Записки по ДИС2 - Лекция 5

23.03.2023

Несобствени интеграли. Елементарни свойства. Несобствени интеграли с неотрицателни подинтегрални функции.

Нека разгледаме определения интеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$. Подинтегралната функция не е дефинирана в ограниченият интервал $[a, b]$ и затова не можем да определим стойността на интеграла с досегашните ни знания. Но имаме добре дефиниран интеграла $\displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = arcsin\Big|_0^{1-\varepsilon} = arcsin(1-\varepsilon)$. След граничен преход получаваме:

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (arcsin(1-\varepsilon)) = \frac{\pi}{2}$$

Def. 1 ***Несобствен интеграл от I-ви род***: *Нека $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ е интегруема (аналогично за $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$) във всеки интервал от вида $[a, p]$,където $p \geq a$. Ако съществува границата $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \int_a^p f(t)\,\mathrm{d}t$ казваме, че $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ е сходящ и пишем $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to\infty} \int_a^p f(t)\,\mathrm{d}t$. Ако границата не съществува, интегралът се нарича разсходящ.*

Def. 2 ***Несобствен интеграл от II-ри род***: *Нека $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ е интегруема във всеки интеграл от $[a, p]$, $p \in [a, b)$. Ако съществува границата $\displaystyle\lim_{\substack{p\to b\\ p<b}} \int_a^p f(t)\,\mathrm{d}t$, интегралът $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ се нарича сходящ и $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{\substack{p\to b\\ p<b}} \int_a^p f(t)\,\mathrm{d}t$, наричаме го интеграл от II-ри с особеност в b.*

Аналогично на **Def. 1** можем да дефинираме несобствен интеграл от I-ви род с особеност в $-\infty$:

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{p\to -\infty} \int_p^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

С особеност в долния край на интервала:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{\substack{p\to a\\ p>a}} \int_p^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Елементарни свойства на несобствените интеграли

(I) Линейност

$$\text{Нека } \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t, \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t \;\text{ са сходящи} \Rightarrow$$
$$\int_a^{+\infty} f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t;$$
$$\lambda \in \mathbb{R} : \int_a^{+\infty} \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \;\text{ са също сходящи.}$$

(II) Смяна на променливите

При смяна на променливите можем да минем от собствен в несобствен интеграл и обратно. Тогава ако собственият е сходящ, то несобствения ще е сходящ. Теоремата за смяна на променливите си остава.

(III)

$$c > a : \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ - сходящ } \Rightarrow \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ - сходящ}$$

(IV) Повече от една особености

Нека f е непрекъсната, тогава интегралът отляво е сходящ, ако и двата отдясно са сходящи:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Пример:| $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + \int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

Несобствени интеграли с неотрицателни подинтегрални функции

$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x, \ \int_a^{b} f(x)\,\mathrm{d}x, \ f \geq 0$

$$\left.\begin{aligned} F(p) &= \int_a^{p} f(x)\,\mathrm{d} \\ f \geq 0 &\quad \text{в } [a, +\infty) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F \text{ - растяща в } [a, +\infty)$$

$$F(p_2) - F(p_1) = \int_a^{p_2} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{p_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Lemma 1 *Нека $F : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ - растяща. Тогава:*

$$\lim_{p \to +\infty} F(p) \textit{ съществува} \Leftrightarrow F \textit{ е ограничена отгоре в } [a, +\infty)$$

Доказателство:

$(\Rightarrow)\ l = \lim\limits_{p \to +\infty} F(p) \ \Rightarrow\ \exists p_0 \geq a\ \forall p \geq p_0 : F(p) \in (l-1, l+1) \Rightarrow\ F(p) < l+1\ \forall p \in [a, +\infty)$

$\quad a \leq p \leq p_0 \to F(p) \leq F(p_0) < l+1$

$\quad p \geq p_0 \to F(p) < l+1$

$(\Leftarrow)\ \mathbb{R} \ni l = \sup\{F(p) : p \geq a\}$

$\quad \boxed{\varepsilon > 0} \quad l + \varepsilon > \underbrace{l > l - \varepsilon} \Rightarrow \exists p_0 \geq a,\ F(p_0) > l - \varepsilon\ quad$(от дефиниция на супремум)