Записки по ДИС2 КН2 - Лекция 2

02.03.2023

Класове интегруеми функции.

Твърдение 1 *Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е ограничена и имаме произволно разбиване на интервала, в който е дефинирана. $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Тогава $s_f(\tau) = inf\{\sigma_f(\tau,\ \xi) : \xi$ - представителна точка$\}$; $S_f(\tau) = sup\{\sigma_f(\tau,\ \xi) : \xi$ - представителна точка$\}$.*

Доказателство: ......

Def. 1 *Нека $d(\tau) := max\{x_i - x_{i-1} : i \in \{1, ..., n\}\}$ и $\tau : a = x_0 < ... < x_n = b$. Казваме, че сумите на Риман за $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ имат граница $I \in \mathbf{R}$, когато $d(\tau)$ клони към 0, ако за всяко $\varepsilon \geq 0$ съществува $\delta \geq 0$, такова че за всеки избор на подразбиване τ на $[a, b]$ с $d(\tau) \leq \delta$ и за всеки избор на предствавителна точка е в сила $|\sigma_f(\tau;\ \xi) - I| \leq \varepsilon$.*

Lemma 1 *Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ е подразбиване на $[a, b]$. Нека $\tau^* \geq \tau$, τ^* се получава от τ чрез прибавянето на k точки. Тогава $0 \leq S_f(\tau) - S_f(\tau^*) \leq ....$ Нека $m := \inf_{[a,b]} f$ и $M := \sup_{[a,b]} f$*

Th. 1 *Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и нека съществува $\lim\limits_{x\to\infty} \sigma_f(\tau;\ \xi) = I$. Тогава f е ограничена, f е интегруема по Риман и $\displaystyle\int_a^b f = I$.*

Доказателство: Нека $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $\epsilon > 0$ е достатъчно голямо. Нека $\epsilon = 3 > 0$ е фиксирано, откъдето следва:
$\exists\delta > 0 \forall\tau, d(\tau) < \delta \forall\xi - \tau : |\sigma_f(\tau,\ \xi) - I| < 3$.
Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ е такова, че $d(\tau) < \delta$. Тогава за всеки избор на $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]\,,\ i \in \{1, ..., n\}$ е в сила

$$I - 3 < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + 3$$

Достатъчно е да докажем, че f е ограничена в $[x_{i-1},\ x_i]$.
Фиксираме $\xi_j \in [x_{j-1},\ x_j]\,,\ j \neq i$.
....

Th. 2 *Ако $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е интегруема по Риман (следователно и f е ограничена), то съществува $\lim\limits_{x\to\infty} \sigma_f(\tau;\ \xi) = \int_a^b f$.*

Основни свойства на интеграла

(I) Линейност
$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ интегруеми $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f + g, \lambda f$ са интегруеми и
$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
$\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$
$\sigma_{f+g}(\tau, \xi) = \sigma_f(\tau, \xi) + \sigma_f(\tau, \xi)$
$\sigma_{\lambda f}(\tau, \xi) = \lambda\sigma_f(\tau, \xi)$
$\boxed{\epsilon > 0}$, $\lim\limits_{d(\tau)\to 0} \sigma_f(\tau, \xi) = \int_a^b f \longrightarrow \exists\delta_1 > 0\ \forall\tau, d(\tau) < \delta_1\ \forall\xi$ - представителна точка за τ :
$|\sigma_f(\tau, \xi) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2}$
$S_g \to \exists\delta_2 > 0\ \forall\tau, d(\tau) < \delta_2\ \forall\xi$ - представителна точка за $\tau : |\sigma_g(\tau, \xi) - \int_a^b g| < \frac{\varepsilon}{2}$
$\delta := \min \delta_1, \delta_2 > 0 \quad \tau$ - подразбиване, $d(\tau) < \delta \quad \xi$представителна точна за$\tau$
$$\Rightarrow \Big|\sigma_{f+g}(\tau, \xi) - (\int_a^b f + \int_a^b g)\Big| = \Big|\Big(\sigma_f(\tau, \xi) - \int_a^b f\Big) + \Big(\sigma_g(\tau, \xi) - \int_a^b g\Big)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(II) Адитивност $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f$ - интегруема, $< c < b$
Тогава $f\Big|_{[a,c]}, f\Big|_{[c,b]}$ са интегруеми и $\int_a^b f = \int_a^c + \int_c^b f$
f - интегруема $\Rightarrow$ Съществува τ - подразбиване на $[a, b]$, $S_f(\tau) - s_f(\tau) < \varepsilon$
$\boxed{\varepsilon > 0}$
$\tau^* = \tau \cup \{c\} \Rightarrow S_f(\tau^*) - s_f(\tau^*) < \varepsilon$, където $\tau^* = \tau_1 \cup \tau_2$, τ_1 - подразбиване на $[a, c]$, τ_2 - подразбиване на $[c, b]$
$S_f(\tau^*) = S_f(\tau_1) + S_f(\tau_2)$, $s_f(\tau^*) = s_f(\tau_1) + s_f(\tau_2)$
$S - f(\tau^*) - s_f(\tau^*) = \Big[S_f(\tau_1) - s_f(\tau_1)\Big] + \Big[S_f(\tau_2) - s_f(\tau_2)\Big]$
τ_n - подразбиване на $[a, b]$, съдържащо c като деляща точка, ξ_n - представителна точка за τ_n, $d(\tau_n) \longrightarrow 0$
$\tau_n = \tau_n^{'} \cup \tau_n^{''}$, $\tau_n^{'}$- подразбиване на $[a, c]$, $\tau_n^{''}$ - подразбиване на $[c, b]$
$$\begin{array}{ccccc} \sigma_f(\tau_n, \xi_n) & = & \sigma_f(\tau_n^{'}, \xi_n^{'}) & + & \sigma_f(\tau_n^{''}, \xi_n^{''}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ \int_a^b f & & \int_a^c f & & \int_c^b f \end{array}$$

<u>Уговорка</u>: Нека $f : \Delta \to \mathbb{R},\ \Delta$ - интервал, $a, b \in \Delta$, $a < b$, тогава:
$\int_a^a f := 0 \quad \int_a^b := -\int_b^a$