

TD : A la frontière des langages rationnels

Olivier Raynaud

raynaud@isima.fr

<http://www.isima.fr/raynaud>

Résumé

Dans cette fiche de Td nous sont proposés un grand nombre de langages qui ne sont pas rationnels. Les exercices consistent à appliquer la contraposée du Lemme de la Pompe pour montrer qu'ils ne sont pas rationnels. Tous ces exercices sont extraits de [1], page 130.

Question 1. *Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :*

- $\{0^p 10^p \mid p \geq 1\}$;
- $\{0^p 1^q 2^p \mid p, q \text{ entier}\}$;
- $\{0^p 1^q \mid p \leq q\}$;
- $\{0^p 1^{2p} \mid p \geq 1\}$;
- $\{0^p 1^q 2^r \mid p \geq 0, q > r \geq 0\}$;
- $\{0^p 1^q 2^{2 \cdot (p+q)} \mid p \geq 0, q \geq 0\}$;
- $\{0^p 1^q \mid p \neq q\}$.

Question 2. *Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :*

- Chaînes de 0 et de 1 de la forme xx ;
- Chaînes de 0 et de 1 de la forme xx^R ;
- Chaînes de 0 et de 1 de la forme $x\bar{x}$;
- Chaînes de 0 et de 1 qui contiennent autant de 0 que de 1 ;
- Chaînes de 0 et de 1 de la forme $x1^p$ où x est de longueur p .

Question 3. *Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :*

- $\{1^p \mid p \text{ est pair}\}$;
- $\{1^p \mid p \text{ est carré}\}$;
- $\{1^p \mid p \text{ est cubique}\}$;
- $\{1^p \mid p \text{ est une puissance de } 2\}$;
- $\{1^p \mid p \text{ est premier}\}$;

Question 4. *Montrer que les langages suivants ne sont pas rationnels :*

- *Chaînes de 0 et de 1 commençant par 1 dont l'interprétation décimale est un nombre premier ;*
- *Chaînes de la forme 0^i1^j telles que le plus grand diviseur entre i et j soit 1 ;*

Question 5. *Les langages suivants sont rationnels. Néanmoins montrer pourquoi la contraposée du lemme de la pompe ne peut être appliquée.*

- *L'ensemble vide ;*
- *$\{00, 11\}$;*
- *$(00 + 11)^*$;*
- *01^*0^*1 ;*

Références

- [1] J. E. Hopcroft, R. Motwani, and J.D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. International Edition, second edition, 2003.