

### Series of Exercises # 1

1. Mergin équipements fabrique de gros transformateurs électriques. Les commandes de la compagnie pour les six prochains mois sont données dans le tableau ci-après. Les coûts de fabrication d'un transformateur sont sujets à des variations dues aux cours des matières premières et au prix de la main d'oeuvre. L'usine peut fabriquer jusqu'à 50 unités par mois en heures normales et 20 unités supplémentaires en heures supplémentaires. Les coûts de ces deux types de production sont donnés dans le tableau suivant :

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin
Nombre d'unités commandées	58	36	34	69	72	43
Coût en heures normales (en milliers d'u.m.)	18	17	17	18.5	19	19
Coût en heures supplémentaires (en milliers d'u.m.)	20	19	21	22	22	23

Le coût de stockage d'un transformateur invendu est de 500 u.m. par mois. La compagnie possède 15 unités en stock début janvier et aimerait en avoir au moins 5 en stock fin juin (i.e., début juillet). Formuler le problème consistant à déterminer le meilleur plan de production sous la forme d'un programme linéaire.

2. Consider a company which produces three types of electrical products: clocks, radios and toasters. The products have the following resource requirements:

Products	Cost(\$)/unit	Labor(hours)/unit
Clock	7	2
Radio	10	3
Toaster	5	2

The company has a daily budget of \$2,000 and at most 660 hours of labor per day. The company cannot produce more than 300 radios daily. The marketing department requires that at least 15% of the daily production must be radios. Clocks sell for \$15, radios for \$20 and toasters for \$12. The company wants to know the production plan that will maximize its daily net profit.

3. Un avion Cargo possède 3 compartiments pour le chargement de fret : un à l'avant, un autre au centre et un dernier à l'arrière. Les limites de capacité en poids et volume sont résumées dans le tableau suivant :

Compartiment	Poids (tonnes)	Volume (m <sup>3</sup> )
Avant	12	1000
Centre	18	1300
Arrière	10	700

Pour des raisons d'équilibre de l'avion en vol, le chargement doit être équilibré dans chaque compartiment, c'est-à-dire que pour les trois compartiments le chargement doit représenter la même proportion, en poids, de la limite de charge. L'avion a la possibilité de charger les 4 frets suivants :

Fret	poids	Volume (m <sup>3</sup> /tonne)	Bénéfice (u.m.)/tonne
1	20	70	220
2	16	100	280
3	25	85	250
4	13	60	200

On peut prendre n'importe quelle portion de ces fret, en d'autres termes on peut choisir de ne pas transporter la totalité d'un fret. Quelle répartition permet de maximiser le bénéfice ?

4. Le mobilier d'une bibliothèque municipale doit être changé pour contenir au moins 4400 livres de petit format et 2600 livres de grand format. Un premier fournisseur propose des meubles de type A pouvant contenir 110 livres de petit format et 100 livres de grand format à un prix unitaire de 400 Euros. Un deuxième fournisseur propose des meubles de type B pouvant contenir 220 livres de petit format et 100 livres de grand format à un prix unitaire de 600 Euros. Par ailleurs le responsable de la bibliothèque a pour consigne de ne passer aucune commande supérieure à 9600 Euros chez un même fournisseur.

- (a) En considérant seulement deux variables  $x$  et  $y$  relatives aux deux types de meubles, donner les contraintes que doit respecter le bibliothécaire sous forme d'un système  $(S)$  d'inégalités portant sur ces deux variables.
- (b) Montrer que le système  $(S)$  est équivalent au système  $(S')$  suivant :

$$0 \leq x \leq 24$$

$$0 \leq y \leq 16$$

$$x + 2y \geq 40$$

$$x + y \geq 26$$

- (c) Représenter la région réalisable définie par le système  $(S')$ .

- (d) Déterminer graphiquement le nombre de meubles à commander chez chacun des fournisseurs pour que la dépense soit minimale. Quelle est la dépense dans ce cas là ?

5. Write the following LP problem in standard form

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize} & 3x_1 - 5x_2 \\
 \text{subject to} & 4x_1 + 5x_2 \geq 3 \\
 & 6x_1 - 6x_2 = 7 \\
 & x_1 + 8x_2 \leq 20 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

6. Write the following LP problem in standard form

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimize} & 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 \\
 \text{subject to} & 9x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 \leq 5 \\
 & 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 3x_5 \leq 2 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0 \\
 & x_3 \geq 0 \\
 & x_4 \geq 0
 \end{array}$$

7. Solve the following LP using the graphic method

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximize } z = & 40x_1 + 70x_2 \\
 \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 100 \\
 & 10x_1 + 50x_2 \leq 4,000 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

8. Solve the following LP using the graphic method

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimize } w = & -3x_1 + x_2 \\
 \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & -2x_1 + x_2 \leq -4 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

9. Solve the following LP using the graphic method

$$\begin{array}{ll} \text{maximize } z = & 2x_1 + 5x_2 \\ \text{subject to} & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

10. Solve the following LP using the graphic method

$$\begin{array}{ll} \text{maximize } z = & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -2x_1 - x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1 \leq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

11. Give algebraic proofs for the unbounded and infeasible LP problems seen in class.
12. Find necessary and sufficient conditions for the numbers  $s$  and  $t$  to make the LP problem

$$\begin{array}{ll} \text{maximize } z = & x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & sx_1 + tx_2 \leq 1 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}$$

- (a) have an optimal solution
- (b) be infeasible
- (c) be unbounded