PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ
2021 BAHAR

Biçimsel Diller ve Otomata Teorisi

Formal languages and automata theory

Küme, İlişki, Fonksiyon

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Bir küme nesnelerden oluşur**

$L = \{a, b, c, d\}$ a, b, c, d kümenin elemanları veya üyeleridir

$b \in L, z \notin L$ $|L|=4$ ***kardinalite (cardinality)***

- **Elemanların sırası ve tekrarı önemli değildir**

$A=\{red, blue, red\}$ ile $B=\{red, blue\}$ aynıdır $|A|=|B|=2$

$\{3, 1, 9\}, \{9, 1, 3\}$ ve $\{3, 9, 1\}$ aynıdır

- **Empty ve singleton**

Bir elemana sahip küme *singleton*, hiç elemanı olmayan küme *empty* olarak adlandırılır.

$\{1\}, \{blue\}$ singleton

$\{\ \}, \emptyset$ empty set

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Sonsuz küme**

  $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ doğal sayılar kümesi

- **Kümeler özellikleriyle de tanımlanabilir**

  $I = \{1, 3, 9\}$ G = $\{3, 9\}$

  $G = \{x : x \in I \text{ and } x \text{ is greater than } 2\}$: *«öyle ki» (such that)*

  $O = \{x: x \in N \text{ and } x \text{ is not divisible by } 2\}$ odd numbers

- **Altküme**

  $A \subseteq B$, *A* kümesi *B* kümesinin altkümesi (*A = B olabilir*) $A \subset B$,

  A kümesi *B* kümesinin öz (*proper*) altkümesi ($A \neq B$)

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Union (Birleşim)**

  $A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$

- **Intersection (Kesişim)**

  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ and } x \in B\}$

- **Difference (Fark)**

  $A - B = \{x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$

  $\{1, 3, 9\} - \{3, 5, 7\} = \{1, 9\}$

- **Disjoint (bağımsız / ayrık)**

  $A \cap B = \{\ \}, \emptyset$

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

Küme işlemleri

Idempotency $A \cup A = A \quad A \cap A = A$

(eş kuvvetli)

Commutativity $A \cup B = B \cup A$

(Değişme) $A \cap B = B \cap A$

Associativity $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ilişkisellik) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributivity $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(Dağılma) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Absorption $(A \cup B) \cap A = A \quad , \quad (A \cap B) \cup A = A$

DeMorgan's law on set difference

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

$S = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}\},$ $A = \{a, b, c, d\}$

- **Birden fazla kümede birleşim**

$\bigcup S = \{x: x \in P \text{ for some set } P \in S\}$ $\bigcup S = \{a, b, c, d\}$

- Birden fazla kümede kesişim

$\bigcap S = \{x: x \in P \text{ for each set } P \in S\}$ $\bigcap S = \{b\}$

- **Power set** 2^A

  Bir kümenin boş kümede dahil tüm altkümeleri

  2^A, *A kümesinin power kümesi*

  $A = \{c, d\}$ *ise* $2^{\{c, d\}} = \{\{c, d\}, \{c\}, \{d\}, \emptyset\}$

- **Partition** Π

  Π, power kümesinin altkümesidir, boş kümeyi içermez ve A kümesinin her elemanını sadece bir kez bulundurur

  Π içindeki her eleman, boş kümeden farklıdır

  Π içindeki farklı elemanlar, disjoint kümedir

  $\bigcup \Pi = A$ $\{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}\}$ partition, $\{\{b, c\}, \{c, d\}\}$ partition değil

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Ordered pair**

  Nesneler arasındaki ilişkiler kümelerle gösterilmes *sıralı çiftler (ordered pair)* ile gösterilir

  (a, b) sıralı çifti için *a* ve *b* components olarak adlandırılır

  (a, b) ile *{a, b}* farklıdır

  (a, b) ile *(b, a)* farklıdır. *{a, b}* ile *{b, a}* aynıdır

  iki sıralı çift *(a, b)* ve *(c, d)* eşittir eger *a = c* ve *b = d* ise

- **Cartesian product (Kartezyen carpımı)**

  A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı AxB ile gösterilir ve *(a, b)* sıralı çiftidir *(a∈A ve b∈B)*

  {1, 3} x *{b, c}* = *{ (1, b), (1, c), (3, b), (3, c) }*

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Binary relation**

A ve B kümeleri arasında binary relation AxB 'nin altkümesidir

Örnek:

{1, 3} ve {b, c} kümeleri arasında *{(1, b), (3, b)}* bir binary relation olarak tanımlanır.

$\{(i, j): i, j \in N \text{ ve } i < j\}$ küçüktür ilişkisi olup NxN'nin altkümesidir

{(1, 2), (1, 3), (2, 6), ...} şeklinde sonsuz elemana sahiptir

- **Tuples and relations**

$(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ ordered tuple olarak adlandırılır (n-tuple)

n= 2 için ordered pairs, n= 3 için ordered triples n= 4 için quadruples, n= 5 için quintuples

n= 1 için unary relation n= 2 için binary relation n= 3 için ternary relation n-ary relation

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Function**

  A ve *B* kümeleri arasında bir fonksiyon, binary relation $R = (a, b)$'dir ve her $a \in A$ için kesinlikle ve sadece bir ordered pair vardır.

  $f : A \rightarrow B$, *A kümesinden B kümesine* tanımlanmış f fonksiyonu

- **Domain ve Image**

  A **domain** olarak adlandırılır

  $f(a)$ **image** olarak adlandırılır ve her a için unique değerdir

- **Arguments ve Value**

  $f : A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \rightarrow B$ fonksiyon ise $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b$ şeklinde gösterilir ve $a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$ ve $b \in B$'dir.

  Burada a_i arguments ve b ise value olarak adlandırılır.

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **One-to-one (birebir)**

Bir $f : A \to B$ fonksiyonu one-to-one'dır eğer her farklı

$a, a' \in A$ için $f(a) \neq f(a')$ ise

- **Onto (örten)**

Bir $f : A \to B$ fonksiyonu onto'dur eğer B'nin her elemanı f fonksiyonu altında A'nın bazı elemanları için image ise

- **Bijection (birebir örten)**

Bir $f : A \to B$ fonksiyonu bijection'dir eğer f fonksiyonu hem one- to-one hem de onto ise

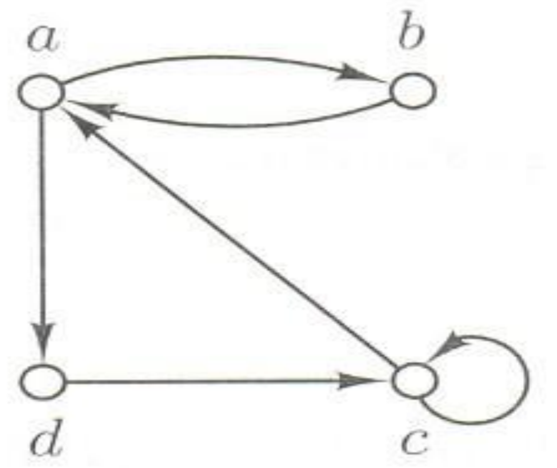
- **Inverse (ters)**

$R \subseteq A\text{x}B$ binary ilişkisinin tersi $R^{-1} \subseteq B\text{x}A$ şeklinde tanımlanır

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

Graph

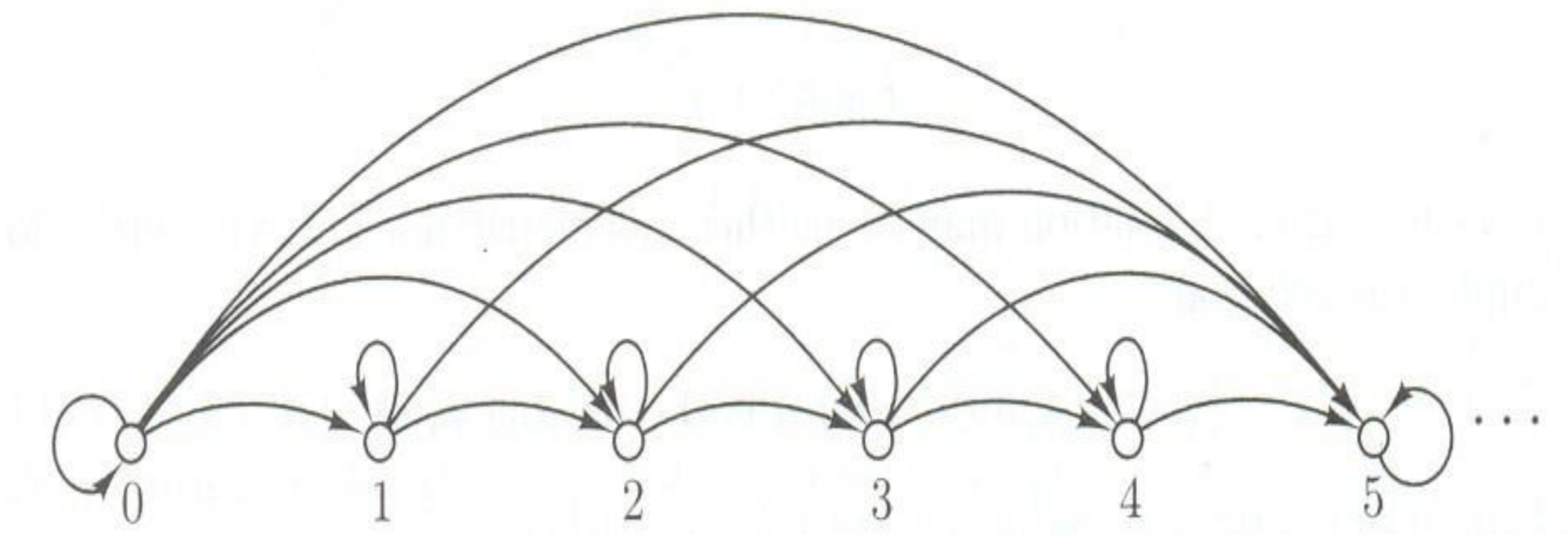
- *A* bir küme ve $R \subseteq A x A$ ise *A* üzerinde bir binary ilişki olsun. Bu ilişki bir directed graph ile gösterilebilir.
- Graph üzerinde her bir node A'nın bir elemanını gösterir.
- Her *(a, b)* ∈ *R* için *a elemanı temsil eden node'dan b elemanını temsil eden node* bir ok (kenar - edge) çizilir.



Şekil: R = {(a, b), (b, a), (a, d), (d, c), (c, c), (c, a)} ilişkisine ait graph

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Graph**



$R = \{(i, j): i, j \in N \text{ ve } i \leq j\}$ ilişkisine ait graph

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Reflexive (yansımalı)**

  Bir ilişki $R \subseteq AxA$ reflexive'dir eğer her bir $a \in A$ için $(a, a) \in R$ ise

  Figure 1 reflexive degildir ancak Figure 2 reflexive'dir.

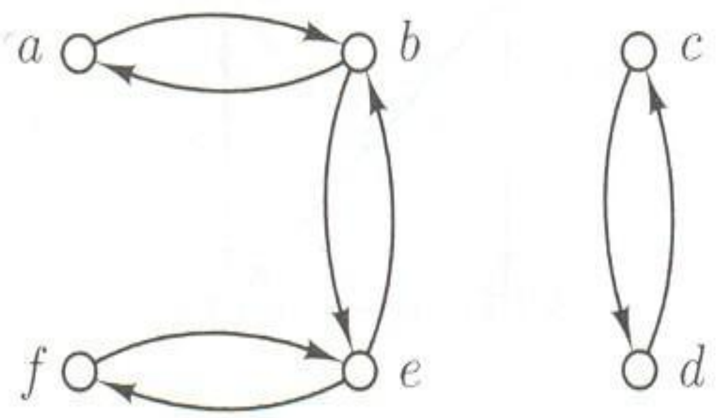
- **Symmetric**

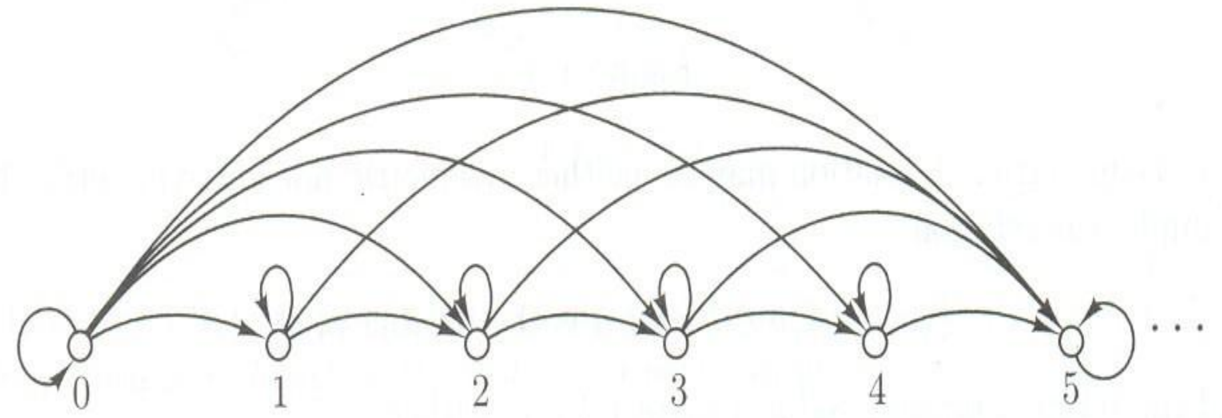
  Bir ilişki $R \subseteq AxA$ symmetric'tir eğer $(a, b) \in R$ iken $(b, a) \in R$ *ise*

- **Antisymmetric**

  Bir ilişki $R \subseteq AxA$ antisymmetric'tir eger herhangi bir ordered pair $(a, b) \in R$ iken

  $(b, a) \notin R$ *ise*

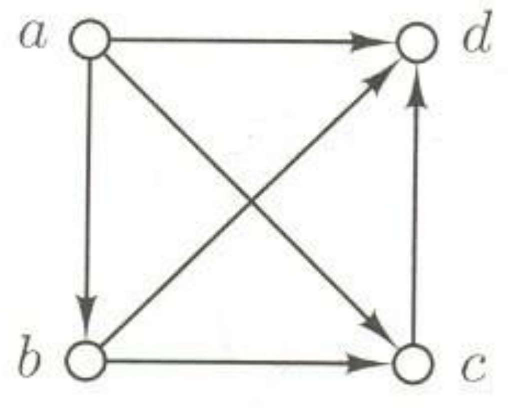




Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Transitive (geçişli)**

  Bir ilişki $R \subseteq AxA$ transitive’dir eger $(a, b) \in R$ ve $(b, c) \in R$ iken $(a, c) \in R$ ise



- **Equivalence relation**

  Bir ilişki reflexive, symmetric ve transitive ise equivalence relation olarak adlandırılır.

- **Partial order**

  Bir ilişki reflexive, antisymmetric ve transitive ise partial order olarak adlandırılır.

- **Total order**

  Bir partial order $R \subseteq AxA$ total order’dır eğer $a, b \in A$ iken $(a, b) \in R$ veya $(b, a) \in R$ ise

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Path**

  Bir binary ilişkideki path(yol) $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sıralı serisidir ve bu seride her $(a_i, a_{i+1}) \in R$'dir.

- **Length**

  Bir yol $(a_1, a_2, ..., a_n)$ için length n'dir.

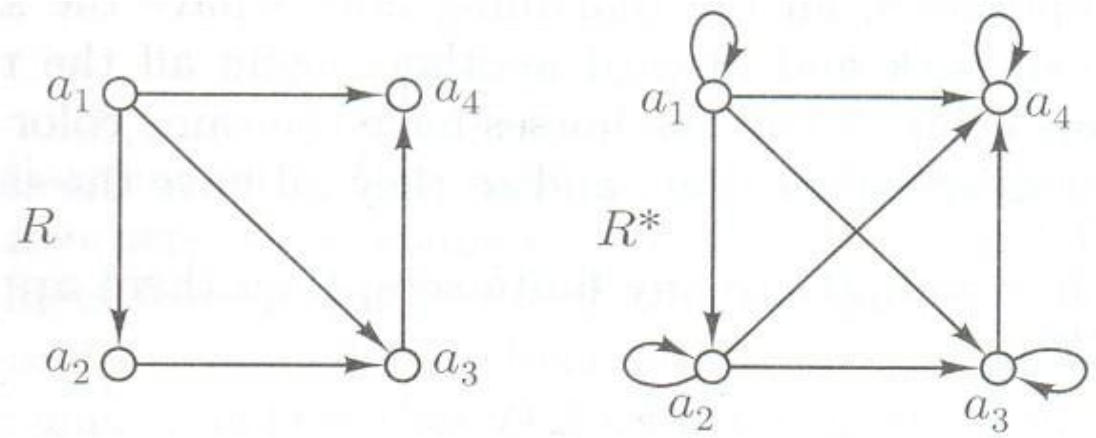
- **Cycle**

  Bir yol $(a_1, a_2, ..., a_n)$ cycle'dır eger $(a_n, a_1) \in R$ ise ve tüm a_i'ler farklı ise

Küme ve İlişki (Sets and Relations)

- **Reflexive transitive closure**

Eger bir R ilişkisi reflexive ve transitive değilken, R ilişkisini içeren R^* ilişkisi reflexive ve transitive ise, R^* ilişkisi R ilişkisinin reflexive transitive closure'u olarak adlandırılır. (R^* ilişkisi mümkün olan en az kenara sahiptir.)



- **Tanım**

$R \subseteq A^2$' de tanımlı

$R^* = \{(a, b) : a, b \in A$ ve R'de a' dan b'ye bir path(yol) varsa$\}$

Exercises

What are these sets? Write them using braces, commas, numerals, ... (for infinite sets), and $\varnothing$ only.

(a) $(\{1, 3, 5\} \cup \{3, 1\}) \cap \{3, 5, 7\}$

(b) $\bigcup\{\{3\}, \{3, 5\}, \bigcap\{\{5, 7\}, \{7, 9\}\}\}$

(c) $(\{1, 2, 5\} - \{5, 7, 9\}) \cup (\{5, 7, 9\} - \{1, 2, 5\})$

(d) $2^{\{7, 8, 9\}} - 2^{\{7, 9\}}$

(e) $2^{\varnothing}$

(f) $\{x : \exists y \in N \text{ where } x = y^2\}$

(g) $\{x : x \text{ is an integer and } x^2 = 2\}$

(a) {3, 5}

(b) {3, 5, 7}

(c) {1, 2, 7, 9}

(d) {8}, {7, 8}, {8, 9}, {7, 8, 9}

(e) {∅}

(f) {0, 1, 4, 9, 25, 36,…} (the perfect squares)

(g) ∅ (since the square root of 2 is not an integer)

Exercises

Prove each of the following:

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(c) $A \cap (A \cup B) = A$

(a) $A \cup (B \cap C)$

$$\begin{aligned} &= (B \cap C) \cup A && \text{commutativity} \\ &= (B \cup A) \cap (C \cup A) && \text{distributivity} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && \text{commutativity} \end{aligned}$$

(b) $A \cap (B \cup C)$

$$\begin{aligned} &= (B \cup C) \cap A && \text{commutativity} \\ &= (B \cap A) \cup (C \cap A) && \text{distributivity} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) && \text{commutativity} \end{aligned}$$

(c) $A \cap (A \cup B)$

$$\begin{aligned} &= (A \cup B) \cap A && \text{commutativity} \\ &= A && \text{absorption} \end{aligned}$$

Exercises

Write each of the following explicitly:

(a) $\{1\} \times \{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}$

(b) $\varnothing \times \{1, 2\}$

(c) $2^{\{1,2\}} \times \{1, 2\}$

(a) $\{(1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2),, (1,2,3)\}$

(b) $\varnothing$

(c) $\{(\varnothing,1), (\varnothing,2), (\{1\}, 1), (\{1\}, 2), (\{2\}, 1), (\{2\}, 2), (\{1,2\}, 1), (\{1,2\}, 2)\}$

Exercises

Let $R = \{(a, b), (a, c), (c, d), (a, a), (b, a)\}$.

What is $R \circ R$, the composition of R with itself?

What is R^{-1}, the inverse of R? Is R, $R \circ R$, or R^{-1} a function?

(a) $R \circ R = \{(a, a), (a, d), (a, b), (b, b), (b, c), (b, a), (a, c)\}$

(b) $R^{-1} = \{(b, a), (c, a), (d, c), (a, a), (a, b)\}$

(c) None of R, $R \circ R$ or R inverse is a function.

Exercises

For each of the following sets, state whether or not it is a partition of $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

(a) $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}\}$

(b) $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}, \{9\}, \{10\}\}$

(c) $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \{9, 10\}\}$

(d) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}\}$

a) yes

b) no, since no element of a partition can be empty.

c) no, 0 is missing

d) no, since, each element of the original set S must appear in only one element of a partition of S.

Exercises

For each of the following relations, state whether it is a partial order (that is not also total), a total order, or neither. Justify your answer.

(a) DivisibleBy, defined on the natural numbers. $(x, y) \in$ DivisibleBy iff x is evenly divisible by y. So, for example, $(9, 3) \in$ DivisibleBy but $(9, 4) \notin$ DivisibleBy.

(b) LessThanOrEqual defined on ordered pairs of natural numbers. $(a, b) \leq (x, y)$ iff $a \leq x$ or ($a = x$ and

$b \leq y$). For example, $(1,2) \leq (2,1)$ and $(1,2) \leq (1,3)$.

(a) DivisibleBy is a partial order. $\forall x$ $(x, x) \in$ DivisibleBy, so DivisibleBy is reflexive. For x to be DivisibleBy y, x must be greater than or equal to y. So the only way for both (x, y) and (y, x) to be in DivisibleBy is for x and y to be equal. Thus DivisibleBy is antisymmetric. And if x is DivisibleBy y and y is DivisibleBy z, then x is DivisibleBy z. So DivisibleBy is transitive. But DivisibleBy is not a total order. For example neither (2, 3) nor (3, 2) is in it.

(b) LessThanOrEqual defined on ordered pairs is a total order. This is easy to show by relying on the fact that $\leq$ for the natural numbers is a total order.

(c) This one is not a partial order at all because, although it is reflexive and antisymmetric, it is not transitive. For example, it includes (4, 1) and (1, 3), but not (4, 3).

Ödev-1

Problemleri çözünüz 1.1.1- 1.1.4 (sayfa 8-9)

Problemleri çözünüz 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4, 1.3.7, 1.3.9 (sayfa 20-21)