Записки по ДИС2 - Лекция 13

25.05.2023

Диференциране на композиция.

Преговор

Функции от вида $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$f : U \to \mathbb{R},\ U \subset \mathbb{R}^n -$ отворено, $x_0 \in U,\ df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} -$ линеен оператор такъв, че: $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + \varphi(x, x_0)$ и $\dfrac{\varphi(x, x_0)}{\|x - x_0\|} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$. От предната лекция имаме следните твърдения:

Твърдение 1 *Ако f е диференцируема в x_0, то частните производни* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim\limits_{\lambda \to 0} \dfrac{f(x_0 + \lambda e_i) - f(x_0)}{\lambda}$, $i \in \{1, .., n\}$ *съществуват и* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = df(x_0)(e_i)$.

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \qquad df(x_0)(h) = \langle \nabla f(x_0), h \rangle$$

Твърдение 2 *Ако частните производни* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ *съществуват в U и са непрекъснати в x_0, то f е диференцируема в x_0.*

Функции от вида $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$f : U \to \mathbb{R}^m,\ U \subset \mathbb{R} - \text{ отворено},\ x_0 \in U,\ f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

Твърдение 3 *f е диференцируема в x_0, ако $f(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$, където $df(x_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ - линеен оператор $\Leftrightarrow$ f_i е диференцируема в x_0 за всяко $i = \overline{1, m}$. Тоест:*

$$df(x_0)(h) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{pmatrix} h = f'(x_0)h, \ \text{т.е.} \qquad f'(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ ..... & ..... & ..... \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & ..... & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}_{(n \times m)}$$

Диференциране на композиция

Нека $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n-$ отворено, $\quad y_0 = f(x_0) \in V \subset \mathbb{R}^m-$ отворено.
$f : U \to V \quad g : V \to \mathbb{R}^k$

Твърдение 4 *Нека $g \circ f : U \to \mathbb{R}^k, \quad f, g$ - диференцируеми в x_0.*
Тогава $g \circ f$ е диференцируема в x_0 и $d(g \circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$.

Доказателство: *To be added...*

Инвариантност на формата на диференциала