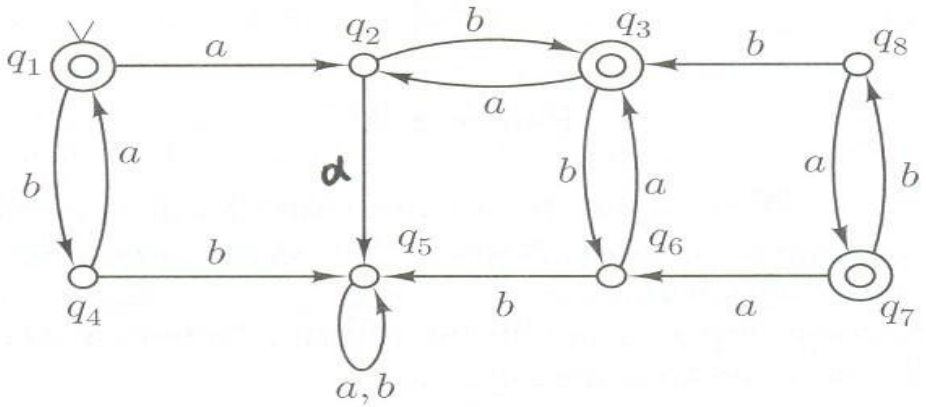
CENG 306 Biçimsel Diller ve Otomatlar
Formal Languages and Automata

Konular

- Durum İndirgeme - State Minimization
- Myhill-Nerode Theorem
- Table-Filling Algorithm

State Minimization

- Bir M otomatı için birçok durumu gözardı etmenin kolay bir yolu olabilir.
- Aşağıdaki otomat $L=(ab \cup ba)^*$ dilini tanır.



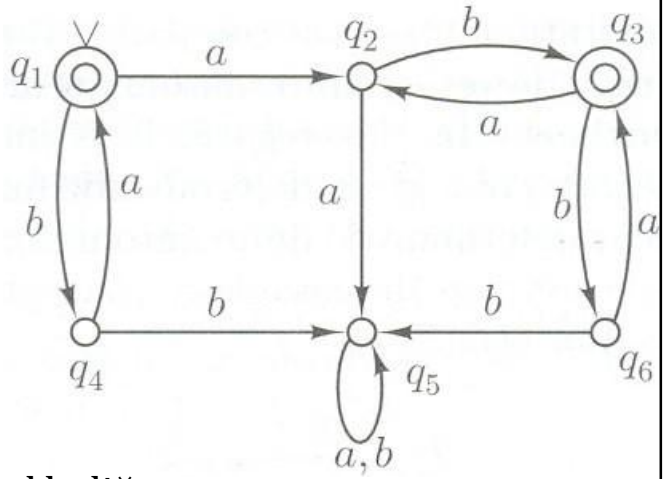
- Burada q_7 ve q_8 durumları unreachable (erişilemez) durumdur.
- Unreachable durumların tamamı otomat'tan doğrudan çıkarılabilir.
- NFA'nın DFA eşitini bulurken aynı optimizasyon yapılmaktadır.

State Minimization

- Unreachable durumları bulan algoritma aşağıdaki gibidir;

> *R := {s};*
> *while there is a state* ***p ∈R and a ∈ L and ∂(p, a)*** *such that ∂(p, a) ∉ R*
> *do add ∂(p, a) to R*

- Bu algoritmayla silinen durumlardan sonra da otomat hala gereksiz durumlara sahip olabilir.
- Burada q_4 ve q_6 durumları denk'tir (**equivalent**).
- Bu yüzden bir durum olarak birleştirilebilir.
- q_4 ve q_6 denk durumlar aynı string için otomatı sonuç durumuna götürür.



- Denk durumlar aynı string için otomatı sonuç olmayan farklı diğer durumlara da götürebilir.

State Minimization

Tanım: L diline göre iki string'in denkliği

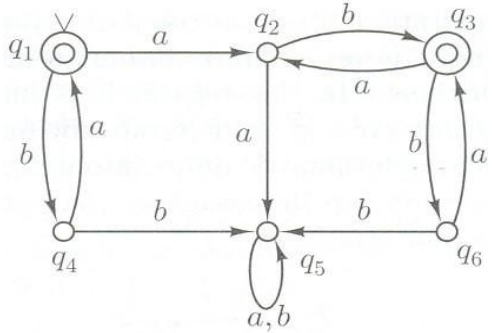
$L \subseteq L^*$ ve x, y$\in L^*$ olsun. Eğer $z \in L^*$ ve $xz \in L$ iken $yz \in L$ olursa x ve y, ***L diline göre denk*** *olarak adlandırılır,* $\boldsymbol{x \approx_L y}$ *şeklinde gösterilir.*

- *x ve y string'lerinin ikisi de L diline ait olabilir veya olmayabilir.*
- *Sonlarına eklenen herhangi bir string x ve y'i L diline ait yapabilir veya yapmayabilir.*

State Minimization

Örnek: *x bir string ve L bir dil ise,* [x] bu *L diline göre x'in sahip oldugu denk sınıfı göstersin.*

Aşağıdaki otomat $L = (ab \cup ba)^*$ *dilini tanır ve* $\approx_L$ *için 4 denk sınıf vardır;*



1. [e] = L

2.[a] = La

3.[b] = Lb

4.[aa] = L(aa ∪ bb)I*

- ***1. durumda*** *herhangi bir x∈ L için, x = e bile olsa xz∈ L yapan her z string'ide L diline aittir.*
- ***2. durumda*** *herhangi bir x∈ La string'i xz ∈ L olabilmesi için z string'inin* ***bL*** *şeklinde olması gereklidir.*
- ***3. durumda*** *z string'inin* ***bL*** *şeklinde olması gereklidir.*
- ***4. durumda*** *hiçbir z string'i L(aa ∪ bb) prefix'i için bu string'i dile ait yapamaz.*
- ***1. durumdaki kümeye ait tüm stringler aynı durumlara, ve diger 2., 3., veya 4. durumlardaki string kümeleri de aynı durumlara götürür.***

State Minimization

Tanım: M otomatına göre iki string'in denkliği

M = (K, L, δ, s, F) *bir deterministic automata olsun.*

Eger iki string x, y∈ $\sum^*$ *M otomatını s başlangıç durumundan aynı duruma götürüyorsa* ***M otomatına göre denktir*** *ve* $x \sim_M y$ *şeklinde gösterilir.*

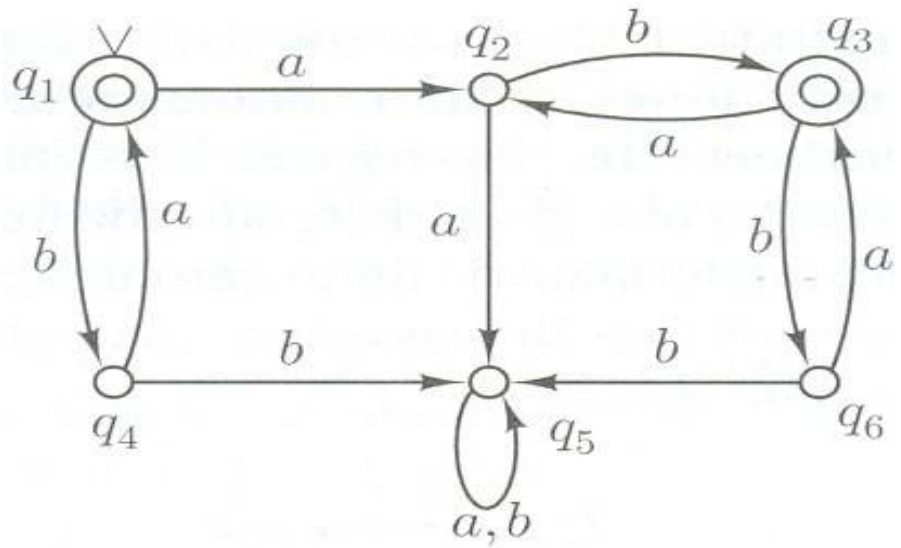
$$(s, x) \vdash^* (q, e) \quad ve \quad (s, y) \vdash^* (q, e) \quad ise \; x \sim_M y \quad olur.$$

- *Herhangi bir q durumu için denk sınıf* E_q *şeklinde gösterilir.*
- *Bu durumların s başlangıç durumundan erişilebilir olması zorunludur.*

State Minimization

Örnek: *Aşagıdaki otomat* $L = (ab \cup ba)^*$ *dilini tanır ve* $\sim_M$ *için 6* ***denk sınıf*** *vardır;*

1. $E_{q1} = (ba)^*$
2. $E_{q2} = La \cup a$
3. $E_{q3} = abL$
4. $E_{q4} = b(ab)^*$
5. $E_{q5} = L(bb \cup aa) \sum^*$
6. $E_{q6} = abLb$



Teorem: *Deterministic* $M = (K, \mathrm{L}, \delta, s, F)$ *otomatında herhangi* $x, y \in \sum^*$ *string'leri için* $x \sim_M y$ *ise* $x \approx_{L(M)} y$ *olur.*

Myhill-Nerode Theorem

Teorem: $L \subseteq \sum^*$ *regular dil olsun.* ***L dilini tanıyan ve*** $\approx_L$ ***içindeki denk sınıfların sayısına tam eşit sayıda duruma sahip olan*** *bir deterministic automata vardır.*

ispat: $x \in \sum^*$ *string'i için* $\approx_L$ *ilişkisi içinde denk sınıflar* $[x]$ *şeklinde gösterilir. Bu dil için*

$M = (K, \sum, \delta, s, F)$ *otomatı aşağıdaki gibi oluşturulabilir;*

$K = \{ [x] : x \in \sum^* \}$, $\approx_L$ *altında denk sınıflar kümesi*

$s = [e]$, $\approx_L$ *altında e için denk sınıflar kümesi*

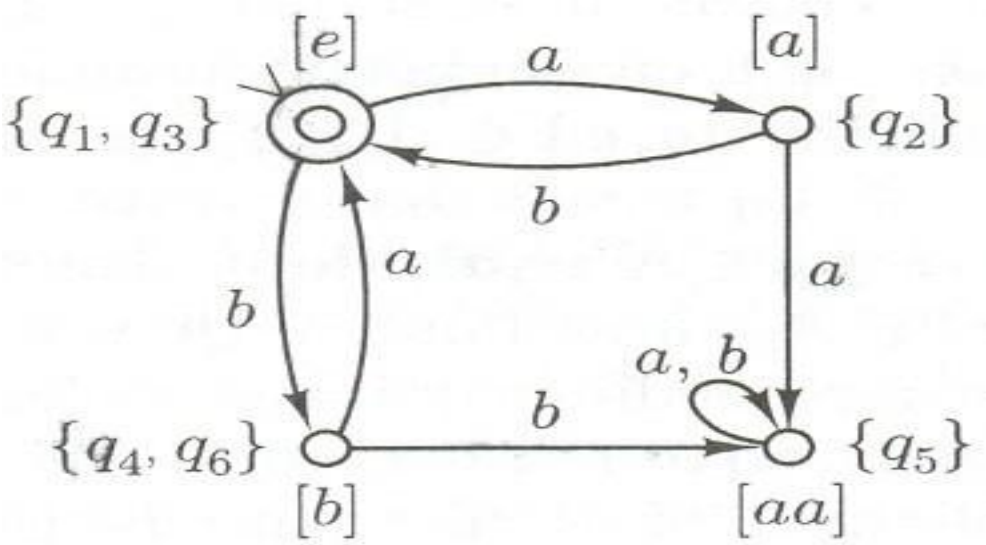
$F = \{ [x] : x \in L \}$,

Son olarak herhangi bir $[x] \in K$ *ve herhangi bir* $a \in \sum$ *için,*

$\delta([x], a) = [xa]$ *geçişleri tanımlanır.*

Myhill-Nerode Theorem

Örnek: *L = (ab ∪ ba)* dilini tanıyan 6 duruma sahip olan deterministic otomat 4 durumla gösterilebilir.*

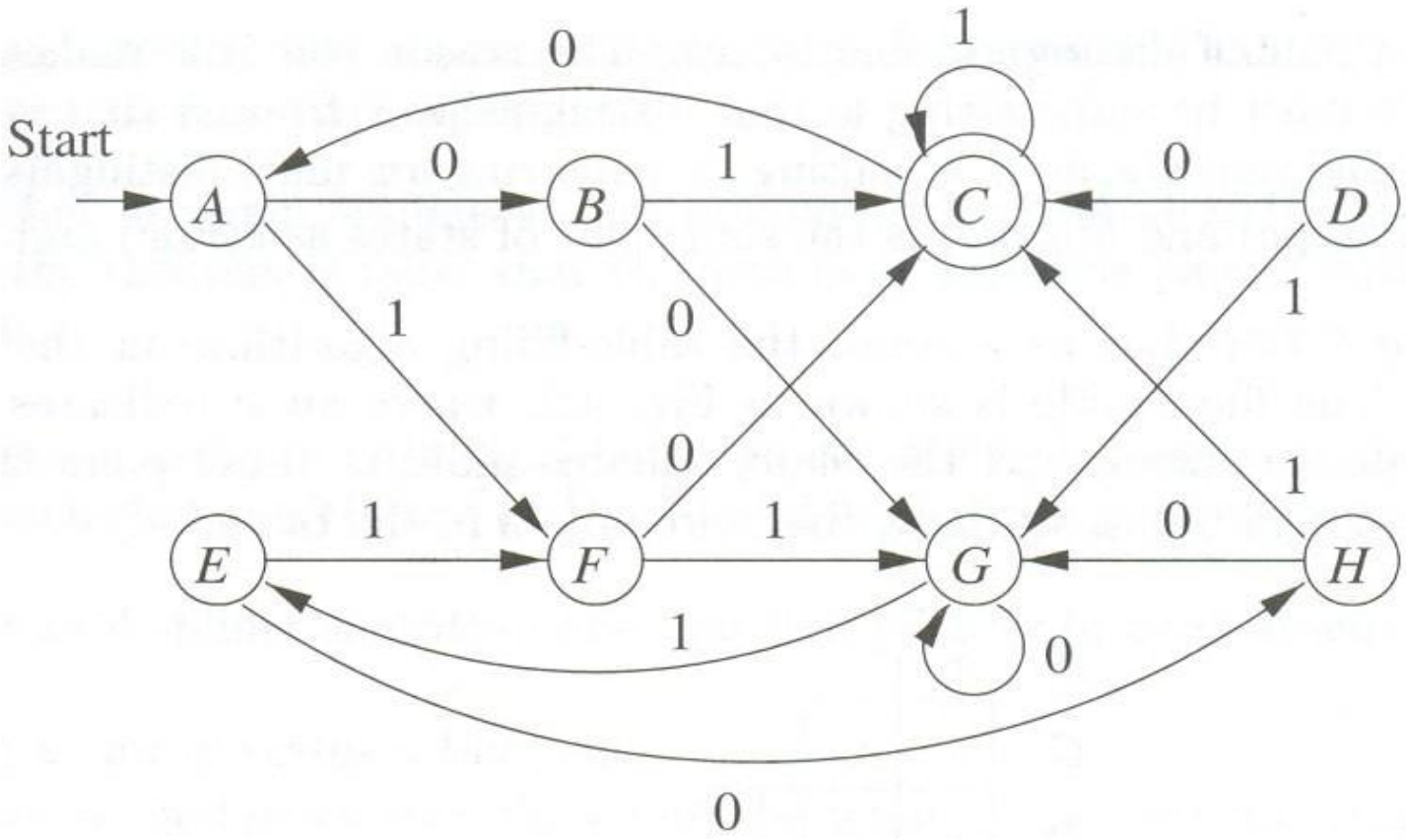


Corollary: *L bir regular dildir, eger $\approx_L$ sonlu sayıda denk sınıfa sahipse.*

ispat : *L = L(M) regular ise, en az $\approx_L$ deki denk sınıfların sayısı kadar duruma sahip bir M deterministic sonlu otomat vardır.*

State Minimization

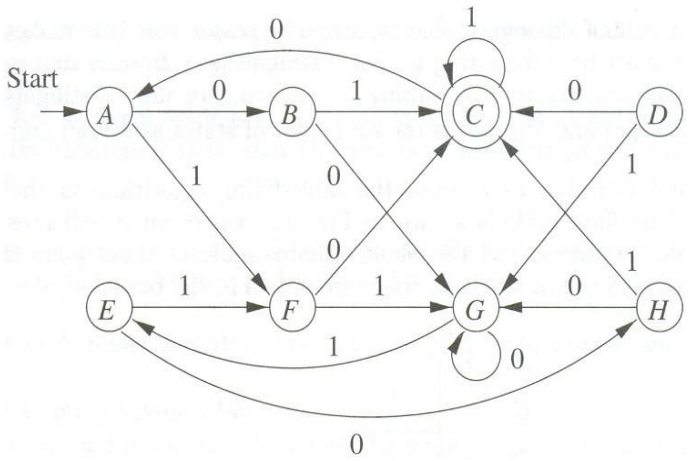
Örnek: *Aşagıdaki otomat'ın en az duruma sahip eşitini bulalım. Denk durum var mıdır ?*



State Minimization

Örnek: *Aşagıdaki otomat'ın en az duruma sahip eşitini bulalım.*

denk durum var mıdır ? C ve G denk degildir!



A ve G denk midir?

- e-string için ikisi denktir.

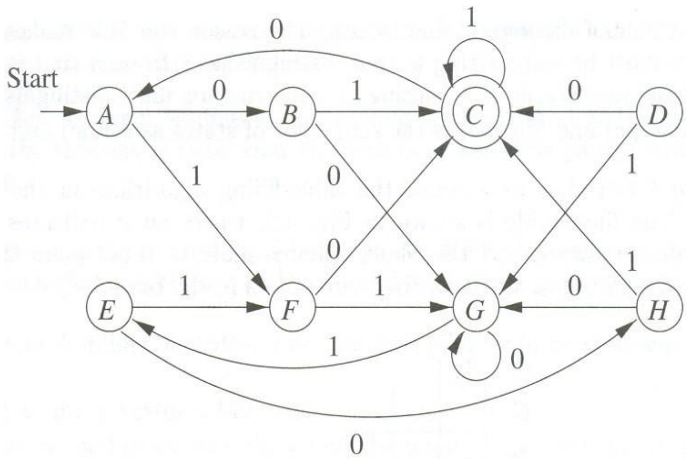
Çünkü ikisi de final state degildir.

- *0 için ikisi B ve G ye gider.* İkisi *de final state değildir ve denktir.*
- *1 için F ve E ye giderler.* İkisi *de final state değildir ve denktir.*

State Minimization

Örnek: *Aşagıdaki otomat'ın en az duruma sahip eşitini bulalım.*

denk durum var mıdır ? C ve G denk degildir!



A ve G denk midir?

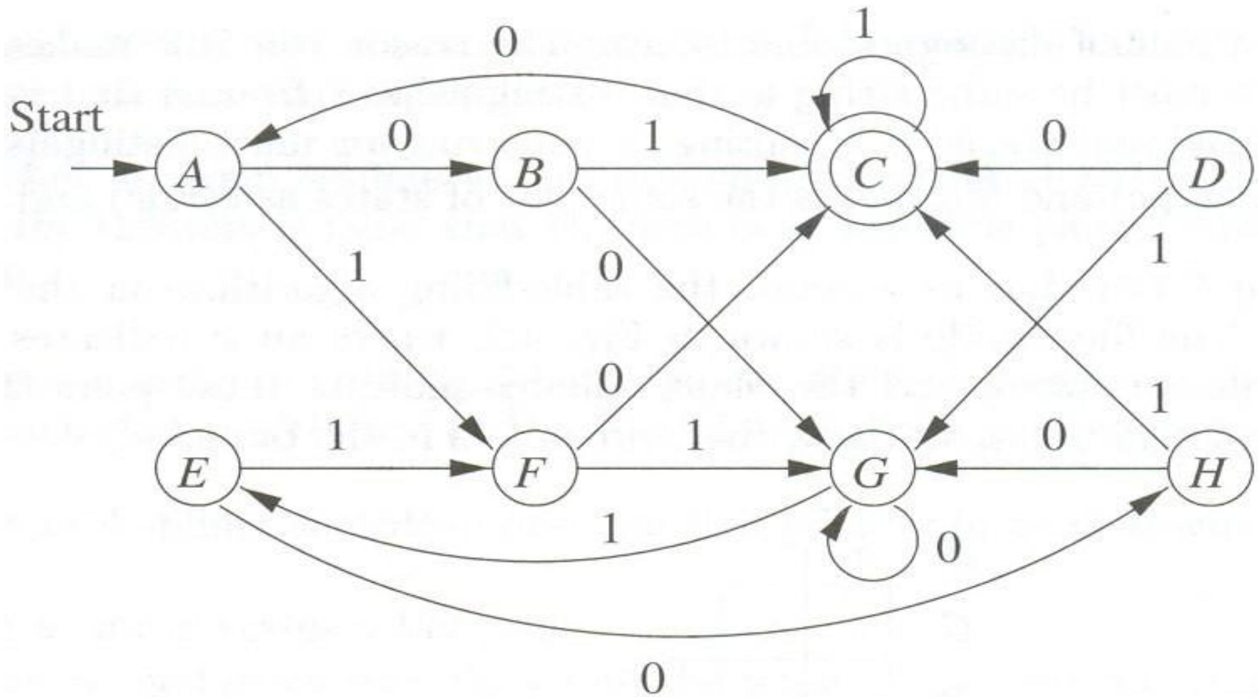
- e-string için ikisi denktir.

Çünkü ikisi de final state degildir.

- *0 için ikisi B ve G ye gider.* İkisi *de final state değildir ve denktir.*
- *1 için F ve E ye giderler.* İkisi *de final state değildir ve denktir.*
- *01 için sırasıyla C ve E ye giderler. C final state E değildir. Böylece* ***01 için denk değillerdir****.*
- *Herhangi bir string için seçilen iki durumdan birisi final state'e giderken digeri gitmiyorsa denk olmadıkları ispat edilmiş olur.*

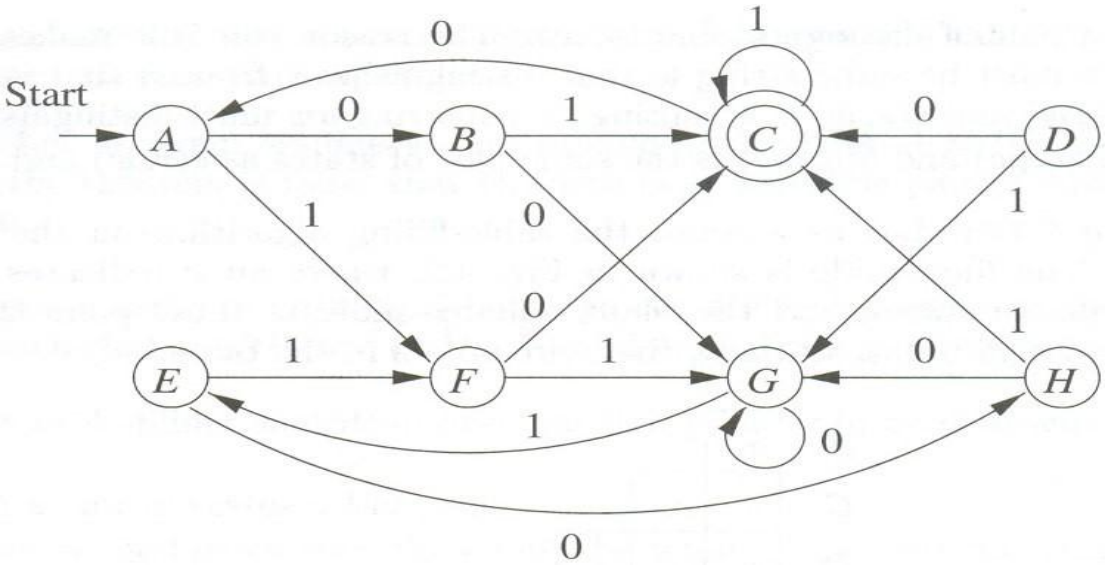
State Minimization

Örnek: *Aşagıdaki otomat'ın en az duruma sahip eşitini bulalım.*



State Minimization

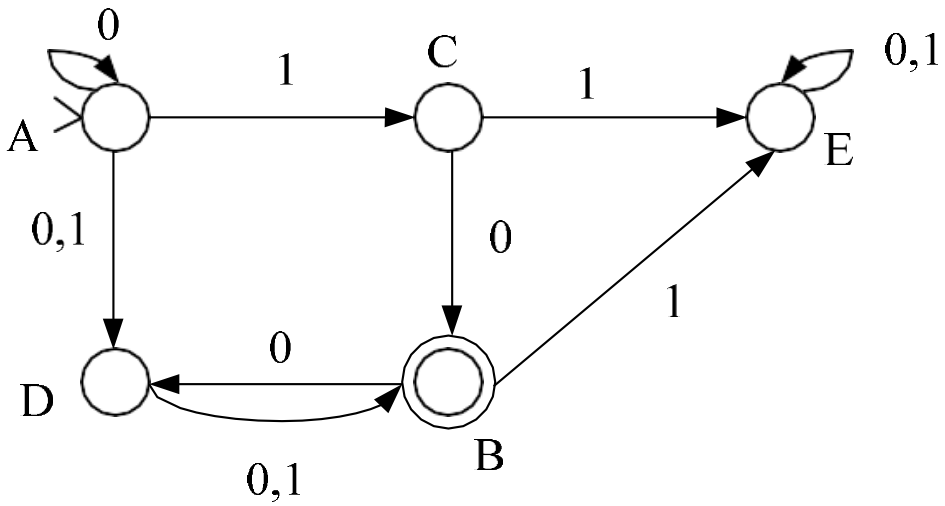
Örnek: *Aşagıdaki otomat'ın en az duruma sahip eşitini bulalım.*



- *A ve E durumlarına bakalım.* İkisi *de final state olmadıgı için e-string için denktirler.*
- *1 için ikisi de F' ye gider. 1'le başlayan tüm stringler için denktirler.*
- *0 için B ve H' ye giderler.* İkisi *de final state olmadıgı için denktir.*
- *01 için ikiside C'ye 00 için ikisi de G'ye gider.* $\delta(A, \Sigma^*) = \delta(E, \Sigma^*)$

State Minimization

- *Denk durumların bulunması için tüm durumları tek tek test etmek gerekir. Bu zor ve zaman alıcıdır. Hata yapma olasılığı yüksektir.*
- *Bunu sistematik yapmak için **Tablo Doldurma Algoritması** kullanılır.*
- *Durumlar kendi kendisini içermeyecek şekilde bir **tablo** hazırlanır.*
- *Başlangıçta final state'ler ile diğerleri denk değil olarak işaretlenir.*



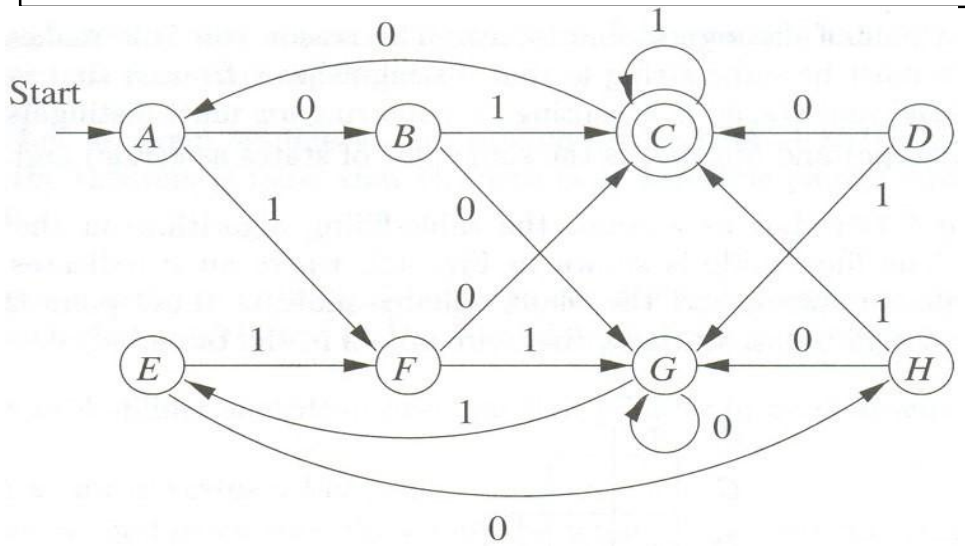
	A	B	C	D
B	x			
C		x		
D		x		
E		x		

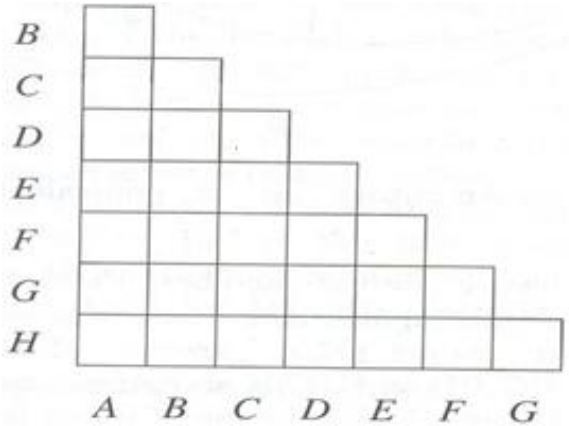
State Minimization

Örnek:

- *C final state'tir. C ile diğer durumlar arasına x konur.*
- *Diğer durum çiftlerinde 0 ve/veya 1 girişleri için final state ve diğer durumlara gidiliyorsa x ile işaretlenir.*

  Örn: E ve F 0 için H ve C'ye gider. C final state ve H final state degil E ve F çifti işaretlenir.
- *Örnegin A ve G için 1 girişinde F ve E'ye gider. E-F çifti işaretli oldugu (denk olmadığı) için A-G işaretlenir.*



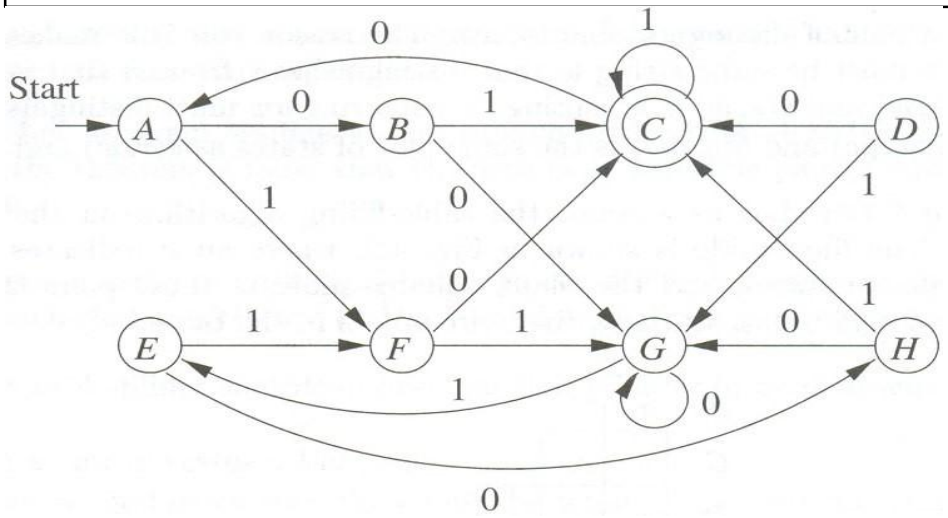


State Minimization

Örnek:

- *C final state'tir. C ile diğer durumlar arasına x konur.*
- *Diğer durum çiftlerinde 0 ve/veya 1 girişleri için final state ve diğer durumlara gidiliyorsa x ile işaretlenir.*

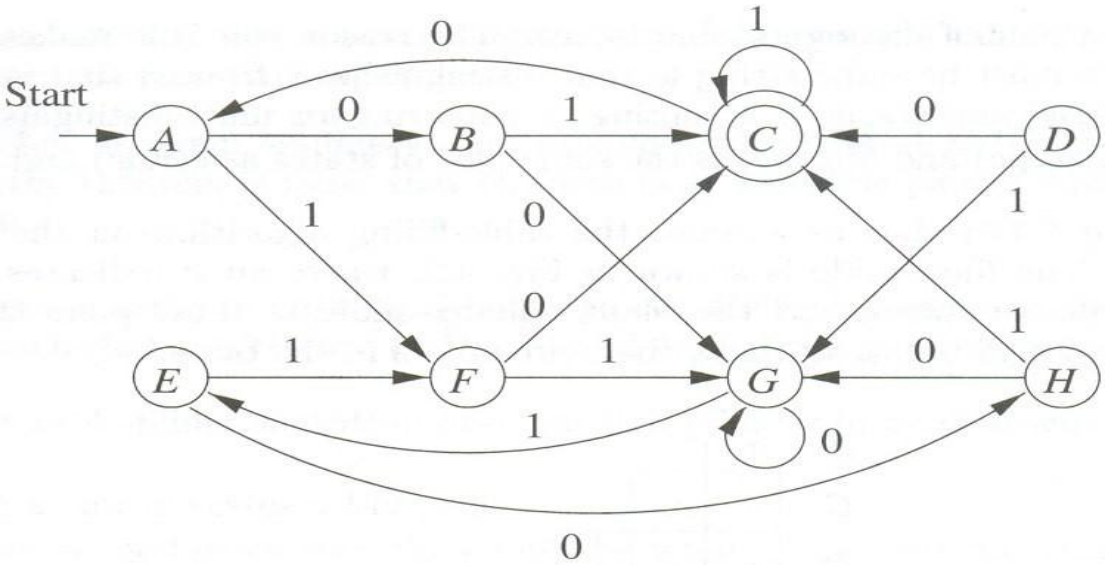
  Örn: E ve F 0 için H ve C'ye gider. C final state ve H final state degil E ve F çifti işaretlenir.
- *Örnegin A ve G için 1 girişinde F ve E'ye gider. E-F çifti işaretli oldugu (denk olmadığı) için A-G işaretlenir.*



	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x

State Minimization

Örnek: *Aşagıdaki otomat'ın en az duruma sahip eşitini bulalım.*

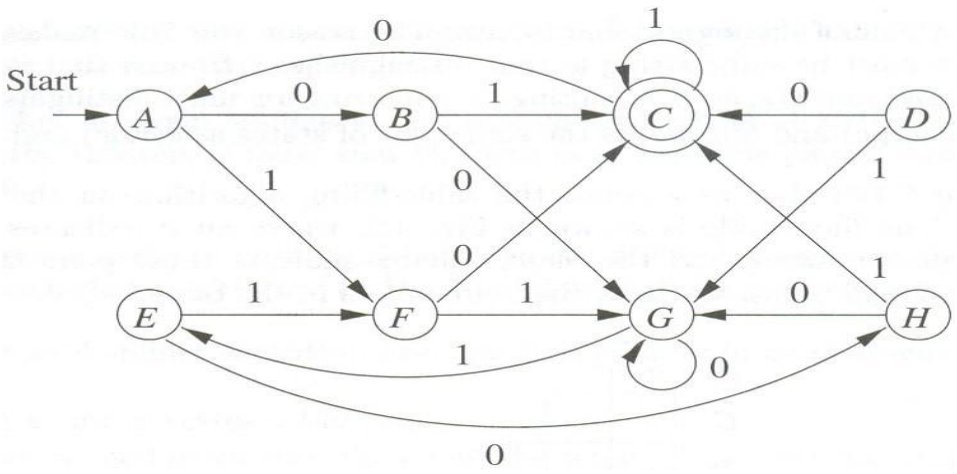


- *A ve E durumlarına bakalım.* İkisi *de final state olmadıgı için e-string için denktirler.*
- *1 için ikisi de F' ye gider. 1'le başlayan tüm stringler için denktirler.*
- *0 için B ve H' ye giderler.* İkisi *de final state olmadıgı için denktir.*
- *01 için ikiside C'ye 00 için ikisi de G'ye gider.* $\delta(A, \sum^*) = \delta(E, \sum^*)$

State Minimization

Örnek: (devam)

- *A-E, B-H ve D-F durumları denk durumlardır ve birleştirilebilir.*

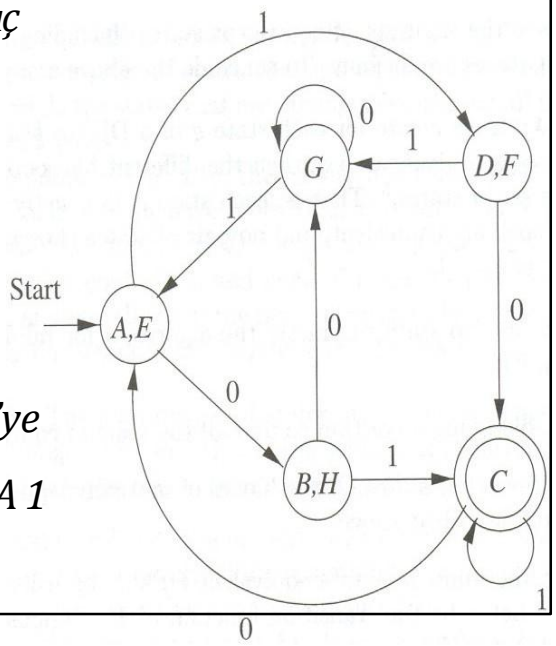


	A	B	C	D	E	F	G
B	x						
C	x	x					
D	x	x	x				
E		x	x	x			
F	x	x	x		x		
G	x	x	x	x	x	x	
H	x		x	x	x	x	x

State Minimization

Örnek: (devam)

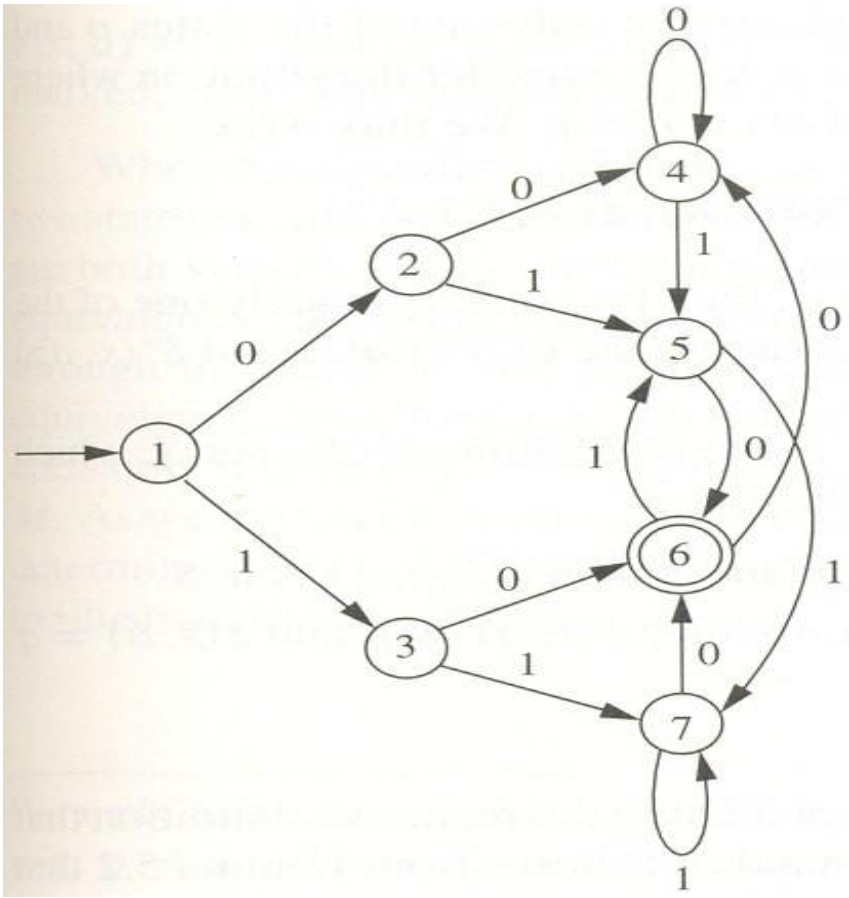
- *States kümesinin partition kümesi, ({A, E}, {B, H}, {C}, {D, F}, {G}) olarak oluşturulur.*
- *Denk durumlar transitive'dir.* ***p-q denk ise ve q-r denk ise p-r 'de denktir****.*
- *Partition kümesindeki her bir eleman bir durum olarak oluşturulur.*
- *Başlangıç durumu {A, E} dir. Çünkü A orijinal otomatta başlangıç durumudur.*
- *C final state'dir. Çünkü orijinal otomatta final state'dir.*
- *Yeni oluşturulan her bir durumun tüm girişler için geçişleri düzenlenir.*
- *Örnek: {A, E} 0 için {B, H}'ye geçer. Orijinal otomatta A 0 için B'ye E ise H'ye geçer. {A, E} 1 için {D, F}'ye geçer. Orijinal otomatta A 1 için F'ye ve E 1 için F'ye geçer.*

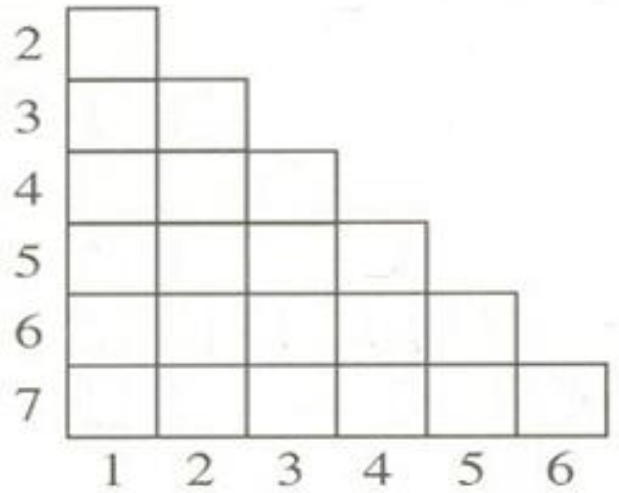


State Minimization

Örnek:

- *Aşağıdaki otomata denk minimum duruma sahip otomatı bulunuz.*

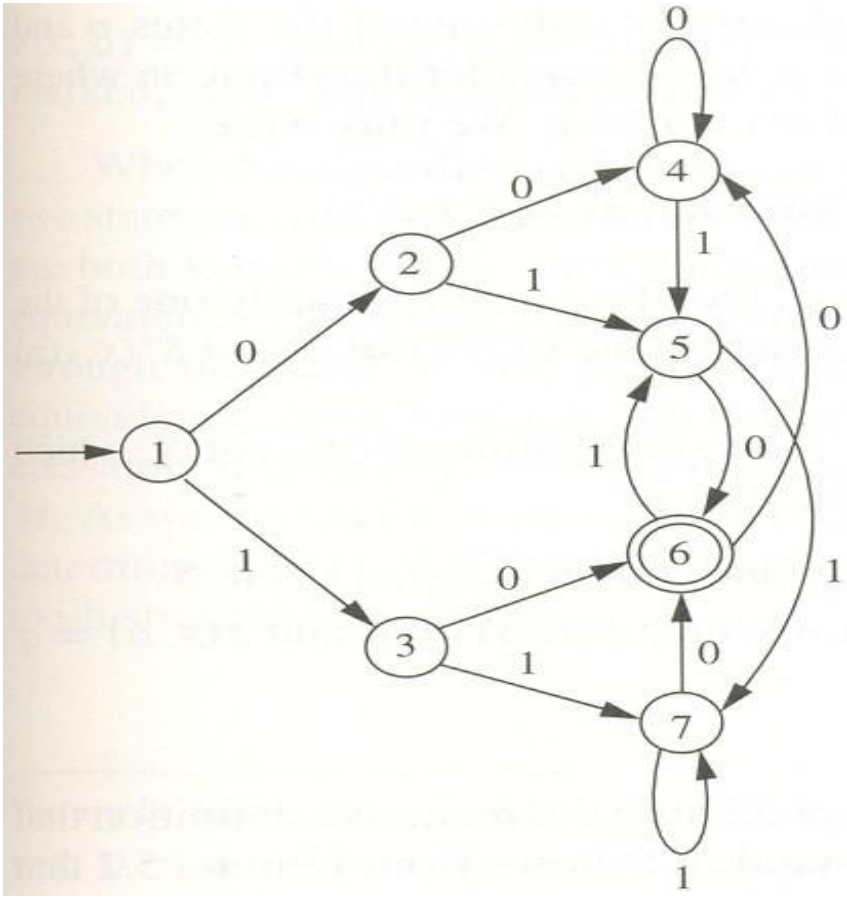


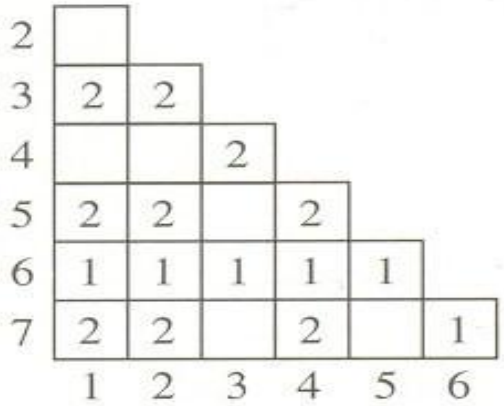


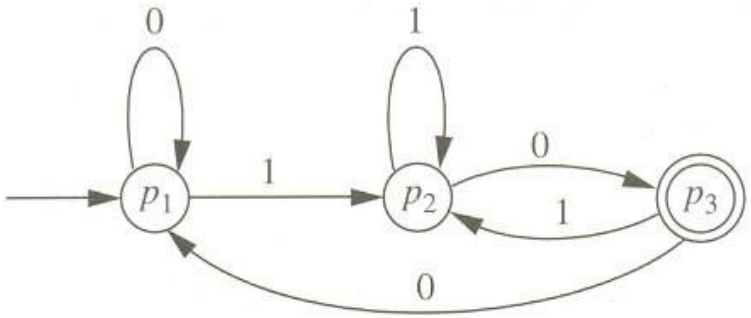
State Minimization

Örnek:

- *Aşağıdaki otomata denk minimum duruma sahip otomatı bulunuz.*







Ödev

- Problemleri çözünüz 2.5.3 (sayfa 101)