

Matriks

STIMKK106 Matematika Diskrit

Made Prastha Nugraha, S.Kom., M.Kom.

prasthanugraha@idbbali.ac.id





Last Week Recap

Matriks

- Matriks adalah jajaran elemen yang dapat berupa bilangan atau himpunan yang berbentuk empat persegi panjang.
- Bentuk (ukuran) matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom, yang disimbolkan dengan m baris dan n kolom.
- Ukuran matriks umumnya disebut juga ordo matriks ($m \times n$).

Matriks

Kolom 1, Baris 1	Kolom 1, Baris 2	Kolom 1, Baris 3	Kolom 1, Baris 4	Kolom 1, Baris 5	Kolom 1, Baris 6	Kolom 1, Baris 7	Kolom 1, Baris 8	Kolom 1, Baris 9	Kolom 1, Baris 10	3	4	=	1 Baris x 2 Kolom	1x2
Kolom 2, Baris 1	Kolom 2, Baris 2	Kolom 2, Baris 3	Kolom 2, Baris 4	Kolom 2, Baris 5	Kolom 2, Baris 6	Kolom 2, Baris 7	Kolom 2, Baris 8	Kolom 2, Baris 9	Kolom 2, Baris 10					
Kolom 3, Baris 1	Kolom 3, Baris 2	Kolom 3, Baris 3	Kolom 3, Baris 4	Kolom 3, Baris 5	Kolom 3, Baris 6	Kolom 3, Baris 7	Kolom 3, Baris 8	Kolom 3, Baris 9	Kolom 3, Baris 10		1			
Kolom 4, Baris 1	Kolom 4, Baris 2	Kolom 4, Baris 3	Kolom 4, Baris 4	Kolom 4, Baris 5	Kolom 4, Baris 6	Kolom 4, Baris 7	Kolom 4, Baris 8	Kolom 4, Baris 9	Kolom 4, Baris 10		2	=	4 Baris x 1 Kolom	4x1
Kolom 5, Baris 1	Kolom 5, Baris 2	Kolom 5, Baris 3	Kolom 5, Baris 4	Kolom 5, Baris 5	Kolom 5, Baris 6	Kolom 5, Baris 7	Kolom 5, Baris 8	Kolom 5, Baris 9	Kolom 5, Baris 10		3			
Kolom 6, Baris 1	Kolom 6, Baris 2	Kolom 6, Baris 3	Kolom 6, Baris 4	Kolom 6, Baris 5	Kolom 6, Baris 6	Kolom 6, Baris 7	Kolom 6, Baris 8	Kolom 6, Baris 9	Kolom 6, Baris 10		4			
Kolom 7, Baris 1	Kolom 7, Baris 2	Kolom 7, Baris 3	Kolom 7, Baris 4	Kolom 7, Baris 5	Kolom 7, Baris 6	Kolom 7, Baris 7	Kolom 7, Baris 8	Kolom 7, Baris 9	Kolom 7, Baris 10					
Kolom 8, Baris 1	Kolom 8, Baris 2	Kolom 8, Baris 3	Kolom 8, Baris 4	Kolom 8, Baris 5	Kolom 8, Baris 6	Kolom 8, Baris 7	Kolom 8, Baris 8	Kolom 8, Baris 9	Kolom 8, Baris 10	1	2			
Kolom 9, Baris 1	Kolom 9, Baris 2	Kolom 9, Baris 3	Kolom 9, Baris 4	Kolom 9, Baris 5	Kolom 9, Baris 6	Kolom 9, Baris 7	Kolom 9, Baris 8	Kolom 9, Baris 9	Kolom 9, Baris 10	3	4	=	3 Baris x 2 Kolom	3x2
Kolom 10, Baris 1	Kolom 10, Baris 2	Kolom 10, Baris 3	Kolom 10, Baris 4	Kolom 10, Baris 5	Kolom 10, Baris 6	Kolom 10, Baris 7	Kolom 10, Baris 8	Kolom 10, Baris 9	Kolom 10, Baris 10	5	6			



Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$C = [3 \quad 7 \quad -2]$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.i + b.k & a.j + b.l \\ c.i + d.k & c.j + d.l \end{bmatrix}$$

Matrix Addition of 2*2 Matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Matriks

Transpose: $C = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 38 & 47 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} 18 & 38 \\ 17 & 47 \end{bmatrix}$

Determinan dari matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = |A| = ad - bc$

Adjoint: $\text{adj } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

Change sign Interchange

Inverse: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

A

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Sumber:

<https://www.csd.uwo.ca/~abrandt5/teaching/DiscreteStructures/Chapter3/matrices.html#matrix-transpose>



Transformasi Matriks

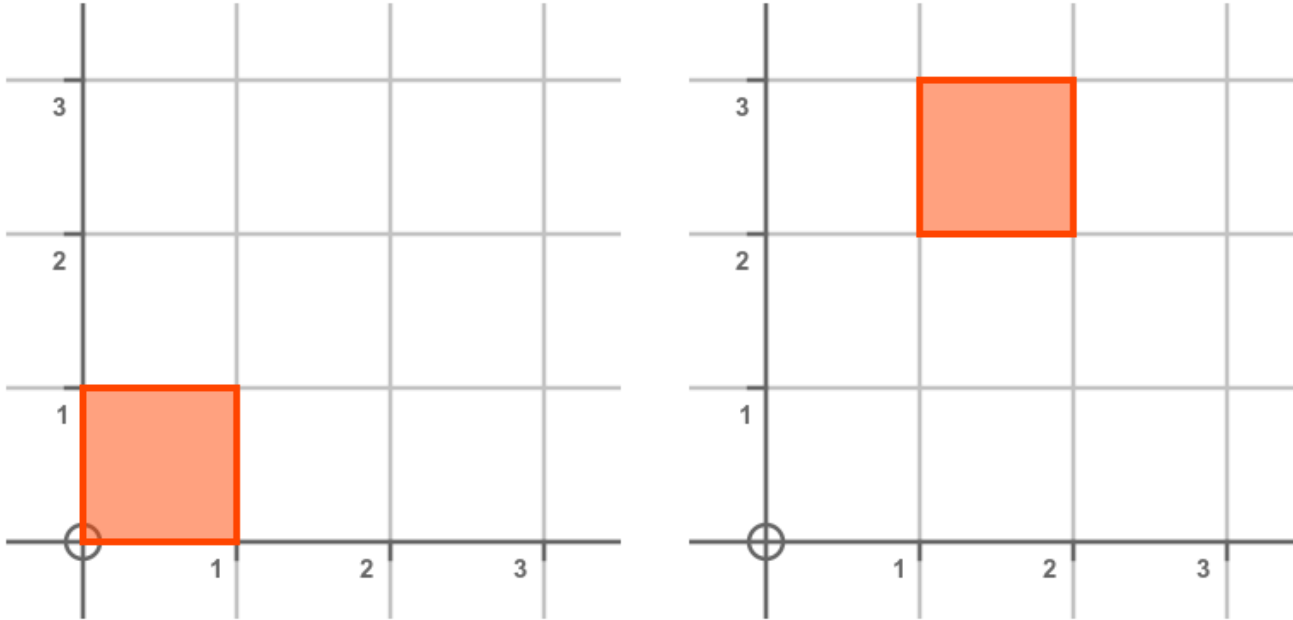
Translasi Matriks

- Translasi matriks digunakan untuk memindahkan objek atau nilai matriks berdasarkan sistem koordinatnya.
- Jika diketahui sebuah titik P(2,3) dan akan ditranslasi sebanyak (4,-1) unit, maka untuk menghitungnya dapat dilakukan dengan cara berikut:

$$\circ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

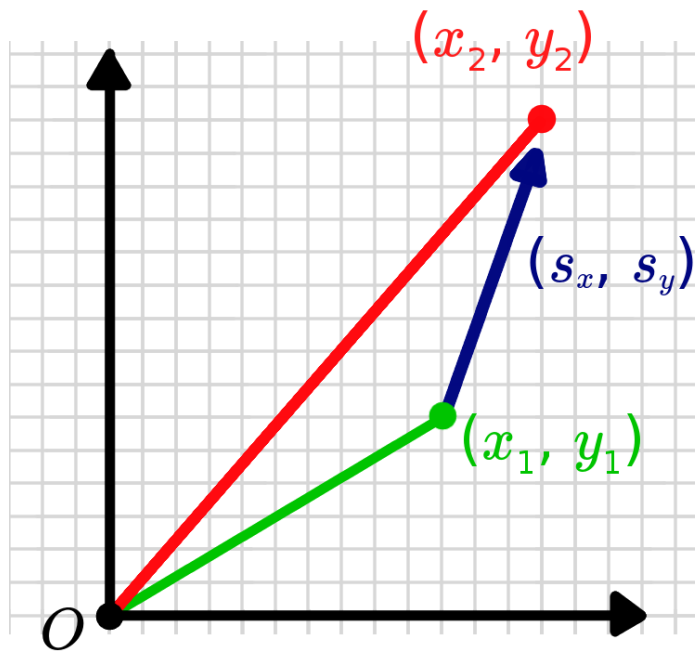
- Sehingga setelah translasi, titik P(2,3) akan dipindahkan ke P'(6,2)

Translasi Matriks



Sumber: <https://graphicmaths.com/pure/matrices/matrix-2d-transformations/>

Translasi Matriks



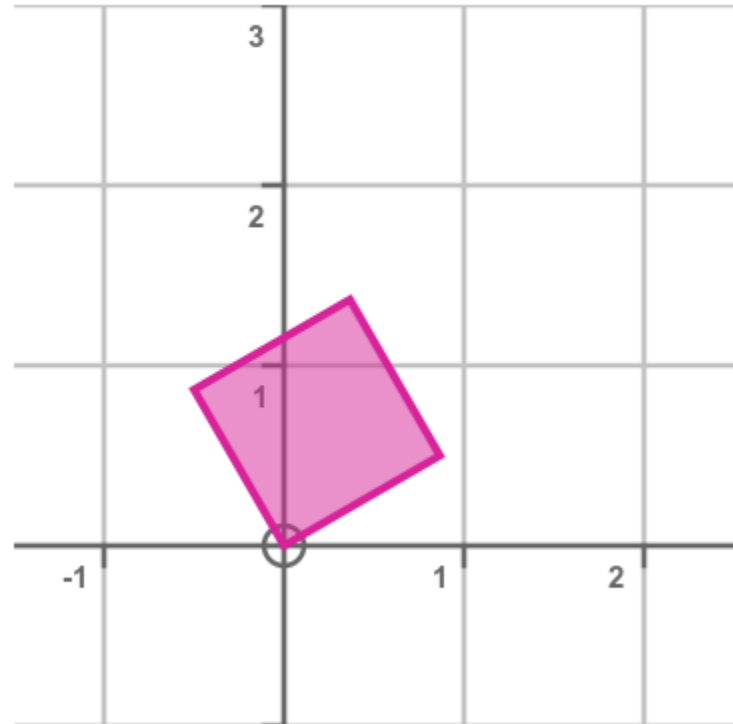
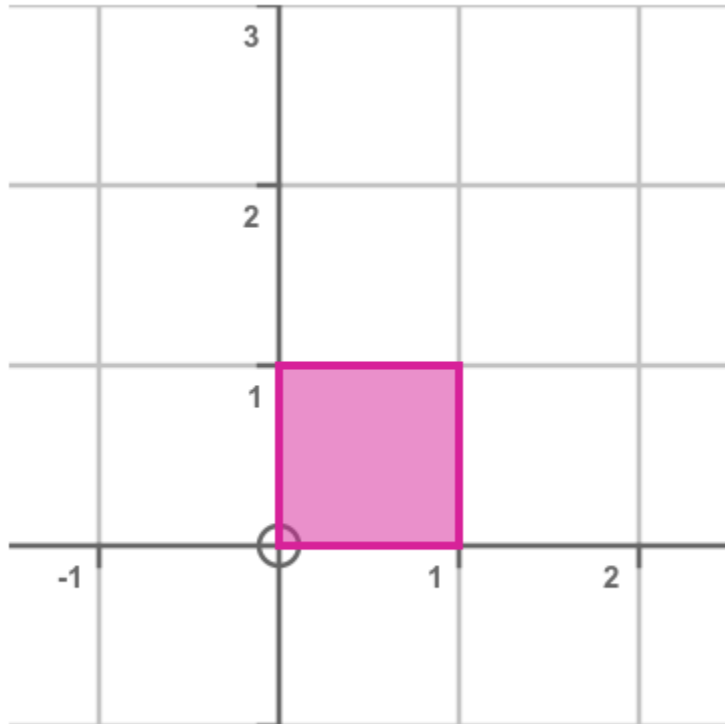
Rotasi Matriks

- Rotasi matriks berguna untuk memutar objek atau nilai matriks berdasarkan sistem koordinatnya.
- Nilai rotasi memiliki elemen matriks yang berbeda-beda.
- Jika diketahui sebuah titik $Q(1,1)$ akan dirotasikan sebesar 90° berlawanan arah jarum jam, maka:
 - $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Jadi setelah rotasi, $Q(1,1)$ akan menjadi $Q'(-1,1)$.

TYPE OF ROTATION	Matrix to be multiplied
Rotation of 90° (clock wise)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
Rotation of 90° (counter clock wise)	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Rotation of 180° (clock wise & counter clock wise)	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Rotation of 270° (clock wise)	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Rotation of 270° (counter clock wise)	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

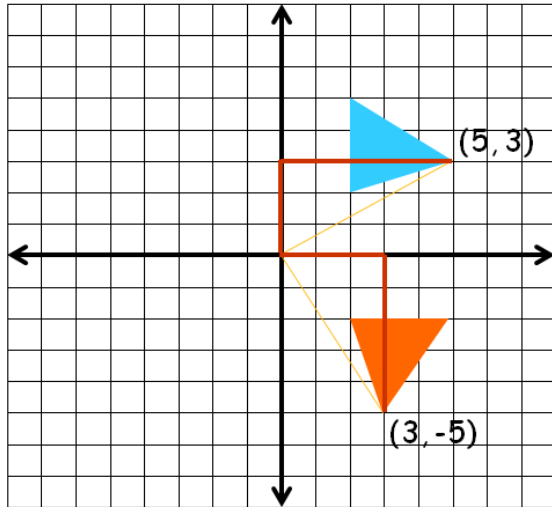


Rotasi Matriks

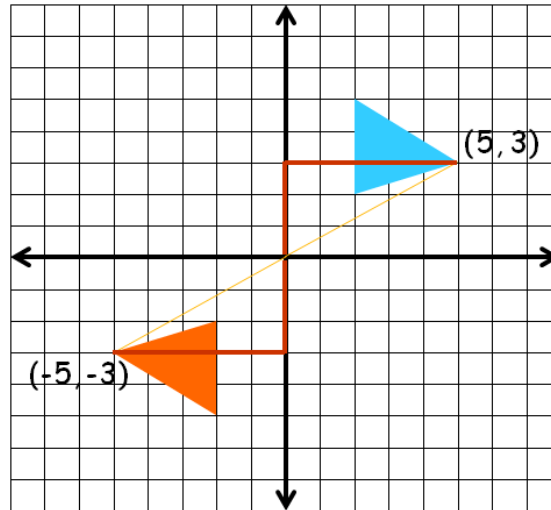


Rotasi Matriks

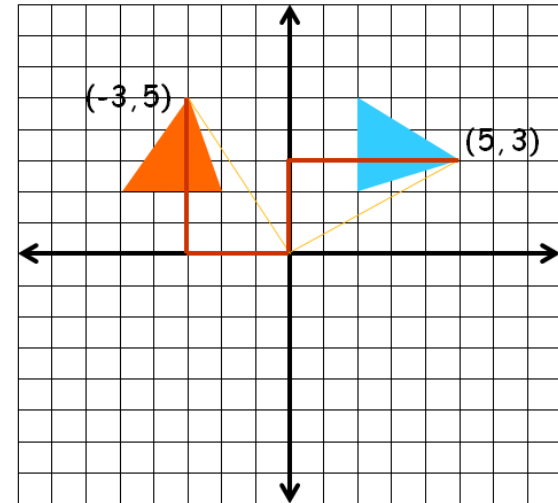
$$(x, y) \rightarrow (y, -x)$$



$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$



$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$



Refleksi Matriks

- Refleksi Matriks digunakan untuk memantulkan objek atau elemen matriks berdasarkan sistem koordinatnya.
- Pantulan dapat dilakukan berdasarkan garis ataupun bidang (x atau y).
- Jika diketahui titik $Q(2,3)$, maka hasil pantulannya berdasarkan sumbu x adalah:

$$\circ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- Jadi jika $Q(2,3)$ dipantulkan berdasarkan sumbu x akan menghasilkan $Q'(2,-3)$.

Garis pantulan	Nilai matriks
Sumbu x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Sumbu y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Sumbu $x = y$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

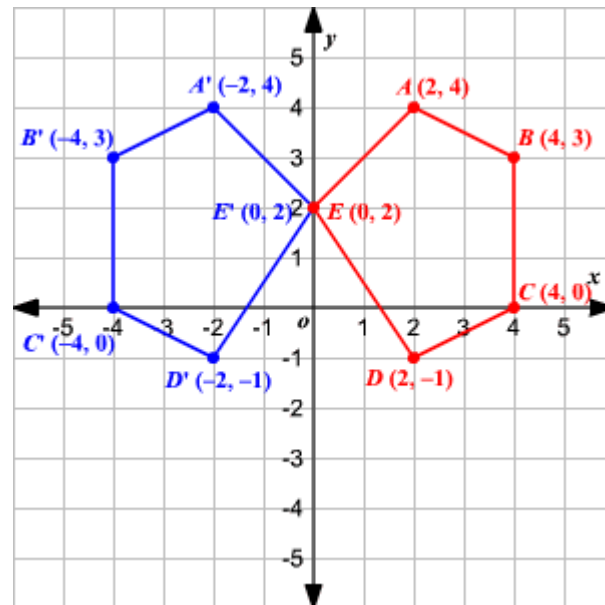
Refleksi Matriks

- Jika diketahui sebuah segi lima dengan koordinat sebagai berikut dipantulkan berdasarkan sumbu y:

- A (2,4)
- B (4,3)
- C (4,0)
- D (2,-1)
- E (0,2)

- Maka dapat diselesaikan dengan:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -4 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Transformasi Gabungan Matriks

- Tidak menutup kemungkinan bahwa matrik ditransformasikan menggunakan lebih dari satu jenis transformasi.
- Matriks akan ditransformasikan sesuai dengan urutan yang diberikan.
- Jika diketahui :
 - titik $P=(1,2)$ ditranslasikan terhadap vektor $T = (3,4)$ sebesar 90° searah jarum jam.
 - Maka:

■ Hasil Translasi: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = P'(4,6)$

■ Hasil Rotasi: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$

- Hasil dari translasi dan rotasi dari titik P adalah $P''(6,-4)$

Latihan

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Temukan:

- $A + B$
- $C + D$
- $2B - A$
- $D - 2C$
- $3A$
- $2C + D$

Matrix Addition of 2*2 Matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Latihan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Temukan:

- AB
- DI
- BD
- BC
- A^2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.i + b.k & a.j + b.l \\ c.i + d.k & c.j + d.l \end{bmatrix}$$

Latihan

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Temukan masing-masing invers dari matriks di atas!

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Latihan

$$A = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan hasil transformasi matriks jika:

- A ditranslasikan sebesar $T(-4,3)$ lalu dirotasi 90 derajat searah jarum jam.
- B Ditranslasikan sebesar $T(2,-2)$ lalu direfleksikan berdasarkan sumbu y.
- C dirotasikan sebesar 90 derajat berlawanan arah jarum jam, kemudian direfleksikan berdasarkan sumbu x.
- D dirotasikan sebesar 90 derajat searah jarum jam, kemudian direfleksikan berdasarkan sumbu y.

Terima Kasih!

Thank you!

