Matriks

STIMKK106 Matematika Diskrit

Made Prastha Nugraha, S.Kom., M.Kom.

prasthanugraha@idbbali.ac.id

Pengenalan Matriks

Matriks

- Matriks merupakan konsep kunci dalam matematika, dan banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan dan permasalahan dalam fisika ataupun ilmu komputer.
- Matriks adalah jajaran elemen yang dapat berupa bilangan atau himpunan yang berbentuk empat persegi panjang.
- Bentuk (ukuran) matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom, yang disimbolkan dengan m baris dan n kolom.
- Ukuran matriks umumnya disebut juga ordo matriks (*m* x *n*).

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

- Penulisan matriks biasanya menggunakan notasi ringkas A= $[a_{ij}]$.
- Matriks di atas mempunyai ordo 2x2, 2x1, dan 1x3.
- Matriks yang mempunyai hanya satu baris dinamakan matriks baris, seperti Matriks C.
- Sedangkan Matriks yang hanya mempunyai satu kolom disebut matriks kolom, seperti matriks B.
- Matriks B sering disebut juga dengan vektor.

IDB BALI
INSTITUT DESAIN & BISNIS BALI

Matriks

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{F} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Matrix yang seluruh elemennya bernilai 0 disebut Null Matrix, seperti matriks D.
- Matriks E disebut matriks diagonal, dimana hanya elemen diagonalnya saja yang memiliki nilai.
- Apabila elemen diagonalnya memiliki nilai yang sama, maka disebut dengan matriks skalar.

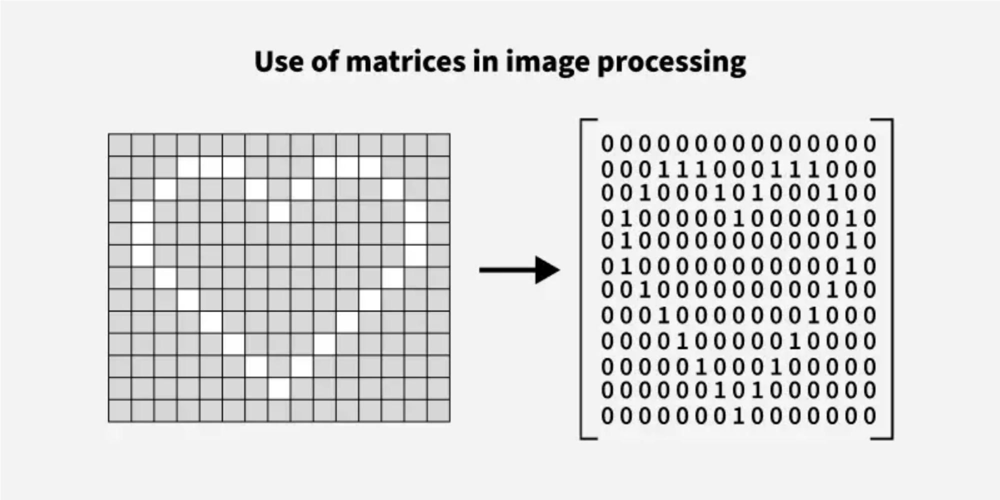
IDB BALI
INSTITUT DESAIN & BISNIS BALI

Matriks

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Matriks G disebut sebagai matriks identitas, dimana elemen diagonalnya terdiri hanya memiliki nilai 1.
- Matriks H disebut sebagai matriks simetris, dimana transpose dari matriks tersebut akan sama dengan matriks aslinya.

Matriks



Sumber: https://www.geeksforgeeks.org/matrices/

Operasi Matriks

Penjumlahan dan pengurangan Matriks

- Jika matriks A= $[a_{ij}]$ dan B = $[b_{ij}]$ adalah dua matriks berukuran m x n maka jumlah ataupun selisih kedua matriks tersebut, yaitu $A \pm B$ adalah matriks C $[c_{ij}]$ yang berukuran m x n,
- Setiap elemen dari C adalah jumlah atau selisih elemen – elemen yang berkorespondensi dari matriks A dan B.
- Dengan demikian, $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

Penjumlahan dan pengurangan Matriks

- Penjumlahan atau pengurangan dua matriks hanya dapat dilakukan jika kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama.
- Beberapa sifat-sifat penjumlahan matriks:
  - $A + B = B + A$
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$
  - $k (A + B) = kA + kB = (A + B)k$
  - $A + (-A) = 0$
  - $A + 0 = A$

Penjumlahan dan pengurangan Matriks

Matrix Addition of 2*2 Matrices

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

- Diberikan matriks A berukuran m x p dan matriks B berukuran p x n.
- Hasil perkalian matriks A dan matriks B didefinisikan sebagai matriks berukuran m x n dengan elemen pada baris ke-i, kolom ke-j, merupakan hasil perkalian dari matriks baris ke-i dari A dengan matriks kolom ke-j dari B, ditulis AB.

Perkalian Matriks

Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka:

$$AB = \begin{bmatrix} 1(3) + 2(1) + 1(-2) & 1(-4) + 2(5) + 1(2) \\ 4(3) + 0(1) + 2(-2) & 4(-4) + 0(5) + 2(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}$$

Sedangkan:

$$BC = \begin{bmatrix} 3(-1) + (-4)0 & 3(2) + (-4)1 \\ 1(-1) + 5(0) & 1(2) + 5(1) \\ -2(-1) + 2(0) & (-2)2 + 2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.i + b.k & a.j + b.l \\ c.i + d.k & c.j + d.l \end{bmatrix}$$

Perkalian Matriks

- Sifat-sifat dari pekalian matriks yaitu:
    - $A(BC) = (AB)C$
    - $(kA)B = k(AB)$
    - $A(B+C) = AB + AC$
    - $(A+B)\,C = AC + BC$
    - $AB \neq BA$
    - Jika $AB = 0$, maka belum tentu $A = 0$ atau $B = 0$
    - Jika $AB = AC$, maka belum tentu $B = C$.

Transpose Matriks

- Operasi transpose matriks adalah pengaturan elemen baris pada kolom dan elemen kolom pada baris pada matriks yang ekuivalen.
- Baris pada matriks akan menjadi kolom begitu pula sebaliknya.

$$C = \begin{bmatrix} 18 & 17 \\ 38 & 47 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 18 & 38 \\ 17 & 47 \end{bmatrix}$$

Matriks Determinan

- Determinan dari sebuah matriks hanya dapat dihitung pada matriks persegi, yang dilambangkan dengan |A|.
- Bila determinan dari sebuah matriks = 0, maka matriks tersebut merupakan matriks singular, dan tidak memiliki invers.
- Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka determinannya adalah:

$$|A| = ad - bc.$$

Matriks Determinan

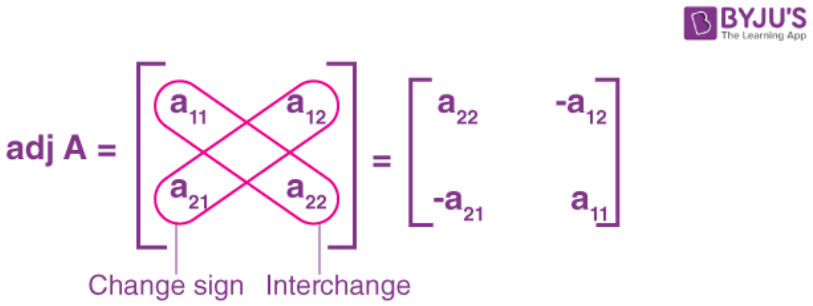
- Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, maka determinannya adalah:

|A| = a(ei - fh) – b (di - gf) + c(dh - eg).

Matriks Adjoint

- Operasi adjoint matriks adalah turunan dari sebuah matriks yang dihitung dari kofaktor dan transpose dari matriks yang bersangkutan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$



Sumber: https://byjus.com/maths/adjoint-of-a-matrix/

Matriks Adjoint

- Operasi adjoint matriks adalah turunan dari sebuah matriks yang dihitung dari kofaktor dan transpose dari matriks yang bersangkutan.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \operatorname{adj} A = A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

BYJU'S The Learning App

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

- Inverse dari sebuah matriks didapatkan dari pembagian antara adjoint sebuah matriks dengan determinan dari matriks tersebut.
- Inverse akan dapat dipastikan benar jika hasil kali antara matriks asli dengan inversenya adalah matriks identitas, atau dapat disimbolkan dengan:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

Invers Matriks

- Langkah menghitung inverse matriks:
  - Menentukan minor dari matriks
  - Konversi matriks yang telah didapatkan menjadi kofaktor
  - Adjugasi
  - Kalikan dengan reciprocal determinan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Latihan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Temukan:

- A + B
- B - C
- A x D
- B x C
- |A|
- |B|
- |C|

Latihan

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 8 & 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} -8 & 7 & -5 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 7 & -6 & -5 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Temukan:

- C + D
- C - D
- A x B
- C x D
- |C|
- |D|

IDB BALI
INSTITUT DESAIN & BISNIS BALI

Terima Kasih!

Thank you!

IDB BALI
INSTITUT DESAIN & BISNIS BALI