L3 GRAPHES - TD 2

1. Décompositions en cycles et tour Eulériens

Exercice 1 Soit $G = (V, E)$, montrez que lorsque l'on supprime une arête de $E(G)$, le nombre de composantes connexes dans le graphe modifié est inférieur ou égale au nombre de composantes connexes plus un du graphe original.

Exercice 2 Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté pair connexe.
Montrez que :

(1) G ne possède pas d'arrête déconnectante.

(2) Le nombre de composantes connexes $c(G - v)$ après suppression d'un sommet de $V(G)$ est au plus $\frac{1}{2}d(v)$.

Exercice 3 Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté pair. Et soit $\mathscr{C}$ une décomposition en cycles de G. Pour un sommet v donné peut-on déterminer dans combien de cycles de $\mathscr{C}$ v est contenu ?.

Exercice 4 Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté pair. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux décompositions en cycles. Est-ce que le nombre de cycles contenus dans $\mathscr{C}_1$ est identique au nombre de cycles dans $\mathscr{C}_2$?

Exercice 5 Quelle est la complexité de l'algorithme de *Fleury* pour calculer un tour Eulérien d'un graphe pair ?

2. Parcours en Largeur

Exercice 6 Soit G le graphe présenté en Figure 1. En prenant x comme sommet de départ, donnez l'arbre de BFS, l'ordre σ des sommets.

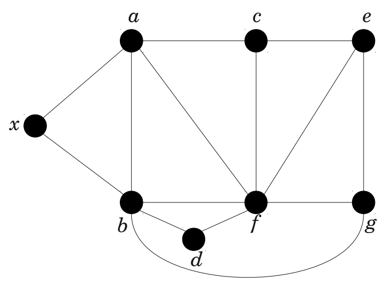

Figure 1.

Exercice 7 Est-ce que l'arbre (les arêtes en gris) enraciné en a dans le graphe représenté en Figure 2 est un arbre de parcours en largeur à partir de a ? Si oui, donnez un étiquetage des sommets consistant avec le parcours. Sinon expliquez pourquoi ?

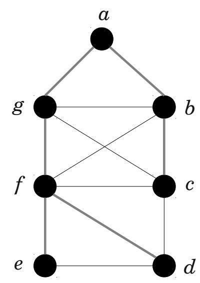

FIGURE 2.

Exercice 8 Soit $G = (V, E)$ un graphe fini non-orienté et simple. Soit v un sommet quelconque de $V(G)$, nous effectuons un parcours en largeur sur G à partir de v. Montrez que pour tout arête $e = xy$ on a $|l(x) - l(y)| \leqslant 1$.

Exercice 9 Concevez un algorithme qui permet de déterminer si un graphe $G = (V, E)$ est un graphe biparti. De plus, si le graphe en question est biparti nous souhaitons obtenir une bipartition de V en $(A \cup B)$ où A représente une classe de couleur et B représente l'autre.

Exercice 10 Concevez un algorithme qui permet de déterminer le diamètre d'un graphe non-orienté G.