Mindstorms EV3
Calcul du correcteur RST

$$G(s) = FTBO(s) = \frac{0{,}157}{0{,}0667\,s^2 + s} = \frac{\text{Vitesse angulaire (rad/s)}}{\text{Tension induit (\%)}}$$

$$G(z) = \frac{0{,}000112\,z + 0{,}0001066}{z^2 - 1{,}861\,z + 0{,}8608} = \frac{0{,}00011202\,(z + 0{,}9513)}{(z-1)(z-0{,}8608)}$$

* Avec l'EV3, on a 1 retard pur supplémentaire dans la chaîne directe qui correspond au temps d'application de la commande (au début de la période suivante).

$$\Rightarrow G_n(z) = \frac{0{,}00011202\,z^{-2}(1 + 0{,}09513\,z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0{,}8608\,z^{-1})} \Rightarrow d = 2$$

$B = 0{,}00011202\,(1 + 0{,}09513\,z^{-1})$

$A = (1 - z^{-1})(1 - 0{,}8608\,z^{-1})$

1. Définition des compensations pôles/zéros :

$B^+ = 1$ $\quad B^- = 0{,}00011202\,(1 + 0{,}09513\,z^{-1})$ → car ce zéro est du côté des réels négatifs.

$A^+ = (1 - 0{,}8608\,z^{-1})$ → pôle stable

$A^- = (1 - z^{-1})$ → on ne compense pas l'intégrateur.

2. Définition du modèle de suivi de consigne :

$$M(z) = z^{-2}\,\frac{B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} = \frac{z^{-2} \times \overbrace{0{,}00011202\,(1 + 0{,}09513\,z^{-1})}^{B^-}\,B_m^+}{A_m}$$

A_m : réponse équivalente à 1 second ordre de pulsation naturelle ω_n et d'amortissement ξ $\Rightarrow A_m(z^{-1}) = 1 - 2\alpha\cos\beta\, z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}$

$\alpha = e^{-\xi\omega_n T_e}$ et $\beta = \omega_n T_e\sqrt{1-\xi^2}$

A.N. $\omega_n = 40$ rad/s $\quad \xi = 0{,}707$ (t_r 5% optimal)

$$\Rightarrow A_m = 0{,}5680\,z^{-2} - 1{,}4474\,z^{-1} + 1$$

objectif supplémentaire : erreur d'accélération nulle (ordre 2)

$$\Rightarrow A_m - z^{-d} B^- B_m^+ = (1-z^{-1})^3 B_0$$

C'est une équation diophantienne → méthode générale de résolution.

$$\underbrace{z^{-d} B^- B_m^+}_{m=3} + \underbrace{(1-z^{-1})^3}_{n=3} B_0 = \underbrace{A_m}_{q=2}$$

On est dans le cas où $q < n+m \Rightarrow$ une solution d'ordre minimal

$\deg\{B_m^+\} = n-1 = 2$ $\quad\deg\{B_0\} = m-1 = 2$

$$\Rightarrow B_m^+ = b_{m0} + b_{m1} z^{-1} + b_{m2} z^{-2} \qquad B_0 = b_{00} + b_{01} z^{-1} + b_{02} z^{-2}$$

3. Ajout d'un intégrateur pour le rejet de perturbations en échelon : $p = 1$.

4. Choix d'un filtre supplémentaire pour rejeter du bruit de quantification (codeur incrémental de pas très grossier = 1°)

$A_0 = 1 - 0{,}9\,z^{-1}$ (pôle en 0,9)

5. Résolution des équations diophantiennes :

$$\underbrace{(1-z^{-1}) A^-}_{n=2} S_2 + \underbrace{z^{-2} B^-}_{m=3} R_0 = \underbrace{A_m A_0}_{q=3}$$

On est dans le cas $q < n+m \Rightarrow \deg\{S_2\} = m-1 = 2$

$\deg\{R_0\} = n-1 = 1$

$$\Rightarrow S_2 = s_{20} + s_{21} z^{-1} + s_{22} z^{-2} \quad \text{et} \quad R_0 = r_{00} + r_{01} z^{-1}$$

Seconde équation diophantienne : $T_0 = B_m^+ A_0$

6. Calcul de R, S et T.

$$T = A^+ T_0 = t_4 z^{-4} + t_3 z^{-3} + t_2 z^{-2} + t_1 z^{-1} + t_0$$

$$R = A^+ R_0 = \cancel{r_3 z^{-3}} + r_2 z^{-2} + r_1 z^{-1} + r_0$$

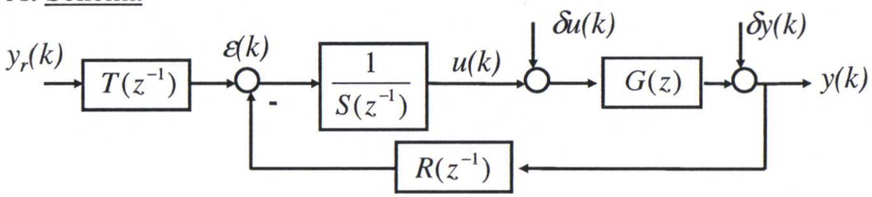
$$S = (1 - z^{-1}) B^+ S_2 = s_3 z^{-3} + s_2 z^{-2} + s_1 z^{-1} + 1 .$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (1)

9.1 Le correcteur RST:

A. Schéma



avec $R(z^{-1}), S(z^{-1}), T(z^{-1})$ polynômes en z^{-1}

et $S(z^{-1})$ monique $\Leftrightarrow$ $S(0)=1$

Soit $G(z)=\dfrac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ avec $B(z^{-1}), A(z^{-1})$ polynômes en z^{-1} premiers et $A(z^{-1})$ monique $\Leftrightarrow$ $A(0)=1$

$d \geq 1$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (2)

B. Equations du système bouclé

$$Y(z)=\frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})}(U(z)+\delta U(z))+\delta Y(z) \qquad (1)$$

$$U(z)=\frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y_r(z)-\frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y(z) \qquad (2)$$

$\Rightarrow$

$$Y(z)=\frac{z^{-d}BT}{AS+z^{-d}BR}Y_r(z)+\frac{z^{-d}BS}{AS+z^{-d}BR}\delta U(z)+\frac{AS}{AS+z^{-d}BR}\delta Y(z) \qquad (3)$$

$$U(z)=\frac{AT}{AS+z^{-d}BR}Y_r(z)-\frac{z^{-d}BR}{AS+z^{-d}BR}\delta U(z)-\frac{AR}{AS+z^{-d}BR}\delta Y(z) \qquad (4)$$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (3)

C. Objectifs de la synthèse

1. Le suivi de consigne obéit au modèle suivant:

$M(z)=\dfrac{z^{-d}B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})}$ avec $M(1)=1 \Leftrightarrow B_m(1)=A_m(1)$

$\Rightarrow$ l'erreur de position est nulle

et $A_m(z^{-1})$ monique $\Leftrightarrow$ $A_m(0)=1$

$$\Rightarrow \quad Y(z)=\frac{z^{-d}BT}{AS+z^{-d}BR}Y_r(z)=MY_r(z)=\frac{z^{-d}B_m}{A_m}Y_r(z) \qquad (5)$$

Exemples de modèle:

Modèle d'ordre 1 de constante de temps τ: $A_m(z^{-1})=1-\alpha z^{-1}$ avec $\alpha=e^{-\frac{T_e}{\tau}}$

Modèle d'ordre 2 de pulsation naturelle ω_n et de facteur d'amortissement ξ:

$A_m(z^{-1})=1-2\alpha\cos(\beta)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}$ avec $\alpha=e^{-\xi\omega_n T_e}$ $\beta=\omega_n T_e\sqrt{1-\xi^2}$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (4)

C. Objectifs de la synthèse (suite)

2. Rejet des perturbations d'entrée: $Y(z)=\dfrac{z^{-d}BS}{AS+z^{-d}BR}\delta U(z)$

Perturbation constante: $\delta U(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ $\Rightarrow$ $S(z^{-1})=(1-z^{-1})S_1(z^{-1})$

Perturbation rampe: $\delta U(z)=\dfrac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ $\Rightarrow$ $S(z^{-1})=(1-z^{-1})^2 S_1(z^{-1})$

3. Rejet des perturbations de sortie: $Y(z)=\dfrac{AS}{AS+z^{-d}BR}\delta Y(z)$

Perturbation constante: $\Rightarrow$ $A(z^{-1})S(z^{-1})=(1-z^{-1})A_1(z^{-1})S_1(z^{-1})$

Perturbation rampe: $\Rightarrow$ $A(z^{-1})S(z^{-1})=(1-z^{-1})^2 A_1(z^{-1})S_1(z^{-1})$

$\Rightarrow$ Rejet des perturbations: $\exists p$ tel que $\boxed{S(z^{-1})=(1-z^{-1})^p S_1(z^{-1}) \ (6)}$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (5)

D. Compensation des pôles et des zéros

1. Compensation des zéros: $\dfrac{BT}{AS+z^{-d}BR}=\dfrac{B_m}{A_m}$ cf. (5)

Soit $B(z^{-1})=B^+(z^{-1})B^-(z^{-1})$

avec $B^+(z^{-1})$ monique $\Leftrightarrow$ $B^+(0)=1$
contient les zéros que l'on souhaite compenser

$B^-(z^{-1})$ contient les zéros que l'on ne souhaite pas compenser
(zéros en dehors du cercle unité, zéros à partie réelle négative, ...)

$\Rightarrow$ $\boxed{S(z^{-1})=B^+(z^{-1})S_0(z^{-1})=(1-z^{-1})^p B^+(z^{-1})S_2(z^{-1}) \qquad (7)}$

$\Rightarrow$ $Y(z)=\dfrac{z^{-d}B^-T}{AS_0+z^{-d}B^-R}Y_r(z)+\dfrac{z^{-d}BS_0}{AS_0+z^{-d}B^-R}\delta U(z)+\dfrac{AS_0}{AS_0+z^{-d}B^-R}\delta Y(z)$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (6)

D. Compensation des pôles et des zéros (suite)

2. Compensation des pôles: $\dfrac{B^-T}{AS_0+z^{-d}B^-R}=\dfrac{B_m}{A_m}$ cf. (5) et (7)

Soit $A(z^{-1})=A^+(z^{-1})A^-(z^{-1})$

avec $A^+(z^{-1})$ monique
contient les pôles que l'on souhaite compenser

$A^-(z^{-1})$ monique
contient les pôles que l'on ne souhaite pas compenser
(pôles en dehors du cercle unité, pôles sur le cercle unité, ...)

$\Rightarrow$ $\boxed{R(z^{-1})=A^+(z^{-1})R_0(z^{-1}) \quad \text{et} \quad T(z^{-1})=A^+(z^{-1})T_0(z^{-1}) \qquad (8)}$

$\Rightarrow$ $Y(z)=\dfrac{z^{-d}B^-T_0}{A^-S_0+z^{-d}B^-R_0}Y_r(z)+\dfrac{z^{-d}BS_0}{A^+(A^-S_0+z^{-d}B^-R_0)}\delta U(z)+\dfrac{A^-S_0}{A^-S_0+z^{-d}B^-R_0}\delta Y(z)$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (7)

E. Calcul du correcteur RST cf. (5), (6), (7) et (8)

$\dfrac{B^-T_0}{A^-S_0+z^{-d}B^-R_0}=\dfrac{B_m}{A_m}$ — Suivi de consigne

$S_0(z^{-1})=(1-z^{-1})^p S_2(z^{-1})$ — Rejet de perturbation

$\Rightarrow$ B_m doit contenir B^- $\Rightarrow$ $\boxed{B_m=B^-B_m^+ \qquad (9)}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{T_0}{A^-S_0+z^{-d}B^-R_0}=\dfrac{B_m^+}{A_m}$

$\Rightarrow$ $\boxed{T_0(z^{-1})=B_m^+(z^{-1})A_0(z^{-1}) \qquad (10)}$ Equations diophantiennes

$\boxed{(1-z^{-1})^p A^-(z^{-1})S_2(z^{-1})+z^{-d}B^-(z^{-1})R_0(z^{-1})=A_m(z^{-1})A_0(z^{-1}) \ (11)}$

avec A_0 monique et stable, ajouté pour le filtrage des perturbations

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (8)

F. Résolution des équations diophantiennes $\Rightarrow$ R_0, S_2, T_0

$(1-z^{-1})^p A^-(z^{-1})S_2(z^{-1})+z^{-d}B^-(z^{-1})R_0(z^{-1})=A_m(z^{-1})A_0(z^{-1})$ Cf. (11)

Soit $n=\deg\{(1-z^{-1})^p A^-(z^{-1})\}$
$m=\deg\{z^{-d}B^-(z^{-1})\}$
$q=\deg\{A_m(z^{-1})A_0(z^{-1})\}$

• Si $q<n+m$ alors il existe une solution unique d'ordre minimal telle que $\deg\{S_2(z^{-1})\}=m-1$ et $\deg\{R_0(z^{-1})\}=n-1$

$\Rightarrow$ (11) est une équation polynomiale d'ordre *n+m-1* avec *n+m* coefficients inconnus
$\Leftrightarrow$ système de *n+m* équations à *n+m* inconnues

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (9)

F. Résolution des équations diophantiennes (suite)

- Si $q \geq n+m$ alors il existe deux solutions d'ordre minimal telles que :

  1. $\deg\{S_2(z^{-1})\} = m-1$ et $\deg\{R_0(z^{-1})\} = q-m$

  2. $\deg\{S_2(z^{-1})\} = q-n$ et $\deg\{R_0(z^{-1})\} = n-1$

$\Rightarrow$ (11) est une équation polynomiale d'ordre q avec $q+1$ coefficients inconnus

$\Leftrightarrow$ système de $q+1$ équations à $q+1$ inconnues

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (10)

F. Résolution des équations diophantiennes (suite)

- Si S_2, R_0 est une solution particulière de l'équation diophantienne (11), alors $S_2 + Q(z^{-1})z^{-d}B^-, R_0 - Q(z^{-1})(1-z^{-1})^p A^-$ est également une solution de cette équation quelque soit $Q(z^{-1})$

$\Rightarrow$ il existe une infinité de solutions d'ordre supérieur

- Comme A^-, A_m, A_0 sont moniques, en posant $z^{-1} = 0$ dans (11), on obtient $S_2(0) = 1$

$\Leftrightarrow$ $S_2(z^{-1})$ est monique

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (11)

G. Fonctions de transfert en boucle fermée résultantes

$$Y(z) = \frac{z^{-d}B^-B_m^+}{A_m}Y_r(z) + \frac{z^{-d}BS_0}{A^+A_mA_0}\delta U(z) + \frac{A^-S_0}{A_mA_0}\delta Y(z) \qquad (12)$$

$\Rightarrow$ A^+ doit être stable et de préférence amorti

$$E(z) = Y_r(z) - Y(z) = \frac{A_m - z^{-d}B^-B_m^+}{A_m}Y_r(z) - \frac{z^{-d}BS_0}{A^+A_mA_0}\delta U(z) - \frac{A^-S_0}{A_mA_0}\delta Y(z) \qquad (13)$$

$$U(z) = \frac{AB_m^+}{B^+A_m}Y_r(z) - \frac{z^{-d}B^-R_0}{A_mA_0}\delta U(z) - \frac{AR_0}{B^+A_mA_0}\delta Y(z) \qquad (14)$$

$\Rightarrow$ B^+ doit être stable et de préférence amorti

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (12)

H. Objectifs supplémentaires pour la synthèse

1. Erreur de vitesse (erreur d'ordre 1) nulle:

   $$E(z) = Y_r(z) - Y(z) = \frac{A_m - z^{-d}B^-B_m^+}{A_m}Y_r(z) \qquad \text{Cf. (13)}$$

   avec $Y_r(z) = \dfrac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ $\Rightarrow$ $A_m - z^{-d}B^-B_m^+ = (1-z^{-1})^2 B_0(z^{-1})$

   Equation diophantienne $\Rightarrow$ $B_m^+(z^{-1}), B_0(z^{-1})$

2. Erreur d'accélération (erreur d'ordre 2) nulle:

   $\Rightarrow$ $A_m - z^{-d}B^-B_m^+ = (1-z^{-1})^3 B_0(z^{-1})$

3. Erreur d'ordre r nulle : $A_m = z^{-d}B^-B_m^+ + (1-z^{-1})^{(r+1)} B_0(z^{-1})$ (15)

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (13)

I. Récapitulatif

1. Définition des pôles et des zéros à compenser

$$G(z) = \frac{z^{-d}B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{z^{-d}B^{+}(z^{-1})B^{-}(z^{-1})}{A^{+}(z^{-1})A^{-}(z^{-1})}$$

avec
- $B^{+}(z^{-1})$ monique et contenant les zéros que l'on souhaite compenser
- $B^{-}(z^{-1})$ contenant les zéros que l'on ne souhaite pas compenser
- $A^{+}(z^{-1})$ monique et contenant les pôles que l'on souhaite compenser
- $A^{-}(z^{-1})$ monique et contenant les pôles que l'on ne souhaite pas compenser

2. Définition du modèle de suivi de consigne

$$M(z) = \frac{z^{-d}B_m(z^{-1})}{A_m(z^{-1})} = \frac{z^{-d}B^{-}(z^{-1})B_m^{+}(z^{-1})}{A_m(z^{-1})}$$

avec $A_m(0) = 1, B_m(1) = A_m(1)$

$A_m = z^{-d}B^{-}B_m^{+} + (1-z^{-1})^{(r+1)}B_0(z^{-1})$

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (14)

I. Récapitulatif (suite)

3. Ajout d'intégrateurs pour le rejet de perturbation

$$S(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{p}S_1(z^{-1})$$

4. Choix d'un filtre supplémentaire pour les perturbations

$A_0(z^{-1})$ stable et monique $\Rightarrow$ par défaut $A_0(z^{-1}) = 1$

5. Résolution des équations diophantiennes

$$(1-z^{-1})^{p}A^{-}(z^{-1})S_2(z^{-1}) + z^{-d}B^{-}(z^{-1})R_0(z^{-1}) = A_m(z^{-1})A_0(z^{-1})$$

$$T_0(z^{-1}) = B_m^{+}(z^{-1})A_0(z^{-1})$$

$\Rightarrow$ $R_0(z^{-1}), S_2(z^{-1}), T_0(z^{-1})$

avec $S_2(z^{-1})$ monique

Synthèse des correcteurs numériques

7 Synthèse algébrique (15)

I. Récapitulatif (suite)

6. Calcul du correcteur RST

$$T(z^{-1}) = A^{+}(z^{-1})T_0(z^{-1}) = t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 z^{-2} + \cdots$$

$$R(z^{-1}) = A^{+}(z^{-1})R_0(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \cdots$$

$$S(z^{-1}) = (1-z^{-1})^{p}B^{+}(z^{-1})S_2(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \cdots$$

7. Réalisation du correcteur

$$U(z) = \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y_r(z) - \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})}Y(z)$$

$$\Rightarrow \quad u(k) = -s_1 u(k-1) - s_2 u(k-2) - \cdots + t_0 y_r(k) + t_1 y_r(k-1) + \cdots$$
$$- r_0 y(k) - r_1 y(k-1) - \cdots$$