Записки по ДИС2 - Лекция 2

22 марта 2023 г.

Th. 1 *Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и нека съществува $\lim\limits_{x\to\infty} \sigma_f\,(\tau;\ \xi) = I$. Тогава f е ограничена, f е интегруема по Риман и $\int_a^b f = I$.*

Доказателство: Нека $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ и $\epsilon > 0$ е достатъчно голямо. Нека $\epsilon = 3 > 0$ е фиксирано, откъдето следва:
$\exists\delta > 0 \forall\tau, d(\tau) < \delta \forall\xi - \tau : |\sigma_f\,(\tau,\ \xi) - I| < 3$.
Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ е такова, че $d(\tau) < \delta$. Тогава за всеки избор на $\xi_i \in [x_{i-1},\ x_i]\,,\ i \in \{1, ..., n\}$ е в сила

$$I - 3 < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) < I + 3$$

Достатъчно е да докажем, че f е ограничена в $[x_{i-1},\ x_i]$.
Фиксираме $\xi_j \in [x_{j-1},\ x_j]\,,\ j \neq i$.
....

Th. 2 *Ако $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ е интегруема по Риман (следователно и f е ограничена), то съществува $\lim\limits_{x\to\infty} \sigma_f\,(\tau;\ \xi) = \int_a^b f$.*