L3 GRAPHES - TD 1

Exercice 1 Pour un graphe fini, non-orienté et simple, exprimez en fonction de m la valeur de $\sum_{v \in V(G)} d(v)$.

Exercice 2 Montrez que dans un graphe non-orienté simple, il y a un nombre pair de sommets avec un degré impair.

Exercice 3 Que est le nombre maximum d'arêtes en fonction de n qu'un graphe simple non-orienté peut avoir ? Donnez un exemple de famille de graphe qui réalise cette borne.

Exercice 4 Soit $T = (V, E)$ un arbre à n sommets. Exprimez $|E|$ (*i.e.* m) en fonction de n.

Exercice 5 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, non-orienté. Écrivez un algorithme qui détermine si G est connexe. (Nous cherchons à avoir un algorithme avec la meilleure complexité).
L'algorithme devra :
- si G est connexe l'algorithme répondra *Oui*.
- si G n'est pas connexe l'algorithme donnera, pour prouver ses dires, deux sommets qui appartiennent à deux composantes connexes différentes.

(1) Écrivez un algorithme qui réalise les conditions demandées.
(2) Montrez que l'algorithme est valide (correction).
(3) Déterminez la complexité de ce dernier.

Exercice 6 Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, écrivez un algorithme qui renvoie les différentes composantes connexes du graphe.

Exercice 7 Montrez que les énoncés suivants sont équivalents :

(1) T est un arbre
(2) Entre toutes paire de sommets x, y de $V(T)$ il existe un unique chemin $P_{x,y}$ dans T entre x et y.
(3) T est minimallement connexe (*i.e.* T est connexe mais $T - e$, $e \in E(T)$ ne l'est plus).
(4) T est maximallement acyclique (*i.e.* T ne contient pas de cycle mais $T + xy$ contient un cycle pour tout $x, y \in V(T)$).

Exercice 8 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non-orienté. Écrivez un algorithme qui détermine si G est un arbre. Pour ce faire, vous pouvez vous servir des exercices précédents.

Exercice 9 Pour chacune des représentations vu en cours :
- Matrice d'adjacence,
- Matrice d'incidence,
- Liste d'adjacence.

Indiquez :
(1) La taille de la représentation en mémoire
(2) Le temps nécessaire pour déterminer si deux sommets sont adjacents.

Exercice 10 Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti :
(1) Montrez que $|E| \leqslant |X| \times |Y|$.
(2) Montrez que $\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{y \in Y} d(y)$.
(3) Montrez que $|E| \leqslant \frac{n^2}{4}$.

Exercice 11 Caractérisez les graphes k-réguliers pour $k = 0, 1, 2$.

Exercice 12
(1) Si G est un graphe non orienté, simple et $\delta(G) > \frac{1}{2}(n-2)$ alors G est connexe.
(2) Pour n pair, trouvez un graphe $\frac{1}{2}(n-2)$-régulier simple qui n'est pas connexe.

Exercice 13 Soit $G = (V, E)$ un graphe simple non-orienté et déconnecté.
(1) Montrez que le complémentaire de G, $\bar{G}$ est connexe.
(2) Qu'en est-il de la réciproque ?

Exercice 14 Écrivez un algorithme qui prend pour entrée un graphe non orienté $G = (V, E)$ et qui renvoie comme résultat un arbre couvrant T de G.

Exercice 15 Concevez un algorithme qui, étant donné un graphe G non-orienté, sera capable de déterminer si G est biparti.