CENG 306 Biçimsel Diller ve Otomatlar
Formal Languages and Automata

PUSH DOWN AUTOMATA

Yığın Yapılı Otomatlar

Konular

- Pushdown Automata (PDA)
- Pushdown Automata and Context-Free Grammars

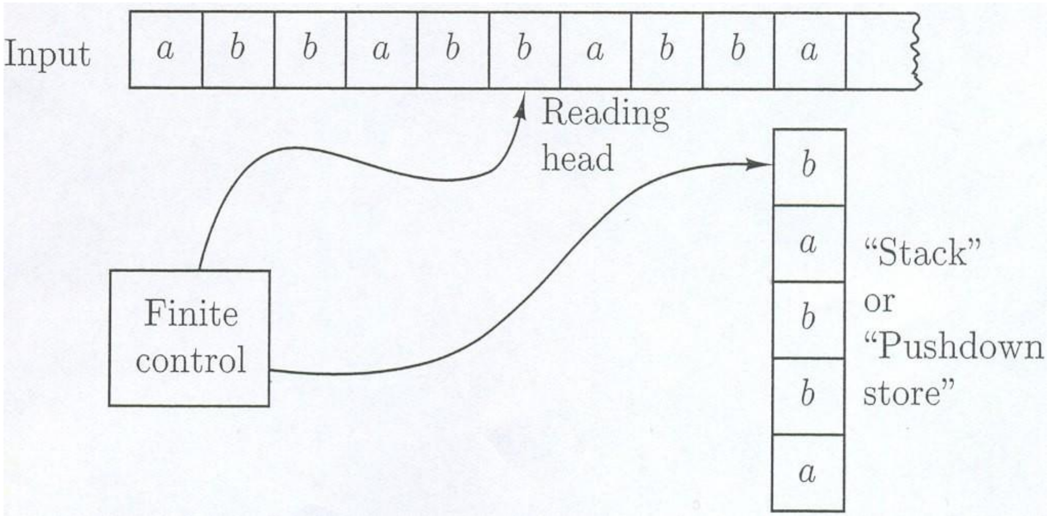
Pushdown Automata

- Regular olmayan context-free dillerin tanınması finite automata ile **yapılamaz**.
- $\{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$ dilini tanımak için fazladan ne gerekir?
- Bu dil
  - $S \rightarrow aSa,$
  - $S \rightarrow bSb$
  - $S \rightarrow e$

  kurallarına sahip bir grammar tarafından üretilebilir.
- Böyle bir dili tanıyan cihazın string'in yarısına geldiğinde ilk yarısını hafızada tutması ve ikinci yarısını bununla ters sırada karşılaştırması gerekir.
- Bu tür dillerin tanınmasında pushdown automata (PDA) kullanılır.

- Pushdown automata hafıza birimi olarak bir yığın (stack) kullanır.

Pushdown Automata



- Regular olmayan (nonregular) dillere diğer bir örnek dengelenmiş parantez üreten dildir.
- Pushdown automata bu dili tanırken stack count sıfır ile başlar.
- Her sol parantez gelişinde stack count 1 artar ve her sağ parantez gelişinde 1 azalır.
- String soldan sağa doğru okunurken negatif değere ulaşılması veya string bittiğinde pozitif değer olması kabul edilmeyen string'i gösterir.
- String **bittiğinde** stack count **sıfır** ise string kabul edilir.

Pushdown Automata

Tanım:

- *Pushdown automata M = (K, ∑ , Γ, Δ, s, F) şeklinde bir altılı (6-tuple) ile tanımlanır.*

K	*durumlar*
∑	*alfabe (giriş sembolleri için)*
Γ	*alfabe (stack sembolleri için)*
s ϵ K	*başlangıç durumu*
F ⊆ K	*sonuç durumları kümesi*
Δ	*geçiş ilişkisi* $(K \times (\Sigma \cup \{e\}) \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$

Pushdown Automata

$((p, \alpha, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$ *ise;*

- *Pushdown automata p durumundadır.*
- *input tape'ten* α *okunmuştur (read). (*$\alpha = e$ *ise input tape'e başvurulmaz)*
- *Stack üzerinde en üstte* β *çekilerek (pop)* γ *ile degiştirilir (push).*
- *q durumuna geçilir.*
- $\beta = e$ *ise stack'tan çekme yapılmaz.*
- $\gamma = e$ *ise stack'a yazma yapılmaz.*

Pushdown Automata

- *Bu pushdown automata nondeterministic'tir.*
- *push stack'ın en üstüne sembol/semboller ekler,*
- *pop ise en üstteki sembolü/sembolleri alır.*
- *((p, u, e), (q, **a**))* ***a'yı push*** *yapar, ((p, u, **a**), (q, e))* ***a'yı pop*** *yapar.*
- *Okunan string'in soldaki kısmı sonraki işlemler üzerinde etki yapmaz.*
- *Pushdown automata için configuration $K \times \sum^* \times \Gamma^*$ olarak tanımlanır.*
  - *K automata'nın bulunduğu durumu,*
  - *$\sum^*$ input string'te okunmamış kısmı,*
  - *Γ^* ise stack'taki string'i gösterir.*
- *(q, w, abc) için stack'ta* ***en üstte a,*** *en altta c vardır.*

Pushdown Automata

(p, x, α) bir adım sonra (q, y, ζ) ‘yı oluşturur ve

(p, x, α) $\vdash_M$ *(q, y, ζ) şeklinde gösterilir eğer;*

- $((p, a, \beta), (q, \gamma)) \in \Delta$ *şeklinde bir ilişki varsa,*
- *ve* $x = ay$, $\alpha = \beta\mu$, *ve* $\zeta = \gamma\mu$, $\mu \in \Gamma^*$ *ise*

$\vdash_M$ *için reflexive, transitive, closure’u* $\vdash_M^*$ *şeklinde gösterilir.*

M pushdown automata’ı $w \in \sum^*$ *string’ini kabul eder* ***eğer***

$$(s, w, e) \vdash_M^* (p, e, e), \quad p \in F \quad \textbf{ise}$$

Konfigürasyonlar $C_0 \vdash_M C_1 \vdash_M \ldots \vdash_M C_n$ *şeklinde gösterilir.*

Eger $C_0 = (s, w, e)$ ***ve*** $C_n = (p, e, e)$ ***ve*** $p \in F$ ***ise w string’i kabul edilir.***

Pushdown Automata

Örnek: $L = \{wcw^R : w \in \{a, b\}^*\}$ dilini kabul eden bir pushdown automata oluşturalım.

($ababcbaba \in L$, $abcab \notin L$, $cbc \notin L$)

Yöntem: c gelene kadar herşeyi yığına at, c'den sonra her gelen sembol için yığının üstünde de aynı sembol varsa çek

Pushdown Automata

Örnek: $L = \{wcw^R : w \in \{a, b\}^*\}$ dilini kabul eden bir pushdown automata oluşturalım.

($ababcbaba \in L$, $abcab \notin L$, $cbc \notin L$)

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, $K = \{s, f\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, $F = \{f\}$

Δ toplam 5 adet geçiş ilişkisine sahip olsun;

1. $((s, a, e), (s, a))$
2. $((s, b, e), (s, b))$
3. $((s, c, e), (f, e))$
4. $((f, a, a), (f, e))$
5. $((f, b, b), (f, e))$

Otomat string'in ilk yarısını okurken (c'ye kadar) başlangıç durumunu korur ve input tape'ten okuduğunu push eder, c okuduktan sonra final state'e geçer ve input tape'ten okuduğuyla stack'tan okuduğunu karşılaştırır .

Nondeterministic pushdown automata'dır.

Pushdown Automata

Örnek: (devam) $L = \{wcw^R : w \in \{a, b\}^*\}$ dilini kabul eden bir pushdown automata oluşturalım. *abbcbba için geçişler aşağıdaki tabloda verilmiştir.*

1. $((s, a, e), (s, a))$
2. $((s, b, e), (s, b))$
3. $((s, c, e), (f, e))$
4. $((f, a, a), (f, e))$
5. $((f, b, b), (f, e))$

State	Unread Input	Stack	Transition Used
s	$abbcbba$	e	–
s	$bbcbba$	a	1
s	$bcbba$	ba	2
s	$cbba$	bba	2
f	bba	bba	3
f	ba	ba	5
f	a	a	5
f	e	e	4

Giriş string'i bittiğinde stack boş degilse, giriş string'i ile stack arasında farklı karakter okuma yapılırsa, giriş string'i bittiğinde ve/veya stack'ta okunacak sembol olmadığında sonuç durumunda (f) değil ise string kabul edilmez.

Pushdown Automata

Örnek: *L = {w ∈ {a, b} *: w aynı sayıda a ve b'ye sahiptir.}* dilini kabul eden bir pushdown automata oluşturalım.

Yöntem: her a geldiğinde yığından b, her b geldiğinde a çekebilirim

final durumunu nasıl belirleyeceğim? Yığın sonu işaretçisi.

Pushdown Automata

Örnek: *L = {w ∈ {a, b}*: w aynı sayıda a ve b'ye sahiptir.}* dilini kabul eden bir pushdown automata oluşturalım.

M = (K, ∑ , Γ, Δ, s, F) , K = {s, q, f}, ∑ = {a, b}, Γ = {a, b, c}, F = {f}

Δ toplam 8 adet geçiş ilişkisine sahip olsun;

1. *((s, e, e), (q, c))* *c stack'ın sonunu göstermek için kullanılıyor.*
2. *((q, a, c), (q, ac))*
3. *((q, a, a), (q, aa))*
4. *((q, a, b), (q, e))*
5. *((q, b, c), (q, bc))*
6. *((q, b, b), (q, bb))*
7. *((q, b, a), (q, e))*
8. *((q, e, c), (f, e))*

Otomat ilk önce yığına c yazar ve ara duruma (q) geçer.

Her a'ya karşılık b veya b'ye karşılık a geldiğinde yığından pop yapılır

diğer durumlarda input ile yığından pop edilen kaynaştırılarak yığına push edilir

*((K x (∑ ∪ {e}) x Γ *) x (K x Γ *)* *olduğundan POP ve PUSH için Γ * olabilir.*

Pushdown Automata

Örnek: (devam) $L = \{w \in \{a, b\}^* : w$ *aynı sayıda a ve b'ye sahiptir.*$\}$ dilini kabul eden bir pushdown automata oluşturalım.

abbbabaa için geçişler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

1. $((s, e, e), (q, c))$.
2. $((q, a, c), (q, ac))$
3. $((q, a, a), (q, aa))$
4. $((q, a, b), (q, e))$
5. $((q, b, c), (q, bc))$
6. $((q, b, b), (q, bb))$
7. $((q, b, a), (q, e))$
8. $((q, e, c), (f, e))$

State	Unread Input	Stack	Transition	Comments
s	$abbbabaa$	e	–	Initial configuration.
q	$abbbabaa$	c	1	Bottom marker.
q	$bbbabaa$	ac	2	Start a stack of a's.
q	$bbabaa$	c	7	Remove one a.
q	$babaa$	bc	5	Start a stack of b's.
q	$abaa$	bbc	6	
q	baa	bc	4	
q	aa	bbc	6	
q	a	bc	4	
q	e	c	4	
f	e	e	8	Accepts.

Pushdown Automata

Tanım:

Her finite automata *basit bir pushdown automata olarak görülebilir.*

$M = (K, \sum, \Delta, s, F)$ *bir nondeterministic finite automata ve*

$M' = (K, \sum, \varphi, \Delta', s, F)$ *pushdown automata ve*

$\Delta' = \{((p, u, e), (q, e)) : (p, u, q) \in \Delta,\}$ *şeklinde tanımlanır.*

M' stack üzerine boş string yazar ve okuma yapmaz böylelikle finite automata'nın geçişlerini simule eder.

Pushdown Automata and CFGs

- Pushdown automata'lar context-free dilleri tanımak icin gerekli olan özelliklere sahiptir.
- PDA'lar özellikle context-free dil olan programlama dillerinin analizinde kullanılmaktadırlar.
- PDA'lar programlama dillerinde syntax analyzer olarak kullanılmaktadır.

Pushdown Automata and CFGs

Theorem: *Her* ***context-free dil*** *bir* ***pushdown otomat*** *tarafından kabul edilir.*

Proof : *$G = (V, \Sigma, R, S)$ bir CFG olsun. $L(M) = L(G)$ olacak şekilde bir pushdown otomat oluşturmak zorundayız.*

Bu otomatın iki durumu (p, q) olsun ve M stack alfabesi olarak terminal ve nonterminalleri (V) kullansın.

$M = (\{p, q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$

Pushdown Automata and CFGs

Proof : (devam)

M = ({p, q}, ∑, V, Δ, p, {q})

Δ toplam 3 adet geçiş ilişkisine sahip olsun;

1. *((p, e, e), (q, S))*
2. *((q, e, A), (q, x)) her bir $A \rightarrow x \in R$ için*
3. *((q, a, a), (q, e)) her a∈ ∑ için*

PDA, G'nin başlangıç sembolü S'yi stack'a push ederek başlar ve q durumuna geçer.

Daha sonraki adımlarda stack'ın en üstündeki A sembolü ile x sembolünü degiştirir

($A \rightarrow x \in R$) veya girişten okunan sembol ile aynı olan stack'ın en üstündeki terminal sembolü pop eder.

Bu PDA leftmost derivation yapar. Nondeterministic çalışır.

Pushdown Automata and CFGs

Örnek: $G = (V, \Sigma, R, S)$, $V = \{S, a, b, c\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, *ve*

$R = \{S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb, S \rightarrow c)$ *şeklinde tanımlı bir CFG olsun ve*

$L = \{wcw^R : w \in \{a, b\}^*\}$

dilini oluştursun.

Bu dili tanıyan bir PDA olan $M = (\{p, q\}, \Sigma, V, \Delta, p, \{q\})$ *olarak tanımlanabilir.*

$$
\begin{array}{ll}
\Delta = \{ ((p, e, e), (q, S)), & (T1) \\
\quad ((q, e, S), (q, aSa)), & (T2) \\
\quad ((q, e, S), (q, bSb)), & (T3) \\
\quad ((q, e, S), (q, c)), & (T4) \\
\quad ((q, a, a), (q, e)), & (T5) \\
\quad ((q, b, b), (q, e)), & (T6) \\
\quad ((q, c, c), (q, e))\} & (T7)
\end{array}
$$

PDA and CFGs

$\Delta = \{ ((p, e, e), (q, S)),$
$((q, e, S), (q, aSa)),$
$((q, e, S), (q, bSb)),$
$((q, e, S), (q, c)),$
$((q, a, a), (q, e)),$
$((q, b, b), (q, e)),$
$((q, c, c), (q, e))\}$

Örnek: (devam)

abbcbba için geçişler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

State	Unread Input	Stack	Transition Used
p	$abbcbba$	e	–
q	$abbcbba$	S	T1
q	$abbcbba$	aSa	T2
q	$bbcbba$	Sa	T5
q	$bbcbba$	$bSba$	T3
q	$bcbba$	Sba	T6
q	$bcbba$	$bSbba$	T3
q	$cbba$	$Sbba$	T6
q	$cbba$	$cbba$	T4
q	bba	bba	T7
q	ba	ba	T6
q	a	a	T6
q	e	e	T5

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ PDA'sı aşağıdaki gibi verilmiştir:

$K = \{s, f\}$,

$F = \{f\}$,

$\Sigma = \{a, b\}$,

$\Gamma = \{a\}$,

$\Delta = \{((s, a, \varepsilon), (s, a)), ((s, b, \varepsilon), (s, a)), ((s, a, \varepsilon), (f, \varepsilon)), ((f, a, a), (f, \varepsilon)), ((f, b, a), (f, \varepsilon))\}$.

(a) **aba** .girişi için M PDA'sındaki tüm konfigürasyon geçişlerini veriniz.

(b) **aba, aa, abb** $\notin L(M)$ ve **baa, bab, baaaa** $\in L(M)$ olduğunu gösteriniz.

(c) Sözel olarak bu makinanın yaptığı işi tanımlayınız.

$L(M)=\{w \in \Sigma^* \mid \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ PDA'sı aşağıdaki gibi verilmiştir:

$K = \{s, f\}$, $F = \{f\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a\}$,

$\Delta = \{((s, a, \varepsilon), (s, a)), ((s, b, \varepsilon), (s, a)), ((s, a, \varepsilon), (f, \varepsilon)), ((f, a, a), (f, \varepsilon)), ((f, b, a), (f, \varepsilon))\}$.

(a) **aba** .girişi için M PDA'sındaki tüm konfigürasyon geçişlerini veriniz.

(b) **aba, aa, abb** $\notin L(M)$ ve **baa, bab, baaaa** $\in L(M)$ olduğunu gösteriniz.

(c) Sözel olarak bu makinanın yaptığı işi tanımlayınız.

$L(M)=\{w \in \Sigma^* \mid$

(a)

$(s, aba, \varepsilon) \vdash (s, ba, a) \vdash (s, a, aa) \vdash (s, \varepsilon, aaa)$

$(s, aba, \varepsilon) \vdash (s, ba, a) \vdash (s, a, aa) \vdash (f, \varepsilon, aa)$

$(s, aba, \varepsilon) \vdash (f, ba, \varepsilon)$

Bu konfigürasyonlardan hiçbiri kabul edilebilir bir konfigürasyonla sonuçlanmıyor: aba $\notin L(M)$.

(b) a'daki gibi yapılabilir.

(c) $L(M)=\{w \in \Sigma^* \mid w$ katarının tam ortasında her zaman a sembol vardır$\}$

$L(M) = \{xay \in \Sigma^* : |x| = |y|\}$.

Construct pushdown automata that accept the following:

$L = \{a^m b^n : \mathbf{m \leq n \leq 2m}\}$.

a'yı saymak için yığını kullanmamız ve daha sonra bu sayıyı okuduğumuz gibi b'lerle karşılaştırmamız gerekmektedir. Buradaki komplikasyon, her a için bir veya iki b olabilir. Yani nondeterminisme ihtiyacımız olacak. Unutmayın ki önce a'lar sonra ise b'ler geliyor.

Her bir a gördüğümüzde, bunun bir b ile mi yoksa iki b ile eşleşeceğini bilmiyoruz.

YÖNTEM 1: Birincisi, a'lar için bir veya iki sembolü yığının üzerine itmektir. Bu durumda, b'lere ulaştığımızda, gördüğümüz her b için bir karakter çekmemiz gerekir. Bir veya iki itilen karakterin tüm kombinasyon yollarını takip eden non-deterministik bir makine, L dilindeki her katar için en az bir eşleşme bulacaktır.

YÖNTEM 2: Alternatif olarak, her a için tek bir karakter itmek (push) ve b'leri işlerken belirsizliği sağlamaktır: Her yığın karakteri için bir b veya iki b kabul ediyoruz.

ikinci yaklaşımı benimseyen bir PDA tasarlayalım. Bunu başka bir yolla yazmayı da deneyebilirsiniz. Bu makinenin aslında üç duruma ihtiyacı var: iki b'nin okunduğu ancak sadece tek bir a'nın açıldığı duruma izin vermek için ve b'leri işlemek için iki duruma ihtiyaç duyar. M = ({s, f, g}, {a, b}, {a}, Δ, s, {f, g}), burada

Δ = { ((s, a, ε), (s, a)), /* Read an a and push one onto the stack */

((s, ε, ε), (f, ε)), /* Jump to the b reading state */

((f, b, a), (f, ε)), /* Read a single b and pop an a */

((f, b, a), (g, ε)), /* Read a single b and pop an a but get ready to read a second one */

((g, b, ε), (f, ε))}. /* Read a single b without popping an a */

Aşağıda verilen L dilini ele alalım:
L = $\{w^R w'' \mid w \in \{a, b\}^*$ ve w'' *w katarındaki* her *a* sembolünün *b* ile ve *b* sembolünün *a* ile değiştiği katarı gösterir$\}$.

L(M) sağlayan M PDA'sını elde ediniz.

aaabbb $\in$ L(M) bbbbaaaa $\in$ L(M) babbaaba $\in$ L(M) abaababbab $\in$ L(M)

Aşağıda verilen L dilini ele alalım:
L = {$w^R w''$ | $w \in \{a, b\}^*$ ve w'' *w katarındaki* her *a* sembolünün *b* ile ve *b* sembolünün *a* ile değiştiği katarı gösterir}.

L(M) sağlayan M PDA'sını elde ediniz.

aaabbb $\in$ L(M) bbbbaaaa $\in$ L(M) babbaaba $\in$ L(M) abaababbab $\in$ L(M)

Yöntem: Her a ve b geldiğinde yığına atarım, sonra nondeterministik olarak bir andan itibaren her a geldiğinde b, her b geldiğinde a çekerim

$M = (\{p,q\}, \{a, b\}, \{a\}, \Delta, p, q)$, burada

$$
\Delta = \{ \begin{array}{l}
((p, a, \varepsilon), (p, a)), \\
((p, b, \varepsilon), (p, b)), \\
((p, \varepsilon, \varepsilon), (q, \varepsilon)), \\
((q, a, b), (q, e)), \\
((q, b, a), (q, e))
\end{array} \}
$$

M = ({p,q}, {a, b}, {a}, Δ, p, q), burada

Δ = { ((p, a, ε), (p, a)),

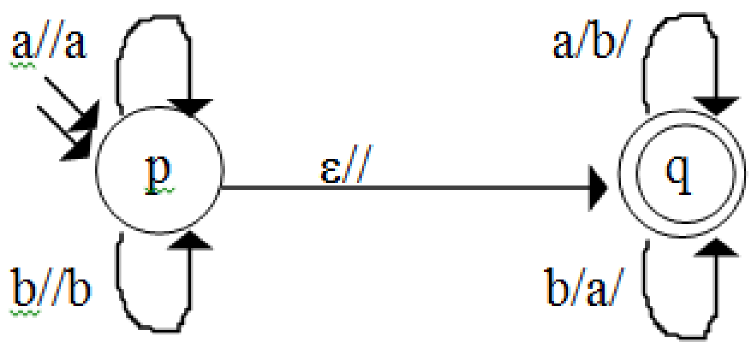
((p, b, ε), (p, b)),

((p, ε , ε), (q, ε)),

((q, a, b), (q, e)),

((q, b, a), (q, e))

}



Ödev

- Problemleri çözünüz 3.3.1a, 3.3.1b (sayfa 135)
- Problemleri çözünüz 3.3.2a, 3.3.2b, 3.3.2c, 3.3.2d (sayfa 135)
- Problemleri çözünüz 3.4.1 (sayfa 142)