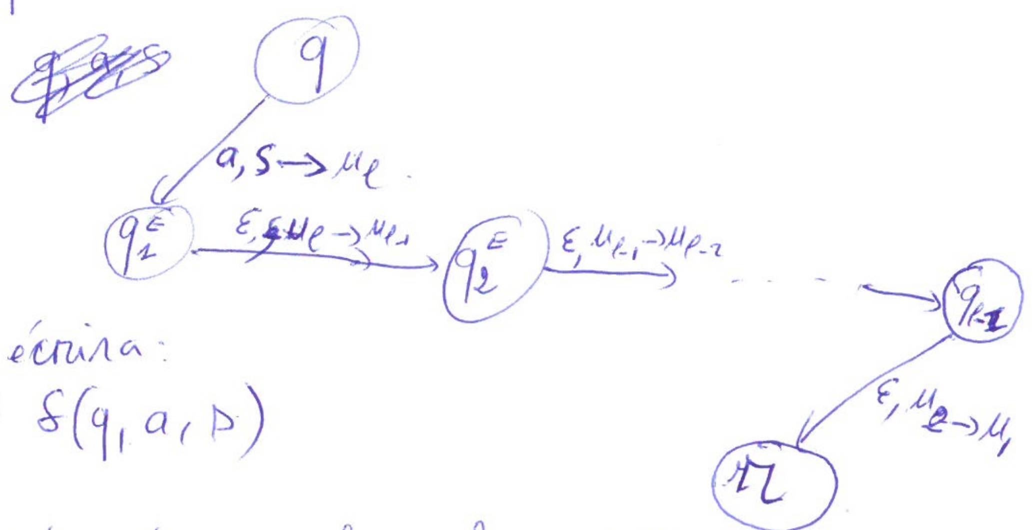
Passer de grammaire à Automate à Pile

* Montrons d'abord que l'on peut modifier nos automates à pile pour empiler des mots de taille $\leq l$. (on peut simuler cette opérations).

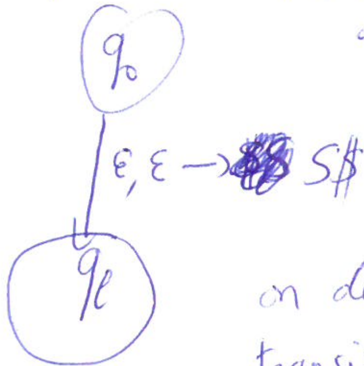
Supposons on peut empiler le mot $u = u_1 \ldots u_l$ lorsqu'on est à l'état q, on lit a et la tête de pile c'est S. On fait ainsi :



Dans ce cas on écrira :
$(r, u) \in \delta(q, a, S)$

* On va maintenant simuler la dérivation du mot à partir de la grammaire.

On aura comme états : $\{q_0, q_e, q_f\}$ ~~E~~
~~états qui~~
($\cup E$ où E = les états dont on a besoin pour ~~empiler~~ simuler ce qui est expliqué plus haut).

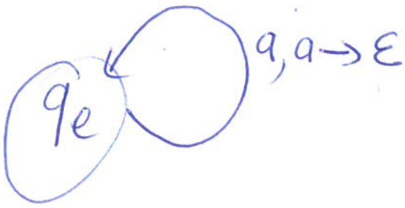


on décrit les autres transitions avec δ

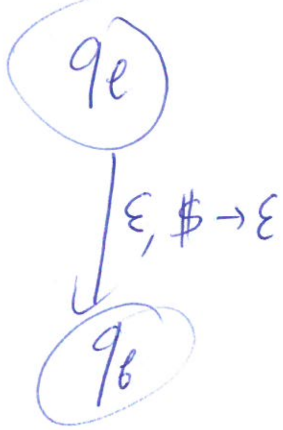
$\forall$ la règle $A \to \omega$, on ajoute la transition :

$\cancel{\delta(q_l, \varepsilon, A) \ni (q_l, \omega)}$

Pour chaque terminal $a \in \Sigma$, on ajoute la transition

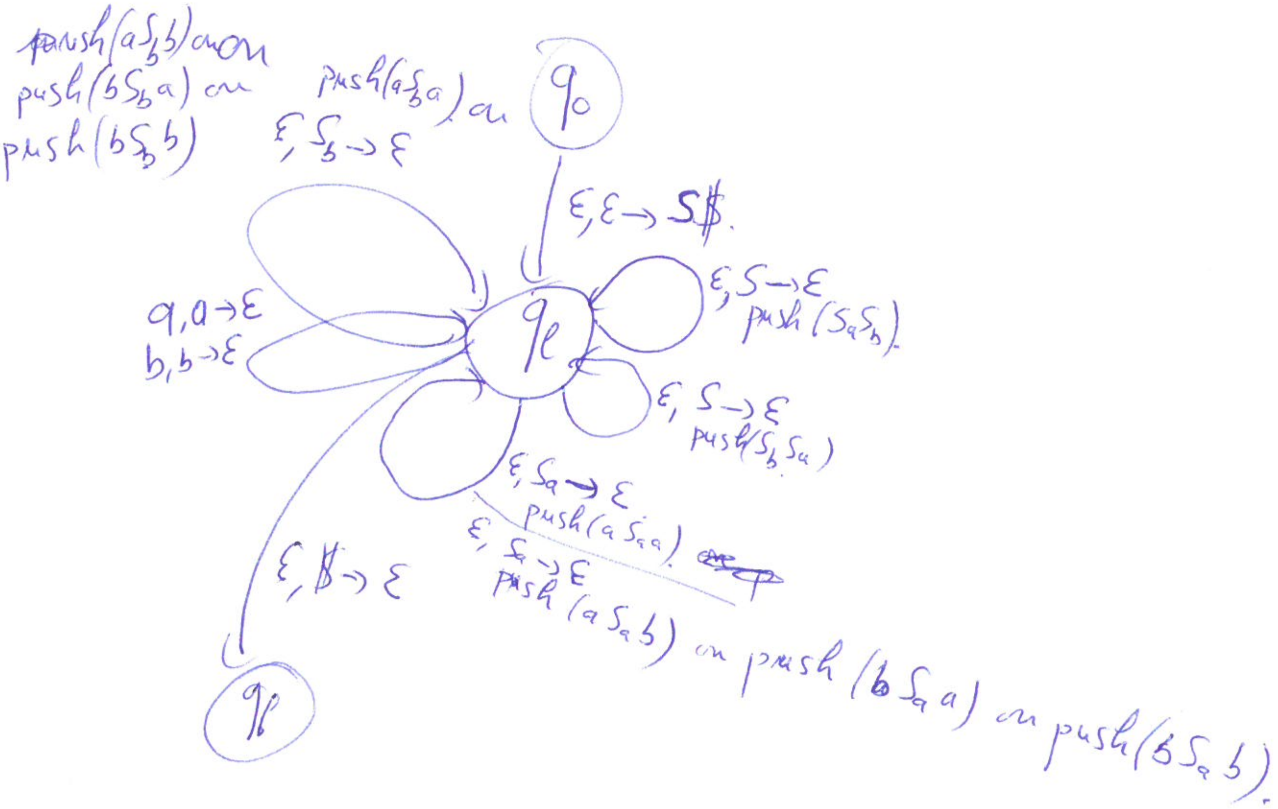


Si (le mot est vide) et dans la pile on a \$, on ajoute la transition :



<u>Exemple avec la grammaire de L_C.</u>

Exemple avec la grammaire de L_c



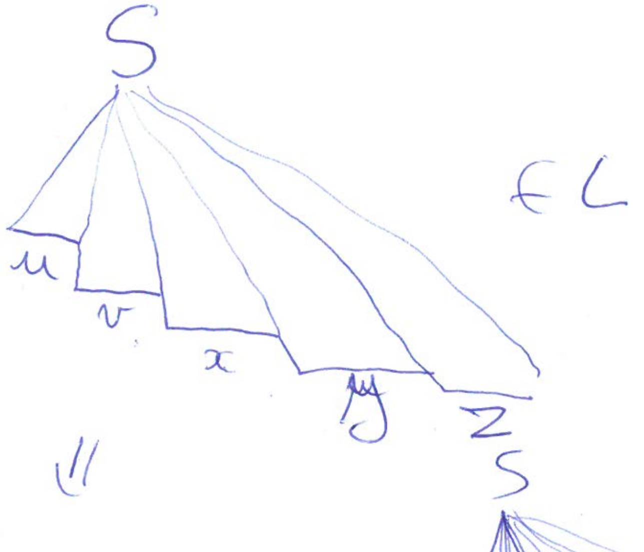
(Montrer qu'un langage est non context-free)

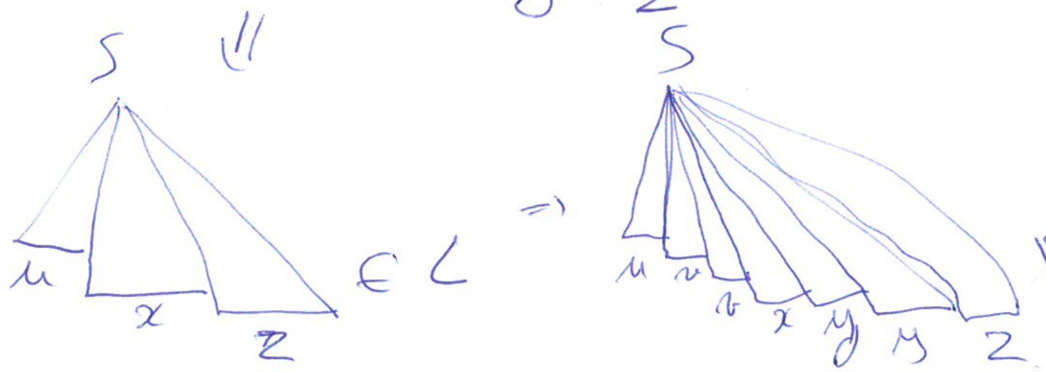
Le lemme est basé sur l'arbre de dérivation.

Lemme de pompage Si L est 1 langage context-free (algébrique), alors il existe p tq $\forall s \in L$, $|s| \geq p$, alors ~~peut diviser~~ $s = uvxyz$ avec

1. $\forall i \geq 0$, $uv^ixy^iz \in L$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$.

Schématiquement : si on dérive s depuis la grammaire de L :





4/6

Ex : $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ non algébrique.

Supposons L algébrique et p la valeur du lemme de pompage.

Posons $s = a^p b^p c^p$. Par le lemme, il existe u, v, x, y, z tq

$s = uvxyz$, avec $|vy| > 1$ et $|vxy| \leq p$.

Parce que $|vxy| \leq p$, on peut en conclure que soit ~~vxy utilisent~~ $vxy = a^i b^j$ soit $vxy = b^i c^j$.

Sans perte de généralité, on peut supposer $vxy = a^i b^j$ (même preuve si $vxy = b^i c^j$).

Cas 1 : $j = 0 \Rightarrow vxy = a^i$, ~~pour 1 ou~~ $i \leq p, i > 0$

Par le lemme de pompage, $s' = uv^0xy^0z = a^{p'} b^p c^p$, $p' < p$

$\in L$, contradiction.

Cas 2 : $vxy = a^i b^j$, $i, j > 0$.

v est composé que de a, y que de b.

Cas 2.1 : alors $uv^0xy^0z = a^{p'} b^{p''} c^p \in L$, $p', p'' < p$.

et donc contradiction.

Cas 2.2 : ~~$vx = a^i b^l$, $y = b^{j-l}$ ou $vx = a^l$ xy~~

2.2.a $v = a^i b^l$, $x = b^{l'}$ $y = b^{j-(l+l')}$

2.2.b ou $v = a^l$, $x = a^{l'}$, $y = a^{i-(l+l')} b^j$

Dans le cas (a) 2.2.a : $i, l > 0$.

2.2.b $i-(l+l')$, $j > 0$.

dans chacun des cas,

$s' = u v^0 x y^0 z \in L$, ~~ou~~ mais

$s' = a^{p'} b^{p''} c^{p}$ avec $p', p'' < p$.

$\Rightarrow$ contradiction.

$L_c = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

Montrons $\bar{L}_c$ est algébrique.

$x \in \bar{L}_c$ et $|x| = 2n$ $\iff$ $x = \underbrace{u}_{p} a \underbrace{v}_{q} \underbrace{u'}_{p} b \underbrace{v'}_{q}$

ou $x = u b v u' a v'$ (A)

avec $|v u'| = |u v'|$.

(1) Montrons que $x \in \bar{L}_c \iff x = u a w b v$ avec $|uv| = |w|$.

$\Rightarrow$) Si $x \in \bar{L}_c \Rightarrow x = u a v u' b v'$

$\Rightarrow x = u a w b v'$ avec $|w| = |v u'|$ et

avec (A), $|w| = |u v'|$.

$\Leftarrow$) Si $x \in u a w b v$ avec $|w| = |uv|$.

Posons $w = w_1 w_2$ avec $|w_1| = |v|$

$|w_2| = |p|$.

donc $x = \underbrace{u}_{p} a \underbrace{w_1}_{q} \underbrace{w_2}_{p} b \underbrace{v}_{q}$. Hen

~~$x = ww$ avec~~ $|x| = 2(p+q+1)$

$x = w w'$ $|u a w_1| = p+q+1$

$|w_2 b v| = p+q+1$

$w = u a w_1$

$w' = w_2 b v$ avec $w_{p+1} = a$

$w'_{p+1} = b$.

$\Rightarrow x \in \bar{L}_c$.

$S \to S_a S_b \mid S_b S_a$

$S_a \to a S_a a \mid a S_a b \mid b S_a a \mid b S_b b. \mid a$

$S_b \to a S_b a \mid a S_b b \mid b S_b a \mid b S_b b \mid b.$

Montrons que $\qquad \mathcal{L}(S) = \overline{L_c} \cap \{ww' \mid |w| = |w'|\}$

$\Rightarrow)\ x \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow x = ww'$ avec $w \in \mathcal{L}(S_a)$
$w' \in \mathcal{L}(S_b)$

ou $x = w'w$.

(Supposons $x = ww'$ (m̂ preuve si $x = w'w$).

* On vérifie rapidement que $\mathcal{L}(S_a) = \{uav \mid |u| = |v|\}$.
$\mathcal{L}(S_b) = \{ubv \mid |u| = |v|\}$.

Donc $x = uav.u'bv' \Rightarrow x = uawbv'$
avec $w = vu'$
$|w| = |uv'|$.

$\Rightarrow x \in \overline{L_c}$ (d'après 1)

$\Leftarrow)\ x \in \overline{L_c} \Rightarrow x \in \mathcal{L}(S).$

~~Supposons que~~ Soit $x = \underset{p}{u}a\underset{q}{v}\underset{p}{u'}b\underset{q}{v'}$ avec

$|uav| = |u'bv'|$

ou $x = u'bv'uav$.

~~Donc~~ Supposons $|u| = p$, $|v| = q > p$

Donc $uav_1v_2 \dots v_p \in S_a$
$v_{p+1} \dots v_q u'bv' \in S_b$

ou $u'bv'_1 \dots v'_p \in S_b$
$v'_{p+1} \dots v'_q uav \in S_a$.

$\Rightarrow x \in \mathcal{L}(S)$