

# Graf

STIMKK106 Matematika Diskrit

---

**Made Prastha Nugraha, S.Kom., M.Kom.**

**[prasthanugraha@idbbali.ac.id](mailto:prasthanugraha@idbbali.ac.id)**





# Last Week Recap

# Last Week Recap

- Graf merupakan suatu diagram yang memuat informasi tertentu jika diinterpretasikan secara tepat.
- Graf digunakan sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti.
- Suatu Graf  $G$  yang terdiri dari 2 himpunan berhingga dimana  $G = (V, E)$  dapat dijabarkan sebagai berikut:
  - $V$  = Himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (vertices) =  $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$
  - $E$  = Himpunan sisi (edges) yang menghubungkan sepasang simpul =  $\{E_1, E_2, E_3, \dots, E_n\}$

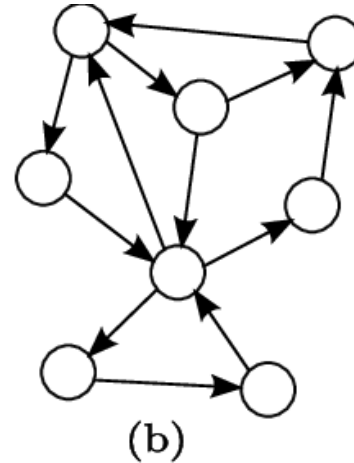
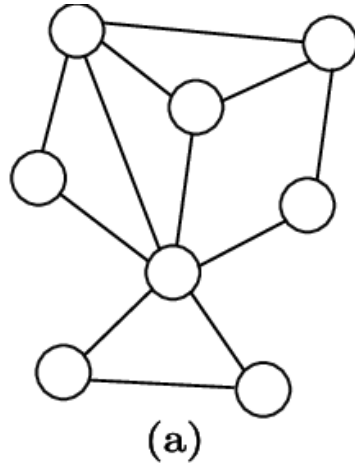
## Last Week Recap

- Setiap garis berhubungan dengan satu atau dua titik, yang dapat disebut sebagai titik ujung.
- Garis yang berhubungan dengan satu titik disebut loop.
- Dua garis yang berbeda yang menghubungkan titik yang sama disebut garis paralel.
- Dua titik dapat dikatakan berhubungan (adjacent) jika ada garis yang menghubungkan keduanya.
- Titik yang tidak memiliki garis yang berhubungan dengannya disebut titik terasing (isolating point).
- Graf yang tidak memiliki titik disebut graf kosong.



## Last Week Recap

- Jika semua garis dalam graf memiliki arah, maka graf dapat disebut sebagai graf berarah (Directed Graph).
- Jika semua garisnya tidak berarah, maka graf dapat disebut graf tidak berarah (Undirected Graph)





# Graf Tak Berarah

# Graf Tidak Berarah

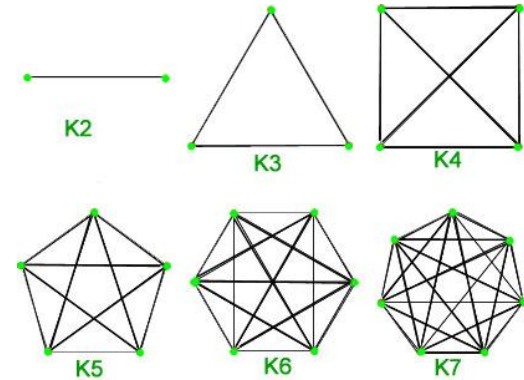
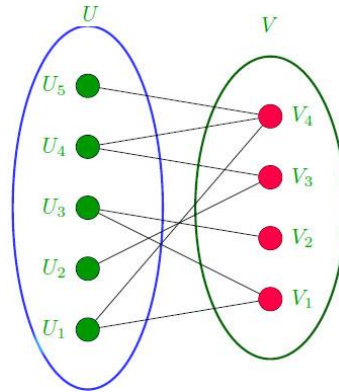
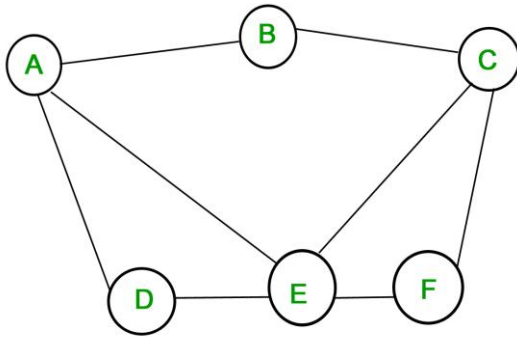
- Graf tidak berarah memiliki beberapa bagian, yaitu:
  - Graf Sederhana Bipartite
  - Graf Komplemen
  - Sub-Graf
  - Derajat
  - Path dan Sirkuit
  - Sirkuit Euler
  - Graf Terhubung dan tidak terhubung
  - Sirkuit Hamilton
  - Isomorfisma

# Graf Sederhana dan Bipartite

- Graf Sederhana (Simple Graph) adalah graf yang tidak memiliki loop ataupun garis paralel.
- Suatu graf dapat disebut Graf Bipartite apabila  $V(G)$  merupakan gabungan dari 2 himpunan tak kosong  $V_1$  dan  $V_2$  dan setiap garis dalam  $G$  menghubungkan suatu titik dalam  $V_1$  dengan titik dalam  $V_2$ .
- Apabila dalam graf bipartite setiap titik dalam  $V_1$  berhubungan dengan setiap titik dalam  $V_2$ , maka grafnya disebut graf bipartite lengkap.



# Graf Sederhana dan Bipartite



Sumber: <https://www.geeksforgeeks.org/mathematics-graph-theory-basics/>

# Graf Komplemen

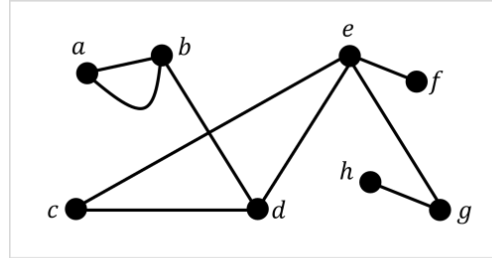
- Graf komplemen adalah graf yang memiliki titik yang sama dengan sebuah graf, namun memiliki garis yang tidak dimiliki oleh graf aslinya.



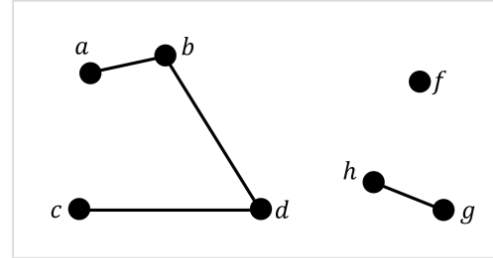
Sumber: <https://bermatematika.net/2016/05/20/graf-dan-komplemennya/>

# Sub-Graf

- Konsep subgraf sama dengan konsep himpunan bagian.
- Sebuah graf dapat dikatakan subgraf apabila graf tersebut merupakan bagian dari graf yang lebih besar.



Graf G

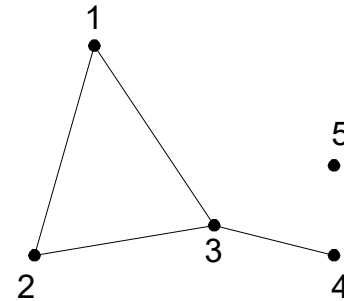
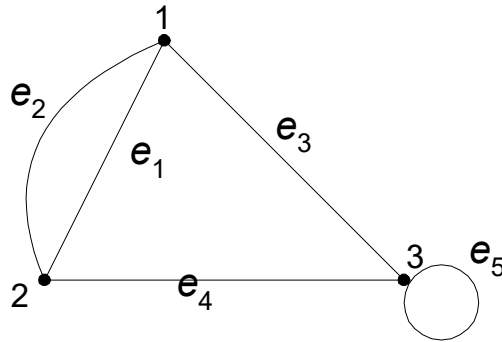
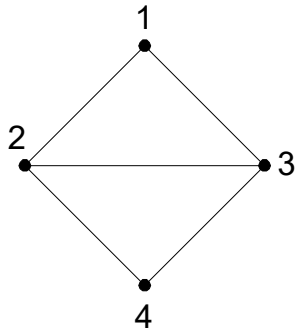


Graf H

Sumber: <https://mathcyber1997.com/materi-soal-operasi-graf-subgraf/>

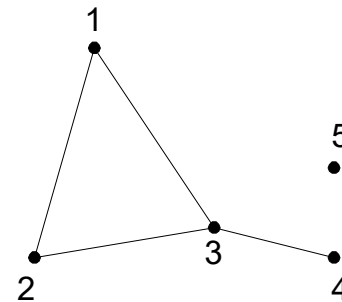
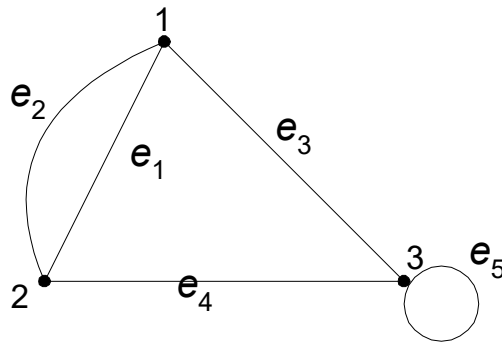
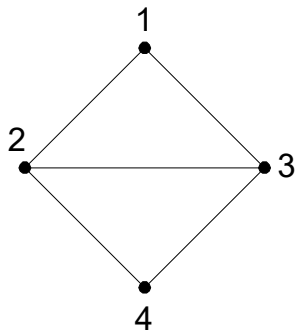
# Derajat

- Derajat menunjukkan jumlah garis yang terhubung dengan suatu titik.
- Garis dalam suatu loop dihitung dua kali.



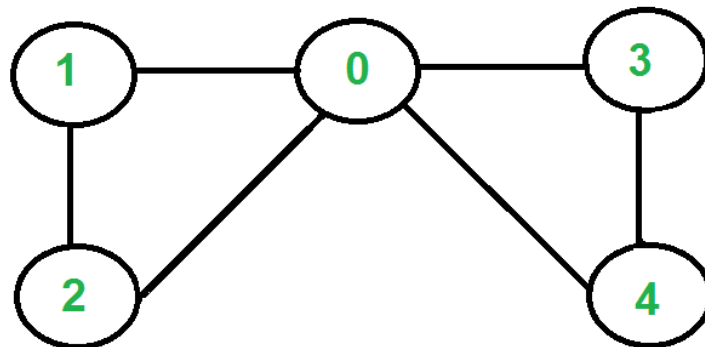
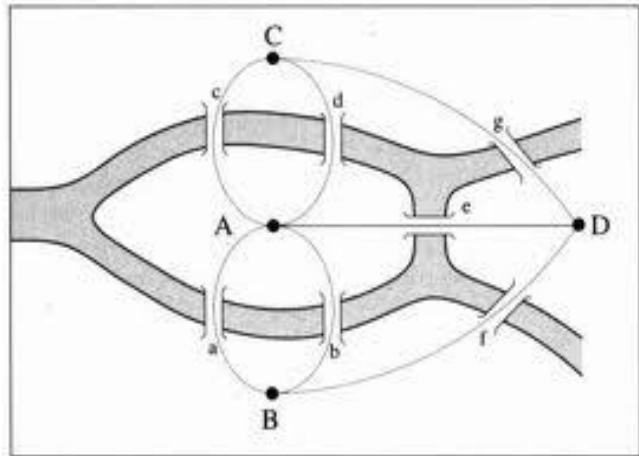
# Path (lintasan) dan Sirkuit

- Lintasan adalah garis yang melalui titik-titik yang telah ditentukan.
- Misalnya:
  - Pada  $g_1$ : lintasan 1, 2, 4, 3 adalah lintasan yang terdiri dari garis (1,2), (2,4), (4,3) sehingga dapat dikatakan memiliki panjang lintasannya adalah 3.
- Sirkuit merupakan lintasan yang berawal dan berakhir pada titik atau simpul yang sama.



# Sirkuit Euler

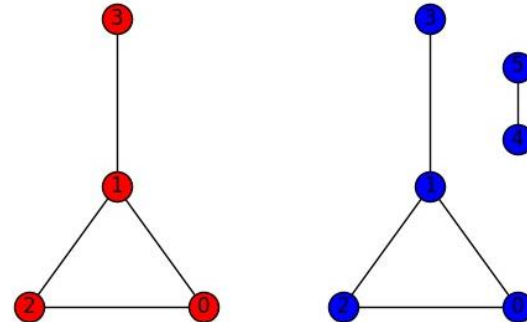
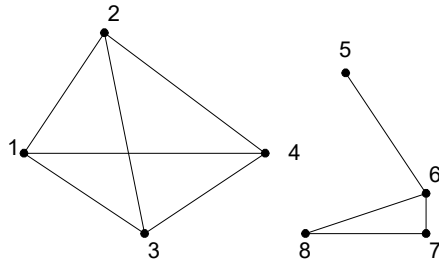
- Sirkuit Euler adalah sirkuit dimana setiap titik pada suatu graf muncul paling sedikit sekali dan setiap garis  $G$  muncul tepat satu kali.
- Ciri dari sirkuit Euler adalah:
  - Seluruh titik yang bukan derajat 0 saling terhubung,
  - Seluruh titik memiliki derajat berjumlah genap



The graph has Eulerian Cycles, for example "2 1 0 3 4 0 2"  
Note that all vertices have even degree

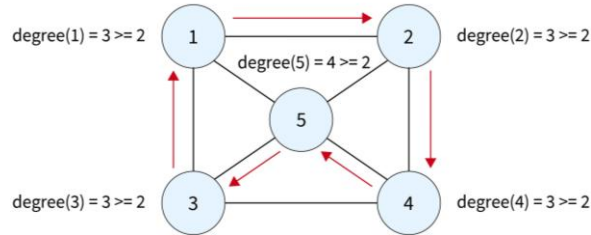
# Graf Terhubung dan Tidak Terhubung

- Apabila  $G$  adalah suatu graf, maka:
  - Dua titik  $v$  dan  $w$  dalam  $G$  dikatakan terhubung bila dan hanya bila ada walk (jalan) dari  $v$  ke  $w$ .
  - Graf  $G$  dikatakan terhubung bila dan hanya bila setiap 2 titik dalam  $G$  terhubung.
  - Graf  $G$  dikatakan tidak terhubung bila dan hanya bila ada 2 titik dalam  $G$  yang tidak terhubung.

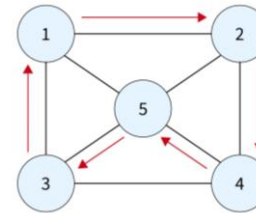


# Sirkuit Hamilton

- Suatu graf terhubung  $G$  disebut Sirkuit Hamilton bila ada sirkuit yang mengunjungi tiap titiknya tepat satu kali.
- Sirkuit Euler memperbolehkan titiknya muncul atau dilewati lebih dari satu kali tetapi melalui garis yang berbeda, sedangkan Sirkuit Hamilton hanya mengizinkan sebuah titik dan garis dilewati satu kali.



SCALER  
Topics



degree(2) = 3  
 degree(4) = 3  
 degree(3) = 3  
 degree(1) = 3  
 degree(5) = 4

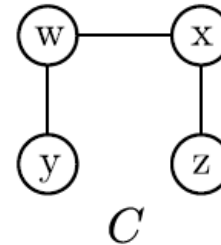
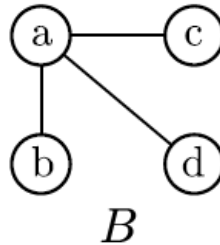
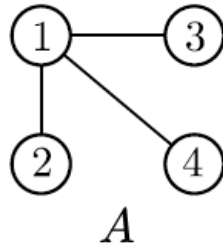
degree(1) + degree(4) = 6  $\geq$  5  
 degree(3) + degree(2) = 6  $\geq$  5

Sumber: <https://www.scaler.com/topics/hamiltonian-graph/>

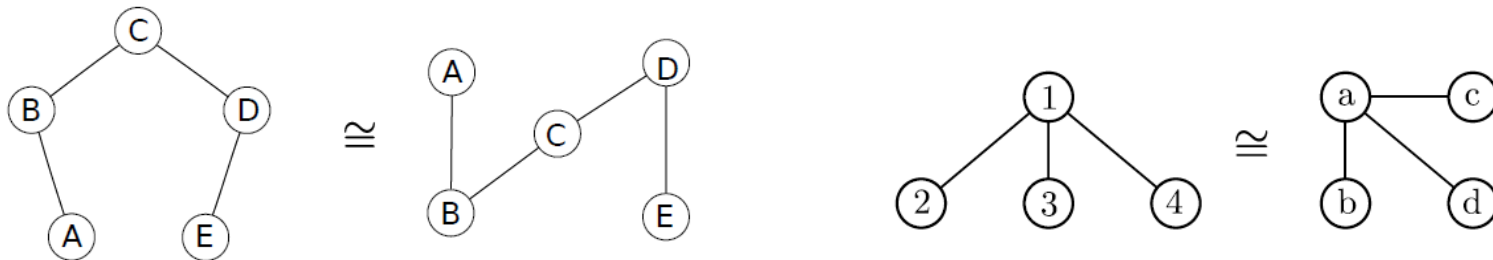
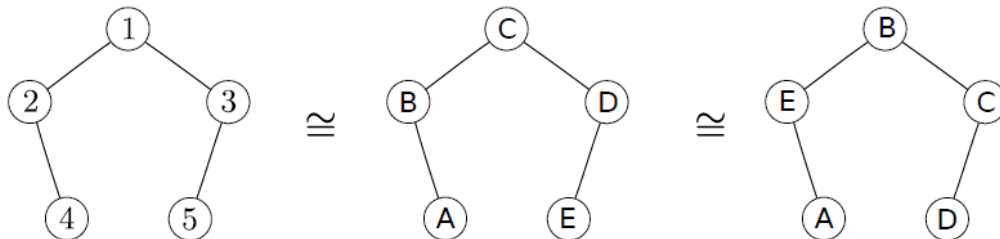


# Isomorfisma

- Isomorfisme adalah graf yang memiliki bentuk dan sifat geometri yang sama.
- Kedua graf yang dibandingkan hanya berbeda dalam hal pemberian label titik dan garisnya saja



# Isomorfisma





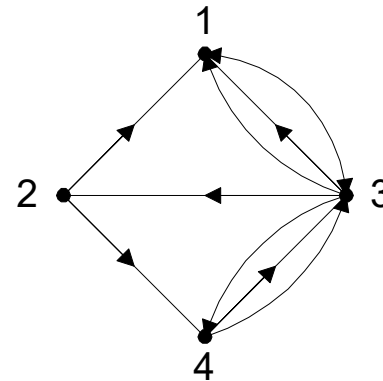
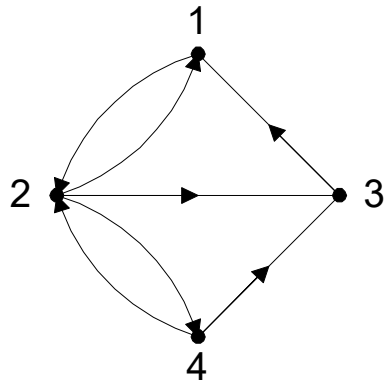
# Graf Berarah

# Graf Berarah

- Graf berarah memiliki beberapa bagian, yaitu:
  - Path Berarah dan Sirkuit Berarah
  - Graf Berarah Terhubung
  - Isomorfisma dalam graf berarah

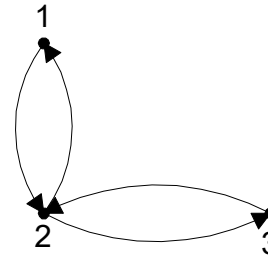
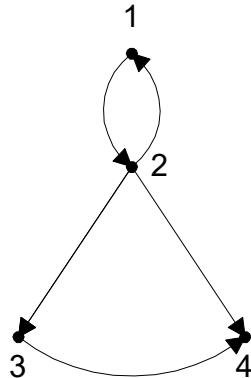
# Path dan Sirkuit Berarah

- Dalam graf berarah, perjalanan yang dilakukan harus mengikuti arah garis.
- Suatu graf berarah yang tidak memuat sirkuit berarah disebut asliklik.



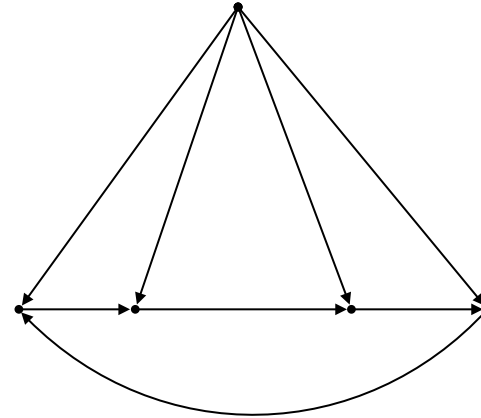
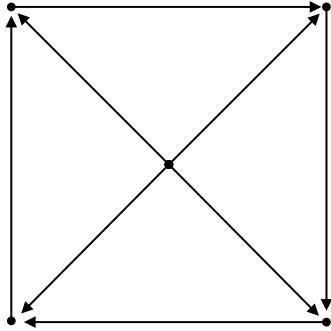
# Graf Berarah Terhubung

- Sama dengan graf tak berarah, suatu graf berarah dapat dikatakan terhubung jika ada walk atau jalan yang menghubungkan 2 titiknya.
- Graf berarah  $G$  disebut **graf terhubung kuat** (*strongly connected graph*) apabila untuk setiap pasang simpul sembarang  $u$  dan  $v$  di  $G$ , terhubung kuat. Kalau tidak,  $G$  disebut **graf terhubung lemah**.



# Isomorfisma Graf Berarah

- Isomorfisma pada graf berarah sama dengan graf tak berarah



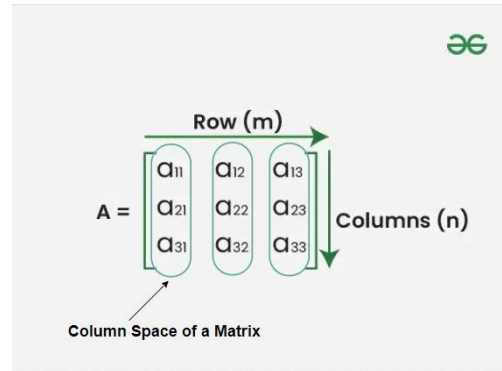


# Representasi Graf dalam Matriks



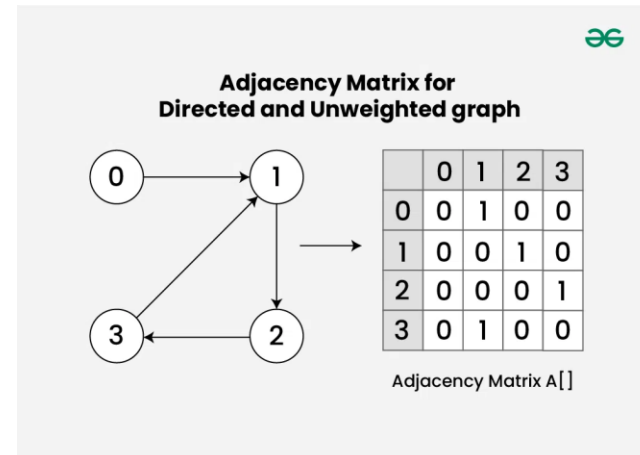
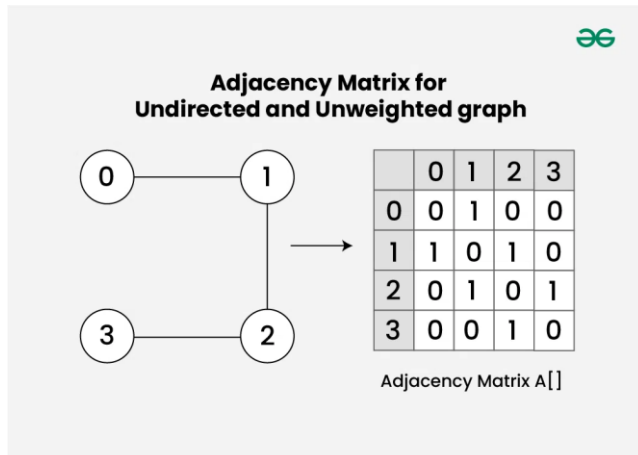
# Representasi Graf dalam Matriks

$$\begin{array}{l}
 \text{Row 1} \\
 \text{Row 2} \\
 \text{Row 3}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \text{Column 1} \quad \text{Column 1} \quad \text{Column 1} \\
 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}
 \end{array}$$



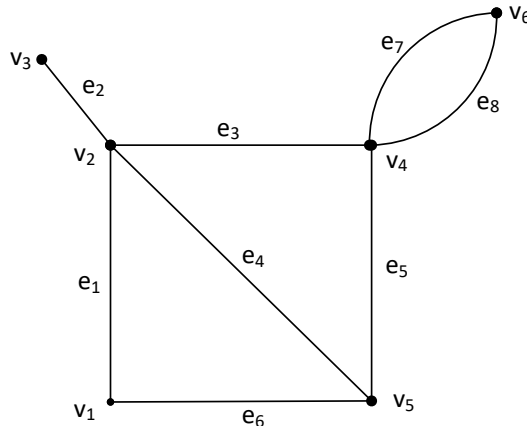
# Matriks Hubung

- Matriks hubung (Adjacency Matrix) digunakan untuk menyatakan graf dengan cara menyatakannya dalam jumlah garis yang menghubungkan titik-titiknya.
- Jumlah baris dan kolom matriks hubung sama dengan jumlah titik dalam graf.



# Matriks Biner

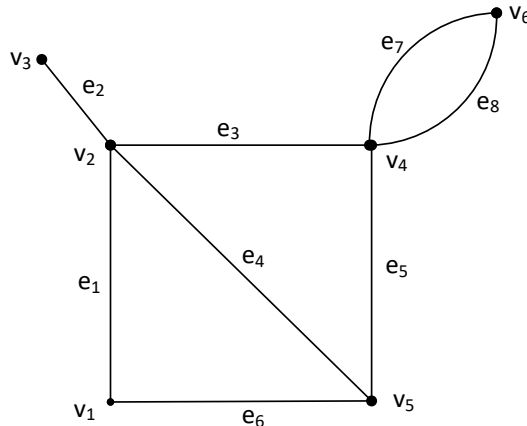
- Matrix biner menyatakan relasi antara suatu titik (v) dengan garis atau sisi (e).
- Nama matriks biner diambil dari sifat matriks yang hanya berisi bilangan 0 dan 1 saja.
- Matriks biner kadang disebut matriks 0-1 atau matriks insidensi (incidence matrix).



	e <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	e <sub>3</sub>	e <sub>4</sub>	e <sub>5</sub>	e <sub>6</sub>	e <sub>7</sub>	e <sub>8</sub>
v <sub>1</sub>	1	0	0	0	0	1	0	0
v <sub>2</sub>	1	1	1	1	0	0	0	0
v <sub>3</sub>	0	1	0	0	0	0	0	0
v <sub>4</sub>	0	0	1	0	1	0	1	1
v <sub>5</sub>	0	0	0	1	1	1	0	0
v <sub>6</sub>	0	0	0	0	0	0	1	1

# Matriks Sirkuit Tak Berarah

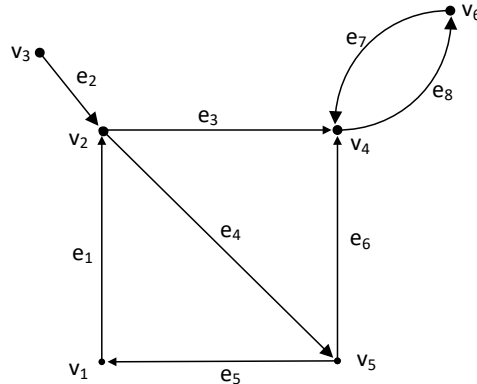
- Misalkan  $G$  adalah graf yang memuat  $q$  buah sirkuit sederhana dan  $e$  buah garis.
- Matriks sirkuit  $A = (a_{ij})$  yang bersesuaian dengan  $G$  adalah matriks yang terdiri dari  $q$  baris dan  $e$  kolom dengan elemen 1 jika sirkuit ke- $i$  memuat garis ke- $j$  dan elemen 0 jika sirkuit ke- $i$  tidak memuat garis ke- $j$ .



$$\begin{matrix}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\
 \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

# Matriks Sirkuit Berarah

- Misalkan  $G$  adalah graf yang memuat  $q$  buah sirkuit sederhana dan  $e$  buah garis.
- Matriks sirkuit  $A = (a_{ij})$  yang bersesuaian dengan  $G$  adalah matriks yang terdiri dari  $q$  baris dan  $e$  kolom dengan elemen:
  - 1 jika sirkuit ke- $i$  memuat garis ke- $j$  dan arah garis ke- $j$  sama dengan arah orientasi
  - -1 jika sirkuit ke- $i$  memuat garis ke- $j$  dan arah garis ke- $j$  berlawanan dengan arah orientasi
  - 0 jika sirkuit ke- $i$  tidak memuat garis ke- $j$



$$\begin{matrix}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\
 \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{matrix}$$

# Terima Kasih!

Thank you!

