Abstract

resumé

0.1 Les graphes

Rappels de graphe :

Graphe G(V,E) non orienté	Graphe G(V,E) orienté	Extrémité d'une arête, d'un arc.
Incidence. Adjacence | Graphe complet	Sous graphe. Sous graphe Induit. Graphe partiel	Chaîne. Chemin
Cycle. Circuit. Graphe acyclique.	Connexité : Un graphe est connexe ssi entre tout couple de sommets existe une chaîne.	Forte connexité: Un graphe est fortement connexe ssi entre tout couple de sommets existe un chemin.

Une Coupe dans un graphe G = (V,E) est un sous ensemble d'arêtes dont une extremité exactement est dans S ⊂ V.
Notation [S,V \ S] = δ(S) = { e = uv ∈ E : u ∈ S,v ∈ V \ S }
Un arbre A = (V,E) est un graphe connexe sans cycle. Un arbre est tel que:

• $\mid E \mid=\mid V \mid -1$,	• il existe exactt une chaîne entre tt couple de sommets
•sans cycle maximal	•connexe minimal

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti si $V = V1 \cup V2$ avec $V1 \cap V2 = \emptyset$ et $E = \delta(V1) = \delta(V2)$.
Tous les cycles d'un graphe biparti sont de longueur paire. Un réseau est un graphe oriente G = (V,E) dont les arcs ou les noeuds sont munis d'une ou plusieurs valeurs.
Dans la suite, nous utiliserons les notations et notions suivantes :

•$\forall i \in V, bi < 0$ est une demande et$bi > 0$est une offre.	•$\forall (i, j) \in E, ci, j =$ un cout unit pr traverser l'arc $ij(< C)$.
•$\forall (i, j) \in E, ui, j =$ une capacité $>$ pr l'arc $ij(> U)$.	•$\forall (i, j) \in E, li, j =$ une capacite $<$ pr l'arc $ij(< L)$.

Complexité d'un algorithme :
La complexité temps d'un algorithme est une fonction du nombre d'opérations élémentaires effectuées dans l'algorithme.
On utilise la notation O pour donner un Ordre de grandeur de la complexité.
Un algorithme a une complexité O(f (n)), si ∋ c et n_0 tels que le temps pris par l'algorithme dans le pire des cas est au plus c.f (n) pour n >= n_0.

Probleme de Base dans les reseaux :
• Problème du plus court chemin : Il s'agit de trouver la façon la plus économique (temps, distance, diffculté,...) de passer d'un noeud d'un réseau à un autre.
Bellman : Graphe sans circuits Djikstra : Poids positifs Bellman-Ford : Général. Detecte les circuits négatifs
...
• Problème du Flot maximum : Il s'agit d'envoyer la plus grande valeur de Flot (quantité, volume, usagers,...) à travers un réseau entre deux points en tenant compte d'une capacité limitative.
...
• Problème de Flot de coût minimum : Il s'agit d'envoyer du Flot à travers un réseau entre deux points en tenant compte d'une capacité limitative et en minimisant le coût global de circulation.
...

0.2 Optimisation dans les réseaux

... Théorème de Menger (1927)-Flots max et coupe Min:

(a) la valeur d'un Flot maximum dans R est égale au nombre maximum de st-chemins arcs-disjoints.
(b) la capacité d'une coupe minimum dans R est égale au nombre minimum d'arcs dont la suppression detruit tous les st-chemins de R.

Enoncé du théorème de Menger (1927)
Soit G=(V,E) un graphe non orienté avec deux sommets non adjacents s et t et soit k un entier. Il existe k chaînes de s à t sommets(resp. arêtes)-disjointes si et seulement si t reste connecté à s après suppression de k-1 sommets différents de s et t (resp. arêtes) quelconques.

Conséquence (Whitney (1932))
Un graphe non orienté G ayant au moins 2 sommets est k-arête-connexe si et seulement si pour chaque paire s,t ∈ V(G) avec s 6= t, il existe k chaînes de s à t arêtes-disjointes. Un graphe non orienté G ayant au moins k + 1 sommets est k-connexe si et seulement si pour chaque paire s,t ∈ V(G) avec s ≠ t, il existe k chaînes de s à t sommets-disjointes.

Exemple : Réseau Belge Belgacom

- 52 centres ⟶ cycle hamiltonien.
- Une panne sur ce cycle ⟶ Reroutage ⟶ Nouvelle route chargée en arêtes!!
- Idée : Rechercher des 2-arêtes connexes avec des cycles bornés (application avec des cycles de longueur 3 à 6 arêtes) et que l'union de ces cycles soit couvrante.

Voisinage : Notations G = (V,E) le réseau. ∀u ∈ V,N(u) est l'ensemble des voisins et N[u] = u∪N(u).
Topologie
Algo centralisé

1)
Structure : Arbre couvrant minimum (MST) Algorithme :
1 Prim ou Kruskall
2 Affecter aux noeuds une puissance correspondant aux arêtes de cet arbre

2)
Broadcast incremental power protocol (BIP) (adapté) :
Données : Un Graphe G = (V,E) et la racine s, C : E ⟶ R
Résultats : Un arbre G0

•1 ∀u ∈ V,p(u) = 0	•2 marquer le noeud racine s
•3 Un noeud marqué appartient à l'arbre BIP un noeud non marqué n'y appartient pas encore.	•4 Tant Que Il existe un noeud non marqué Faire choix arête (u,v) u marqué, v non marqué et minimise $C(u, v) - p(u) + C(u, v)$ p(u) = C(u,v) | (v) = C(u,v) Marquer v Fin Tant Que

Algo locaux:

1)
1 LMST = ∅
2 Pour u ∈ V Faire G0 = MST (N[u]) (Ce calcul nécessite pour le noeud u, une connaissance à deux sauts de son voisinage, puisqu'il est nécessaire pour un noeud de connaitre les arêtes entre ses voisins.)
1 Pour v ∈ N_{GO}(u) Faire LMST = LMST ∪(u,v)
2 FinPour
3 FinPour

2)
Graphe de voisinage Relatif (RNG) Graphe G = (V,E); Poids p : E ⟶ R ; RNG(G) = (V,ERNG) où :
ERNG = {(u,v) ∈ E :
il n'existe pas w ∈ (N(u)∩N(v)) tel que
p(u,w) < p(u,v) et p(v,w) < p(u,v)}
On a alors : MST(G) ⊆ LMST(G) ⊆ RNG(G)

Structuration du réseau
•Dominant :
Graphe G = (V,E); D ⊂ V est dominant si ∀u ∈ V\D, ∃v ∈ D : u ∈ N(v).
•Dominant Connexe sous-graphe induit par le dominant D est connexe.
•Dominant stable sous-graphe induit par le dominant D est vide d'arêtes.
Cardinalité minimum ⟶ NP-Complet

0.3 TD & TP