Записки по ДИС2 - Лекция 8

20.04.2023

Редици и редове от функции.

$f_n : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$
$D' := \{x \in D : \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\}$ - област на (поточкова) сходимост на $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$
$f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in D'$
$f : D' \to \mathbb{R}$

Def. 1 ***Поточкова граница на*** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$
$f, f_n : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$
Казваме, че $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно клони към* f *в* D *(и пишем* $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}$ *), ако*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

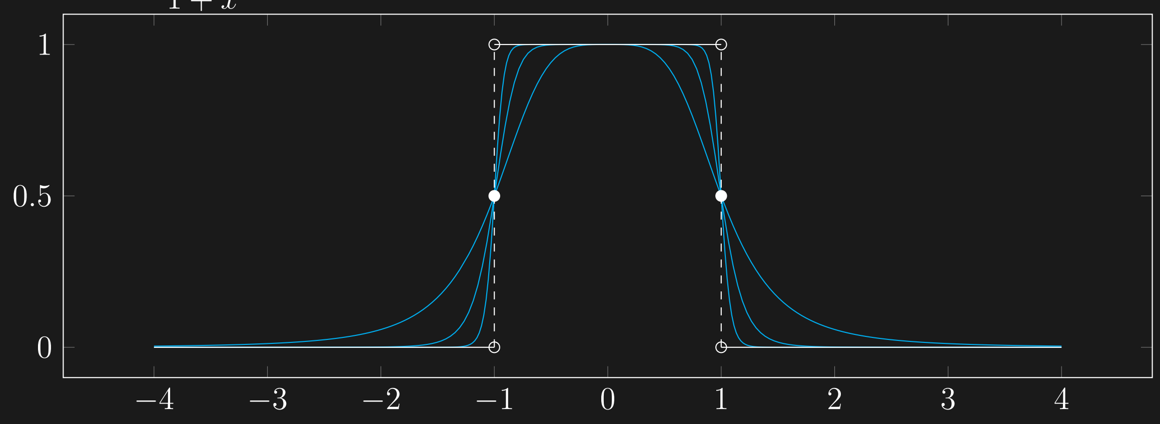
$\boxed{n_0(\varepsilon)}$ n_0 *зависи само от* ε

f *е поточкова граница на* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *в* D*:*

$$\forall x \in D\, \underbrace{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon}_{\text{дефиниция за граница на числови редове}}$$

$\boxed{n_0(\varepsilon, x)}$ n_0 *зависи от* ε *и от* x

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^{2n}}$$



$\boxed{\text{Наблюдение}}$ $\quad \|f - f_n\|_\infty := \sup\limits_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$

Твърдим, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D точно тогава, когато $\|f - f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\boxed{\varepsilon > 0}$

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon > 2 \\ f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ в } D \end{array}\right\} \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ \underbrace{\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}}_{\sup\limits_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon}$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{\sin(x)}{nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \equiv 0$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\tfrac{\sin nx}{n}\right| \leq \tfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...\ , \quad x \neq 1$

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \boxed{\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1 - x}$$

Тук ползвахме формулата за геометрична прогресия: $\boxed{s_n = \dfrac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}}$

$|x| < 1 \Rightarrow D' = (-1, 1)$

$\boxed{\text{Фиксираме } n}$ $\quad \sup\limits_{x\in(-1,1)} |s_n(x) - \frac{1}{1-x}| = \sup\limits_{x\in(-1,1)} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \sup\limits_{x\in(-1,1)} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty$

$\boxed{\text{Пример}}$ $\quad f_n(x) = x^n(1 - x), \quad x \in [0, 1]$

$\boxed{\text{Фиксираме } x}$ $\quad x^n(1 - x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\boxed{\text{Фиксираме } n}$ $\quad \sup\limits_{x\in[0,1]} |x^n(1 - x) - 0| = \sup\limits_{x\in[0,1]} (x^n(1 - x))$

$$(x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n + 1)x^n = x^n(\tfrac{n}{x} - n - 1) = x^n(\tfrac{n-xn-x}{x})$$

$n - xn - x = 0 \Rightarrow x = \boxed{\dfrac{n}{n + 1}}$ критична точка

$$\left(\frac{n}{n + 1}\right)^n \left(\frac{1}{n + 1}\right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n} + 1}\right)^n \left(\frac{1}{n + 1}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\boxed{\text{Задача}}$ $\quad$ Да се намери областтна на сходимост на $nx^n(1 - x)$ в $[0, 1]$

Th. 1 *Равномерната граница на редица от непрекъснати функции е непрекъсната функция.*

$f, f_n : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D, $x_0 \in D$

f_n - непрекъсната в $x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\quad$ Тогава f е непрекъсната в x_0.

Доказателство: $|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$
Нека ε - произволно. $f_n \rightrightarrows f$ в $D \Rightarrow \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}}\ \forall n \ge n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
f_{n_0} е непрекъсната в $x_0 \Rightarrow \boxed{\exists \delta > 0}\ \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$
Значи за всяко $x \in D,\ |x - x_0| < \delta$ е в сила $|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$ ■

Th. 2 ***Необходимо и достатъчно условие на Коши за равномерна сходимост***

Нека $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Твърдим, че $\exists f : D \to \mathbb{R}$ такава, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D точно тогава, когато $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$. ($n_0$ зависи само от ε)

Доказателство: $(\Rightarrow)$

$$\left.\begin{array}{l} f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \text{ в } D \\ \varepsilon > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}}\ \forall n \ge n_0\ \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \ge n_0,\ p \in \mathbb{N}(n + p \ge n_0),\ x \in D$
$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
$(\Leftarrow)$ $\boxed{x \in D}$ - фиксираме, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ е фундаментална $\to \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - сходяща за всяко $x \in D$, $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $f : D \to \mathbb{R}$
Да проверим, че $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ в D
$\boxed{\varepsilon > 0} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (След граничен преход $p \to +\infty$) $\underline{\forall n \ge n_0\ \forall x \in D} : |f_n(x) - f(x)| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$ ■

За следната теорема ***няма да даваме доказателство:***

Th. 3 ***НДУ за равномерна сходимонст на ред на Коши***
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ f_n : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ *Тогава редът* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *е равномерно сходящ в* $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in D : \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| = \left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon.$

Th. 4 ***Критерий на Вайерщрас***
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ f_n : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ $|f_n(x)| \le a_n\ \forall x \in D,$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *е сходящ.*

Тогава $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *е равномерно (и абсолютно) сходящ в* D.

Доказателство: $\boxed{\varepsilon > 0}$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \ge n_0\ \forall p \in \mathbb{N} : \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i\right| < \varepsilon$

Тогава за $n \geq n_0$ - произволно, $p \in \mathbb{N}$, $x \in D$ - произволно, имаме:
$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \left|f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon.$ ■

Пример $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad x \in [-1,1] \longrightarrow \left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - сходящ.

Th. 5 $\Delta -$ *ограничен интервал,* $f_n : \Delta \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ - *диференцируеми.* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *е равномерно сходящ в* Δ. *Съществува* $x_0 \in \Delta, \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ *е сходяща.*
Тогава редицата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *е равномерно сходяща в* Δ, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ *е диференцируема в* Δ *и* $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in \Delta.$