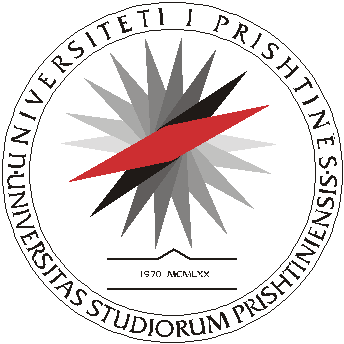
**UNIVERSITETI I PRISHTINËS**

**“Hasan Prishtina”**

**Fakulteti i Shkencave Matematike – Natyrore  
Shkencë Kompjuterike**



**OPTIMIZIMI**

**Studentet: Mentori:**

**Diellza Hoxha Eliot Bytyçi**

**Ardita Abbullahu**

Përmbajtja

[7.1 Normat e Vektorëve dhe Matricave 1](#_Toc452029470)

[Normat e Vektorëve 1](#_Toc452029471)

[Pabarazia për shuma e Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz 4](#_Toc452029472)

[Distanca mes vektorëve në Rn. 5](#_Toc452029473)

[Përkufizimi 7.5 6](#_Toc452029474)

[Teorema 7.6 6](#_Toc452029475)

[Normat e Matricave dhe Distancat 6](#_Toc452029476)

[Perkufizimi 7.8 :Norma e matrices 6](#_Toc452029477)

[Teorema 7.9 6](#_Toc452029478)

[Teorema 7.11 8](#_Toc452029479)

[Pwr kodet 9](#_Toc452029480)

# 7.1 Normat e Vektorëve dhe Matricave

# Normat e Vektorëve

Është dhënë vektori n-dimenzional:1

 x=[x_1; x_2; |; x_n], 

Nje normë gjenerale ‖x‖ e vektorit, që shpesh shenohet me nga dy viza në qoshe, është një normë jonegative

Definicioni 7.1: Një normë e vektorit ‖x‖ eshtë qfarë do pasqyrimi nga Rn  tek R me keto tri veti:

Na është dhënë u ∈Rn  dhe k ∈R:2

1. ||u||≥ 0

2. ||u|| = 0 atëherë dhe vetëm atëherë u = 0.

3. ||ku|| = |k|||u||.

4. ||u + v||≤||u||+||v|| (Triangle Inequality)

Për çdo vektorë u, v ∈ Rn

Normat e vektorit janë mënyra alternative për të matur këtë madhësi dhe norma të ndryshme do të ishin të përshtatshme për detyra të ndryshme. Megjithatë, egzistojnë disa definicione specifike të normave të vektorëve, që zakonisht përdoren. Të gjithave nga ato mund tu tregohet prova se plotësojnë vetitë e normave, dhe definicionet e tyre janë:3

1.Norma L1

=

2. Norma L2(ose norma Euklidiane)

=

3.Norma infinite (ose max-norma)

= { |xi| }

4.(Më pak e përdorshme) Norma Lp

=

Njëra ndër normat e vektorëve që janë më së shumti të përdorshme është norma Euklidiane(ose norma L2)4

=

që mund të kuptohet intuativisht si gjatësia ose madhësi e një vektori . Vetitë e normës L2 mund të interpretohen si:

1.pozitivetiti: gjatësia e një vektori është gjithmonë më e madhe se 0, përveq nese është një 0 vektor

2.Shkallëzueshmëria positive: gjatësia e një produkti scalar të një vektori është gjatësia e një vektori e shumëzuar nga vlera absolute e skalarit

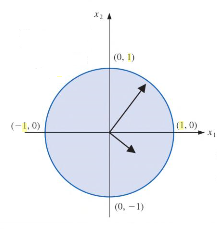
3. Pabarazia e trekëndëshit: gjatësia e një ane të një trekëndëshi është gjithmonë më e vogël se shuma e gjatësisë të dy anëve të tjera të trekëndëshit.

Norma L2 quhet normë Euklidiane e vektorit x, sepse ajo përfaqëson nocionin e zakonshëm e distancës nga origjina në rast se x është në R1 ≡ R,R2,ose R3. Për shembull, norma L2 e vektorit x = (x1, x2, x3)t jep gjatësinë e një vije të drejtë duke u bashkuar me pikat (0,0,0) dhe

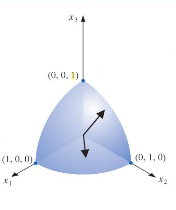
(x1, x2, x3).5

Në këtë figurë tregohen kufijtë e këtyre vektorëve në R2 dhe R3. që kanë normë L2 më pak

se 1.

****

Vektorët në R2 me normën L2 më të vogël se 1 janë brenda kësaj figure.

****

Vektorët në oktant parë të R3 me normë L2 më të vogël se 1 janë brenda kësaj figure.

Shembull:6

Gjeni normën Euklidiane(L2) e vektorit a = (3,-2,1)t:

‖a‖2 = = 3.724

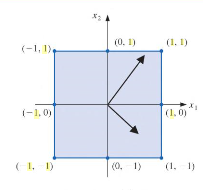
Ndërsa norma infinite(e njohur edhe si norma , max-norma, ose norma uniforme) e një vektori x, shkruhet dhe është e përcaktuar si maksimumi i vlerave absolute të përbërësve të tij:7

= max { |xi| : i = 1,2,…,n }

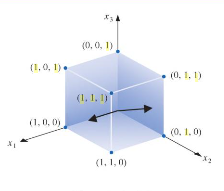
Shembull:

Ështe dhënë vektori v = (1,−4,5)t. Kalkuloni normen infinite:

= = max{|1|,| -4|,|5|} = 5.



Vektorët në R2 me normën më të vogël se 1 janë brenda kësaj figure.



Vektorët në oktant parë të R3 me normë më të vogël se 1 janë brenda kësaj figure.8

# Pabarazia për shuma e Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz

Për ;do x= (x1,x2,...,xn)t dhe y= (y1,y2,...,yn)t in Rn

= 1/2 1/2 = ‖x‖‖y‖.

Prova: 9

Nëse y = 0 ose x = 0, rezultati është i menjëhershëm për shkak se të dy anët e pabarazisë janë zero. Supozojmë se y 0 dhe x 0. Vini re se për çdo ∈ R ne kemi:

,

kështu që

Megjithatë > 0 dhe > 0, andaj mund të lemë = të jap:

2 + = 2

prandaj

2 = 2,

dhe

= 1/2 1/2 .

Me këtë rezultat mund të shohim se për ;do x,y Rn,

+ ,

që jep vetitë e normës:

=.

# Distanca mes vektorëve në Rn.

Në koordinata karteziane, nëse p = (p1, p2, ..., pn)t  dhe q = (q1, q2,..., qn)t janë dy vektorë në Rn, distanca e normave L2 dhe ipen kështu : 10

distanca e normes L2

\begin{align}\mathrm{d}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \mathrm{d}(\mathbf{q},\mathbf{p}) & = \sqrt{(q_1-p_1)^2 + (q_2-p_2)^2 + \cdots + (q_n-p_n)^2} \\[8pt]
& = \sqrt{\sum_{i=1}^n (q_i-p_i)^2}.\end{align}

= ||p-q||2

ndërsa

= { |pi- qi | }

Përkufizimi 7.5 **:** Një sekuencë {x(k)}∞k=1 për vektorët në Rn është thënë se konvergjon në x në lidhje me normën ‖‖ , nëse jepet Ꜫ >0 ku ekziston një integjer N(Ꜫ) si në vijim:

||x(k)-x|| < Ꜫ, për të gjitha k ≥ N(Ꜫ)

Teorema 7.6 **:** Sekuenca e vektorëve {x(k)} konvergjon te x-i në Rn  në lidhje me normën infinit nëse vetëm

= xi  për çfarëdo i=1,2,3,4….n

# Normat e Matricave dhe Distancat

Per ta bërë përcaktimin e një distance në mes të n × n matricave , na nevojitet të përdorim norma. Nëvijim do ti japim disa përkufizime në lidhje me këto norma.

Perkufizimi 7.8 :Norma e matricesnë bashkësinë e gjitha *n* × *n* matricave është funksioni ‖‖ I përkufizuar në këtë bashkësi , I cili plotëson vetitë për gjitha matricat *n* × *n A* dhe *B* dhe gjihë numrat real *α*: 12

1. ||A|| ≥ 0
2. ||A|| = 0 ⬄ A = O(zero matricë)
3. ||λA|| = |λ| ||A||, ku λ ϵ R(C)
4. ||A + B|| ≤ ||A|| + ||B|| , ku A, B ϵ M­n
5. ||AB|| ≤ ||A|| ||B||, ku A, B ϵ M­n

Distanca në ndërmjet n × n matricave *A* dhe *B* në lidhje me këtë norm matricore është ‖𝐴 − 𝐵‖.

Normat matricore mund të merren në mënyra të ndryshme, por një ndër normat që më së shumti përdoren janë norma vektoriale *L2* dhe norma infinit L∞.

Teorema 7.9 **:** Nëse norma është normë vektoriale në Rn, atëherë normë natyralë të një matrice A ϵ Mn quhet funksioni:14

||A|| =

Norma natyrale e matricës definon mënyrën se si matrica e zgjeron vektorin sipas normës përkatëse. Norma Infinit dhe Euklidiane e matricës janë norma natyrale.14

Por rruga për të arritur deri tek norma infinit dhe ajo Euklidiane është si në vijim:

Nisemi për çfarëdo z≠ 0, ku vektori x= z/||z||

= =

Ku si përfundim e shënojmë ||A||=

Dhe duke u bazuar ne normen natyrale atëherë rrjedhimisht norma Infinit do të jetë kështu:

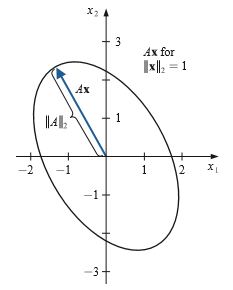
||A||∞ = ∞

Kurse norma Euklidiane :

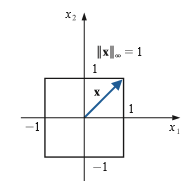
||A||2 = 2

Në libër i kemi disa figura që janë të ilustruara mjaftë mirë për ta kuptuar normën infinit dhe atë Euklidiane:11

Ku norma *L2* ka normën matricore të barabartë me 1 ⟹ ||*X2* ||= 114



Kurse norma L∞ ka normën matricore poashtu të barabartë me 1⟹ ||*X∞*||= 1 14



Teorema 7.11**:** Nëse *A* = *(ai j)* është një matricë *n* × *n* ,atëherë ajo do të jetë e barabartë me: 14

L1-norma matricore definohet me funksionin:

||A||1 =

*L1* -norma llogaritet diferencën në mes dy vektorëve ose matricave : 14

‖𝑥1 − 𝑥2‖1 = ∑|𝑥1𝑖 − 𝑥2𝑖|

L∞-norma matricore definohet me funksionin:11

||A||∞ =

Frobenius norma dallon nga normat tjerat pasi që nuk është normë natyrale përkufizohet për një *n* × *n* matric *A* me:12

||A||F =

Kurse norma Euklidiane është: Normë e një vektori x=(*x*1, *x*2, ..., *xn*) (normë vektoriale) është një funksion  **R***n*  në R që shënohet si në vijim:14

 \left\| \boldsymbol{x} \right\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.

e cila përdoret për matjen e diferencës së vektorit . Edhe te norma *l2* mund ta gjejmë diferencën:11

‖𝑥1 − 𝑥2‖2

Zbatimet**:**

Nw kodin NY ne kemi treguar krahasimin mes rrugws(distancws) qw bwn njw taksi nw rrugwt e Manhattan tw New York dhe njw zogu qw e kalonw po atw rrugw vetwm se nw vijw ajrore.

Kodi pwrbwhet prej 4 metodave. Prej metodws *main*, prej metodws *diferenca*, prej metodws *distancaEuklidiane* dhe prej metodws *distancaMenhetenit*.

Nw metodwn diferenca *diferenca* kemi bwrw zbritjen e dy vektorwve, formulw e cila do tw na nevojitet kur ti gjejmw distancat.

Metoda *distancaEuklidiane* ,wshtw metodw statikedouble dhe ka parametra formal 2 vektorw c, d

public static double distancaEuklidiane(double[] c, double[] d)

ku ipet si fillim njw vlerw double distance=0, qw pasi te japim urdhwrin for qw ka kusht i qw fillon nga zero ,rritet pwr njw deri tek gjatwsia e vektorit m qw wshtw I barabartw me diferencwn e c, d.

pas urdhwrit for distance merr vlerwn sipas formulws.

distanca=distanca + Math.pow(m[i],2);

dhe kthehet rrenja e saj

return Math.sqrt(distanca);

e njejta ndodh edhe tek metoda *distancaMenhetenit* vetwm se vlera double distance merr vlerwn sipas formulws sw distancws sw Menhetenit

distance= distance + Math.abs(k[i])

Nw metodwn *main* krijohet objekti d i klasws NY, thirren metodat *distancaEuklidiane* dhe *distancaMenhetenit*.

Ipet njw mesazh dialog ku tregohet pwr taksin dhe zogun.

Pastaj ipet njw dialog input ku na kwrkohet tw shkruajmw se distancwn e cilit prej tyre dwshirojmw ta dimw.

Nwse kemi zgjedhur taksi ipet distance e taksit, e njejta vlen edhe pwr zogun.Nwse skemi shkuar asgjw ose diqka tjetwr pwrveq kwtyre dyjave atwherw del njw mesazh dialog tjetwr qw na tregon se kemi gabuar.

Kurse zbatim tjeter qe mund ta implementojme ndonje njeren nga formulat e normave te vekotreve dhe matricave është gjetja e ngjyrave te syve ne ndonje klase. Duke filluar se matricat perdoren per ta perfaqesuar te dhenat e botes reale sic jane zakonet apo tiparet e nje popullesie te njerezve.13

Per realizimin e kodit kemi perdorur edhe vargjet por edhe matricat pasi qe lidhen me njesine qe e kemi. Se pari kodi ekzekutohet ne kete menyre ku ne si program e pyesim shfrytesuesin se sa eshte ngjyra e syve me e pranishme tek femrat : ngjyre kafe, zeze, blu , dhe te gjelbert. Ne te njejten menyre pyesim edhe per gjinin e kundert per mashkujt. Ku ne fund me ane te formules Linfinit ne arrijme ta dime maksimumin e vajzave qe kane pasur ndonjeren nga ngjyrat e mesiperme e poashtu edhe te meshkujve.

public static int findLInfinitMatrix(int[][] n)

Me ane te kesaj metode ne arrijme te nxjerrim si perfundim se sa femra se bashku me meshkuj kane po te njejten ngjyre do te thote maksimumin e tyre.

public static int findLInfinitVector(int[] n)  
Kurse me kete metode nxjerrim per secilin nje statistik se sa ka qene numri me i pranishem i vajzave me ndonjeren nga ngjyrat qe programi e pyet shfrytezuesin. E njejta vlen edhe per meshkujt.

Referencat:

1<http://mathworld.wolfram.com/FrobeniusNorm.html>

2 http://www.scs.ryerson.ca/~danziger/mth141/Handouts/vectors.pdf

3http://pages.cs.wisc.edu/~sifakis/courses/cs412s13/lecture\_notes/CS412\_19\_Mar\_2013.pdf

4 Iterative Solutions of Linear Systems

Avalaible at:

<https://www.math.uh.edu/~jingqiu/math4364/iterative_linear_system.pdf>

5<http://ins.sjtu.edu.cn/people/mtang/textbook.pdf>

6[https://rorasa.wordpress.com/2012/05/13/l0-norm-l1-norm-l2-norm-l-infinity- norm/](https://rorasa.wordpress.com/2012/05/13/l0-norm-l1-norm-l2-norm-l-infinity-%20%20%20%20%20norm/)

7 Introduction to numerical analysis, Lecture 14: Linear Algebra, Instructor: Professor Amos Ron, 10/26/10

Avalaible at:

<http://pages.cs.wisc.edu/~amos/412/lecture-notes/lecture14.pdf>

8,9<http://ins.sjtu.edu.cn/people/mtang/textbook.pdf>

10<https://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_distance>

11<http://termin-al.com/1matematke/numerike/matricore/2normatric.html>

12<https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_norm>

13<http://www.mathwarehouse.com/algebra/matrix/real-world-applications-matrix.php>

14Numerical analysis 9th edition