

# Записки по ДИС2 - Лекция 8

20.04.2023

## Редици и редове от функции.

$f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$   
 $D' := \{x \in D : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$  - област на (поточкова) сходимост на  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$   
 $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), x \in D'$   
 $f : D' \rightarrow \mathbb{R}$

**Def. 1 Поточкова граница на  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$**

$f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

Казваме, че  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно клони към  $f$  в  $D$  (и пишем  $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ ), ако

$$\exists \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

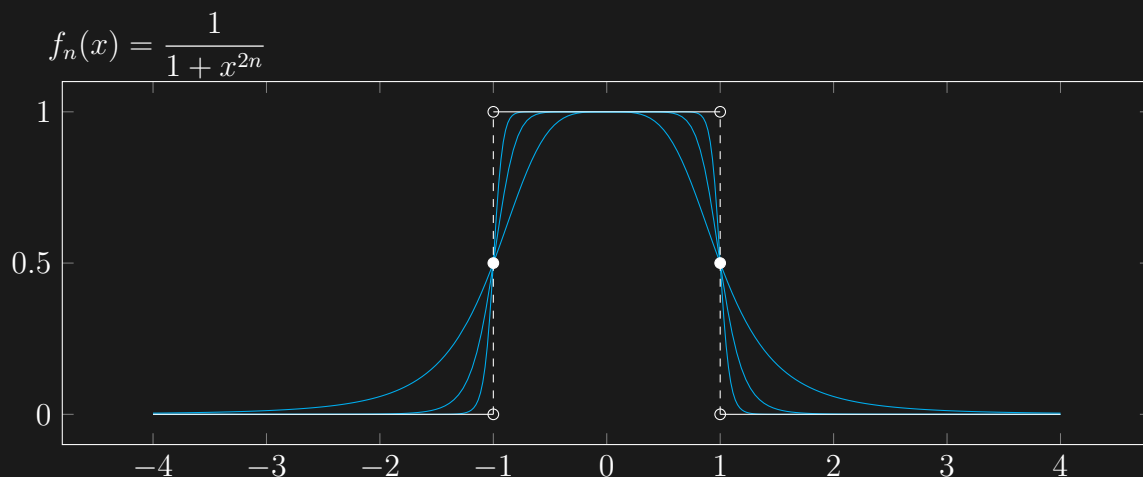
$n_0(\varepsilon)$   $n_0$  зависи само от  $\varepsilon$

$f$  е поточкова граница на  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  в  $D$ :

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

дефиниция за граница на числови редове

$n_0(\varepsilon, x)$   $n_0$  зависи от  $\varepsilon$  и от  $x$



Наблюдение  $\|f - f_n\|_\infty := \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$   
 Твърдим, че  $f_n \rightrightarrows f$  в  $D$  точно тогава, когато  $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\boxed{\varepsilon > 0}$$

$$f_n \rightrightarrows f \text{ в } D \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon > 2 \\ \end{array} \right\} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \underbrace{\forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}}_{\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon}$$

Пример  $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{nx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) \equiv 0$   
 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Пример  $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad x \neq 1$   
 $s_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x}$

Тук ползвахме формулата за геометрична прогресия:  $s_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$

$$|x| < 1 \Rightarrow D' = (-1, 1)$$

Фиксираме  $n$   $\sup_{x \in (-1, 1)} |s_n(x) - \frac{1}{1-x}| = \sup_{x \in (-1, 1)} \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \sup_{x \in (-1, 1)} \frac{|x|^{n+1}}{1-x} = +\infty$

Пример  $f_n(x) = x^n(1 - x), \quad x \in [0, 1]$

Фиксираме  $x$   $x^n(1 - x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Фиксираме  $n$   $\sup_{x \in [0, 1]} |x^n(1 - x) - 0| = \sup_{x \in [0, 1]} (x^n(1 - x))$   
 $(x^n - x^{n+1})' = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^n(\frac{n}{x} - n - 1) = x^n(\frac{n - xn - x}{x})$

$n - xn - x = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$  критична точка

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n} + 1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Задача Да се намери областна на сходимост на  $nx^n(1 - x)$  в  $[0, 1]$

**Th. 1** *Равномерната граница на редица от непрекъснати функции е непрекъсната функция.*

$f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f_n \rightrightarrows f \text{ в } D, \quad x_0 \in D$   
 $f_n$  - непрекъсната в  $x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Тогава  $f$  е непрекъсната в  $x_0$ .

**Доказателство:**  $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x_0)|$   
 Нека  $\varepsilon$  - произволно.  $f_n \rightrightarrows f$  в  $D \Rightarrow \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$   
 $f_{n_0}$  е непрекъсната в  $x_0 \Rightarrow \boxed{\exists \delta > 0} \forall x \in D, |x - x_0| < \delta : |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$   
 Значи за всяко  $x \in D$ ,  $|x - x_0| < \delta$  е в сила  $|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ .  $\square$

**Th. 2** *Необходимо и достатъчно условие на Коши за равномерна сходимост*

Нека  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Твърдим, че  $\exists f : D \rightarrow \mathbb{R}$  такава, че  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  в  $D$  точно тогава, когато  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$ . ( $n_0$  зависи само от  $\varepsilon$ )

**Доказателство:**  $(\Rightarrow)$

$$\left. \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ в } D \\ \varepsilon > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}} \forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$n \geq n_0$ ,  $p \in \mathbb{N} (n + p \geq n_0)$ ,  $x \in D$

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$(\Leftarrow)$   $\boxed{x \in D}$  - фиксираме,  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$  е фундаментална  $\rightarrow \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  - сходяща за всяко  $x \in D$ ,  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Да проверим, че  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$  в  $D$

$$\boxed{\varepsilon > 0} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D : |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (След граничен}$$

$$\text{преход } p \rightarrow +\infty) \underline{\forall n \geq n_0 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.} \square$$

За следната теорема **няма да даваме доказателство:**

**Th. 3** *НДУ за равномерна сходимост на ред на Коши*

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  Тогава редът  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  е равномерно сходящ в  $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} \forall x \in D : \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x) \right| = |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ .

**Th. 4** *Критерий на Вайерщрас*

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ,  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$   $|f_n(x)| \leq a_n \forall x \in D$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  е сходящ.

Тогава  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  е равномерно (и абсолютно) сходящ в  $D$ .

**Доказателство:**  $\boxed{\varepsilon > 0}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ е сходящ} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N} : \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \varepsilon$$

Тогава за  $n \geq n_0$  - произволно,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $x \in D$  - произволно, имаме:

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon. \quad \square$$

Пример  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad x \in [-1, 1] \longrightarrow \left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ - сходящ.} \right.$

**Th. 5**  $\Delta$  – ограничен интервал,  $f_n : \Delta \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  - диференцируеми.  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  е равномерно сходящ в  $\Delta$ . Съществува  $x_0 \in \Delta, \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$  е сходяща.

Тогава редицата  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  е равномерно сходяща в  $\Delta$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  е диференцируема в

$$\Delta \text{ и } \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x) \quad \forall x \in \Delta.$$