай)

Условни екстремуми

$M \subset \mathbb{R}^n\ f: M \to \mathbb{R}^n$

Def. 2 *Казваме, че $x_0 \in M$ е точка на* ***локален условен минимум*** *за f, ако съществува околност U на x_0 такава, че за всяка точка $x \in U \cap M$ да е в сила $f(x) \geq f(x_0)$.*

Def. 3 *Казваме, че $x_0 \in M$ е точка на* ***локален условен максимум*** *за f, ако съществува околност U на x_0 такава, че за всяка точка $x \in U \cap M$ да е в сила $f(x) \leq f(x_0)$.*

Множители на Лагранж

Нека U - отворено подмножество на $\mathbb{R}^n$, $F: U \to \mathbb{R}^k$, F - гладка, $M = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = \mathcal{O}\}$.

M се състои от решенията на системата: $\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ F_k(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \qquad x_0 \in U,\ F(x_0) = \mathcal{O}$

Казваме, че $F_1, ..., F_k$ са независими в x_0, ако матрицата:
$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0) \\ .... & .... & .... & .... \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0) & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_2}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$ има пълен ранг (т.е. рангът ѝ е k).

Th. 2 ***Множители на Лагранж*** *Нека $U \subset R^n$, U - отворено, $k \leq n$, $g, F_1, F_2, ..., F_f : U \to \mathbb{R}$ са гладки. Нека $x_0 \in U$, $F_1(x_0) = ... = F_k(x_0) = 0$ и $F_1, ..., F_k$ са независими в x_0. Нека g има* ***локален условен екстремум*** *върху $M = \{x \in \mathbb{R}^n :$*

$F_1(x) = ... = F_k(x) = 0\}$ *в т.* x_0. *Тогава съществуват* $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ *такива, че* $\nabla g(x_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla f_i(x_0)$.

$\Phi(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_k) = g(x_1, ..., x_n)$ - функция на Лагранж

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x_1, ..., x_n)$

Стационарни точки на Φ:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j}(x, \lambda) = \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(x) - \sum\limits_{=1}^{k} \lambda_i \dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = 0, j \in \{1, ..., j\} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}(x, \lambda) = -F_i(x) = 0, \ i \in \{1, ..., k\} \end{cases}$$

Имаме $n+k$ уравнение и $n+k$ неизвестни, следователно имаме пълен шанс да решим системата. Надяваме се да имаме краен брой решения, но това не винаги е възможно. Неизвестните съответно са $x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_k$.

Доказателство: на Теоремата на Лагранж

Упътване: свеждаме към Теоремата на Ферма чрез Теоремата за неявните функции.

$$rg \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ ..... & ..... & ..... \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} (x_0) = k \quad \text{(Б.о.о.) } det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ ..... & ..... & ..... \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} (x_0) \neq 0$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ F_k(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n) = 0 \end{cases} \text{Според Теоремата за неявните функции имаме, че:}$$

Съществуват $\delta > 0, \ \varepsilon > 0$ такива, че съществува единствено(при това гладко) изображение $f : \underbrace{B_\delta(x^0_{k+1}, ..., x^0_n)}_{n-k\text{-мерно}} \longrightarrow \underbrace{B_\varepsilon(x^0_1, ..., x^0_k)}_{k-\text{мерно}}; \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$ такова, че:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{k+1}, ..., x_n) \\ .... \\ x_k = f_k(x_{k+1}, ..., x_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ F_k(x_1, ..., x_n) = 0 \end{cases} \leftarrow \text{ за } \begin{matrix} (x_1, ..., x_k) \in B_\varepsilon(x^0_1, ..., x^0_k); \\ (x_{k+1}, ..., x_n) \in B_\delta(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) \end{matrix}$$

Нека $V = B_\varepsilon(x^0_1, ..., x^0_k) \times B_\delta(x^0_{k+1}, ..., x^0_n)$ - околност на x_0, $V \subset U$.

$\varphi(x_{k+1}, ..., x_n) = g(f_1(x_{k+1}, ..., x_n), ..., f_k(x_{k+1}, ..., x_n), x_{k+1}, ..., x_n)$

$\varphi : B_\delta(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f_1(x_{k+1}, ..., x_n), ..., f_k(x_{k+1}, ..., x_n), x_{k+1}, ..., x_n) \in M$; g има условен екстремум в x_0 върху $M \Rightarrow \varphi$ има (безусловен) локален екстремум в $(x^0_{k+1}, ..., x^0_n)$.

Th. Ферма $\Rightarrow \nabla \varphi(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) = \mathcal{O}$, т.е. $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_{k+p}}(x^0_{k+p}, ..., x^0_n) = 0 \ \forall p \in \{1, ..., n-k\}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_{k+p}}(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial x_j}(x_0) . \frac{\partial f_j}{\partial x_{k+p}}(x^0_{k+1}, ..., x^0_n) + \frac{\partial g}{\partial x_{k+p}}(x_0)$$