Optimisation dans les réseaux

F. Bendali-Mailfert
bendali@isima.fr

Bur. D119 Bat. Isima

Problèmes généraux sur la connexité

- Chaînes k-arêtes (sommets) disjointes
- Bornes sur chemins et cycles

Point d'articulation v dans G : $(G - v) \nearrow$ de composantes connexes.
Ensemble d'articulation $W \subset V$:$(G \setminus W) \nearrow$ de composantes connexes.

3 niveaux de traitement :

- Longue distance
  Connection ville à ville par des nœuds "‘barrière"’.
- Moyenne distance
  Centres d’échange à l’interieur des villes (connections barrières-Centres) (Clusters de clients)
- Faible distance
  Acces locaux : clients dans des clusters liés au centre d’échange de son cluster.

A chaque niveau $\longmapsto$ un critère d’installation différent.

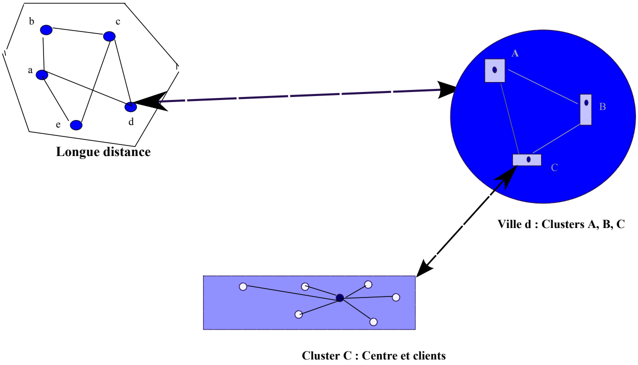

Figure – Niveaux de communications

Deux étapes :

Le long terme

- Durée : >10 années
- Seule la topologie est traitée car la demande n'est pas assez fiable.
- **Objectif** :
  Déterminer l'ensemble *des câbles* connectant tous les nœuds sous certaines *contraintes de sécurité* et au *moindre coût*.

Le développement de la technologie de la fibre optique a permis l'utilisation de composants de faibles coûts et une capacité presque illimitée $\Longrightarrow$ Trafic très élevé $\Longrightarrow$ Deux problèmes :

Problèmes longues distances et long terme

- Economiques : Minimiser les coûts de construction.
- Sécuritaires : Restoration (ou prévision) des liens en cas de panne.

Le moyen terme

Durée : < 5 années

Dimensionnement

$\Longrightarrow$ Entrée : une matrice de demandes c'est la topologie actuelle du réseau

$\Longrightarrow$ Sortie : Réaliser le routage en fonction de la capacité des câbles.

L'ajout d'arêtes est autorisé

Solutions dans les longues distances

Les arbres : Connexité assurée et moindre coût

Construction facile :

$\rightarrow$ Arbre de poids minimum : Kruskall ou Prim.

$\rightarrow$ Modèle linéaire :

Les variables

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } e \text{ est choisie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les contraintes

$$\sum_{e \in E} x_e = |V| - 1,$$

$$\sum_{e \in \delta(W)} x_e \geq 1, \forall W \subset V$$

L'objectif

$$\text{Min} \sum_{e \in E} c_e x_e$$

Une arête est supprimée (câble coupé) $\rightarrow$ perte de connexité $\rightarrow$ au moins deux composantes connexes (réseau coupé !).
Recherche de topologies plus *robustes* les réseaux k-connexes :
Possibilité pour un réseau de résister à la destruction d'au plus $k-1$ câbles entre deux points.

Chaque nœud j est caractérisé par une requête $r_j \in \{0, 1, 2\} \rightarrow Min\{r_i, r_j\}$ chaînes sont nécessaires entre les nœuds i et j.
3 types de nœuds :

- Les nœuds spéciaux : Haut degré de sureté nécessaire.
- Les nœuds ordinaires : Doivent simplement être connectés
- Les nœuds optionnels : peuvent ne pas exister.

Les contraintes

- La destruction d'un lien ne doit pas déconnecter le réseau entre deux nœuds spéciaux (au moins deux chaînes arêtes disjointes).
- La destruction d'un nœud ne doit pas déconnecter le réseau (au moins deux chaînes sommets disjointes).

d'où
i est un nœud spécial $\rightarrow r_i = 2$
i est un nœud ordinaire$\rightarrow r_i = 1$
i est un nœud optionnel $\rightarrow r_i = 0$

Cas particuliers

Soit $G = (V, E)$

- $r_i = 1, \forall i \in V$: Arbre (polynomial)
- $r_i = 1$ pour exactement 2 nœuds s et t et 0 pour tous les autres : Plus court chemin (polynomial)
- $r_i = k, k \geq 2$ pour exactement 2 nœuds s et t et 0 pour tous les autres : k-plus court chemins
- $r_i \in \{0, 1\}, \forall i \in V$: arbre de Steiner (NP-difficile)
- $r_i = 2, \forall i \in V$: réseau 2-connexe de coût minimum (NP-difficile)

Modèle linéaire entier

Les variables

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête } e \text{ est choisie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les contraintes

$$\sum_{e \in \delta(W)} x_e \geq 2, \forall W \subset V$$

L'objectif

$$\text{Min} \sum_{e \in E} c_e x_e$$

Relaxation linéaire $\rightarrow$ *Branch and cut*.

$R = (V, E, c)$: Réseau ; c capacité unitaire $s \in V$:source ; $t \in V$: puits ;

(a) la valeur d'un flot maximum dans R est égale au nombre maximum de st-chemins arcs-disjoints.

(b) la capacité d'une coupe minimum dans R est égale au nombre minimum d'arcs dont la suppression detruit tous les st-chemins de R.

Enoncé du théorème de Menger (1927)

Soit G=(V,E) un graphe non orienté avec deux sommets non adjacents s et t et soit k un entier. Il existe k chaînes de s à t sommets(resp. arêtes)-disjointes si et seulement si t reste connecté à s après suppression de k-1 sommets différents de s et t (resp. arêtes) quelconques.

Conséquence (Whitney (1932))

Un graphe non orienté G ayant au moins 2 sommets est k-arête-connexe si et seulement si pour chaque paire $s, t \in V(G)$ avec $s \neq t$, il existe k chaînes de s à t arêtes-disjointes. Un graphe non orienté G ayant au moins $k+1$ sommets est k-connexe si et seulement si pour chaque paire $s, t \in V(G)$ avec $s \neq t$, il existe k chaînes de s à t sommets-disjointes.

Exemple : Réseau Belge Belgacom

- 52 centres $\rightarrow$ cycle hamiltonien.
- Une panne sur ce cycle $\rightarrow$ Reroutage $\rightarrow$ Nouvelle route chargée en arêtes ! !
- Idée : Rechercher des 2-arêtes connexes avec des cycles bornés (application avec des cycles de longueur 3 à 6 arêtes) et que l'union de ces cycles soit couvrante.